Can. J. Math., Vol. XXXVIII, No. 6, 1986, pp. 1338-1355

THEOREMES DE BORNAGE POUR L'OPERATEUR DE NEMYCKII DANS LES ESPACES IDEAUX

JÜRGEN APPELL ET ESPEDITO DE PASCALE

0. Introduction. Soit Ω un domaine borné de $\mathbf{R}^N$, et soit $f:\Omega \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction satisfaisant à la condition de Carathéodory (i.e., $f(s, \cdot)$ est continue pour presque tout $s \in \Omega$, et $f(\cdot, u)$ est mesurable pour tout $u \in \mathbf{R}$). Considérons l'opérateur de la superposition

$$(1) \qquad Fx(s) = f(s, x(s)) \quad (s \in \Omega)$$

(encore appelé opérateur de Nemyckii), engendré par la fonction f. Cet opérateur joue un grand rôle dans la théorie des équations intégrales, différentielles (ordinaires et aux dérivées partielles), et fonctionnelles-différentielles, où il est important de connaître les propriétés analytiques et topologiques de F dans certains espaces de fonctions mesurables, intégrables, continues, différentiables, analytiques etc., les propriétés les plus importantes étant : théorèmes de transfert, de continuité, de bornage, et de compacité. Par exemple, on connaît de nombreux résultats sur l'opérateur (1) dans les espaces de Lebesgue L_p (voir **[10]** pour une présentation assez complète); en effet, si l'opérateur (1) envoie une partie de L_p, d'intérieur non vide, dans L_q, alors, il est automatiquement continu et borné sur chaque boule. D'autre part, dans les espaces d'Orlicz la situation est déjà complètement différente (voir, par exemple, **[8]**) : L'opérateur F peut être défini dans une boule de rayon $r \leqq 1$ sans être défini dans tout l'espace, il peut être borné sans être continu, et même continu sans être borné (bien que la continuité de F évidemment implique son bornage local).

Les espaces de Lebesgue et, plus généralement, ceux d'Orlicz sont des exemples particuliers d'espaces appelés *idéaux*, ce sont grosso modo des espaces complets de fonctions mesurables, munis d'une norme monotone. Jusqu'à présent, on ne connaît aucun théorème de transfert de caractère général pour l'opérateur de Nemyckii entre deux espaces idéaux, et on sait très peu sur sa continuité (en se plaçant toujours dans une hypothèse de transfert, voir **[6, 9, 12, 15, 16]**).

Cet article a pour but de présenter quelques théorèmes de bornage pour l'opérateur de Nemyckii entre deux espaces idéaux X et Y (également dans l'hypothèse de transfert $F(X) \subseteq Y$). Il apparaît que le bornage local de

Reçu le 13 fevrier 1984.

https://doi.org/10.4153/CJM-1986-068-3 Published online by Cambridge University Press

$F:X \to Y$ est verifié dans une hypothèse relativement faible sur l'espace Y (voir Théorème 1), tandis que pour son bornage (global) on a besoin d'une condition assez forte pour l'espace X (voir Théorème 2). Nous allons présenter quelques résultats à ce sujet dans les paragraphes 1 et 2. Ensuite, dans les paragraphes 3 et 4, ces résultats seront illustrés pour deux classes importantes d'espaces idéaux, à savoir les espaces de Lorentz (généralisés) et les espaces d'Orlicz (avec ou sans condition Δ_2). Enfin, dans le paragraphe 5, nous nous intéresserons à ce qui se passe quand l'opérateur F envoie chaque boule de X dans une partie de Y qui est même "équi-absolument bornée"; cette propriété est située "entre" la compacité et le bornage et joue un grand rôle dans certaines applications, comme celles qui renvoient à des équations intégrales non linéaires de type Hammerstein [**10**, **18**].

1. Espaces idéaux. Rappelons qu'un espace de Banach X de fonctions mesurables $x:\Omega \to \mathbf{R}$ s'appelle *espace idéal*, si $x \in X$ entraîne $|x| \in X$ et $\| |x| \| = \|x\|$, et si les relations $x \in X$ et $|y(s)| \leqq x(s)$ p.p. dans Ω (y mesurable) impliquent que $y \in X$ et $\|y\| \leqq \|x\|$. Par la suite, nous allons considérer souvent des fonctions sur l'interval $\Omega = (0, 1)$ (muni de la mesure de Lebesgue μ), bien que la plupart de nos résultats soient valables également dans un cadre beaucoup plus général.

Étant donné un espace idéal X, on désigne par X^0 le sous-espace (fermé et séparable) de toutes les fonctions $x \in X$ de norme équi-continue, c'est-à-dire

$$(2) \qquad \lim_{\mu D \to 0} \|P_D x\| = 0,$$

ou on dénote par P_D l'opérateur de la multiplication par la fonction caractéristique χ_D de $D \subseteq \Omega:P_D x(s) := \chi_D(s)x(s)$. Si $X^0 = X$, l'espace X s'appelle *régulier*; dans l'autre cas extrême, si $X^0 = \{0\}$, l'espace X s'appelle *complètement irrégulier*. Si le sous-espace X^0 est seulement dense dans X (par rapport à la convergence en mesure), alors, on appelle X *quasi-régulier*.

Une classe très importante d'espaces idéaux est celle des espaces *symmétriques*; cela veut dire que $x \in X$ entraîne $y \in X$ pour chaque fonction "équi-distribuée" y à x, et $\|y\| = \|x\|$. (Rappelons que deux fonctions x et y sont équi-distribuées, si $n_x(h) = n_y(h)$ pour tout $h > 0$, où

$$(3) \qquad n_x(h) = \mu\{s:s \in \Omega, |x(s)| > h\}.)$$

On dit qu'un espace idéal X *a la norme de Fatou*, si pour chaque suite $(z_m)_m$ d'éléments $z_m \in X$, convergente en mesure vers un élément $z \in X$, on a

$$\|z\| \leqq \varliminf_{m \to \infty} \|z_m\|.$$

On sait que chaque espace régulier X a la norme de Fatou, et chaque espace symmétrique $X \neq L_\infty$ est quasi-régulier. (Pour la démonstration de ces résultats et une présentation de la théorie générale des espaces idéaux voir [**17**].)

