

ÉTUDES SUR L'EMPLOI DE RECOUVREMENTS DE PLAQUES POUR L'ÉTABLISSEMENT DE CATALOGUES PHOTOGRAPHIQUES

P. LACROUTE

Le but de cette étude est la recherche des possibilités et des limites de l'emploi des recouvrements de clichés.

Le travail n'est pas terminé. Un travail plus complet sera publié dans quelques mois.

1. Nature des résultats obtenus avec solution par clichés séparés

Les méthodes de résolution généralement adoptées consistent à calculer pour chaque cliché à l'aide des coordonnées équatoriales des étoiles de repère et des coordonnées α_0, δ_0 , du point tangentiel les 'coordonnées normales' des étoiles de repère, puis à établir des formules reliant les coordonnées normales X, Y aux coordonnées mesurées x, y sur la plaque; $X = x + f(x, y)$; $Y = y + \varphi(x, y)$. On emploiera pour les X, Y et x, y des unités correspondantes. Les paramètres de ces formules sont les 'constantes' des clichés. On applique ces formules aux étoiles de catalogues pour calculer leurs coordonnées normales, puis leurs coordonnées équatoriales. La méthode de calcul établit des relations linéaires entre les coordonnées normales d'une étoile K et les coordonnées normales des étoiles de référence. On a :

$$X_K - x_K = \sum_i [\beta_{iK}(X_i - x_i) + \gamma_{iK}(Y_i - y_i)].$$

Les β_{iK} et γ_{iK} sont les 'dépendances' de la coordonnée de l'étoile K par rapport aux étoiles de repère i . Les β_{iK} et γ_{iK} sont des fonctions des coordonnées mesurées sur la plaque pour les étoiles de repère et l'étoile K . On a $\sum_i \beta_{iK} = 1$ et $\sum_i \gamma_{iK} = 0$. Pour étudier la précision obtenue sur les coordonnées équatoriales, on peut admettre la substitution de $(\alpha - \alpha_0) \cos \delta_0$ à X et $\delta - \delta_0$ à Y . En fait, l'étude est faite sur la précision des X, Y .

Soient ε_1 et ε_2 respectivement les incertitudes aléatoires des coordonnées des étoiles de repère et celles des mesures de coordonnées sur les plaques. Le catalogue de repère est en outre caractérisé par des erreurs systématiques.

$$\Delta\alpha \cos \delta = F(\alpha, \delta) \quad \Delta\delta = \Phi(\alpha, \delta).$$

L'erreur sur X_K calculée est la somme de l'erreur sur x_K mesuré et des erreurs sur les expressions de la forme $\beta_{iK}(X_i - x_i)$. Dans cette expression β_{iK} est déterminé avec

une très bonne précision relative, tandis que $X_i - x_i$ qui est en général faible est déterminé avec une précision relative médiocre. On peut donc négliger les erreurs sur β_{iK} et ne considérer que les erreurs sur $X_i - x_i$.

On peut décomposer les erreurs suivant leur origine.

Il y a d'abord des erreurs systématiques provenant des *erreurs systématiques* du catalogue de repère:

$$\Delta \alpha \cos \delta = \Sigma_i [\beta_{iK} F(\alpha_i, \delta_i) + \gamma_{iK} \Phi(\alpha_i, \delta_i)].$$

On a une sorte de lissage des erreurs systématiques du catalogue de repère, lissage défini par les β_{iK} et γ_{iK} . Ce lissage n'est pas le même en un même point de la sphère obtenu sur deux clichés différents.

On a des erreurs d'*origine aléatoire* qui viennent de la mesure de x_K , des estimations de coordonnées de repère X_i et des mesures des étoiles repères x_i . On peut chiffrer l'amplitude E de ces erreurs d'origine aléatoire:

$$E^2 = \varepsilon_2^2 + \Sigma_i (\beta_{iK}^2 + \gamma_{iK}^2) (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2).$$

Dans cette évaluation, le premier terme ε_2^2 est purement aléatoire.

Le terme en Σ_i représente des erreurs qui varient continuellement sur la plaque comme les dépendances β_{iK} et γ_{iK} . En fait, ce terme Σ_i représente des erreurs d'origine aléatoire, mais à variation systématique sur la plaque. Ces erreurs sont beaucoup plus fâcheuses que des erreurs purement aléatoires. L'ordre de grandeur de ces erreurs peut être évalué en calculant $\Sigma_i (\beta^2 + \gamma^2)$.

En admettant 16 étoiles de repère réparties à densité uniforme sur la plaque, les formules les plus simples pour relier X à x et y ($X = x + ax + by + c$), la valeur quadratique moyenne de $\Sigma_i (\beta^2 + \gamma^2)$ sur la plaque est 0.247.

Ce sont ces erreurs, assez importantes devant l'erreur aléatoire pure inévitable, qu'on pourra réduire en utilisant les recouvrements de clichés.

2. Moyenne de clichés se recouvrant

En pratique, on fait souvent la moyenne des résultats obtenus sur des plaques se recouvrant mais résolus séparément.

Dans ce cas, l'étoile K étant obtenue sur deux clichés j et l on a pour l'erreur systématique:

$$\Delta \alpha \cos \delta = \frac{1}{2} \Sigma_i [(\beta_{iKj} + \beta_{iKl}) F(\alpha_i, \delta_i) + (\gamma_{iKj} + \gamma_{iKl}) \Phi(\alpha_i, \delta_i)]$$

c'est une moyenne des erreurs systématiques du catalogue de repère un peu plus lissée que par clichés isolés.

Pour les erreurs d'origine aléatoire on a:

$$E^2 = \frac{\varepsilon_2^2}{2} + \Sigma_i [(\beta_{iKj} + \beta_{iKl})^2 + (\gamma_{iKj} + \gamma_{iKl})^2] \frac{\varepsilon_1^2}{4} + \Sigma_i [\beta_{iKj}^2 + \beta_{iKl}^2 + \gamma_{iKj}^2 + \gamma_{iKl}^2] \frac{\varepsilon_2^2}{4}.$$

En admettant des clichés qui se recouvrent par quart les mêmes formules et les mêmes étoiles de repère que plus haut, il vient:

$$E^2 = \frac{\varepsilon_2^2}{2} + 0.188 \varepsilon_1^2 + 0.247 \frac{\varepsilon_2^2}{2}.$$

La part systématique d'origine aléatoire est moins réduite que l'erreur purement aléatoire par l'opération de moyenne.

