

SUR CERTAINS ESPACES FIBRÉS PRINCIPAUX DIFFÉRENTIABLES ET HOLOMORPHES

SHINGO MURAKAMI

Le but principal de ce mémoire est d'étudier les espaces fibrés principaux différentiables et holomorphes de groupe abélien connexe ayant pour base une C -variété au sens de Wang [12]. Une C -variété X étant une variété complexe compacte simplement connexe et homogène, X est la base d'un espace fibré principal qui est un groupe de Lie où opère un sous-groupe fermé par les translations à droite comme groupe structural. Pour cette raison, on considère d'abord dans le §1 les espaces fibrés principaux différentiables de groupe abélien connexe A ayant pour base la base X d'un certain espace fibré principal différentiable Y de groupe B . Parmi ces espaces fibrés principaux les plus simples sont ceux qui sont associés à Y par les homomorphismes du groupe B dans le groupe A . On montre que tous les espaces fibrés principaux différentiables qui sont trivialisés par la projection de Y sur X sont de ce type si Y est simplement connexe et si B est un groupe compact. Dans le §2, on donne une classification des espaces fibrés principaux dont la base est une C -variété X et dont le groupe est un groupe de Lie complexe abélien connexe A : Tout espace fibré principal différentiable de base X et de groupe A est sous-jacent à un espace fibré principal holomorphe et, de plus, quand on pose d'après Wang $X = G/U$ où G est un groupe de Lie complexe semi-simple simplement connexe, tout espace fibré holomorphe du type en question est un espace fibré associé à l'espace fibré G de base X et de groupe U par un homomorphisme holomorphe bien déterminé du groupe U dans le groupe A . On étudie enfin, dans le §3, les connexions définies sur les espaces fibrés principaux holomorphes de groupe abélien connexe ayant pour base une C -variété. On y montre en particulier qu'un tel espace fibré principal est trivial si il admet une connexion holomorphe.

Je tiens à exprimer ici toute ma reconnaissance à M. J.-L. Koszul, dont

Received May 1, 1959.

les nombreuses suggestions m'ont grandement aidé et m'ont permis d'améliorer considérablement la rédaction de ce mémoire.

§1. Espaces fibrés principaux différentiables de groupe abélien associés à un espace fibré principal.

1. Dans ce paragraphe, on désignera par A un groupe de Lie abélien connexe. Soit X une variété différentiable. On sait que l'ensemble des classes d'espaces fibrés principaux différentiables de base X et de groupe A peut être identifié avec le premier groupe de cohomologie $H^1(X, \mathbf{A}_d)$ de X (à support fermé) à coefficients dans le faisceau \mathbf{A}_d des germes de fonctions différentiables sur X à valeurs dans A [6]. Supposons maintenant que X est la base d'un espace fibré principal différentiable Y de groupe B , B étant un groupe de Lie quelconque. La projection de Y sur X sera notée q et les opérations de B dans Y seront écrites à droite. Alors la projection $q : Y \rightarrow X$ induit un homomorphisme ρ du groupe $H^1(X, \mathbf{A}_d)$ dans $H^1(Y, \mathbf{A}_d)$. Le noyau de ρ n'est autre que l'ensemble des classes d'espaces fibrés principaux de base X et de groupe A qui sont trivialisés par $q : Y \rightarrow X$. D'autre part, les homomorphismes différentiables du groupe B dans le groupe A forment un groupe abélien $\text{Hom}(B, A)$ de manière évidente. En faisant correspondre à un homomorphisme $f : B \rightarrow A$ la classe des espaces fibrés P associés à Y par f , on a une application θ de $\text{Hom}(B, A)$ dans $H^1(X, \mathbf{A}_d)$. On voit que θ est un homomorphisme du groupe $\text{Hom}(B, A)$ dans le groupe $H^1(X, \mathbf{A}_d)$. En effet, si Y est défini par le système de fonctions de passage $\{g_{UV}\}$ relatif à un recouvrement ouvert $\{U, V, \dots\}$ de X , P est défini par le système de fonctions de passage $f(g_{UV})$ relatif au même recouvrement ouvert de X .

THÉORÈME 1. *Soit Y un espace fibré principal différentiable de base X et de groupe B . Supposons que Y soit simplement connexe et que B soit compact. Alors, la suite*

$$(0) \longrightarrow \text{Hom}(B, A) \xrightarrow{\theta} H^1(X, \mathbf{A}_d) \xrightarrow{\rho} H^1(Y, \mathbf{A}_d)$$

est exacte.

En particulier, sous les mêmes hypothèses du théorème, tout espace fibré principal différentiable P de base X et de groupe A trivialisé par la projection $q : Y \rightarrow X$ est un espace fibré associé à Y par un homomorphisme du groupe

B dans le groupe A qui est bien déterminé par P .

COROLLAIRE 1. *Avec les mêmes conditions que dans le théorème, si $H^2(Y, \mathbf{Z}) = (0)$ pour le faisceau constant \mathbf{Z} dont le groupe est le groupe des nombres entiers, θ est bijectif.*

En effet, puisque le revêtement universel de A est isomorphe à un espace vectoriel réel R^n , il existe une suite exacte

$$(0) \rightarrow \Pi \rightarrow R^n \rightarrow A \rightarrow (0),$$

où Π est un sous-groupe discret de R^n . Designant par Π le faisceau constant sur Y de groupe Π , on a alors la suite exacte de faisceaux sur Y

$$(0) \rightarrow \Pi \rightarrow \mathbf{R}_d^n \rightarrow \mathbf{A}_d \rightarrow (0),$$

et cela définit la suite exacte de cohomologie

$$\cdots \rightarrow H^1(Y, \mathbf{R}_d^n) \rightarrow H^1(Y, \mathbf{A}_d) \rightarrow H^2(Y, \Pi) \rightarrow \cdots.$$

Puisque tout espace fibré principal de groupe R^n est trivial, on a $H^1(Y, \mathbf{R}_d^n) = (0)$. D'autre part, puisque Π est un groupe abélien libre de rang fini, le faisceau Π est somme directe des faisceaux isomorphes à \mathbf{Z} . Par conséquent, d'après l'hypothèse du corollaire, $H^2(Y, \Pi) = (0)$. La suite exacte ci dessus implique alors que $H^1(Y, \mathbf{A}_d) = (0)$ et le corollaire résulte donc de la suite exacte du théorème.

Comme on sait, si K est un groupe de Lie compact simplement connexe, $H^2(K, \mathbf{Z}) = (0)$. Par conséquent, d'après le corollaire 1, on a le

COROLLAIRE 2. *Soit K un groupe de Lie compact simplement connexe et soit B un sous-groupe fermé de K . L'homomorphisme θ de $\text{Hom}(B, A)$ dans $H^1(K/B, \mathbf{A}_d)$, qui est défini par la structure d'espace fibré principal différentiable de base K/B et de groupe B sur K , est bijectif.*

2. Espaces fibrés principaux trivialisés par la projection d'un espace fibré principal. On conserve les notations du § 1.1. Pour la démonstration du Théorème 1 ainsi qu'en vue des paragraphes suivants, on considère ici les espaces fibrés principaux différentiables de groupe A qui sont trivialisés par la projection $q : Y \rightarrow X$. Rappelons d'abord qu'un *facteur* sur Y à valeurs dans A est une fonction différentiable $k(y, s)$ sur le produit $Y \times B$ à valeurs dans A qui vérifie la condition

$$k(y, s)k(ys, t) = k(y, st)$$

quels que soient $y \in Y$ et $s, t \in B$, et que deux facteurs $k(y, s)$, $k'(y, s)$ sont dits *équivalents* si il existe une fonction différentiable r sur Y à valeurs dans A telle que

$$k'(y, s) = r(y)k(y, s)r(ys)^{-1}$$

quels que soient $y \in Y$, $s \in B$. On sait qu'il existe une correspondance bijective entre l'ensemble des classes d'équivalence de facteurs sur Y à valeurs dans A et l'ensemble des classes d'espaces fibrés principaux différentiables de base X et de groupe A qui sont trivialisés par la projection $q : Y \rightarrow X$ [7]. En fait, étant donné un espace fibré principal différentiable P de base X et de groupe A trivialisé par $q : Y \rightarrow X$, tout facteur k correspondant à la classe de P est défini, au moyen d'une application différentiable $q^* : Y \rightarrow P$ qui est compatible avec q (c'est-à-dire, qui vérifie la condition $pq^* = q$, p étant la projection de P sur X), par la formule

$$(1, 1) \quad q^*(ys) = q^*(y)k(y, s)$$

pour $y \in Y$, $s \in B$. Par ailleurs, un facteurs $k(y, s)$ sur Y à valeurs dans A qui ne dépend que de s peut être identifié avec un homomorphisme différentiable f du groupe B dans A , les deux étant liés par la relation $f(s) = k(y, s)$ pour $s \in B$; un espace fibré P dont la classe correspond à la classe de ce facteur est un espace fibré associé à Y par l'homomorphisme $f : B \rightarrow A$ [8]. Il en résulte que, pour que cet espace fibré P soit trivial, il faut et il suffit qu'il existe une fonction différentiable r sur Y à valeurs dans A telle que

$$f(s) = r(y)r(ys)^{-1}$$

quels que soient $y \in Y$, $s \in B$. On remarque que les notions introduites ici pour les espaces fibrés différentiables sont également définies pour les espaces fibrés holomorphes quand on y remplace les mots "différentiable" et "groupe de Lie" par "holomorphe" et "groupe de Lie complexe" respectivement.