Nous allons introduire une autre propriété de la norme d'un espace idéal qui sera importante par la suite de notre article :

Définition. Soit X un espace idéal, et soit r un nombre réel positif. Par $N_X(r)$ nous dénotons le plus petit nombre naturel n tel que, étant donné un élément $x \in X$ de norme $\|x\| \leqq 1$, on puisse trouver une partition $\{\Omega_1, \ldots, \Omega_n\}$ du domaine Ω telle qu'on ait $\|P_{\Omega_i}x\| \leqq r$ pour $i = 1, \ldots, n$. Nous disons que l'espace X *a la norme divisible*, si $N_X(r) < \infty$ pour chaque $r > 0$.

Il faut observer que, dans cette définition, les éléments Ω_i de la partition $\{\Omega_1, \ldots, \Omega_n\}$ dépendent en général de l'élément x, mais leur nombre n dépend seulement du rayon r.

Pour vérifier en pratique la divisibilité de la norme d'un espace donné, par exemple, sur $\Omega = (0, 1)$, il est utile de se servir de "l'opérateur de la contraction" σ_τ $(0 < \tau < 1)$, défini pour $x \in X$ par l'équation

$$(\sigma_\tau x)(t) := \begin{cases} x(t/\tau) & 0 < t < \tau \\ 0 & \tau \leqq t < 1. \end{cases}$$

Cet opérateur (linéaire) a des propriétés assez remarquables (voir [**11**, ch. II, Section 4.3]) : Il est continu dans chaque espace symmétrique (avec $\|\sigma_\tau\| \leqq 1$), et il commute avec le passage au "re-arrangement décroissant"

$$(4) \qquad x^*(t) = \inf\{h : h > 0, n_x(h) \leqq t\}$$

et sa "moyenne intégrale"

$$(5) \qquad x^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t x^*(s)ds,$$

c'est-à-dire, on a

$$(\sigma_\tau x)^* = \sigma_\tau(x^*) \quad \text{et} \quad (\sigma_\tau x)^{**} = \sigma_\tau(x^{**})$$

pour tout $x \in X$.

Le lemme suivant associe la divisibilité de la norme d'un espace symmétrique X au comportement de σ_τ pour les "petites" valeurs de τ :

LEMME 1. *Soit X un espace symmétrique sur $\Omega = (0, 1)$. Si*

$$(6) \qquad \|\sigma_\tau\| \to 0 \quad \textit{lorsque } \tau \to 0,$$

alors X a la norme divisible.

Démonstration. Il suffit de se limiter au cas des fonctions

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \chi_{D_j},$$

parce que ces fonctions sont denses (uniformément) dans chaque espace idéal. Soit donc $||x|| \leqq 1$, et soit $r \in (0, 1)$ fixé. D'après (6), on peut choisir un nombre naturel n tel que

$$||\sigma_{1/n}|| \leqq r.$$

Pour chaque j considérons une partition $\{D_{j,1}, \ldots, D_{j,n}\}$ équi-distante de D_j, i.e.,

$$\mu D_{j,i} = \frac{1}{n}\mu D_j \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Si l'on pose

$$\Omega_i := D_{1,i} \cup D_{2,i} \cup \ldots \quad (i = 1, \ldots, n),$$

alors $\{\Omega_1, \ldots, \Omega_n\}$ est une partition de Ω telle que

$$(P_{\Omega_i}x)^* = (\sigma_{1/n}x)^*;$$

en vue de la symmétrie de X, on a donc

$$||P_{\Omega_i}x|| = ||\sigma_{1/n}x|| \leqq ||\sigma_{1/n}||\, ||x|| \leqq r \quad (i = 1, \ldots, n),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarque 1. La propriété de l'espace X d'avoir la norme divisible rappelle à première vue sa régularité. En réalité, ces deux propriétés sont indépendantes, comme on verra dans les Remarques 8 et 9.

Le résultat qui va suivre sera important pour arriver aux théorèmes de bornage du paragraphe 2 :

LEMME 2. *Soit X un espace avec la norme de Fatou, et soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments $x_n \in X$ avec $||x_n|| > 2^n n$. Alors, on peut trouver une suite $(D_k)_k$ de sous-ensemble disjoints D_k de Ω et une sous-suite $(n_k)_k$ telle que*

$$||P_{D_k}x_{n_k}|| > n_k \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Démonstration. Soit $\{D_{n,1}, \ldots, D_{n,2^n}\}$ une partition équi-distant de Ω (i.e., $\mu D_{n,k} = 2^{-n}$ pour $k = 1, \ldots, 2^n$). On peut trouver

$$k(n) \in \{1, \ldots, 2^n\}$$

tel que

$$||P_{D_{n,k(n)}}x_n|| > n$$

(sinon, on aurait $||x_n|| \leqq 2^n n$); désignon

$$D_{n,k(n)} =: \Omega_n.$$

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $m > n$ posons :

$$K_m := \bigcup_{j=m}^{\infty} \Omega_j, \quad z_m^{(n)} := P_{\Omega_n \setminus K_m} x_n, \quad z^{(n)} := P_{\Omega_n} x_n.$$

Évidemment, la suite $(z_m^{(n)})_m$ est convergente en mesure vers $z^{(n)}$, parce que :

$$\mu\{s : s \in \Omega, |z_m^{(n)}(s) - z^{(n)}(s)| > h\} \leqq \mu(\Omega_n \cap K_m) \leqq \sum_{j=m}^{\infty} 2^{-j}.$$

En utilisant la propriété de Fatou de la norme, on a

$$n < \|P_{\Omega_n} x_n\| = \|z^{(n)}\| \leqq \varliminf_{m \to \infty} \|z_m^{(n)}\|,$$

donc

$$\|P_{\Omega_n \setminus K_{m_n}} x_n\| > n$$

pour quelque nombre $m_n > n$. Il suffit donc de choisir

$$D_1 := \Omega_1 \setminus K_{m_1}, D_2 := \Omega_{m_1} \setminus K_{m_2}, \ldots, D_k := \Omega_{m_{k-1}} \setminus K_{m_k}, \ldots .$$

pour vérifier l'assertion.