3. Calculs en utilisant les recouvrements de clichés

Les inconnues à adopter sont les α , δ de toutes les étoiles et les constantes des clichés. Suivant une remarque de W. Googe (*Astr. J.*, 72, 1967, 623) la matrice du système de résolution par les moindres carrés peut être aisément réduite à une matrice ne comportant plus que les constantes de clichés comme inconnues.

En fait, on peut même établir directement cette matrice.

On supposera qu'on part d'une solution approchée par clichés isolés basée sur les coordonnées des étoiles de repère.

On dispose donc de coordonnées de première approximation: α_c et δ_c sur chaque cliché. Les α_c et δ_c du premier calcul peuvent être exprimés comme des combinaisons linéaires des α_i et δ_i des étoiles de repère; on a vu leurs 'dépendances' dans la solution par clichés séparés.

On considérera, pour donner un exemple, que les formules de liaison entre X , Y et x , y sont du type le plus simple.

$$\begin{aligned} X &= x + ax + by + c \\ Y &= y + a'x + b'y + c'. \end{aligned}$$

Les inconnues seront les α , δ des étoiles et des corrections δ_a , δ_b , δ_c , $\delta_{a'}$, $\delta_{b'}$, $\delta_{c'}$, aux constantes primitives de clichés.

Les étoiles de repère i , de coordonnées α_{iR} et δ_{iR} fournissent des équations de conditions de type $\alpha_i = \alpha_{iR}$ de poids $\sim \cos^2 \delta / \varepsilon_1^2$.

Chaque étoile, de repère ou non, donne sur chaque cliché une équation de condition contribuant à déterminer les retouches à apporter aux constantes primitives pour obtenir la coordonnée inconnue de l'étoile.

$$\alpha = \alpha_c + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial X} \right) [\delta_a x + \delta_b y + \delta c] + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial Y} \right) [\delta_{a'} x + \delta_{b'} y + \delta_{c'}].$$

Le poids à donner à ces équations est $\sim \cos^2 \delta / \varepsilon_2^2$. C'est le calcul qu'on fera sur un cas concret. Mais on obtient une matrice suffisamment précise pour les évaluations théoriques de précision seulement en négligeant $\partial \alpha / \partial Y$ et en admettant $\partial \alpha / \partial X = 1 / \cos \delta$. Il n'y a pas de problèmes polaires, car on peut traiter la question de précision avec d'autres coordonnées que les coordonnées équatoriales.

On peut établir avec toutes les équations de condition et en réduisant la matrice par élimination des coordonnées inconnues des étoiles, un système de résolution par les moindres carrés, avec au premier membre une matrice A reliant les inconnues X que sont les corrections aux constantes de clichés et au deuxième membre B des combinaisons linéaires connues des α_c et δ_c donc des α_i et δ_i des étoiles du catalogue de repère.

On doit résoudre $AX=B$.

On peut étudier la structure de la solution de ce système en le résolvant par approximations successives. Les termes les plus grands de A sont ceux qui relient les constantes d'un même cliché; soit N la matrice qui groupe ces termes.

On peut inverser aisément N .

On résout $X_1=BN^{-1}$, puis on calcule $B_1=B-AX_1$.

On réitère $X_2=B_1N^{-1}$, puis $B_2=B-A(X_1+X_2)$, etc. ...

Ces calculs peuvent être effectués de façon littérale et à chaque pas on peut calculer les dépendances des termes du vecteur X par rapport aux α_i et δ_i , puis les dépendances entre les α et δ calculés après chaque itération par rapport aux α_i et δ_i .

A partir de ces dépendances, on peut étudier l'incertitude à craindre sur les constantes et l'incertitude à craindre sur les α , δ calculés et ceci à chaque itération. Seule l'étude sur les α , δ calculés a été avancée jusqu'ici et on n'a pas tenu compte des incertitudes sur les dépendances elles-mêmes, c'est-à-dire que les résultats seront probablement à retoucher quand ils sont obtenus avec beaucoup d'itérations. On a travaillé jusqu'ici exclusivement en admettant des recouvrements de clichés par quarts; chaque étoile étant obtenue 2 fois. On a considéré ce que sont les dépendances lorsqu'on fait après achèvement du calcul la moyenne des déterminations sur 2 clichés.

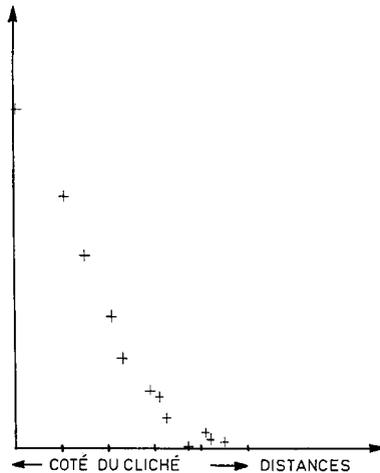


FIG. 1. *Dépendances formules linéaires. $K=3.7$.*

4. Système du catalogue photographique

Les cartes de dépendances, après quelques itérations, montrent en moyenne à partir du point pour lequel on les calcule, une diminution à peu près linéaire des dépendances en fonction de la distance. Ce caractère est indépendant du type des formules reliant les X, Y aux x, y , du nombre des étoiles repères et du rapport K du nombre total des étoiles au nombre des étoiles de repère. Seule l'ouverture de ce cône de dépendance varie; elle est liée à $\Sigma(\beta^2 + \gamma^2)$ et à la densité en étoiles repères. (Voir Figure 1.)

Ce caractère approximatif, très général, montre comment le système du catalogue de repère est lissé quand on établit un catalogue photographique en utilisant les recouvrements de clichés.

Il est ainsi intéressant de pouvoir calculer correctement l'effet sur le catalogue photographique de changements apportés au catalogue de repère.