Soit P un espace fibré principal différentiable de base X et de groupe A ; la projection de P sur X sera notée p . Supposons que P est trivialisé par la projection $q : Y \rightarrow X$ et qu'un facteur k est défini par (1, 1) au moyen d'une application $q^* : Y \rightarrow P$ compatible avec q . Soit ω une forme de connexion sur l'espace fibré P ; c'est une forme de degré 1 sur P à valeurs dans l'algèbre de

Lie \mathfrak{a} du groupe A .^{1) 2)} On sait que la forme $\eta = \omega q^*$, image réciproque de ω par $q^* : Y \rightarrow P$, est alors une forme sur Y à valeurs dans \mathfrak{a} vérifiant les deux conditions suivantes.

$$(1, 2) \quad \eta((dy)s) - \eta(dy) = k(y, s)^{-1}k(dy, s),$$

$$(1, 3) \quad \eta(yds) = k(y, s)^{-1}k(y, ds)$$

quels que soient $y \in Y$, $s \in B$, où dy (resp. ds) désigne un vecteur tangent quelconque d'origine $y \in Y$ (resp. d'origine $s \in B$). Réciproquement, si une forme η sur Y à valeurs dans \mathfrak{a} vérifie ces deux conditions, il existe une forme de connexion ω sur P telle que $\eta = \omega q^*$ [8]. D'autre part, puisque A est un groupe abélien, la forme $d\omega$ est l'image réciproque Ωp d'une forme Ω de degré 2 sur X à valeurs dans \mathfrak{a} par la projection $p : P \rightarrow X$; Ω est la forme de courbure sur X de la connexion définie par ω . On a alors $\Omega q = \Omega p q^* = (d\omega) q^* = d(\omega q^*)$ et par suite

$$(1, 4) \quad \Omega q = d\eta.$$

Supposons en particulier que P est un espace fibré associé à Y par un homomorphisme $f : B \rightarrow A$; il existe donc une application $q^* : Y \rightarrow P$ compatible avec q qui définit le facteur $k(y, s) = f(s)$ ($y \in Y$, $s \in B$) par la formule (1, 1). Soit γ une forme de connexion sur l'espace fibré principal Y ; c'est une forme de degré 1 sur Y à valeurs dans l'algèbre de Lie \mathfrak{b} du groupe B qui vérifie les conditions $\gamma((dy)s) = \text{ad}(s^{-1})\gamma(dy)$ et $\gamma(yds) = s^{-1}ds$ quels que soient $y \in Y$ et $s \in B$. La forme $\Gamma = d\gamma + [\gamma, \gamma]$ est la forme de courbure sur Y de la connexion définie par γ . Désignant encore par f l'homomorphisme de l'algèbre de Lie \mathfrak{b} dans l'algèbre de Lie \mathfrak{a} induit par $f : B \rightarrow A$, on considère la forme $\eta = f(\gamma)$ sur Y à valeurs dans \mathfrak{a} . On a $\eta((dy)s) = f(\gamma((dy)s)) = f(\text{ad}(s^{-1})\gamma(dy)) = f(\gamma(dy)) = \eta(dy)$, puisque \mathfrak{a} est abélienne; d'autre part, $\eta(yds) = f(\gamma(yds)) = f(s^{-1}ds) = f(s)^{-1}f(ds)$. Par conséquent, la forme η vérifie les conditions (1, 2) et (1, 3). D'après ce qu'on a rappelé plus haut, il existe donc une forme de connexion ω sur P telle que $\eta = \omega q^*$. La connexion de l'espace fibré principal P définie par ω sera dite la connexion de P canoniquement associée à la connexion γ de Y . Par ailleurs, puisque f est un homomorphisme de \mathfrak{b} dans l'algèbre de Lie

¹⁾ Pour les notions concernant les connexions, voir, par exemple, [11].

²⁾ Dans ce mémoire, l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie G est canoniquement identifiée avec l'espace tangent à G en l'élément neutre de G .

abelienne \mathfrak{a} , on a $f(\Gamma) = f(d\gamma) = d(f(\gamma))$. D'après (1, 4), la forme de courbure Ω sur X de la connexion ω vérifie donc la relation suivante.

$$(1, 5) \quad \begin{aligned} \Omega q &= f(\Gamma) \\ &= f(d\gamma). \end{aligned}$$

3. Démonstration du Théorème 1. On montre d'abord que l'homomorphisme θ est injectif. Supposons qu'un élément $f \in \text{Hom}(B, A)$ appartienne au noyau de θ ; cela signifie qu'un espace fibré P associé à Y par l'homomorphisme $f : B \rightarrow A$ est trivial. D'après ce qu'on a vu au § 1.2, il existe alors une fonction différentiable r sur Y à valeurs dans A telle que

$$f(s) = r(y) r(ys)^{-1}$$

quels que soient $y \in Y, s \in B$. Puisque Y est simplement connexe, il existe une fonction différentiable \tilde{r} sur Y à valeurs dans le revêtement universel R^n de A telle que $r = \pi\tilde{r}$, π étant la projection de R^n sur A . On a alors

$$f(s) = \pi(\tilde{r}(y) - \tilde{r}(ys))$$

quels que soient $y \in Y, s \in B$. Pour chaque élément $s \in B$, l'image réciproque de $f(s)$ par π est discrète dans R^n . Puisque Y est connexe, il en résulte que $\tilde{r}(y) - \tilde{r}(ys)$ ne dépend que de s ; on peut donc poser

$$\tilde{f}(s) = \tilde{r}(y) - \tilde{r}(ys)$$

quels que soient $y \in Y, s \in B$. Alors, si $s, t \in B$, $\tilde{f}(st) = (\tilde{r}(y) - \tilde{r}(ys)) + (\tilde{r}(ys) - \tilde{r}(yst)) = \tilde{f}(s) + \tilde{f}(t)$, ce qui montre que \tilde{f} est un homomorphisme du groupe B dans le groupe R^n . Le groupe B étant compact, l'homomorphisme \tilde{f} est trivial. Puisque $f(s) = \pi(\tilde{f}(s))$ pour $s \in B$, l'homomorphisme $f : B \rightarrow A$ est donc trivial, ce qui démontre l'injectivité de θ .

Il reste à montrer que l'image de θ coïncide avec le noyau de ρ . D'après les définitions de θ et de ρ , il suffit de démontrer qu'un espace fibré principal P de base X et de groupe A trivialisé par $q : Y \rightarrow X$ est un espace fibré associé à Y par un homomorphisme du groupe B dans le groupe A . On choisit une forme de connexion ω sur P . Soit Ω la forme de courbure sur X de la connexion ω . D'après (1, 4), on a $\Omega q = d\eta$, où η est l'image réciproque ωq^* de la forme ω par une application $q^* : Y \rightarrow P$ compatible avec q . Puisque la forme Ωq est invariante par les opérations du groupe compact B dans Y , il existe

alors une forme η_1 invariante par B sur Y , à valeurs dans \mathfrak{a} , telle que $\Omega q = d\eta_1$ [5]. La forme $\zeta = \eta_1 - \eta$ est une forme fermée sur Y à valeurs dans \mathfrak{a} ; $d\zeta = 0$. Puisque Y est simplement connexe, la forme ζ est donc la différentielle $d\tilde{r}$ d'une fonction différentiable \tilde{r} sur Y à valeurs dans \mathfrak{a} . Posons $r(y) = \exp(\tilde{r}(y))$ pour $y \in Y$, \exp étant l'application exponentielle de \mathfrak{a} dans A . La fonction différentiable r sur Y à valeurs dans A ainsi définie vérifie la relation

$$r(y)^{-1}r(dy) = \zeta(dy)$$

quel que soit $y \in Y$. On définit maintenant une application $q_1^* : Y \rightarrow P$ compatible avec q en posant :

$$q_1^*(y) = q^*(y)r(y)$$

pour $y \in Y$. Alors, $(\omega q_1^*)(dy) = \omega(q^*(dy)r(y) + q^*(y)r(dy)) = \eta(dy) + \zeta(dy) = \eta_1(dy)$, ce qui montre que $\eta_1 = \omega q_1^*$. Un facteur $k(y, s)$ correspondant à la classe de P étant défini au moyen de l'application $q_1^* : Y \rightarrow P$ par la formule (1, 1), ce facteur $k(y, s)$ et la forme η_1 vérifient les conditions (1, 2) et (1, 3). Puisque la forme η_1 est invariante par B , il résulte de (1, 2) que $k(dy, s) = 0$ quels que soient $y \in Y$ et $s \in B$. Comme Y est connexe, cela démontre que le facteur $k(y, s)$ ne dépend que de s ; par conséquent, P est un espace fibré associé à Y par l'homomorphisme $f : B \rightarrow A$ défini par $f(s) = k(y, s)$. Le Théorème 1 est ainsi démontré.