2. L'opérateur de Nemyckii. Toutes les fonctions f considérées par la suite seront de Carathéodory. Dans cette hypothèse, l'opérateur de Nemyckii (1) envoie l'espace S de toutes les fonctions mesurables, muni de la métrique

$$d(x, y) := \inf_{h>0} \{h + n_{x-y}(h)\},$$

dans lui-même, et, de plus, il est borné et continu (dans cette métrique, ce qui équivaut à sa continuité en mesure).

Si l'on considère l'opérateur F entre deux espaces idéaux X et Y, la situation devient plus compliquée; en effet, on ne connaît même pas un critère de transfert. C'est ainsi que nous allons nous intéresser aux théorèmes de bornage pour F, en supposant que F envoie l'espace X dans l'espace Y. On vérifiera qu'une norme de Fatou dans Y suffit pour assurer le bornage local de F, et qu'une norme divisible dans X suffit pour garantir même son bornage.

Pour simplifier l'écriture (ce qui, toutefois, ne va pas limiter la généralité) on suppose par la suite que

$$f(s, 0) \equiv 0.$$

De plus, $B_r(X)$ désigne la boule fermée de toutes les fonctions $x \in X$, $\|x\| \leqq r$.

Enfin, il est utile de rappeler une propriété très importante de l'opérateur de Nemyckii, à savoir sa *détermination locale* : Cela veut dire que, donné $D \subseteq \Omega$, on a

$$FP_D x = P_D F x,$$

c'est-à-dire, F commute avec l'opérateur de la multiplication P_D.

Remarque 2. Un opérateur non linéaire F (avec $F(0) = 0$), qui commute avec l'opérateur P_D, est appelé *invariant* dans le travail **[6]**. De plus, un opérateur F est dit *opérateur de type l* ("l-operator") dans **[6]**, s'il existe une fonction monotone $l:[0, \infty] \to [0, \infty]$ telle que $l(0) = 0$, $l(\infty) = \infty$, et

$$\|Fx\| \leqq l(\|FP_D x\|) + l(\|FP_{\Omega \setminus D} x\|)$$

pour chaque $D \subseteq \Omega$. Évidemment, chaque opérateur invariant est un opérateur de type l, mais le réciproque est inéxact. Remarquons que la plupart de nos résultats vaut également pour des opérateurs de type l (comme, par exemple, des opérateurs intégraux de type Hammerstein ou Uryson).

Maintenant, nous allons présenter le premier résultat de bornage local pour l'opérateur de Nemyckii :

THÉORÈME 1. *On suppose que F envoie un espace idéal X dans un espace idéal Y. Si Y a la norme de Fatou, alors, F est localement borné à chaque point $x \in X$.*

Démonstration. Il suffit de montrer le bornage local à l'origine $x = 0$. Si F n'était pas localement borné, alors, on pourrait trouver une suite $(x_n)_n$ dans X telle que

$$\|x_n\| \leqq 2^{-n}, \quad \|Fx_n\| > 2^n n.$$

D'après le Lemme 2, on peut choisir une suite $(D_k)_k$ de sous-ensembles disjoints D_k de telle sorte que

$$\|P_{D_k} F x_{n_k}\| = \|FP_{D_k} x_{n_k}\| > n_k.$$

Posons

$$x := \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{D_k} x_{n_k}.$$

Il est facile de voir que x appartient à l'espace X; d'autre part, on a

$$\|Fx\| \geqq \|P_{D_k} F x\| \geqq \|P_{D_k} F x_{n_k}\| > k,$$

donc $Fx \notin Y$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $F(X) \subseteq Y$.

Remarque 3. En général, les hypothèses du théorème précédent n'impliquent pas le bornage (global) de F; nous en présenterons un contre-exemple un peu plus tard (voir Remarque 9).

Pour passer du bornage local au bornage global de $F:X \to Y$, il faut poser d'autres conditions, soit à la fonction f, soit à l'espace X.

Supposons, par exemple, que f satisfasse à une condition de croissance $(\lambda > 0)$

$$(7) \qquad |f(s, \lambda u)| \leqq a_\lambda(s) + b_\lambda|f(s, u)| \quad ((s, u) \in \Omega \times \mathbf{R})$$

avec $a_\lambda \in Y$, $b_\lambda \geqq 0$; alors, on peut en déduir le bornage de F : En effet, le bornage local implique que

$$\|Fx\| \leqq C \quad (\|x\| \leqq \delta)$$

pour quelques constantes $C, \delta > 0$, et la condition (7) nous donne sur une boule $B_R(X)$ de rayon quelconque

$$\|Fx\| \leqq \|a_{\delta/R}\| + b_{\delta/R}C \quad (\|x\| \leqq R),$$

ce qui montre que F est borné. La condition (7) équivaut plus au moins à la croissance "polynomiale" de la fonction f par rapport à u; cependant, cette condition n'est nullement nécessaire pour le bornage de F (voir Remarque 4).

Une autre possibilité de passer du bornage local au bornage global consiste à fixer des conditions supplémentaires à l'espace X. On peut trouver une condition de ce genre, liée à la continuité de F et à l'éxistence d'une norme "additive" dans X, dans [**14**, Theorem 3]. Un critère assez simple est fourni par le

THÉORÈME 2. *On suppose que F envoie un espace idéal X dans un espace idéal Y. Si X a la norme divisible, et Y a la norme de Fatou, alors F est borné.*