5. Erreurs systématiques d'origine aléatoire

L'importance de ces erreurs peut être chiffrée par la valeur de $\Sigma(\beta^2 + \gamma^2)$. On a étudié un certain nombre de facteurs:

A. INFLUENCE DES FORMULES DE RÉDUCTION

Il est évident *a priori* que plus on emploie des formules de réduction souples, avec de nombreux paramètres, moins la propagation des dépendances d'un cliché à un autre sera étendue.

On a comparé les cas suivants:

I. Formules linéaires:

$$X = ax + by + c$$

$$Y = a'x + b'y + c'.$$

II. Formules linéaires avec correction du point tangentiel:

$$X = ax + by + c + px^2 + qxy$$

$$Y = a'x + b'y + c' + pxy + qy^2.$$

III. Formules linéaires avec correction du point tangentiel et distorsion inconnue de centre connu:

$$X = ax + by + c + px^2 + qxy + rx(x^2 + y^2)$$

$$Y = a'x + b'y + c' + pxy + qy^2 + ry(x^2 + y^2).$$

IV. Formules linéaires avec correction du point tangentiel et des termes pour dé-

placer le centre d'une correction de distorsion préalablement appliquée au centre:

$$\begin{aligned} X &= ax + by + c + px^2 + qxy + s(3x^2 + y^2) + 2txy \\ Y &= a'x + b'y + c' + pxy + qy^2 + 2sxy + t(x^2 + 3y^2). \end{aligned}$$

V. Formules quadratiques:

$$\begin{aligned} X &= ax + by + c + py^2 + qxy + ry^2 \\ Y &= a'x + b'y + c' + p'x^2 + q'xy + r'y^2. \end{aligned}$$

Pour chacune de ces formules on a admis les recouvrements des clichés par quart, 16 étoiles de repère bien réparties, au total 60 étoiles par cliché ($K=3.7$). On a calculé les sommes des carrés des dépendances, pour les moyennes obtenues sur 2 clichés après différents nombres d'itérations. Ce calcul a été fait pour deux positions types sur les plaques; position *A*, position d'une des étoiles de repère près d'un coin sur un cliché et près du centre sur l'autre, position *B*, position d'une étoile repère près du bord sur les 2 clichés. (Voire Figure 2 et Tableau 1.) On a en outre admis $\Sigma_1 = \Sigma_2$.

On constate que la convergence est bonne.

On voit en outre, ce qui était prévu, que les formules les plus simples, les moins souples, sont les plus efficaces. La diminution du nombre des constantes inconnues joue le rôle principal pour diminuer les incertitudes, mais la forme sous laquelle ces inconnues interviennent compte également.

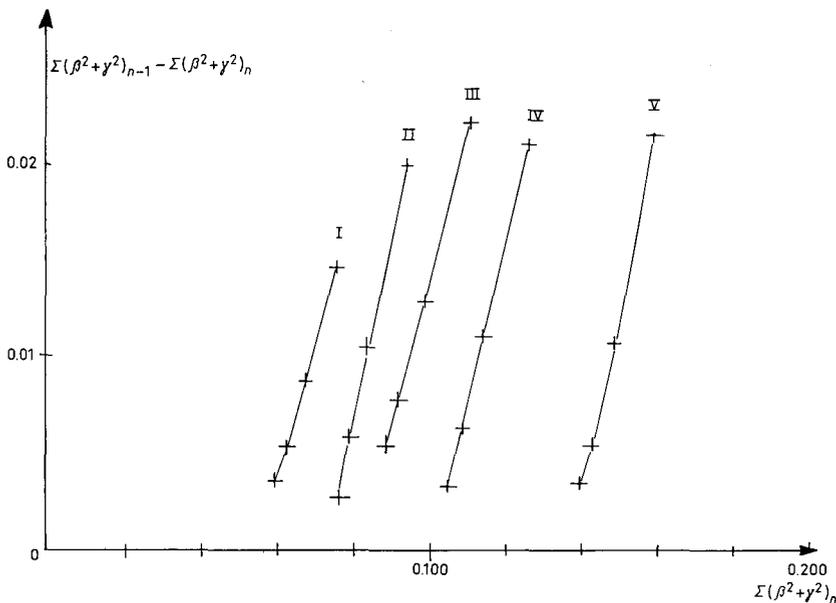


FIG. 2. Convergence, 16 repères. $K=3.7$.

Tableau 1

$$10^4 \Sigma(\beta^2 + \gamma^2)$$

	I		II		III		IV		V	
	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
1er calcul	1397	1461	2001	1753	2386	1879	2868	1823	3078	2578
1ère itération	872	912	1181	1110	1396	1259	1715	1199	1959	1630
2e itération	726	758	967	914	1137	1062	1463	1024	1720	1431
3e itération	644	671	854	812	997	945	1330	932	1603	1335
4e itération	598	622	795	755	920	981	1258	884	1548	1288
5e itération	566	589	773	719	874	837	1209	852	1512	1258

Tableau 2

$$10^4 \frac{\Sigma(\beta^2 + \gamma^2)}{m}$$

cas	I	II	III	IV	V
<i>m</i> inconnues	6	8	9	10	12
1er calcul	237	235	237	234	235
1ère itération	149	143	147	146	149
2e itération	124	118	122	124	132
3e itération	110	104	108	113	122
4e itération	102	97	118	100	108
5e itération	96	93	95	103	115
limite	87	90	88	100	110

Dans le Tableau 2, on donne les $\Sigma(\beta^2 + \gamma^2)$ moyens des types *A* et *B* divisés par le nombre *m* des inconnues dans chacun des cas du Tableau 1.

Pour un même nombre d'inconnues, les formules qui établissent des liens entre les *X*, *Y* et les *x*, *y* avec des inconnues ayant un sens physique sont un peu plus favorables.

Pour pouvoir utiliser des formules moins souples avec un nombre faible d'inconnues, il y a grand intérêt à effectuer avant comparaison des plaques toutes les corrections qu'on peut appliquer de façon automatique au lieu de les faire représenter empiriquement par des termes introduits dans les formules de réduction. Ce sont par exemple, des corrections différentielles de réfraction bien calculables et des corrections de champ, dans la mesure où elles sont constantes.