§ 2. Espaces fibrés principaux holomorphes de groupe abélien ayant pour base une \mathbb{C} -variété

1. Dans les paragraphes suivants A désignera un groupe de Lie complexe abélien connexe. Le revêtement universel de A est isomorphe, comme groupe de Lie complexe, à un espace vectoriel complexe \mathbb{C}^m de dimension m . On a donc la suite exacte

$$(2, 1) \quad (0) \longrightarrow \Pi \xrightarrow{\iota} \mathbb{C}^m \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow (0),$$

où Π est un sous-groupe discret de \mathbb{C}^m et où ι est l'injection de Π dans \mathbb{C}^m ; $\pi : \mathbb{C}^m \rightarrow A$ est un homomorphisme holomorphe de \mathbb{C}^m sur A .

Soit X une variété complexe. On désignera par \mathbf{A}_d (resp. \mathbf{A}_h) le faisceau des germes de fonctions différentiables (resp. holomorphes) sur X à valeurs dans A . On a les homomorphismes canoniques de faisceaux $\mu : \mathbf{A}_h \rightarrow \mathbf{A}_d$ et $\tilde{\mu} : \mathbb{C}_h^m \rightarrow \mathbb{C}_d^m$. Désignons par $\mathbf{\Pi}$ le faisceau constant de groupe Π sur X . La

suite exacte (2, 1) et les homomorphismes $\mu, \tilde{\nu}$ définissent le diagramme commutatif

$$\begin{CD} (0) @>>> \Pi @>{\iota_h}>> \mathbf{C}_h^m @>{\pi_h}>> \mathbf{A}_h @>>> (0) \\ @. @VV{\text{id}}V @VV{\tilde{\mu}}V @VV{\mu}V @. \\ (0) @>>> \Pi @>{\iota_d}>> \mathbf{C}_d^m @>{\pi_d}>> \mathbf{A}_d @>>> (0), \end{CD}$$

où les deux lignes sont des suites exactes. (On désigne par id l'application identique). Ce diagramme implique alors le diagramme commutatif suivant concernant les groupes de cohomologie de X (à support fermé) à coefficients dans ces faisceaux.

$$\begin{CD} \cdots @>>> H^1(X, \Pi) @>{\iota_h^1}>> H^1(X, \mathbf{C}_h^m) @>{\pi_h^1}>> H^1(X, \mathbf{A}_h) @>{\delta_h^1}>> H^2(X, \Pi) @>{\iota_h^2}>> H^2(X, \mathbf{C}_h^m) @>>> \cdots \\ @. @VV{\text{id}}V @VV{\tilde{\mu}^1}V @VV{\mu^1}V @VV{\text{id}}V @VV{\tilde{\mu}^2}V @. \\ \cdots @>>> H^1(X, \Pi) @>{\iota_d^1}>> H^1(X, \mathbf{C}_d^m) @>{\pi_d^1}>> H^1(X, \mathbf{A}_d) @>{\delta_d^1}>> H^2(X, \Pi) @>{\iota_d^2}>> H^2(X, \mathbf{C}_d^m) @>>> \cdots \end{CD}$$

Les deux lignes de ce diagramme sont des suites exactes. Or, on sait que le faisceau \mathbf{C}_d^m est fin et que le groupe $H^r(X, \mathbf{C}_d^m)$ est donc nul pour tout entier $r > 0$ [6]. D'après le diagramme, il en résulte que δ_d^1 est bijectif; par conséquent, le noyau de μ^1 coïncide avec le noyau de δ_h^1 et l'image de μ^1 coïncide avec le noyau de $\iota_h^2 \delta_d^1$. Supposons que X soit simplement connexe. Puisque Π est un groupe abélien libre de rang fini, on a alors $H^1(X, \Pi) = (0)$ et π_h^1 est donc injectif. On a ainsi le lemme suivant.

LEMME 1. *Si X est une variété complexe simplement connexe, la suite*

$$(0) \longrightarrow H^1(X, \mathbf{C}_h^m) \xrightarrow{\pi_h^1} H^1(X, \mathbf{A}_h) \xrightarrow{\mu^1} H^1(X, \mathbf{A}_d) \xrightarrow{\iota_h^2 \delta_d^1} H^2(X, \mathbf{C}_h^m)$$

est exacte.

Quand on identifie le groupe $H^1(X, \mathbf{A}_h)$ (resp. $H^1(X, \mathbf{A}_d)$) avec l'ensemble des classes d'espaces fibrés principaux holomorphes (resp. différentiables) de base X et de groupe A , l'homomorphisme μ^1 est induit par l'application qui fait correspondre à un espace fibré principal holomorphe P l'espace fibré différentiable sous-jacent à P ; de même, l'homomorphisme π_h^1 est défini par l'application qui fait correspondre à chaque espace fibré principal holomorphe P de base X et de groupe C^m la classe des espaces fibrés de groupe A associé à \dot{P}

par l'homomorphisme $\pi : \mathbf{C}^m \rightarrow A$.

Une C -variété X est une variété complexe compacte simplement connexe sur laquelle le groupe des homéomorphismes holomorphes de X opère de manière transitive [12].

THÉORÈME 2. *Soit X une C -variété. Alors, la suite*

$$(0) \longrightarrow H^1(X, \mathbf{C}_h^m) \xrightarrow{\pi_h^1} H^1(X, \mathbf{A}_h) \xrightarrow{\mu^1} H^1(X, \mathbf{A}_d) \longrightarrow (0)$$

est exacte.

COROLLAIRE. *Si X est une C -variété kaehlérienne, alors l'homomorphisme μ^1 de $H^1(X, \mathbf{A}_h)$ dans $H^1(X, \mathbf{A}_d)$ est bijectif.*

Le Théorème 2 et son corollaire impliquent en particulier que tout espace fibré principal différentiable P de groupe A ayant pour base une C -variété X est sous-jacent à un espace fibré principal holomorphe de base X et de groupe A et que, si X est kaehlérienne, la structure de ce dernier est bien déterminée par P .

Le corollaire résulte immédiatement du Théorème 2; en effet, si X est une variété compacte kaehlérienne simplement connexe, $\dim H^1(X, \mathbf{C}_h^m) = \frac{1}{2} \dim H^1(X, \mathbf{C}^m) = 0$ où \mathbf{C}^m désigne le faisceau constant de groupe \mathbf{C}^m sur X [6]. Remarquons que le corollaire résulte plus directement d'un résultat de Borel-Horzebruch et de Bott [3]; d'après eux, $H^r(X, \mathbf{C}_h^m) = 0$ pour $r > 0$ et le Lemme 1 implique que μ_t est bijectif.

Dans la suite, on désignera toujours par X une C -variété. On sait que le plus grand groupe connexe $\text{Aut}(X)^\circ$ des homéomorphismes holomorphes de X muni de la topologie compacts-ouverts est un groupe de Lie complexe réductif qui opère holomorphiquement sur X de manière transitive. Puisque un sous-groupe de Lie semi-simple maximal $G'(X)$ de $\text{Aut}(X)^\circ$ est alors le sous-groupe des commutateurs de $\text{Aut}(X)^\circ$, $G'(X)$ est un groupe de Lie déterminé par X . Le groupe $G'(X)$ opère transitivement sur X . Soit $G(X)$ le revêtement universel de $G'(X)$. Alors, le groupe $G(X)$ est un groupe de Lie complexe semi-simple, déterminé par X , qui opère holomorphiquement sur X de manière transitive et presque effective [12].

Soit plus généralement G un groupe de Lie complexe semi-simple simplement connexe qui opère holomorphiquement sur X de manière transitive et

presque effective. Choisissons un point $x_0 \in X$. Soit U le sous-groupe de stabilité de G en ce point x_0 ; U est un sous-groupe de Lie complexe fermé de G . L'application q de G sur X définie par

$$q(y) = yx_0 \quad \text{pour } y \in G$$

et les translations à droite de G par les éléments de U définissent sur G une structure d'espace fibré principal holomorphe de base X de groupe U et de projection q . Comme au §1.1, on a alors l'homomorphisme θ_h du groupe $\text{Hom}_h(U, A)$ des homomorphismes holomorphes de U dans A dans le groupe $H^1(X, \mathbb{A}_h)$; θ_h fait correspondre à un élément $F \in \text{Hom}_h(U, A)$ la classe des espaces fibés holomorphes associés à l'espace fibré G par $F : U \rightarrow A$.