Démonstration. Démontrons que F est borné sur chaque boule $B_R(X)$. D'après le Théorème 1, F est localement borné; il existe donc $r > 0$ tel que

$$\|Fx\| \leqq C \quad (\|x\| \leqq r).$$

Choisissons $n \geqq N_x(r/R)$ (voir la Définition 1); pour tout $x \in B_R(X)$ il y a donc une partition $\{\Omega_1, \dots, \Omega_n\}$ telle que

$$\|P_{\Omega_i}x\| \leqq r \quad (i = 1, \dots, n).$$

Par conséquent,

$$\|Fx\| \leqq \sum_{i=1}^{n} \|P_{\Omega_i}Fx\| = \sum_{i=1}^{n} \|FP_{\Omega_i}x\| \leqq nC,$$

c'est-à-dire,

$$F(B_R(X)) \subseteq B_{nC}(Y).$$

Remarque 4. Les hypothèses du théorème précédent ne sont nullement nécessaires pour le bornage de F. Par exemple, dans l'espace $X = Y = L_\infty$ l'opérateur de Nemyckii est toujours borné : En effet, pour $x \in B_r(L_\infty)$ on a

$$|Fx(s)| = |f(s, x(s))| \leqq \sup_{|u| \leqq r} |f(s, u)| = Fz_r(s)$$

avec une fonction appropriée $z_r \in B_r(L_\infty)$, dont l'existence découle du Lemme de Krasnosel'skij-Ladyzhenskij [7]. Comme la norme $C = \|Fz_r\|$ ne dépend pas de la fonction $x \in B_r(L_\infty)$ (mais seulement du rayon r), on a démontré le bornage de F,

$$F(B_r(L_\infty)) \subseteq B_C(L_\infty),$$

bien que l'espace L_∞ ne satisfasse pas aux conditions du Théorème 2.

L'exemple $X = Y = L_\infty$ montre également que la condition de croissance (7) pour f n'est pas nécessaire pour le bornage de F : En effet, la fonction $f(u) = e^u$, étant de croissance exponentielle, toutefois engendre un opérateur de Nemyckii borné sur chaque boule $B_r(L_\infty)$.

Remarque 5. Remarquons que la Définition 1 est essentiellement équivalente à la définition d'un espace localement uniformément correct, dûe à W. M. Kozlowski [**6**], avec la différence, que Kozlowski exige aussi la régularité de l'espace (appelée "correctness" dans [**6**, Def. 2.5 & 4.2]). Dans [**6**, Theorem 4.3], l'auteur démontre le résultat suivant : Chaque opérateur F de type l (voir Remarque 2), envoyant un sous-ensemble ouvert B d'un espace localement uniformément correct X dans un espace idéal Y, étant borné sur B, admet une continuation bornée à tout X (c'est-à-dire, une continuation bornée sur chaque boule $B_r(X)$). Ce résultat n'implique pas notre Théorème 2 ci-dessus, parce que nous n'avons pas supposé la régularité de X; d'autre part, la démonstration de Kozlowski n'utilise la régularité de X que dans le cas où l'ensemble sous-jacent Ω est de mesure infinie.

Remarque 6. La notion de la norme divisible (équivalent : d'un espace localement uniformément correct) est de grande importance dans la théorie des opérateurs non linéaires analytiques : En effet, si l'opérateur de Nemyckii F (ou quelconque opérateur localement déterminé, voir plus avant) est analytique entre deux espaces idéaux X et Y, dont le premier a la norme divisible, alors F est nécessairement un polynôme [**4**]. Cela veut dire, en particulier, que l'étude des opérateur analytiques dans les espaces d'Orlicz n'est intéressante que dans le cas $M \notin \Delta_2$ (voir le Lemme 3 plus en bas).

Remarque 7. Un autre concept, étroitement lié à la divisibilité de la norme et dû à P. P. Zabrejko [**15**], est celui du Σ_r-*bornage*. Soit X un espace idéal, et soit $r > 0$. On appelle Σ_r-*borné* un ensemble A dans X, s'il existe un nombre naturel $n = n(A)$ tel qu'on puisse associer à chaque $x \in A$ une partition $\{\Omega_1, \ldots, \Omega_n\}$ de Ω de manière que

$$\|P_{\Omega_i} x\| \leqq r \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Si A est Σ_r-borné pour chaque $r > 0$, alors, nous appelons A simplement *Σ-borné*. En comparant cette définition avec la définition de la norme divisible, on voit qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace X ait la norme divisible, est que chaque boule $B_R(X)$ (et, par conséquent, chaque partie bornée A de X) soit Σ-bornée.

Comme dans le Théorème 2, on peut démontrer que, si l'opérateur F est borné sur une boule $B_r(X)$, alors il est également borné sur chaque partie Σ_r-bornée de X. Ce résultat nous permet de donner une démonstration assez banale du fait que le bornage local implique le bornage (global) dans le cas d'une norme divisible (voir le Théorème 2). En effet, si F est localement borné à l'origine (i.e., borné sur une "petite" boule $B_\delta(X)$), alors, il est aussi borné sur chaque partie Σ_δ-bornée de X; d'autre part, en vue de la divisibilité de la norme, chaque partie bornée de X est Σ_δ-bornée.

3. Première application : Les espaces $L_{\phi,q}$. Comme premier exemple, nous allons considérer une généralisation des espaces de Lorentz $L_{p,q}$, qui sont importants dans la théorie d'interpolation des opérateurs linéaires (voir, par exemple, l'exposition [**5**]). Soit $\phi:(0, 1) \to \mathbf{R}$ une fonction continue, non négative, croissante, concave avec $\phi(0+) = 0$. Définissons les espaces $L_{\phi,q}$ $(1 \leqq q < \infty)$ et $L_{\phi,\infty}$ à l'aide de la norme (avec x^{**} d'après (5))

$$(8) \qquad \begin{cases} \|x\|_{\phi,q} := \left[\int_0^1 \phi(t)^{q-1} x^{**}(t)^q d\phi(t)\right]^{1/q} & (q < \infty), \\ \|x\|_{\phi,\infty} := \sup\limits_{0<t<1} \phi(t) x^{**}(t), & (q = \infty), \end{cases}$$

respectivement. En particulier, pour $\phi(t) = t^{1/p}$ on obtient les espaces $L_{p,q}$ et $L_{p,\infty}$; en outre, l'espace $L_{\phi,1}$ coincide avec l'espace de Lorentz Λ_ϕ, et l'espace $L_{\phi,\infty}$ coincide avec l'espace de Marcinkiewicz M_ϕ (voir, par exemple, [**15**, Section 1.2]). Il n'y a aucune difficulté à montrer que la norme $\|\cdot\|_{\phi,q}$ a la propriété de Fatou.