B. INFLUENCE DE LA PROPORTION DES ÉTOILES DE REPÈRE

Il y a deux problèmes à examiner; le nombre des étoiles de repère par clichés et la proportion des étoiles de repère et des étoiles de catalogue.

1. Nombre des étoiles de repère

On a fait des calculs de $\Sigma(\beta^2 + \gamma^2)$ pour les mêmes formules, type II, la même valeur, $K=3.7$ la moyenne de deux clichés et des nombres d'étoiles de repère, n , différents.

Le Tableau 3 donne le produit par n de la valeur moyenne de $\Sigma(\beta^2 + \gamma^2)$ sur la surface du cliché.

Tableau 3

$n \times \Sigma(\beta^2 + \gamma^2)$

	$n = 16$ repères	$n = 64$ repères
1er calcul	3.002	2.806
1ère itération	1.832	1.645
2e itération	1.504	1.344
3e itération	1.333	1.184
4e itération	1.240	1.101
5e itération	1.194	1.043

On constate que le produit $n \times \Sigma(\beta^2 + \gamma^2)$ est à peu près indépendant de n . On peut retenir cette règle pour effectuer des études ultérieures.

2. Proportion des étoiles de repère et des étoiles de catalogue

Un autre élément important est le rapport du poids de l'ensemble des équations de condition définissant les coordonnées des étoiles au poids total des équations de condition dues aux repères.

Pour discerner l'importance de ce facteur, on a repris le calcul avec 16 étoiles repères, formules linéaires avec correction du point tangentiel type II, moyenne de clichés, mais avec une série de valeurs de K ; depuis $K=1$, qui correspond à des clichés où il n'y aurait que les étoiles de repère, mais où on tiendrait compte des comparaisons entre clichés pour ces étoiles, jusqu'à $K=67$ où le nombre total des étoiles est 67 fois plus grand que celui des étoiles de repère. On a admis $\Sigma_1 = \Sigma_2$.

Le Tableau 4 donne seulement les moyennes de types A et B après chaque itération.

Tableau 4

$\Sigma(\beta^2 + \gamma^2)$ moyens

K	1	3.7	13.7	67
1er calcul	0.1876	0.1876	0.1876	0.1876
1ère itération	0.1363	0.1145	0.1091	0.1076
2e itération	0.1279	0.0940	0.0841	0.0812
3e itération	0.1247	0.0833	0.0707	0.0674
4e itération	0.1237	0.0775	0.0626	0.0585
5e itération	0.1233	0.0746	0.0569	0.0524

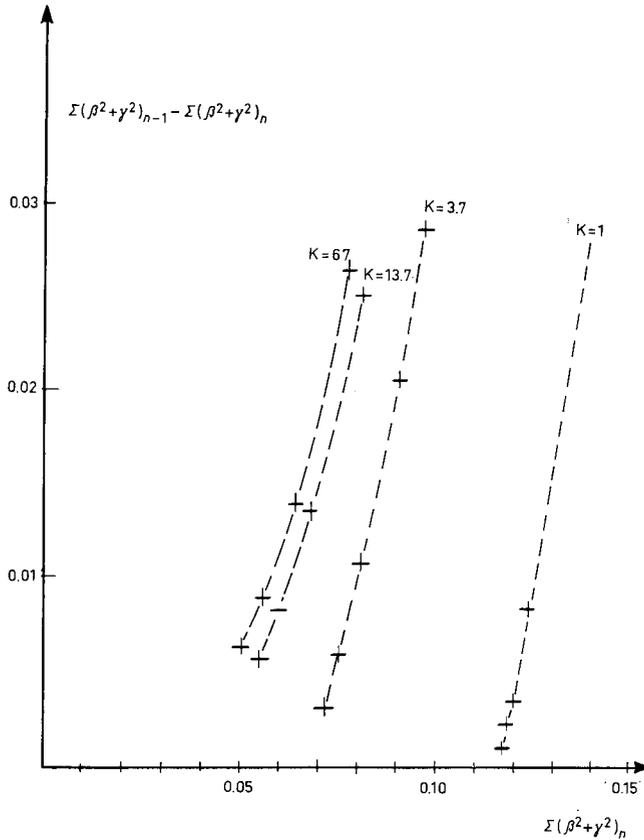


FIG. 3. Convergence. Formules linéaires avec point tangentiel. 16 étoiles de repères.

On a reporté sur un graphique (Figure 3) les différences de valeurs de $\Sigma(\beta^2 + \gamma^2)$ en fonction de $\Sigma(\beta^2 + \gamma^2)_n$ pour les itérations successives et les différentes valeurs de K .

On constate que lorsque K augmente, la convergence est moins rapide, mais l'extension des dépendances est plus large.

Pour $K=1$ et $K=3.7$ après 5 itérations, on voit bien vers quelle limite on tend. Pour $K=13.7$ et $K=67$, il faudrait quelques itérations de plus pour mieux préciser la limite.

On a cherché une relation entre K et la limite. En calculant limite $\Sigma(\beta^2 + \gamma^2) \times \sqrt[3]{K}$ on constate que cette expression n'est pas très variable (v. Tableau 5).

Tableau 5

	$K=1$	$K=3.7$	$K=13.7$	$K=67$
limite $\Sigma(\beta^2 + \gamma^2)$	0.121	0.070	0.040 ?	0.030 ?
limite $\Sigma(\beta^2 + \gamma^2) \times \sqrt[3]{K}$	0.121	0.108	0.096 ?	0.122 ?

6. Problèmes du catalogue de repère

On peut interpréter les résultats ci-dessus au-delà des hypothèses posées pour les établir.

En effet, quand l'expression $K(2\varepsilon_1^2/\varepsilon_2^2 + 1)$ reprend la même valeur la matrice est la même, on aboutit au même calcul de dépendances, et aux mêmes valeurs de $\Sigma(\beta^2 + \gamma^2)$. Etant donnée la variation de $\Sigma(\beta^2 + \gamma^2)$ constatée en fonction de K , on a :

$$\Sigma(\beta^2 + \gamma^2) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{K \left(2 \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2} + 1 \right)}}$$

En désignant par E'^2 la part systématique d'origine aléatoire des erreurs E^2 , on a $E'^2 = \Sigma(\beta^2 + \gamma^2) (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2/2)$.