THÉORÈME 3. *Soit X une C -variété et soit G un groupe de Lie complexe semi-simple simplement connexe qui opère holomorphiquement sur X de manière transitive et presque effective. Soit U le sous-groupe de stabilité de G en un point $x_0 \in X$; on considère G comme espace fibré principal holomorphe de base X et de groupe U opérant par les translations à droite. Alors, l'homomorphisme θ_h du groupe $\text{Hom}_h(U, A)$ dans le groupe $H^1(X, \mathbb{A}_h)$ est bijectif.*

Si l'on prend pour G le groupe $G(X)$ défini ci-dessus, l'énoncé du Théorème 3 concerne uniquement la variété X . Par ailleurs, ce théorème dit que tout espace fibré principal holomorphe P de base X et de groupe A est associé à l'espace fibré G par un homomorphisme de U dans A bien déterminé par P .

Les Théorèmes 2 et 3 seront démontrés au §2.3

2. Quelques conséquences des résultats de Wang. Soient X, G, U, x_0, q comme dans la section précédente. Soit K un sous-groupe compact maximal de G ; c'est un groupe de Lie compact semi-simple simplement connexe. Il résulte d'un théorème de Montgomery [9] que le sous-groupe K de G opère transitivement sur X ; le groupe U étant le sous-groupe de stabilité de G en le point $x_0 \in X$, $B = U \cap K$ est le sous-groupe de stabilité de K en ce point x_0 . Puisque X est simplement connexe, il en résulte que les groupes U et B sont simplement connexes. Par ailleurs, l'application $q : G \rightarrow X$ et sa restriction à K induisent les identifications canoniques entre les variétés complexes $X, G/U$ et la variété réelle K/B . Pour simplifier l'écriture, on exprime cette situation par la formule

$$(2, 2) \quad X = G/U = K/B.$$

L'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G est une algèbre de Lie complexe semi-simple.³⁾ Étant donnée une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{g} , le système de racines de \mathfrak{g} par rapport à \mathfrak{h} sera noté S , et la décomposition de Cartan de \mathfrak{g} par rapport à \mathfrak{h}

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in S} \{e_\alpha\}^c \quad (4)$$

sera toujours prise de la manière que l'espace réel

$$(2, 3) \quad \mathfrak{k} = \mathfrak{h}_k + \sum_{\alpha \in S} \{u_\alpha\}^r + \sum_{\alpha \in S} \{v_\alpha\}^r,$$

où $\mathfrak{h}_k = \{h; h \in \mathfrak{h}, \alpha(h) = -\alpha(h) \text{ pour tout } \alpha \in S\}$ et où $u_\alpha = e_\alpha + e_{-\alpha}$, $v_\alpha = i(e_\alpha - e_{-\alpha})$, soit une algèbre de Lie semi-simple compacte. Dans ce cas, le sous-groupe K de G qui correspond à $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ est un sous-groupe compact maximal de G .

D'après Wang [12], par un choix convenable d'une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} et d'une décomposition de Cartan par rapport à \mathfrak{h} , la situation de la sous-algèbre \mathfrak{u} de \mathfrak{g} définie par U est représentée à la façon suivante. Il existe une partition du système de racines S en trois parties disjointes S_0, S_+, S_- avec les propriétés suivantes: (i) si $\alpha, \beta \in S_0$ et si $\alpha + \beta \in S$, alors $\alpha + \beta \in S_0$, (ii) si $\alpha \in S_0 \cup S_+, \beta \in S_+$ et si $\alpha + \beta \in S$, alors $\alpha + \beta \in S_+$ et (iii) $\alpha \in S_+$ si et seulement si $-\alpha \in S_-$.⁵⁾ Soit \mathfrak{h}_s le sous-espace complexe de \mathfrak{h} engendré par $h_\alpha = [e_\alpha, e_{-\alpha}]$ avec $\alpha \in S_0$ et soit $\mathfrak{h}_0 = \{h; h \in \mathfrak{h}, \alpha(h) = 0 \text{ pour toute } \alpha \in S_0\}$; \mathfrak{h} est la somme directe $\mathfrak{h}_s + \mathfrak{h}_0$. Il existe de plus une décomposition de \mathfrak{h}_0 en somme directe de deux espaces rationnels (intersections des hyperplans définis par des racines)

$$\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_z + \mathfrak{h}_w, \quad \mathfrak{h}_z \cap \mathfrak{h}_w = (0),$$

et un sous-espace complexe $\mathfrak{w} \subset \mathfrak{h}_w$ tel que

$$\mathfrak{h}_w = \mathfrak{w} + \bar{\mathfrak{w}}, \quad \mathfrak{w} \cap \bar{\mathfrak{w}} = (0),$$

où $\bar{}$ signifie la conjugaison de \mathfrak{g} par rapport à \mathfrak{k} . Cela donné, on a :

³⁾ On utilisera, dans la suite, des résultats fondamentaux dans la théorie des groupe de Lie et des algèbres de Lie; pour cela, voir [13] par exemple.

⁴⁾ Si $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$, \mathfrak{m}^c (resp. \mathfrak{m}^r) désigne le sous-espace complexe (resp. réel) engendré par \mathfrak{m} dans \mathfrak{g} .

⁵⁾ Pour une telle partition de S , il existe un ordre linéaire dans S tel que $S_+ = \{\alpha; \alpha > 0, \alpha \notin S_0\}$ et que si $\alpha \in S_+$ alors $\alpha > \beta$ pour toute $\beta \in S_0$; cela se démontre de la même manière qu'un lemme de Koszul (*Sur la forme canonique des espaces homogènes complexes*, Canadian J. Math. 7 (1955), pp. 562-576, Lemme 2). Il en résulte qu'il existe une base fondamentale de S dont une partie forme une base fondamentale de S_0 (cf. I. Satake, *On a theorem of E. Cartan*, J. Math. Soc. Japan 2 (1951), pp. 284-305).

$$(2, 4) \quad u = \mathfrak{h}_s + \mathfrak{h}_z + \mathfrak{w} + \sum_{\alpha \in S_0} \{e_\alpha\}^c + \sum_{\alpha \in S_-} \{e_\alpha\}^c.$$

Soit \mathfrak{f} la sous-algèbre de Lie réelle définie par (2, 3) utilisant la décomposition de Cartan ci-dessus, et soit K le sous-groupe compact maximal de G ayant \mathfrak{f} pour algèbre de Lie. Le sous-groupe compact $B = K \cap U$ correspond à la sous-algèbre $\mathfrak{b} = \mathfrak{f} \cap u$. Le sous-espace complexe \mathfrak{b}^c de \mathfrak{g} engendré par \mathfrak{b} est une sous-algèbre de Lie complexe de \mathfrak{g} . Il résulte de (2, 4) que

$$(2, 5) \quad \mathfrak{b}^c = \mathfrak{h}_s + \mathfrak{h}_z + \sum_{\alpha \in S_0} \{e_\alpha\}^c.$$

L'algèbre de Lie complexe \mathfrak{b}^c admet l'algèbre de Lie \mathfrak{b} du groupe compact B comme forme réelle et est donc réductive; le centre de \mathfrak{b}^c est \mathfrak{h}_z , et la composante semi-simple \mathfrak{b}_s^c , qui coïncide avec la sous-algèbre des commutateurs de \mathfrak{b}^c , est $\mathfrak{h}_s + \sum_{\alpha \in S_0} \{e_\alpha\}^c$. On a :

$$(2, 6) \quad \mathfrak{b}^c = \mathfrak{b}_s^c + \mathfrak{h}_z, \quad \mathfrak{b}_s^c \cap \mathfrak{h}_z = (0).$$

Posons

$$n = \sum_{\alpha \in S_-} \{e_\alpha\}^c.$$

D'après (2, 4) et (2, 5), u est alors la somme directe des sous-espaces

$$(2, 7) \quad u = \mathfrak{b}^c + \mathfrak{w} + n.$$

D'après les propriétés de la partition de S , il en résulte que n est un idéal nilpotent de u .⁶⁾ On montre que $\mathfrak{b}^c + \mathfrak{w}$ coïncide avec le centralisateur de $\mathfrak{h}_z + \mathfrak{w}$ dans u . En effet, il est évident que $\mathfrak{h}_z + \mathfrak{w}$ est dans le centre de $\mathfrak{b}^c + \mathfrak{w}$. En vertu de (2, 7), il suffit donc de montrer que si $n \in n$ et si $n \neq 0$ il existe un élément $h \in \mathfrak{h}_z + \mathfrak{w}$ tel que $[h, n] \neq 0$. S'il en était pas ainsi, il existerait une racine $\alpha \in S_-$ telle que $\alpha(h) = 0$ pour tout $h \in \mathfrak{h}_z + \mathfrak{w}$, puisque $[h, e_\alpha] = \alpha(h)e_\alpha$ pour $h \in \mathfrak{h}$ et $\alpha \in S_-$. Puisque les valeurs de α dans $h \cap k$ sont purement imaginaires, $\alpha(\bar{h}) = -\overline{\alpha(h)}$. Par conséquent, α serait aussi nulle dans $\bar{\mathfrak{h}}_z + \bar{\mathfrak{w}}$, et donc dans $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_z + \mathfrak{w} + \bar{\mathfrak{w}}$. On sait⁶⁾ qu'une racine α telle que $\alpha(h) = 0$ quel que soit $h \in \mathfrak{h}_0$ appartient à S_0 , ce qui contredit $\alpha \in S_-$. Cette démonstration montre en même temps que $[\mathfrak{h}_z + \mathfrak{w}, n] = n$. Par le même raisonnement, on voit que le centre de u est nul. Soit d'autre part u' la sous-algèbre des commutateurs de u . Il résulte de (2, 7) que $u' \subset \mathfrak{b}_s^c + n$, puisque n est un idéal de u . D'autre part, $u' \supset [\mathfrak{h}_z + \mathfrak{w}, n] = n$, et $u' \supset [\mathfrak{b}_s^c, \mathfrak{b}_s^c] = \mathfrak{b}_s^c$ puisque l'algèbre de Lie \mathfrak{b}_s^c