De plus, si l'on suppose l'estimation

$$(9) \qquad \phi(\delta t) \leqq \epsilon \phi(t) \quad (0 < \delta, \epsilon < 1),$$

alors $\|\sigma_\tau\|_{\phi,q} = \phi(\tau)$; par conséquent, la norme $\|\cdot\|_{\phi,q}$ est divisible. La norme $\|\cdot\|_{\phi,\infty}$ est également divisible [**11**], si la fonction ϕ satisfait à la condition (9). Cela veut dire, en particulier, que dans les espaces

$L_{\phi,1} = \Lambda_\phi$, $L_{\phi,q}$ $(1 < q < \infty)$, et $L_{\phi,\infty} = M_\phi$ (avec (9)), les ensembles Σ-bornés coincident avec les ensembles bornés. De cette façon, on arrive à l'application suivante du Théorème 2:

THÉORÈME 3. *Si l'opérateur de Nemyckii F envoie l'espace $L_{\phi,q}$ dans l'espace $L_{\psi,s}$* $(1 \leqq q \leqq \infty,\ 1 \leqq s < \infty)$, *alors il est borné.*

Remarque 8. La condition (9) est sûrement valable pour $\phi(t) = t^{1/p}$. De cette façon, l'espace $L_{p,\infty}$ peut servir d'exemple pour un espace non régulier avec norme divisible: En effet, pour la fonction $x_p(t) = t^{-1/p}$ on a $(0 < \delta < 1)$

$$\|P_{(0,\delta)}x_p\|_{p,\infty} = \|x_p\|_{p,\infty} = \frac{p}{p-1},$$

donc $x_p \in L_{p,\infty} \backslash L^0_{p,\infty}$ (voir (2)). Néanmois, on vérifie aisément que l'espace $L_{p,\infty}$ est quasi-régulier; cet état de fait résulte déjà de sa symmétrie.

Dans la Remarque 9, nous donnerons l'exemple d'un espace régulier sans norme divisible.

4. Deuxième application : Les espaces L_M. Une des classes les plus importantes des espaces symmétriques est donnée par les *espaces d'Orlicz* L_M. Soit $M:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction paire, continue, non négative, convexe, et telle que

$$\lim_{u \to 0} \frac{M(u)}{u} = 0, \quad \lim_{u \to \infty} \frac{M(u)}{u} = \infty.$$

Une fonction mesurable x appartient par définition à l'ensemble L_M si, et seulement si, on a $x \in \Sigma_k$ pour quelque $k > 0$, où

$$(10) \qquad \Sigma_k := \left\{ x:\ \int_\Omega M[x(s)/k]ds < \infty \right\};$$

muni de la norme

$$(11) \qquad \|x\|_M := \inf\left\{ k:k > 0,\ \int_\Omega M[x(s)/k]ds \leqq 1 \right\},$$

l'ensemble L_M est un espace de Banach. Cet espace est particulièrement simple dans le cas, où la fonction M répond à la condition Δ_2 (on écrit : $M \in \Delta_2$), c'est-à-dire : pour $c > 0$, il y a $C > 0$ tel que

$$(12) \qquad M(cu) \leqq CM(u) \quad (u \geqq u_0).$$

Un exemple très simple est donné par la fonction $M(u) = |u|^p$ $(1 < p < \infty)$, pour laquelle l'espace L_M se réduit simplement à l'espace de Lebesgue L_p.

On désigne E_M le sous-espace de toutes les fonctions $x \in L_M$ qui appartiennent à Σ_k pour chaque $k > 0$; cet espace E_M et simplement la clôture de L_∞ dans la norm (11). Dans le même temps, E_M n'est rien d'autre que l'espace L_M^0, et l'on a $E_M = L_M$. (i.e., L_M est régulier) si et seulement si $M \in \Delta_2$. (Pour une présentation très détaillée de la théorie des espaces d'Orlicz et, en particulier, des démonstrations de ces résultats, voir [**8**].)

Notre propos est de trouver des conditions suffisantes pour le bornage de F entre deux espaces d'Orlicz L_M et L_N, en utilisant le Théorème 2. Tout d'abord, nous remarquons que dans l'espace L_M un ensemble A est Σ_r-borné si et seulement si

$$\sup_{x \in A} \int_\Omega M[x(s)/r]ds < \infty.$$

D'une façon générale, on a le

LEMME 3. *L'espace L_M a la norme divisible si et seulement si $M \in \Delta_2$.*

Démonstration. Soit $M \in \Delta_2$ et $\|x\|_M \leqq 1$, alors

$$\int_\Omega M[x(s)]ds \leqq 1.$$

Étant donné $r > 0$, pour $c := 1/r$ dans (12) on peut trouver un nombre naturel n tel que $M(u/r) \leqq nM(u)$. Par conséquent,

$$\int_\Omega M[x(s)/r]ds \leqq n.$$

Grâce à la continuité absolue de la norme dans L_1, pour quelque partition $\{\Omega_1, \ldots, \Omega_n\}$ de Ω on a

$$\int_{\Omega_i} M[x(s)/r]ds \leqq 1 \quad (i = 1, \ldots, n),$$

donc $\|P_{\Omega_i} x\|_M \leqq r$ pour $i = 1, \ldots, n$.

D'autre part, si la norme (11) est divisible, alors

$$\int_\Omega M[cx(s)]ds \leqq \gamma_c$$

pour $\|x\|_M \leqq 1$, donc

$$\int_\Omega M[cx(s)]ds \leqq \gamma_c\left[\int_\Omega M[x(s)]ds + 1\right].$$

Cela veut dire que l'opérateur de Nemyckii, engendré par la fonction $f(v) := M[cM^{-1}(v)]$, est défini et borné dans l'espace L_1. D'après le Théorème de Krasnosel'skij [**10**], on a

$$M[cM^{-1}(v)] \leqq a + b|v|$$

ou bien

$$M(cu) \leqq CM(u) \quad (|u| \geqq u_0),$$

donc $M \in \Delta_2$.

En combinant le lemme précédent avec le Théorème 2, on peut formuler des théorèmes de bornage pour l'opérateur de Nemyckii entre deux espaces d'Orlicz, comme ceux donnés dans [**8**, Section 17.4].