Il vient :

$$\frac{E'^2}{\varepsilon_2^2} \sim \left(1 + 2 \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2} \right)^{2/3}$$

Cette formule montre l'influence de la qualité du catalogue repère sur les résultats.

En introduisant la notion de travail T exigé pour établir le catalogue de repère ; pour des plaques de dimensions données on a :

$$T \sim \frac{n}{\varepsilon_1^2}$$

En utilisant des résultats antérieurs, notamment le fait que

$$n(\beta^2 + \gamma^2) \sqrt[3]{K \left(2 \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2} + 1 \right)}$$

est à peu près constant pour un type de formule donnée, on peut établir le Tableau 6 et la Figure 4 pour des clichés de 200 étoiles avec des formules de type II, linéaire avec correction du point tangentiel.

Ce tableau et la Figure 4 montrent ce qu'on peut obtenir en utilisant les recouvrements de clichés :

(1) On peut se contenter de catalogues de repère beaucoup moins bon et demandant moins de travail pour obtenir une valeur de E'^2/ε_2^2 donnée.

(2) Dans la mesure où le catalogue est bon, $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, on a intérêt à répartir l'effort sur plus d'étoiles de repère.

Le catalogue AGK2-AGK3 extrapolé des époques 1930-58 vers 1900 sera un catalogue bon en tant que système, mais médiocre au point de vue des erreurs aléatoires ; $\varepsilon_1 \sim 0,4$ et $\varepsilon_1/\varepsilon_2 = 2$.

En utilisant ce catalogue pour la réduction du 'catalogue photographique', si on

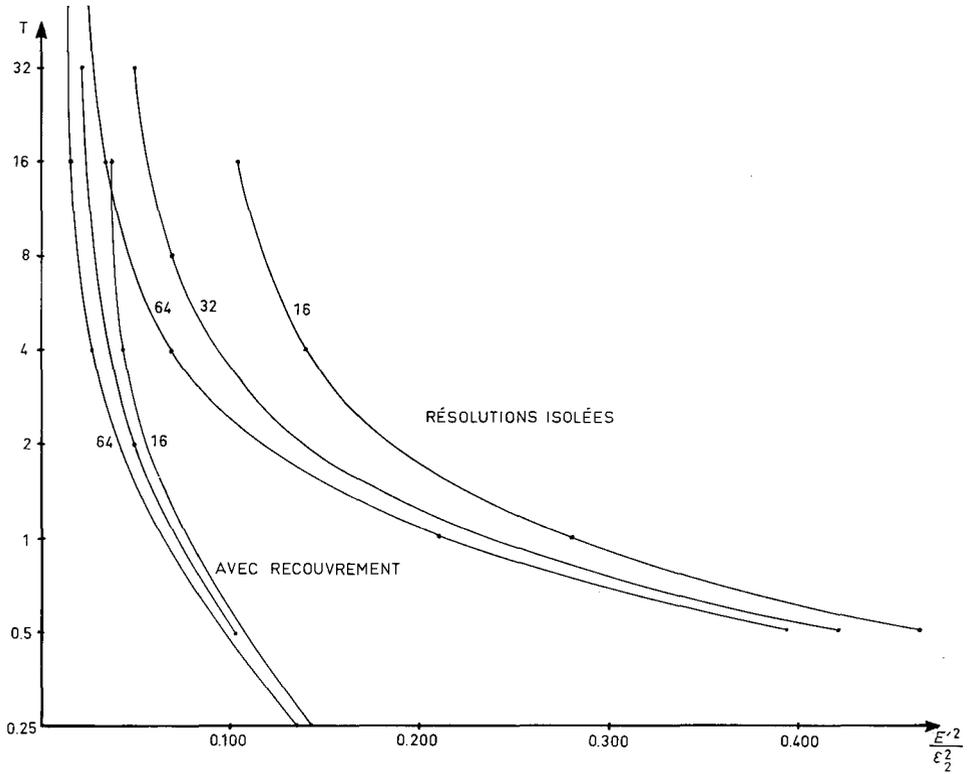


FIG. 4. Cliché de 200 étoiles. 16, 32, 64 étoiles de repères.

Tableau 6
Clichés de 200 étoiles

	$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$	T catalogue de repère	E'^2/ϵ_2^2 ensemble	E'^2/ϵ_2^2 isolés	Facteur de poids dû au recouvrement
16 repères	$\frac{1}{4}$	16	0.038	0.105	2.8
	$\frac{1}{2}$	4	0.044	0.141	3.2
	1	1	0.070	0.281	4.0
32 repères	2	$\frac{1}{4}$	0.146	0.842	5.8
	$\frac{1}{2}$	32	0.0239	0.052	2.2
	1	8	0.0278	0.070	2.5
64 repères	2	2	0.0442	0.140	3.2
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0.092	0.421	4.6
	$\frac{1}{4}$	64	0.0150	0.026	1.7
	$\frac{1}{2}$	16	0.0175	0.035	2.0
	1	4	0.0278	0.070	2.5
	2	1	0.0578	0.211	3.6
	4	$\frac{1}{4}$	0.137	0.778	5.7

exploite les recouvrements de clichés, on diminuera par un facteur 5 environ le carré moyen des erreurs systématiques d'origine aléatoire qui sans cela seraient du même ordre de grandeur que les erreurs aléatoires dues aux mesures individuelles.

7. Choix des astrographes et méthodes d'établissement de catalogues photographiques

A. CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES

Ces travaux sont lourds et doivent être automatisés dans toute la mesure actuellement possible. La détermination des coordonnées des étoiles de repère au méridien constitue une grande partie du travail; il apparaît que le nombre d'heures d'observation à consacrer à ce travail est difficilement compressible. On devra donc, malgré les calculs plus lourds, utiliser les recouvrements de clichés pour réaliser des économies sur le travail d'établissement du catalogue de repère.