⁶⁾ Cela résulte de ce qu'on a remarqué à la note 5).

est semi-simple. On a donc :

$$(2, 8) \quad \mathfrak{u}' = \mathfrak{b}_z^c + \mathfrak{n}.$$

Considérons maintenant le groupe U ; les sous-algèbres de \mathfrak{u} étant désignées par les lettres gothiques, on désignera par les lettre majuscules correspondantes les sous-groupes de Lie connexes de U engendrés par ces sous-algèbres de Lie. Les sous-groupes $B^c, W, N, H_z, B^cW, H_zW$ sont fermés dans U . Cela résulte d'un lemme de Wang [12] qui dit qu'un sous-groupe de Lie L est fermé dans G si le normalisateur de la sous-algèbre de Lie \mathfrak{l} définie par L contient \mathfrak{h} et si $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{h}_k$ engendre un sous-groupe fermé dans H . Or, puisque $\mathfrak{b}^c + \mathfrak{w}$ coïncide avec le centralisateur de $\mathfrak{h}_z + \mathfrak{w}$ dans \mathfrak{u} , B^cW est la composante connexe de l'élément neutre e du centralisateur de H_zW dans U . D'autre part, N est un sous-groupe invariant nilpotent et simplement connexe de U . En effet, l'image de N dans le groupe adjoint de U est localement isomorphe à N , puisque le centre de \mathfrak{u} est nul; cette image est, par rapport à une base convenablement choisie de \mathfrak{u} , représentée par un groupe des matrices triangulaires dont les élément diagonaux sont tous 1 et est donc un groupe simplement connexe. Par conséquent, le même est vrai pour N . Il en résulte en particulier que l'application exponentielle, \exp , de \mathfrak{u} dans U induit une bijection de \mathfrak{n} sur N . On a montré plus haut que, si $n \in \mathfrak{n}$ et si $n \neq 0$, il existe un élément $h \in \mathfrak{h}_z + \mathfrak{w}$ tel que $[h, n] \neq 0$; dans ce cas, $\text{ad}(\exp th)n \neq n$ pour un nombre réel $t \neq 0$. Il en résulte que, pour tout élément ($\neq e$) de N , il existe un élément de H_zW qui ne commute pas avec cet élément de N . En particulier, on a $N \cap (B^cW) = (e)$. Compte tenu de (2.7), on a donc :

$$(2, 9) \quad U = (B^cW)N, \quad (B^cW) \cap N = (e).$$

Par ailleurs, (2, 8) implique que

$$(2, 10) \quad U' \supset N.$$

Le sous-groupe W est simplement connexe et on a :

$$(2, 11) \quad B^c \cap W = (e).$$

En effet, la restriction à \mathfrak{h} de $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ étant un homomorphisme du groupe abélien \mathfrak{h} sur H dont le noyau est dans $\mathfrak{h}_k = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$, \exp induit un homomorphisme bijectif de \mathfrak{w} sur W ; il en résulte que W est simplement connexe et que

$(H_s H_z) \cap W = (e)$. Puisque le groupe B^c est réductif, le centre de B^c est contenu dans le sous-groupe de Cartan $H_s H_z$ de B^c . Puisque $[\mathfrak{b}^c, \mathfrak{w}] = 0$, $B^c \cap W$ est dans le centre de B^c . Par conséquent, $B^c \cap W = H_s H_z \cap W = (e)$.

On considère maintenant le groupe B^c . Il résulte de (2, 6) que

$$(2, 12) \quad B^c = B_s^c H_z.$$

et que $B_s^c \cap H_z$ est un sous-groupe discret de B_s^c contenu dans le centre de B_s^c . L'algèbre de Lie complexe semi-simple \mathfrak{b}_s^c admet comme forme réelle l'algèbre de Lie $\mathfrak{b}_s = \mathfrak{b}_s^c \cap \mathfrak{f}$ qui correspond au sous-groupe B_s des commutateurs de B . Par conséquent, le groupe B_s est un sous-groupe compact maximal du groupe semi-simple B_s^c et contient donc le centre de B_s^c . D'autre part, l'algèbre de Lie abélienne $\mathfrak{h}_z \cap \mathfrak{f}$ est une forme réelle de \mathfrak{h}_z et correspond à la composante connexe de l'élément neutre $C(B)$ du centre de B . Puisque la restriction à \mathfrak{h} de $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ est un homomorphisme du groupe abélien \mathfrak{h} sur H dont le noyau est contenu dans $\mathfrak{h}_h = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{f}$, il en résulte que $C(B)$ est le sous-groupe compact maximal du groupe abélien H_z . On a ainsi :

$$(2, 13) \quad B_s^c \cap H_z = B_s \cap H_z = B_s \cap C(B).$$

Cela fait, on va considérer les groupes $\text{Hom}_h(U, A)$, $\text{Hom}_h(U, C^m)$ et $\text{Hom}(B, A)$, où le dernier groupe est le groupe des homomorphismes différentiables de B dans A . La projection holomorphe $\pi : C^m \rightarrow A$ et l'injection $B \rightarrow U$ définissent de manière évidente les homomorphismes $\pi' : \text{Hom}_h(U, C^m) \rightarrow \text{Hom}_h(U, A)$ et $\lambda : \text{Hom}_h(U, A) \rightarrow \text{Hom}(B, A)$ respectivement,

LEMME 2. *La suite*

$$(0) \longrightarrow \text{Hom}_h(U, C^m) \xrightarrow{\pi'} \text{Hom}_h(U, A) \xrightarrow{\lambda} \text{Hom}(B, A) \longrightarrow (0)$$

est exacte.

Démonstration. Soit $f \in \text{Hom}(B, A)$; la restriction de f au sous-groupe $C(B)$ est un homomorphisme différentiable de $C(B)$ dans A qui s'annule dans $B_s \cap C(B)$. Puisque l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_z \cap \mathfrak{f}$ de $C(B)$ est une forme réelle de \mathfrak{h}_z et que $C(B)$ est le sous-groupe compact maximal du groupe abélien complexe H_z , f se prolonge en un homomorphisme holomorphe bien déterminé $f^c : H_z \rightarrow A$. Il résulte de (2, 12) et de (2, 13) que f^c se prolonge alors en un homomorphisme holomorphe $F : B^c \rightarrow A$; F est uniquement déterminé par f^c et, par conséquent,

par f , car B_s^c est le sous-groupe des commutateurs de B^c . Les éléments de W commutant avec les éléments de B^c , il résulte de (2,11) que le groupe B^cW est produit direct de B^c et de W . L'homomorphisme F se prolonge donc en un homomorphisme holomorphe $F : B^cW \rightarrow A$. D'après (2,9), la restriction au sous-groupe B^cW de l'homomorphisme canonique $U \rightarrow U/N$ est un isomorphisme de B^cW sur U/N . Il en résulte que $F : B^cW \rightarrow A$ se prolonge en un homomorphisme holomorphe de U dans A . Cela démontre que λ est surjectif.

Puisque B est un groupe compact, la restriction à B d'un homomorphisme de U dans C^m est triviale. Il en résulte immédiatement que l'image de π' est contenue dans le noyau de λ .