Remarque 9. Il est important de constater que l'opérateur F peut aussi être non borné (mais seulement localement borné) entre deux espaces d'Orlicz, ce qui ne peut pas se produire entre deux espaces de Lebesgue. Par exemple [**8**], si on considère l'opérateur $Fx(s) := \sqrt{M[x(s)]}$ de E_M ($M \notin \Delta_2$) dans L_2, alors F est continu dans tout l'espace E_M, mais F n'est borné sur aucune boule $B_r(E_M)$ de rayon $r > 1$. Cet exemple illustre également l'existence d'un espace régulier sans norme divisible : En effet, l'espace $X = E_M$ est régulier par définition. D'autre part, si X avait la norme divisible, alors l'opérateur F ci-dessus devrait être borné. Pour un autre exemple de ce genre, voir [**6**, p. 96].

5. Bornage équi-absolu. Jusqu'ici, nous avons considéré des conditions (suffisantes) pour que l'image $F(B_r(X))$ de chaque boule de X soit une partie bornée de Y. Maintenant, nous allons renforcer les conditions pour F. Rappelons qu'un ensemble $A \subset X$ s'appelle *équi-absolument borné* (aussi appelé *équi-continu*), si

$$\overline{\lim_{\mu D \to 0}} \sup_{x \in A} \|P_D x\| = 0;$$

de tels ensembles sont nécessairement contenus dans X^0. Il est facile de démontrer que chaque partie compacte $A \subset X^0$ est équi-absolument bornée, et chaque partie équi-absolument bornée est Σ-bornée (donc a fortiori bornée). Pour caractériser les ensembles équi-absolument bornés, on peut utiliser des critères du type De la Vallée-Poussin ([**17**], pour quelques généralisations voir [**3**], pour certaines applications [**1**, **18**]).

Il est naturel d'appeler l'opérateur de Nemyckii $F:X \to Y$ *équi-absolument borné*, s'il envoie chaque ensemble borné de X dans un ensemble équi-absolument borné de Y. Il est clair que la classe des opérateurs équi-absolument bornés est strictement contenue dans celle des opérateurs bornés; le but de ce paragraphe est de caractériser cette classe dans le cas où X et Y sont deux espaces d'Orlicz.

Tout d'abord, rappelons quelques définitions du travail [**3**] (voir également [**13**]). Désignons $L_{M,w}$ (l'espace d'Orlicz *faible*) l'espace vectoriel de toutes les fonctions mesurables x, pour lesquelles

$$(13) \quad n_x(hk) = O(1/M(h)) \quad (h > 0)$$

pour quelque $k > 0$, muni de la "quasi-norme"

$$\|x\|_{M,w} := \inf\{k:k > 0, \sup_{h>0} M(h)n_x(hk) \leqq 1\}$$
$$= \sup_{t>0} \frac{x^*(t)}{M^{-1}(1/t)};$$

en général, ce fonctionel n'est pas une norme, car on a seulement

$$\|x + y\|_{M,w} \leqq 2(\|x\|_{M,w} + \|y\|_{M,w}).$$

En outre, désignons $L_{M,w,0}$ le sous-espace de toutes les fonctions $x \in L_{M,w}$, pour lesquelles

(14) $$n_x(hk) = o(1/M(h)) \quad (h \to \infty)$$

pour quelque $k > 0$; on a donc

$$L_M \subseteq L_{M,w,0} = L^0_{M,w} \subseteq L_{M,w},$$

les deux inclusions, en général, étant strictes (voir **[3]** pour le cas $M(u) = |u|^p$, et **[2]** pour des relations avec d'autres espaces idéaux).

En particulier, appelons par $L_{1,w}$ l'espace de Lebesgue faible, caractérisé par la condition $n_x(h) = O(1/h)$.

LEMME 4. *Si $F:L_1 \to L_1$ est équi-absolument borné, alors, F envoie l'espace $L_{1,w}$ dans l'espace $L^0_{1,w}$.*

Démonstration. Soit F équi-absolument borné dans L_1. En vertu d'un critère classique et bien connu, il existe une fonction continue non négative croissante V telle que

(15) $$\lim_{t\to\infty} V(t)/t = \infty$$

et

$$V[\,|f(s, u)|\,] \leqq a(s) + b|u| \quad ((s, u) \in \Omega \times \mathbf{R}),$$

où $a \in L_1$ et $b \geqq 0$. Soit maintenant $x \in L_{1,w}$ et

$$hn_x(h) \leqq c \quad (h > 0).$$

Étant donné $\epsilon > 0$, d'après (15), il existe $\omega > 0$ tel que

$$V(t) > \frac{2}{\epsilon}(\|a\|_1 + bc)t \quad (t > \omega).$$

Pour h assez grand, on a donc

$$n_{Fx}(h) \leqq n_a\left(\frac{1}{\epsilon}[\,\|a\|_1 + bc]h\right) + n_x\left(\frac{1}{b\epsilon}[\,\|a\|_1 + bc]h\right) \leqq \frac{\epsilon}{h},$$

c'est-à-dire,

$$n_{Fx}(h) = o(h) \quad (h \to \infty).$$

Une question qui se pose maintenant assez naturellement et celle d'étudier la possibilité d'invertir l'assertion du Lemme 4. Le contreexemple qui va suivre montre que la réciproque du Lemme 4 est inexacte.

Par exemple, soit $a \in L^0_{1,w} \backslash L_1$ (l'existence d'une telle fonction est démontrée dans [**3**, Proposizione 3.2], et soit f défini par

$$f(s, u) = \min\{a(s), |u|\}.$$

L'opérateur F est borné dans L_1 (comme $|f(s, u)| \leqq |u|$), et il envoie l'espace $L_{1,w}$ dans l'espace $L^0_{1,w}$ (comme $|f(s, u)| \leqq a(s)$). D'autre part, on vérifie facilement que l'image $F(A)$ de l'ensemble

$$A := \{x: \|x\|_1 \leqq r, |x(s)| \leqq a(s)\} \subseteq B_r(L_1)$$

n'est pas équi-absolument borné dans L_1.