Pour automatiser les calculs sans recherches fréquentes individuelles des erreurs, il faut disposer de trois images à mesurer par étoile. Les recouvrements devront être plus larges que ce qu'on fait d'ordinaire. Ceci sera en outre certainement favorable à l'étalement des dépendances, à la convergence du calcul et à la diminution des erreurs aléatoires. Mais on n'a pas encore exactement chiffré tous ces effets.

On devra automatiser la mesure des plaques dans toute la mesure possible; sûrement l'enregistrement des mesures, peut-être aussi les pointés.

B. ASTROGRAPHE

On a vu que l'étalement des dépendances en surface s'évalue en une unité qui est la dimension du cliché et que cet étalement dépend des formules de résolution utilisées. Pour diminuer le travail d'établissement du catalogue de repère, on devra employer des astrographes au champ le plus grand possible dans la mesure où l'augmentation de champ ne diminuerait pas la précision des mesures et n'imposerait pas des formules plus complexes faisant perdre les bénéfices d'augmentation du champ.

Soit S la surface d'un cliché, n le nombre moyen d'étoiles de repère, N le nombre moyen du total des étoiles mesurées, σ et Σ les densités, en étoiles, E' l'incertitude aléatoire sur le système en un point:

$$E'^2 = \Sigma(\beta^2 + \gamma^2) \left(\varepsilon_1^2 + \frac{\varepsilon_2^2}{3} \right).$$

En utilisant les règles de variations de $\Sigma(\beta^2 + \gamma^2)$ qui ont été établies en fonction du nombre m des constantes, de n , et de K dont on a donné plus haut la valeur, en admettant pour le recouvrement par tiers les mêmes réductions de $\Sigma(\beta^2 + \gamma^2)$ que pour

le recouvrement par quart, ce qui est encore à étudier, il vient :

$$\frac{E'^2}{\varepsilon_2^2} = 0.355 \times \frac{m}{S} \times \frac{1}{\sigma^{\frac{2}{3}} \times \Sigma^{1/3}} \times \frac{\frac{1}{3} + \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2}{\sqrt[3]{1 + \frac{2\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2}}}$$

La solution la plus avantageuse pour l'astrographe consistera à prendre la plus faible valeur de $(m/S) \varepsilon_2^2$. Les clichés des télescopes de Schmitt pourraient bien être les plus avantageux.

Pour réduire le nombre de constantes à introduire on devra corriger les clichés avant de les comparer entre eux de toutes les erreurs systématiques connues.

A égalité d'étalement des dépendances, la solution à grand champ serait la plus avantageuse car il y aurait moins de clichés à prendre, on pourrait les prendre plus vite et on risquerait moins l'influence des mouvements propres dans la comparaison.

C. CATALOGUE REPÈRE

Après le choix de l'astrographe, on devra rechercher la densité en étoiles de repère et l'incertitude ε_1 qui permettent d'obtenir la valeur de E' désirée avec le minimum de travail sur le catalogue de repère. Or le travail est: $T = \sigma/\varepsilon_1^2$.

En utilisant la formule précédente qui donne E'^2/ε_2^2 il vient :

$$T = \frac{\varepsilon_2}{E'^3} \left(\frac{0.355 m}{\Sigma^{1/3} \cdot S} \right)^{3/2} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right)^2 \frac{\left[\frac{1}{3} + \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)^2 \right]^{3/2}}{\left[1 + 2 \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)^2 \right]^{1/2}}$$

On constate que le travail diminue toujours quand on augmente $\varepsilon_1/\varepsilon_2$, c'est-à-dire quand on répartit l'effort sur un plus grand nombre d'étoiles de repère :

$(\varepsilon_1/\varepsilon_2)$	1/4	1/2	1	2	∞
Facteur sur T	1.46	1.07	0.90	0.80	0.71

Pour des raisons pratiques, on ne devrait pas descendre en-dessous de trois observations méridiennes par étoile, c'est ce qui fixera $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ ensuite on calculera σ pour obtenir la valeur E'^2 désirée.

L'établissement d'un catalogue de repères comportant peu d'observations sur un grand nombre d'étoiles peut sembler difficilement compatible avec le désir de faire contribuer au travail plusieurs instruments et de pouvoir comparer leurs résultats. Le plus pratique serait que chaque observatoire ait un programme différent avec des étoiles bien mélangées sur la sphère. La comparaison des systèmes aurait lieu après résolution du catalogue photographique qui donnerait une référence commune précise.

D. ORDRE DES TRAVAUX

Quand on résoud des clichés séparément, on doit disposer des positions précises des étoiles de repère avant de faire les solutions. Si on dispose seulement de positions approchées, les calculs seront à reprendre complètement sur chaque cliché.

En résolvant un ensemble de clichés avec l'utilisation des recouvrements, on peut terminer tout le travail à partir des positions approchées des repères. Il restera seulement, quand on aura les positions repères précises, à déterminer des corrections systématiques dont le calcul se fera avec sécurité et qui seront lentement variables en α et δ ; on se basera pour cela sur les liens établis et étudiés entre le système photographique et le système de repère.

8. Calculs effectués sur l'AGK2-AGK3

Monsieur Dieckvoss, de l'Observatoire de Hambourg, nous a communiqué sous forme accessible mécanographiquement :

(1) Des positions α et δ , AGK2 par cliché, ramenées du FK3 au FK4.

(2) Des positions α et δ , AGK3, déduites d'une représentation approximative des clichés, très peu précise.

(3) Des positions d'étoiles de repère α et δ ; AGK2 et AGK3 ramenées au FK4.

Les positions AGK3 sont des positions provisoires déduites des observations de quelques observatoires par F. P. Scott.

Nous avons cherché à apporter des corrections aux constantes de clichés utilisées par Dieckvoss pour les α , δ qu'il nous a communiqués en utilisant en plus des informations apportées par les étoiles de repère, les informations déduites de la comparaison entre les coordonnées d'une même étoile sur des clichés différents.