Soit $F \in \text{Hom}_h(U, A)$; le groupe A étant abélien, F induit l'homomorphisme trivial dans le sous-groupe U' des commutateurs de U . D'après (2,10), la restriction de F au sous-groupe N est donc l'homomorphisme trivial. D'autre part, d'après la première partie de cette démonstration, la restriction de F au sous-groupe B détermine les valeurs de F dans B^c . Supposons que $\lambda(F) = 0$; la restriction de F à B est l'homomorphisme trivial et il en est donc le même pour la restriction de F à B^c . D'après (2,9) et (2.11), on a la projection holomorphe $p_w : U \rightarrow W$ dont le noyau est B^cN . Il existe alors un homomorphisme holomorphe $F' : W \rightarrow A$ tel que $F = F'p_w$. Puisque W est simplement connexe, il existe un homomorphisme holomorphe $\tilde{F}' : W \rightarrow C^m$ tel que $\pi\tilde{F}' = F'$. L'homomorphisme holomorphe $\tilde{F} : U \rightarrow C^m$ étant défini par $\tilde{F} = \tilde{F}'p_w$, on a $\pi\tilde{F} = F$, c'est-à-dire, $\pi'(\tilde{F}) = F$. Cela démontre que le noyau de λ est contenu dans l'image de π' . Le Lemme 2 est ainsi démontré.

3. *Démonstration des Théorèmes 2 et 3.* Conservant les notations des sections précédentes, on considère le diagramme suivant.

$$(2, 14) \quad \begin{array}{ccccccc} (0) & \longrightarrow & \text{Hom}_h(U, C^m) & \xrightarrow{\pi'} & \text{Hom}_h(U, A) & \xrightarrow{\lambda} & \text{Hom}(B, A) \longrightarrow (0) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \tilde{\theta}_h & & \theta_h & & \theta \\ (0) & \longrightarrow & H^1(X, C_h^m) & \xrightarrow{\pi_h^1} & H^1(X, A_h) & \xrightarrow{\mu^1} & H^1(X, A_d) \longrightarrow (0), \end{array}$$

où $\theta, \theta_h, \tilde{\theta}_h$ sont les homomorphismes définis au § 1.1 et au § 2.1. La première ligne est une suite exacte (Lemme 2).

On montre que ce diagramme est commutatif. Soient $F \in \text{Hom}_h(U, A)$ et $f = \lambda(F) \in \text{Hom}(B, A)$. D'après § 1.2, $\theta(f)$ est la classe de l'espace fibré P_f associé à l'espace fibré K de base $X = K/B$ et de groupe B par $f : B \rightarrow A$, où

P_f est l'espace quotient du produit $K \times A$ par la relation d'équivalence $(k, a) \sim (ks^{-1}, f(s)a)$ quel que soit $s \in B$. De même, $\theta_h(F)$ est la classe de l'espace fibré P_F associé à l'espace fibré G de base $X = G/U$ et de groupe U par $F : U \rightarrow A$, où P_F est l'espace quotient du produit $G \times A$ par la relation d'équivalence $(y, a) \sim (ys^{-1}, F(s)a)$ quel que soit $s \in U$. Or, puisque G et K sont transitifs sur X , on a $G = KU$. Il en résulte que l'injection différentiable de $K \times A$ dans $G \times A$ définit une bijection différentiable de P_f sur P_F qui commute avec les opérations de A ; P_f et P_F sont ainsi différentiablement équivalents, ce qui démontre que $\theta(f) = \mu^1 \theta_h(F)$. On a donc $\theta\lambda = \mu^1 \theta_h$. Il est aussi facile de voir que $\theta_h \pi' = \pi_h^1 \tilde{\theta}_h$.

D'après le Lemme 2, λ est surjectif et, d'après le Corollaire 2 du Théorème 1, θ est bijectif. Il résulte donc du diagramme commutatif (2, 14) que μ^1 est surjectif. Compte tenu du Lemme 1, on voit que la seconde ligne de (2, 14) est une suite exacte. Cela démontre le Théorème 2.

Quant au Théorème 3, ce théorème sera établi lorsqu'il est démontré dans le cas où A est le groupe additif C des nombre complexes. En effet, s'il en est ainsi, le théorème est aussi vrai dans le cas où $A = C^m$, puisque le groupe C^m est somme directe de m groupes isomorphes à C . L'homomorphisme $\tilde{\theta}_h$ dans le diagramme (2, 14) est donc bijectif. On sait déjà que les deux lignes de (2, 14) sont des suites exactes (Lemme 2 et Théorème 2) et que θ est bijectif (Corollaire 2 du Théorème 1). Appliquant le lemme de cinq à (2, 14), on en conclut que θ_h est bijectif, ce qui démontre le Théorème 3 dans le cas général.

On montre le Théorème 3 dans le cas où $A = C$. Remarquons que le groupe $\text{Aut}(P)$ des automorphismes d'un espace fibré principal holomorphe P de base X compacte, muni de la topologie compacts-ouverts, est un groupe de Lie complexe qui opère holomorphiquement dans P [10]. On a l'homomorphisme canonique \mathfrak{p} du groupe $\text{Aut}(P)$ dans le groupe $\text{Aut}(X)$ des homéomorphismes holomorphes de la base X qui associe à un automorphisme de P l'homéomorphisme de X qu'il induit. Par ailleurs, si un groupe G opère holomorphiquement dans X , on a un homomorphisme \mathfrak{q} de G dans $\text{Aut}(X)$ en associant à un élément $y \in G$ l'homéomorphisme $\mathfrak{q}(y)$ qu'il définit.

LEMME 3. *Soit G un groupe de Lie complexe connexe et soit U un sous-groupe complexe fermé de G ; on considère G comme espace fibré principal holomorphe de base G/U et de groupe U opérant par les translations à droite. Supposons que G/U soit compacte. Alors, pour qu'un espace fibré principal holo-*

morphe P de base G/U et de groupe A soit associé à l'espace fibré G par un homomorphisme holomorphe de U dans A , il faut et il suffit qu'il existe un homomorphisme holomorphe \mathbf{q}^* du groupe G dans le groupe $\text{Aut}(P)$ tel que $\mathbf{p}\mathbf{q}^* = \mathbf{q}$.

Démonstration. Soit P un espace fibré principal holomorphe de base G/U et de groupe A associé à G par un homomorphisme $F : U \rightarrow A$. Comme on a remarqué dans le § 1.2, il existe alors une application holomorphe $q^* : G \rightarrow P$, compatible avec la projection $q : G \rightarrow G/U$, telle que

$$q^*(ys) = q^*(y)F(s)$$

quels que soient $y \in G$, $s \in U$. Puisque $\mathbf{p}q^* = \mathbf{p}$, tout élément de P s'écrit sous la forme $q^*(y)a$ avec $y \in G$ et $a \in A$. Pour un élément $y' \in G$, on définit une application $\mathbf{q}^*(y') : P \rightarrow P$ en posant $\mathbf{q}^*(y')(q^*(y)a) = q^*(y'y)a$; $\mathbf{q}^*(y')$ est bien définie et est un automorphisme de l'espace fibré P . On constate que l'application $\mathbf{q}^* : G \rightarrow \text{Aut}(P)$ ainsi obtenue est un homomorphisme holomorphe tel que $\mathbf{p}\mathbf{q}^* = \mathbf{q}$.

Réciproquement, soit P un espace fibré principal holomorphe de base G/U et de groupe A pour lequel il existe un homomorphisme holomorphe \mathbf{q}^* de G dans $\text{Aut}(P)$ tel que $\mathbf{p}\mathbf{q}^* = \mathbf{q}$. On choisit un point $x_0^* \in P$ dont l'image par la projection $\mathbf{p} : P \rightarrow X$ est le point $x_0 = q(e)$, et on définit une application $q^* : G \rightarrow P$ en posant :

$$q^*(y) = \mathbf{q}^*(y)x_0^* \quad \text{pour } y \in G.$$

L'application q^* est une application holomorphe qui est compatible avec $q : G \rightarrow G/U$. Il en résulte facilement que l'image réciproque de P par q est un espace fibré trivial, c'est-à-dire que P est trivialisé par q . Or, si $s \in U$, $\mathbf{p}(q^*(s)x_0^*) = \mathbf{p}(s)x_0 = x_0 = \mathbf{p}(x_0^*)$ et il existe donc un élément $F(s) \in A$ tel que $q^*(s)x_0^* = x_0^*F(s)$. Puisque $\mathbf{q}^* : G \rightarrow \text{Aut}(P)$ est un homomorphisme, on a $q^*(ys) = \mathbf{q}^*(ys)x_0^* = \mathbf{q}^*(y)x_0^*F(s) = q^*(y)F(s)$, ce qui montre que l'application $F : U \rightarrow A$ est un facteur associé à P . L'application F est donc un homomorphisme holomorphe de U dans A et l'espace fibré P est un espace fibré associé à G par F .

Démonstration du Théorème 3 dans le cas où $A = \mathbb{C}$. Il faut montrer que l'homomorphisme $\theta_h : \text{Hom}_h(U, \mathbb{C}) \rightarrow H^1(X, \mathbb{C}_h)$ est bijectif.

1) θ_h est surjectif. Soit P un espace fibré principal holomorphe de base

X et de groupe A . D'après un résultat de Bott [3], si K est un groupe de Lie compact connexe opérant sur une C -variété X de manière transitive par des transformations holomorphes, les opérations de K induisent l'automorphisme identique du groupe $H^1(X, \mathbb{C}_h)$. Il en résulte que l'image réciproque de P par une transformation $k : X \rightarrow X$ appartenant à K est isomorphe sur X à P ; autrement dit, il existe un automorphisme de P qui induit la transformation k de la base X .