Il apparaît qu'on peut invertir le Lemme 4 en partant d'autres hypothèses (assez fortes) pour la fonction f. Un résultat de ce genre est donné par le

LEMME 5. *On suppose que la fonction $f = f(u)$ ne dépend pas de s, et qu'elle est croissante par rapport à u. Dans ce cas, si F envoie l'espace $L_{1,w}$ dans l'espace $L^0_{1,w}$, alors $F:L_1 \rightarrow L_1$ est équi-absolument borné.*

Démonstration. Considérons la fonction $x_0(t) = 1/t$, qui appartient bien entendu à l'espace $L_{1,w}$. Par hypothèse,

$$y_0 = Fx_0 \in L^0_{1,w};$$

pour $\epsilon > 0$ il existe donc $\omega > 0$ tel que

$$hn_{y_0}(h) \leqq \epsilon \quad (h \geqq \omega),$$

ou bien (après la substitution $h = \epsilon u$)

$$n_{y_0}(\epsilon u) \leqq 1/u \quad (u \geqq \omega/\epsilon),$$

ce qui montre que

$$y_0^*(1/u) \leqq \epsilon u$$

d'après la définition (4). Mais la fonction y_0 est décroissante (en tant que composition de la fonction décroissante x_0 et de la fonction croissante f); on a donc

$$|f(u)| = y_0(1/u) = y_0^*(1/u) \leqq \epsilon|u|$$

pour $|u| \geqq \max\{1, \omega/\epsilon\}$. Nous avons démontrer que

(16) $\quad |f(u)| = o(|u|) \quad (|u| \rightarrow \infty).$

Soit maintenant $r > 0$; montrons le bornage équi-absolu de l'image $F(B_r(L_1))$. En effet, si l'on pose pour $R > 0$

$$C_R := \max_{|u| \leqq R} |f(u)|,$$

et pour $D \subseteq \Omega$ et $x \in B_r(L_1)$

$$D_R(x) := \{s: \quad s \in D, |x(s)| > R\},$$

on obtient pour $R \geqq \omega$ (voir (16))

$$\int_D |Fx(s)|ds = \int_{D_R(x)} |f(s, x(s))|ds + \int_{D\setminus D_R(x)} |f(s, x(s))|ds \leqq \epsilon \int_D |x(s)|ds + C_R \mu D \leqq \epsilon r + C_R \mu D;$$

la norme $\|P_D Fx\|_1$ converge donc vers zéro (uniformement en x), lorsque $\mu D \to 0$.

Passons maintenant au cas de l'opérateur F entre deux espaces d'Orlicz.

THÉORÈME 4. *Soient L_M et L_N deux espaces d'Orlicz, ou $M \in \Delta_2$. Si $F:L_M \to L_N$ est équi-absolument borné, alors F envoie l'espace $L_{M,w}$ dans l'espace $L^0_{N,w}$.*

Démonstration. Posons

$$(17) \quad \phi(s, u) := N\{f[s, M^{-1}(u)]\},$$

et désignons l'opérateur de Nemyckii correspondant par Φ. Tout d'abord, montrons que l'opérateur Φ envoie L_1 dans L_1 : Étant donné $\xi \in L_1$, la fonction

$$x(s) := M^{-1}[\xi(s)]$$

appartient à l'espace L_M; par hypothèse, Fx appartient à l'espace E_N, donc

$$\int_0^1 \Phi\xi(s)ds = \int_0^1 N[Fx(s)]ds < \infty,$$

i.e., $\Phi\xi \in L_1$. Montrons maintenant que l'image $\Phi(B_r(L_1))$ de chaque boule de L_1 est équi-absolument bornée dans L_1. En effet, soit

$$A_r := M^{-1}[B_r(L_1)] = \{x:x(s) = M^{-1}[\xi(s)], \|\xi\|_1 \leqq r\} \subset L_M.$$

Alors, on a $A_r \subseteq B_r(L_M)$ pour $r \geqq 1$, puisque

$$\sup_{x \in A_r} \int_0^1 M[x(s)/r]ds \leqq \frac{1}{r} \sup_{x \in A_r} \int_0^1 M[x(s)]ds = \frac{1}{r} \sup_{\xi \in B_r(L_1)} \int_0^1 |\xi(s)|ds = 1,$$

et $A_r \subseteq B_1(L_M)$ pour $r \leqq 1$, puisque

$$\sup_{x \in A_r} \int_0^1 M[x(s)]ds = \sup_{\xi \in B_r(L_1)} \int_0^1 |\xi(s)|ds = r \leqq 1.$$

Dans tous les cas, l'ensemble $F(A_r)$ est équi-absolument borné dans L_N; pour $\epsilon \in (0, 1)$ il existe donc $\delta > 0$ tel que

$$\sup_{x \in A_r} \|P_D F x\|_N \leqq \epsilon$$

pour $\mu D \leqq \delta$. Le choix $\epsilon < 1$ implique que pour $\mu D \leqq \delta$

$$\frac{1}{\epsilon} \sup_{\xi \in B_r(L_1)} \int_D |\Phi\xi(s)|ds = \frac{1}{\epsilon} \sup_{x \in A_r} \int_D N[Fx(s)]ds$$

$$\leqq \sup_{x \in A_r} \int_D N[Fx(s)/\epsilon]ds \leqq 1,$$

donc

$$\sup_{\xi \in B_r(L_1)} \|P_D \Phi\xi\|_1 \leqq \epsilon \quad (\mu D \leqq \delta).$$

Enfin, montrons l'assertion du théorème. Soit $x \in L_{M,w}$, i.e.,

$$M(h)n_x(hk) \leqq c \quad (h > 0)$$

pour quelque $k > 0$, $c > 0$. La substitution

$$\tau := M(hk), \ \xi(s) := M[x(s)]$$

donne

(18) $\quad M[M^{-1}(\tau)/k]n_\xi(\tau) \leqq c \quad (\tau > 0),$

c'est-à-dire, comme $M \in \Delta_2$

(19) $\quad \tau n_\xi(\tau) \leqq C \quad (\tau > 0)$

pour quelque $C = C(c, k) > 0$. On a donc $\xi \in L_{1,w}$; à la suite de la première partie de la démonstration (et du Lemme 5), on obtient $\Phi\xi \in L^0_{1,w}$. Étant donné $\epsilon > 0$, choisissons $\omega > 0$ tel que

$$\tau n_{\Phi\xi}(\tau) \leqq \epsilon \quad (\tau \geqq \omega),$$

ou bien (après la substitution $\sigma := N^{-1}(\tau)$)

$$N(\sigma)n_{Fx}(\sigma) = \tau n_{Fx}(N^{-1}(\tau))$$

$$= \tau n_{NFx}(\tau) = \tau n_{\Phi\xi}(\tau) \leqq \epsilon \quad (\sigma \geqq N^{-1}(\omega)).$$