Pour que la comparaison entre clichés soit plus correcte, nous avons, à partir des positions de Dieckvoss pour époques voisines de 1930 et de 1958, calculé des positions pour les époques exactes 1930·0 et 1958·0, et c'est sur ces positions que nous avons opéré. On a en outre calculé à partir des α , δ , les X , Y et les dérivées partielles

$$\frac{\partial \alpha}{\partial X}; \quad \frac{\partial \alpha}{\partial Y}; \quad \frac{\partial \delta}{\partial X}; \quad \frac{\partial \delta}{\partial Y}.$$

Toute la préparation des données antérieures à l'établissement de la matrice a été effectuée en collaboration avec Monsieur Bacchus.

Les formules prévues par Dieckvoss pour ses résolutions comportaient des termes p et q pour corriger le point tangentiel. Nous avons donc employé les mêmes formules. Cependant, nous avons aussi ajouté un terme fonction de la magnitude, ce qui nous était suggéré comme utile par des expériences antérieures.

Les formules qui relient les coordonnées mesurées x , y et les coordonnées normales

X, Y sont donc:

$$\begin{aligned} X &= ax + by + c + \lambda m + px^2 + qxy \\ Y &= a'x + b'y + c' + \lambda' m + pxy + qy^2. \end{aligned}$$

Soit 10 inconnues.

On a considéré les corrections aux constantes de clichés comme étant les inconnues afin d'éviter le trop grand nombre d'inconnues qu'on aurait obtenu en considérant aussi les α, δ de toutes les étoiles comme inconnus. Il a été fait ainsi parce qu'on n'avait pas vu la possibilité signalée par Goole de réduire la matrice. Les résultats ne sont donc pas les meilleurs possibles, mais l'étude théorique montre qu'ils sont très proches.

Les équations de conditions ont donc été des équations de comparaison entre clichés.

$$\alpha_{Kj} - \alpha_{Kl} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial X} \right) (\delta_a x + \delta_b y + \delta_c + \lambda m + px^2 - qxy) \\ + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial Y} \right) (\delta_{a'} x + \delta_{b'} y + \delta_{c'} + \lambda' m + pxy + qy^2) \end{bmatrix}_{Kl} - \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}_{Kj}.$$

En outre, pour chaque étoile de repère i sur cliché l , on a ajouté une équation de condition du type suivant:

$$\alpha_{iR} = \alpha_{il} + \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial X} \right) (\delta_a x + \delta_b y + \delta_c + \lambda m + px^2 + qxy) \\ + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial Y} \right) (\delta_{a'} x + \delta_{b'} y + \delta_{c'} + \lambda' m + pxy + qy^2) \end{bmatrix}_{il}.$$

On a donné à toutes les équations le même poids car le catalogue de repère utilisé pour l'AGK3 était le catalogue provisoire basé sur un petit nombre d'observations. Ceci revenait à admettre que l'incertitude aléatoire sur la position admise pour une étoile repère est à peu près égale à l'incertitude aléatoire sur la mesure d'une position sur les plaques, de l'ordre de 0".2.

Les plaques sont toutes liées, mais chacune directement seulement avec ses voisines immédiates. On établit le système d'équations normales de la résolution par la méthode des moindres carrés; il y a beaucoup d'inconnues, mais beaucoup de coefficients sont nuls. La solution de ce système $AX=B$, où le vecteur X représente l'ensemble des inconnues, donne un résultat correct au sens des moindres carrés pour les équations admises.

Pour établir le système, on a éliminé toutes les équations qui aboutissaient à des différences $\Delta\alpha$ ou $\Delta\delta$ abusivement grandes, supérieures à 1".2, dues évidemment à des erreurs de mesures, ou d'identification, sans examiner les problèmes posés, n'ayant pas les moyens de le faire. Le système $AX=B$ englobe ainsi 1219 clichés, soit 12190 inconnues.

Le système a été résolu par approximations successives comme il est dit plus haut; on détache de la matrice A la matrice N qu'on obtient en supprimant tous les termes qui relient les constantes appartenant à des clichés différents. La matrice N se décompose en autant de matrices que de clichés et elles sont aisément inversables.

On calcule une première approximation de X , $X; X = N^{-1}B$ puis $B_1 = B - AX_1$; on réitère $X_i = N^{-1}B_{i-1}$ suivi de $B_i = B - A(X_1 + X_2 + \dots)$.

On a ainsi des approximations successives de X :

$$X_1; X_1 + X_2; \text{etc.} \dots X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Faute de capacités des machines on a limité la résolution à un premier groupe de 691 clichés soit 6910 inconnues entre le pôle et $+42^\circ$ de déclinaison en détachant dans le système ce qui concernait cet ensemble de clichés. Le bord est donc mal résolu et devra être repris dans l'ensemble suivant.

On constate que la convergence est très bonne. On donne dans le Tableau 7 les sommes des carrés des termes du 2e membre divisés chacun par les termes diagonaux correspondants de la matrice.

Tableau 7

	$\Sigma_i \left(\frac{b_i^2}{a_{ii}} \right)$	
	1930	1958
<i>Début</i>	38965	110330
1ère itération	10035	46877
2e itération	1419	5268
3e itération	283	273
4e itération	70	159
5e itération	7.0	16.8
6e itération	1.0	4.48
7e itération	0.25	0.50
8e itération	0.058	

En fait, après quelques itérations, les retouches au vecteur X deviennent négligeables.

En se basant sur les comparaisons initiales des α et δ sur les clichés, on peut déterminer une *limite supérieure* de l'incertitude aléatoire des coordonnées des *premières réductions*. On a trouvé pour l'ensemble les chiffres donnés dans le Tableau 8.

Tableau 8

	1930		1958	
	en $\alpha \cos \delta$	en δ	en $\alpha \cos \delta$	en δ
ϵ^2	402	447	957	847 en $(0.01)^2$
ϵ	0.20	0.21	0.31	0.29

Il est certain que les évaluations pour 1958 donnent des nombres trop grands, car les solutions utilisées comme point de départ pour établir la matrice sont des approximations très peu précises. On devrait reprendre ces estimations après application des corrections.

9. Précision des solutions

Il est difficile d'évaluer la précision des solutions obtenues parce qu'on ne peut pas inverser la grande matrice.