Supposons maintenant que $X = G/U = K/B$ au sens de (2,2). Puisque G est presque effectif sur X , l'homomorphisme $\mathfrak{q} : G \rightarrow \text{Aut}(X)$ est localement injectif. Il en résulte que l'image $\mathfrak{q}(G)$ est le plus petit sous-groupe de Lie complexe connexe de $\text{Aut}(X)$ contenant $\mathfrak{q}(K)$. Or, l'image $\mathfrak{p}(\text{Aut}(P))$ est un sous-groupe de Lie complexe de $\text{Aut}(X)$ et, d'après ce qui précède, elle contient le sous-groupe $\mathfrak{q}(K)$. Par conséquent, $\mathfrak{q}(G)$ est contenu dans le plus grand sous-groupe connexe de $\mathfrak{p}(\text{Aut}(P))$. Puisque $\mathfrak{p} : \text{Aut}(P) \rightarrow \mathfrak{p}(\text{Aut}(P))$ est une application ouverte, il en résulte que $\mathfrak{q}(G) \subset \mathfrak{p}(\text{Aut}(P)^\circ)$ où $\text{Aut}(P)^\circ$ est le plus grand sous-groupe connexe de $\text{Aut}(P)$. Il existe donc un sous-groupe de Lie complexe connexe G^* de $\text{Aut}(P)^\circ$ tel que $\mathfrak{p}(G^*) = \mathfrak{q}(G)$. Le groupe $\mathfrak{q}(G)$ étant un groupe de Lie complexe semi-simple, il existe alors un homomorphisme holomorphe local σ d'un voisinage de l'élément neutre de $\mathfrak{q}(G)$ dans G^* tel que $\mathfrak{p}\sigma$ soit identité. Puisque G est simplement connexe, l'homomorphisme local $\sigma\mathfrak{q}$ se prolonge en un homomorphisme holomorphe $\mathfrak{q}^* : G \rightarrow G^*$. On a ainsi un homomorphisme holomorphe $\mathfrak{q}^* : G \rightarrow \text{Aut}(P)$ tel que $\mathfrak{p}\mathfrak{q}^* = \mathfrak{q}$ et, d'après le Lemme 3, on en conclut que P est un espace fibré associé à l'espace fibré G de base X par un homomorphisme de U dans A . Cela démontre que θ_h est surjectif.

2) θ_h est injectif. Soit $F \in \text{Hom}_h(U, \mathbb{C})$ et supposons que $\theta_h(F) = 0$; un espace fibré associé à G par F est trivial. D'après ce qu'on a vu au § 1.2, il existe alors une fonction holomorphe r sur G à valeurs dans \mathbb{C} telle que

$$F(s) = r(y) - r(ys)$$

quels que soient $y \in G$, $s \in U$. Prenons la fonction r_1 sur G définie par $r_1(y) = \int_K r(ky) dk$ pour $y \in G$, où l'intégration est prise par rapport à la mesure invariante sur K de volume total 1; r_1 est une fonction holomorphe sur G , puisque les translations à gauche de G par K sont holomorphes. On a :

$$(2, 15) \quad F(s) = r_1(y) - r_1(ys)$$

quels que soient $y \in G$, $s \in U$. Il en résulte en particulier que la forme dr_1 est une forme holomorphe sur G qui est invariante par les translations à droite de G par les éléments de U . D'autre part, puisque r_1 est constante dans K , la forme dr_1 induit la forme nulle dans la sous-variété réelle K de G . L'espace tangent à G en un point de K est un espace vectoriel complexe engendré par le sous-espace vectoriel réel des vecteurs tangents à la sous-variété K , car G est un groupe de Lie complexe semi-simple ayant K comme sous-groupe compact maximal. Puisque dr_1 est une forme holomorphe, la forme dr_1 est donc nulle en tout point de K . Le groupe K étant transitif sur $X = G/U$, on a $G = KU$. Puisque dr_1 est invariante par les translations à droite de G par les éléments de U , il en résulte que la forme dr_1 est partout nulle sur G . Comme G est connexe, cela signifie que r_1 est une fonction constante. D'après (2, 15), on a donc $F = 0$, ce qui démontre que θ_h est injectif.

Le Théorème 3 est ainsi démontré dans le cas où $A = C$ et donc, comme on l'a vu plus haut, aussi dans le cas général.

§ 3. Connexions d'un espace fibré principal holomorphe de groupe abélien ayant pour base une C -variété

1. Connexions de type spécial.

LEMME 4. Soit X une C -variété kaehlérienne et soit K un groupe de Lie compact connexe semi-simple opérant sur X par des transformations holomorphes de manière transitive et presque effective. Soit C^m un espace vectoriel complexe de dimension m . Alors, 1) toute forme de degré 1 sur X à valeurs dans C^m invariante par K est nulle; 2) pour qu'une forme Ω fermée de degré 2 sur X à valeurs dans C^m soit invariante par K il faut et il suffit que Ω soit une forme harmonique par rapport à une métrique kaehlérienne sur X invariante par K .

Démonstration. On peut supposer que $m = 1$. Soit B le sous-groupe de stabilité de K en un point de X ; X peut être identifiée avec l'espace homogène kaehlérien K/B . On sait que B contient un sous-groupe de Cartan H de K [2]. Soient \mathfrak{f} , \mathfrak{b} , \mathfrak{h} les algèbres de Lie de K , de B et de H respectivement. Comme B est compact, il existe un sous-espace \mathfrak{m} de \mathfrak{f} tel que \mathfrak{f} soit la somme directe $\mathfrak{m} + \mathfrak{b}$ et que $[\mathfrak{b}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$. Puisque $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}$, on a alors $[\mathfrak{b}, \mathfrak{m}] = \mathfrak{m}$. Or, soit ϕ une forme de degré 1 sur K/B invariante par K . L'image réciproque ϕ^* de ϕ par la projection de K sur K/B est une forme invariante à gauche sur K qui s'annule

pour les vecteurs appartenant à \mathfrak{b} et à $[\mathfrak{b}, \mathfrak{f}]$. Puisque $\mathfrak{f} = [\mathfrak{b}, \mathfrak{m}] + \mathfrak{b}$, on a alors $\psi^* = 0$. Par suite $\psi = 0$, ce qui démontre 1). Puisque K est un groupe connexe opérant sur X , une forme sur X qui est harmonique par rapport à une métrique kaehlérienne invariante par K est invariante par K . Réciproquement, soit Ω une forme fermée de degré 2 sur X invariante par K . On sait qu'il existe une forme harmonique Ω_h de degré 2 sur X telle que $\Omega - \Omega_h$ soit une forme exacte [6]. Puisque $\Omega - \Omega_h$ est invariante par K il existe alors une forme ψ de degré 1 sur X invariante par K telle que $\Omega - \Omega_h = d\psi$ [5]. D'après 1), on a $\psi = 0$ et par suite $\Omega = \Omega_h$, ce qui démontre que Ω est une forme harmonique.

THÉORÈME 4. *Soit X une C -variété et soit K un groupe de Lie compact connexe semi-simple qui opère sur X par des transformations holomorphes de manière transitive et presque effective. Un espace fibré principal holomorphe P de base X et de groupe A admet une connexion de type $(1,0)$ telle que sa forme de courbure sur X soit une forme de type $(1,1)$ invariante par les opérations de K sur X . Si X est kaehlérienne, cette connexion est unique.*

Démonstration. On montre d'abord que l'on peut supposer que K est le groupe construit au § 2.2. On sait que le revêtement universel du groupe compact semi-simple K est un revêtement fini de K qui est aussi compact. En remplaçant au besoin K par ce dernier groupe, on peut donc supposer que le groupe K est simplement connexe. D'après l'hypothèse, on a un homomorphisme \mathfrak{q} de K dans le groupe $\text{Aut}(X)$ des homéomorphismes holomorphes de X dont le noyau est un sous-groupe discret de K . Par conséquent, l'homomorphisme de l'algèbre de Lie \mathfrak{f} de K dans l'algèbre de Lie \mathfrak{f} de $\text{Aut}(X)$ induit par \mathfrak{q} est injectif. Désignons encore par \mathfrak{q} cet homomorphisme d'algèbres de Lie. Puisque $\mathfrak{q}(\mathfrak{f})$ est la sous-algèbre de Lie réelle de l'algèbre de Lie complexe \mathfrak{f} correspondant au sous-groupe de Lie compact $\mathfrak{q}(K)$ de $\text{Aut}(X)$, $\mathfrak{q}(\mathfrak{f})$ est représentée par des matrices anti-hermitiennes lorsque l'on choisit une représentation fidèle de l'algèbre de Lie complexe \mathfrak{f} de manière convenable. Il en résulte que les vecteurs d'une base réelle de $\mathfrak{q}(\mathfrak{f})$ sont linéairement indépendants sur les nombres complexes dans \mathfrak{f} . Par conséquent, \mathfrak{g} étant la complexification de \mathfrak{f} , l'homomorphisme injectif $\mathfrak{q} : \mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{f}$ se prolonge en un homomorphisme injectif \mathfrak{q} de l'algèbre de Lie complexe \mathfrak{g} dans \mathfrak{f} . Soit G le groupe de Lie complexe simplement connexe ayant \mathfrak{g} pour algèbre de Lie. Puisque K est un groupe de Lie