Cette dernière inégalité montre que Fx appartient à l'espace $L_{N,w}$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarque 10. En passant de (18) à (19) (i.e., en démontrant le fait que la relation $x \in L_{M,w}$ implique la relation $\xi = M(x) \in L_{1,w}$) nous sommes partis de la condition $M \in \Delta_2$. En effet, on ne peut pas y renoncer, comme on peut le voir par le contre-exemple suivante : Soit $M(u) = e^{u^2} - 1$ (donc $M \notin \Delta_2$), et soit x_α pour $\alpha < 1$ défini par

$$x_\alpha(s) = \sqrt{-\alpha \ln s} \quad (0 < s < 1).$$

Alors $x_\alpha \in L_{M,w}$, parce que, pour $k \geqq \sqrt{\alpha}$, on a

$$M(h)n_{x_\alpha}(hk) \leqq e^{h^2(1-k^2/\alpha)} \leqq 1 \quad (h > 0),$$

donc

$$\|x_\alpha\|_{M,w} \leqq \sqrt{\alpha}.$$

D'autre part, la fonction

$$\xi_\alpha(s) = M[x_\alpha(s)] = s^{-\alpha} - 1$$

n'appartient pas à l'espace $L_{1,w}$, parce que

$$\tau n_\xi(\tau) = \tau(1 + \tau)^{-1/\alpha} \rightarrow \infty \quad (\tau \rightarrow \infty).$$

En conclusion, nous nous contentons d'énoncer une réciproque du Théorème 4, celle-ci correspondant à la réciproque du Lemme 4 dans le Lemme 5, et pouvant être démontrée également à l'aide de la transformation (17) :

THÉORÈME 5. *Soient L_M et L_N deux espaces d'Orlicz, ou $N \in \Delta_2$. On suppose que la fonction $f = f(u)$ ne dépend pas de s, et qu'elle est croissante et paire par rapport à u. Dans ce cas, si F envoie l'espace $L_{M,w}$ dans l'espace $L^0_{N,w}$, alors $F{:}L_M \rightarrow L_N$ est équi-absolument borné.*

Les auteurs remercient le referee pour les utiles remarques et, en particulier, pour avoir attiré leur attention sur le travail [**6**].

BIBLIOGRAPHIE

1. J. Appell, *Deux méthodes topologiques pour la résolution des équations elliptiques non linéaires sans compacité*, Presses Univ. Montréal (1984), 1-12.

2. ——— *Uber eine Klasse symmetrischer idealer Funktionenräume nebst Anwendungen*, Comm. Math. Univ. Carolinae *25* (1984), 337-354.

3. J. Appell et E. De Pascale, *Su alcuni parametri connessi con la misura di non compattezza di Hausdorff in spazi di funzioni misurabili*, Boll. Unione Mat. Ital. *3*-B (1984), 497-515.

4. J. Appell et P. P. Zabrejko, *On analyticity conditions for the superposition operator in ideal function spaces*, Boll. Unione Mat. Ital. *4-C* (1985), 279-295.

5. R. A. Hunt, *On L(p, q) spaces*, Enseignement Math. *12* (1966), 249-276.

6. W. M. Kozlowski, *Non-linear operators in Banach function spaces*, Comm. Math. Prace Mat. *22* (1980), 85-103.

7. M. A. Krasnosel'skij et L. A. Ladyzhenskij, *Conditions for the complete continuity of the P. S. Uryson operator* (Russian), Trudy Moskov. Mat. Obshch. *3* (1954), 307-320.

8. M. A. Krasnosel'skij et Ja. B. Rutitskij, *Convex functions and Orlicz spaces* (Russian), Fizmatgiz, Moskva, 1958 (Engl. transl., Noordhoff, Groningen, 1961).

9. M. A. Krasnosel'skij, Ja. B. Rutitskij et R. M. Sultanov, *On a nonlinear operator which acts in a space of abstract functions* (Russian), Izvestija Akad. Nauk Azerbajdzh. SSR, Ser. Fiz.-Techn. Mat. Nauk *3* (1959), 15-21.

10. M. A. Krasnosel'skij, P. P. Zabrejko, Je. I. Pustyl'nik et P. Je. Sobolevskij, *Integral operators in spaces of summable functions* (Russian), Nauka, Moskva, 1966 (Engl. transl., Noordhoff, Leyden, 1976).

11. S. G. Krejn, Ju. I. Petunin et Je. M. Semjonov, *Interpolation of linear operators* (Russian), Nauka, Moskva (1978).

12. P. M. Obradovich, *On the continuity of the superposition operator* (Russian), Voronezh. Gos. Univ. Probl. Mat. Anal. Slozhn. Sistem *2* (1968), 78-80.

13. Ja. B. Rutitskij, *New criteria for the continuity and complete continuity of integral operators in Orlicz spaces* (Russian), Izvestija Vyssh. Uchebn, Zaved. Mat. *5* (1962), 87-100.

14. S. Yamamuro, *A note on the boundedness property of non-linear operators*, Yokohama Math. J. *10* (1962), 19-23.

15. P. P. Zabrejko, *Nonlinear integral operators* (Russian), Voronezh. Gos. Univ. Trudy Sem. Funk. Anal. *8* (1966), 1-148.

16. ——— *On the theory of integral operators in ideal function spaces* (Russian), Doct. Diss., Voronezh (1968).

17. ——— *Ideal function spaces I* (Russian), Jaroslav. Gos. Univ. Vestnik *8* (1974), 12-52.

18. P. P. Zabrejko et Je. I. Pustyl'nik, *On the continuity and complete continuity of nonlinear integral operators in L_p spaces* (Russian), Uspehi Mat. Nauk *19* (1964), 204-205.

Universität Augsburg,
Augsburg, West Germany;
Università della Calabria,
Arcavacata di Rende, Italy