On est tenté de penser que l'incertitude sur les estimations successives des termes du vecteur X mesure l'incertitude des constantes de cliché. On peut aisément calculer ces incertitudes en inversant la matrice N .

En fait, ce calcul donne bien l'incertitude des constantes de clichés qui appliquent chaque cliché sur le système d'ensemble. Mais il convient de se rappeler que le système d'ensemble est lui-même soumis à des incertitudes. Si bien que les incertitudes réelles sont sûrement plus grandes que celles ainsi calculées.

Pour les constantes appliquant ainsi les clichés sur le système, le gain en poids est à peu près un facteur $1 + K$, par rapport à la solution par clichés isolés.

On peut faire une étude théorique de l'imprécision des constantes en calculant les dépendances entre chaque constante et les coordonnées admises pour les étoiles de repère. Le calcul est du même genre que celui qui a été fait pour obtenir les dépendances entre les α et δ calculés et les coordonnées admises pour les étoiles de repères. Mais les dépendances ne sont pas les mêmes que pour les α et δ et sont différentes pour chaque constante. Les programmes sont prêts, malheureusement les calculs n'ont pas encore pu être exécutés.

10. Remarques sur les constantes

Les corrections aux constantes qui ont été obtenues appellent peu de remarques.

Cependant, comme on est parti pour l'époque de l'AGK3 de représentations empiriques très peu précises, les corrections aux constantes qui sont calculées sont plus grandes que pour l'AGK2. Dans le cas particulier des constantes p et q , on a obtenu ce que donne le Tableau 9.

Tableau 9

	$\overline{p^2}$	ε_p^2	$\overline{q^2}$	ε_q^2
AGK2	257	70	304	70
AGK3	829	160	770	160

Les valeurs de ε_p^2 et ε_q^2 données ici résultent de l'hypothèse très pessimiste d'un gain en poids par un facteur 3 sur les solutions par clichés isolés.

11. Cas des λ et λ'

Les coefficients de m que nous avons introduits sont un peu moins significatifs, ce qui n'est pas surprenant. L'existence de ces termes qui n'ont pas une valeur moyenne significativement différente de zéro traduit probablement des erreurs de guidage qui pourraient ne pas exister.

On avait évalué les magnitudes en prenant une unité telle que pour $\lambda = 50$ on a un déplacement de 0.05 par magnitude. Dans le Tableau 10 on voit ce qui a été obtenu.

Tableau 10

	$\bar{\lambda}^2$	$\overline{\lambda'^2}$
AGK2	702	779
AGK3	2460	3140

Si on admettait que l'incertitude des λ et λ' est celle qui correspond à l'application des clichés sur le système on aurait :

AGK2	AGK3
$\varepsilon_{\lambda, \lambda'}^2 \sim 300$	~ 640

Les λ et λ' seraient dans l'ensemble nettement significatifs. L'incertitude qui sera calculée est certainement un peu plus grande, mais pas beaucoup.

L'application des corrections aux constantes que nous avons obtenues s'effectue aisément.

On peut comparer l'accord entre clichés avant et après. Cette comparaison n'a de

Tableau 11

Clichés		Nbre de comparaison	$\Delta \alpha \cos \delta (0.01)$	Nbre de comparaison	$\overline{\Delta \delta} (0.01)$
55-03	avant	263	30.4	276	27.3
	après	273	23.2	276	23.6
	facteur sur le poids		> 1.70		1.34
60-29	avant	205	24.1	205	25.2
	après	205	20.0	205	21.5
	facteur sur le poids		1.45		1.37
62-28	avant	205	22.7	205	22.2
	après	210	20.2	210	19.9
	facteur sur le poids		> 1.25		> 1.25
75-23	avant	234	21.9	234	20.3
	après	234	18.7	234	19.7
	facteur sur le poids		1.37		1.06

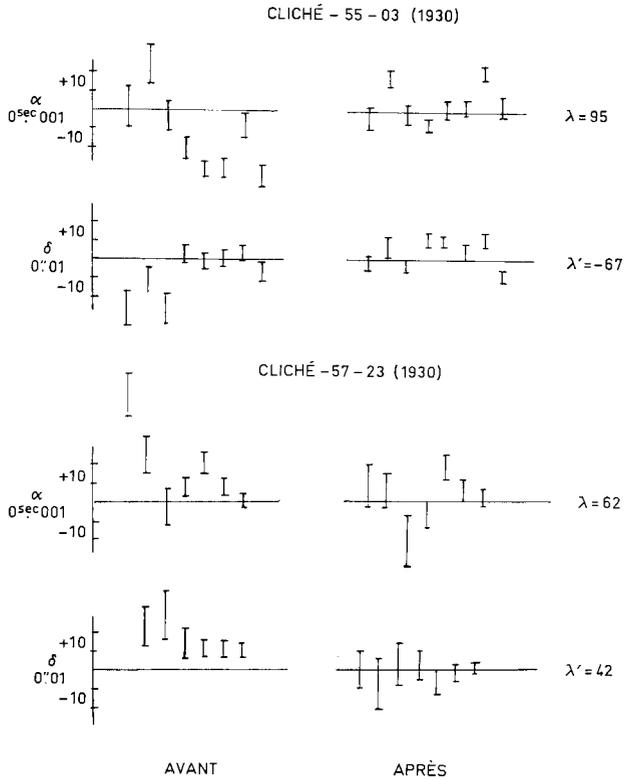


FIG. 5.

sens que pour l'AGK2 dont les premières solutions étaient bonnes en tant que solutions par clichés isolés.

L'étude complète n'a pas encore été faite et on doit se rappeler que les résultats seraient encore meilleurs si le problème avait été posé tout à fait correctement.

On donne (Tableau 11) les valeurs moyennes des écarts avec les clichés voisins après élimination des différences supérieures à $1''2$.

La Figure 5 montre par ailleurs l'utilité des λ . On y a reporté les différences de 2 clichés avec leurs voisins en classant les différences par groupes de demi-magnitude.

Conclusion

L'ajustement des clichés de l'AGK2-AGK3 en utilisant les recouvrements est indubitablement utile.