compact simplement connexe dont l'algèbre de Lie est la forme réelle \mathfrak{f} de \mathfrak{g} , on peut considérer que G contient K comme le sous-groupe compact maximal correspondant à la sous-algèbre de Lie \mathfrak{f} . Puisque G est simplement connexe, il existe un homomorphisme holomorphe, désigné encore par \mathfrak{q} , du groupe G dans le groupe $\text{Aut}(X)$ qui induit l'homomorphisme $\mathfrak{q} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{f}$. Il est alors clair que la restriction de $\mathfrak{q} : G \rightarrow \text{Aut}(X)$ à K coïncide avec $\mathfrak{q} : K \rightarrow \text{Aut}(X)$. Il en résulte que le groupe G opère sur X holomorphiquement et de manière transitive. Puisque l'homomorphisme $\mathfrak{q} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{f}$ induit par $\mathfrak{q} : G \rightarrow \text{Aut}(X)$ est injectif, le noyau de ce dernier homomorphisme est un sous-groupe discret de G ; le groupe G opère donc sur X de manière presque effective.

On se trouve ainsi à la situation considérée au début du §2.2. Or, on y a défini une décomposition de Cartan par rapport à laquelle l'algèbre de Lie \mathfrak{u}_1 du sous-groupe de stabilité U_1 en un point x_1 s'écrit sous la forme (2,4). Soit K_1 le sous-groupe compact maximal de G correspondant à la forme compacte (2,3) par rapport à cette décomposition de Cartan. On sait que deux sous-groupes compacts maximaux de G sont conjugués; il existe donc un élément $y \in G$ tel que $yK_1y^{-1} = K$. Prenons la transformée par $\text{ad}(y)$ de la décomposition de Cartan donnée plus haut. Il est évident que l'algèbre de Lie \mathfrak{f} de K et l'algèbre de Lie \mathfrak{u} du groupe $U = yU_1y^{-1}$ sont alors représentées, par rapport à cette nouvelle décomposition de Cartan, par les formes (2,3) et (2,4) respectivement. Puisque U est le sous-groupe de stabilité de G en le point $x_0 = yx_1$, cela montre que le groupe K est le groupe construit par le procédé du §2.2 à partir d'un groupe de Lie G opérant sur X et du sous-groupe de stabilité U de G en un point $x_0 \in X$.

Cela dit, considérons l'espace fibré principal holomorphe G de base X et de groupe U dont la projection q est définie par $q(y) = yx_0$ pour $y \in G$. La restriction de q à $K \subset G$ est la projection du sous-espace fibré principal différentiable K de groupe B . De plus, le groupe K étant transitif sur X , on a $G = KU$ et $K \cap U = B$; tout élément $y \in G$ est de la forme ks avec $k \in K$ et $s \in U$, et $ks = k's'$ si et seulement si il existe un élément $t \in B$ tel que $s' = ts$. On va définir maintenant une connexion de l'espace fibré principal G . D'après §2.2, \mathfrak{g} se décompose en somme directe de deux sous-espaces

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{p} + \mathfrak{u}, \quad \text{où} \quad \mathfrak{p} = \bar{\mathfrak{m}} + \sum_{\alpha \in \mathfrak{s}_+} \{e_\alpha\}^c.$$

Si $s \in U$, alors $\text{ad}(s^{-1})\mathfrak{u} = \mathfrak{u}$, donc

$$\mathfrak{g} = \text{ad}(s^{-1})\mathfrak{p} + \mathfrak{u}$$

est aussi une décomposition en somme directe de \mathfrak{g} . On observe que si $t \in B$ alors $\text{ad}(t^{-1})\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$, puisque $[\mathfrak{b}^c, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$ d'après (2, 5). Posons

$$c(y) = y(\text{ad}(s^{-1})\mathfrak{p})$$

pour $y = ks$ avec $k \in K$ et $s \in U$; $c(y)$ est le sous-espace de l'espace tangent à G en le point y formés par les transformées des vecteurs appartenant à $\text{ad}(s^{-1})\mathfrak{p}$ par la translation à gauche de G par l'élément y . D'après ce qu'on vient de voir, $c(y)$ est uniquement déterminé par $y \in G$. De plus, on constate immédiatement que le champ de sous-espaces tangents $\{c(y) ; y \in G\}$ est une connexion de l'espace fibré principal G . Soit γ la forme de cette connexion. Puisque le tenseur de la structure complexe de G est invariant à gauche et induit la multiplication par i dans \mathfrak{g} , ce tenseur applique le champ $\{c(y) ; y \in G\}$ en lui-même, ce qui signifie que la forme γ est de type $(1, 0)$ sur G .

Soit maintenant P un espace fibré principal holomorphe de base X et de groupe A . D'après le Théorème 3, P est un espace fibré associé à G par un homomorphisme $F : U \rightarrow A$ et on a donc la connexion de P canoniquement associée à la connexion γ de G définie plus haut (cf. § 1.2). On démontrera que cette connexion vérifie les conditions du théorème. Soit ω la forme de cette connexion. Puisque γ est une forme de type $(1, 0)$ sur G , on voit facilement que ω est une forme de type $(1, 0)$ sur P , c'est-à-dire que la connexion est de type $(1, 0)$. On montre que la forme de courbure Ω de cette connexion est une forme de type $(1, 1)$ invariante par K sur X . Soit γ_0 la forme invariante à gauche sur G à valeurs dans \mathfrak{u} qui est définie par la projection de \mathfrak{g} sur \mathfrak{u} de noyau \mathfrak{p} . Puisque $c(k) = k\mathfrak{p}$ pour $k \in K$, la restriction de γ_0 à la sous-variété réelle K coïncide avec la restriction de la forme de connexion γ à K . Par conséquent, $|K$ signifiant la restriction des formes sur G à K , on a $\gamma|K = \gamma_0|K$ et par suite

$$(3, 1) \quad (d\gamma)|K = (d\gamma_0)|K.$$

D'après (1, 5), on a donc

$$(3, 2) \quad (\Omega q)|K = F((d\gamma_0)|K).$$

Puisque la forme $F((d\gamma_0)|K)$ est une forme invariante à gauche sur K , il en résulte que la forme Ω est une forme invariante par les opérations de K sur X ,

Pour voir que la forme Ω est de type (1,1) il suffit alors de le vérifier au point $x_0 \in X$, puisque K opère transitivement sur X par les transformations holomorphes. La projection q de G sur X induit une application linéaire de \mathfrak{g} sur l'espace tangent X_0 au point x_0 de X . Le noyau de cette application étant \mathfrak{u} , la restriction de cette application à \mathfrak{p} est bijective; de plus la multiplication par i dans \mathfrak{p} correspond dans X_0 au tenseur de la structure complexe de X . Par conséquent, Ω est de type (1,1) si $(\Omega q)(ix, iy) = (\Omega q)(x, y)$ quels que soient $x, y \in \mathfrak{p}$. D'après (1,5) cette condition signifie que

$$(3,3) \quad F(\Gamma(ix, iy)) = F(\Gamma(x, y))$$

quels que soient $x, y \in \mathfrak{p}$, où Γ est la forme de courbure sur G de la connexion définie par γ . Or, pour vérifier (3,3), supposons donné pour chaque élément $x \in \mathfrak{p}$ un élément $x_k \in \mathfrak{k}$ tel que $x_k \equiv x \pmod{\mathfrak{u}}$. Si $x, y \in \mathfrak{p}$, on a alors

$$(3,4) \quad \Gamma(x, y) = \Gamma(x_k, y_k),$$

d'après la définition de la forme Γ et, compte tenu de (1,5) et de (3,1), on a donc $F(\Gamma(x, y)) = F(\Gamma(x_k, y_k)) = F(d\gamma(x_k, y_k)) = F(d\gamma_0(x_k, y_k)) = F(\gamma_0([x_k, y_k]))$, la dernière égalité résultant du fait que γ_0 est une forme invariante à gauche sur G . Par conséquent, la formule (3,3) est équivalente à :

$$(3,5) \quad F(\gamma_0([(ix)_k, (iy)_k])) = F(\gamma_0([x_k, y_k])).$$

Cela dit, on montre (3,3). L'espace \mathfrak{p} est engendré sur les nombres réels par les vecteurs $h \in \bar{\mathfrak{m}}, e_\alpha$ et ie_α avec $\alpha \in S_+$. Puisque les deux membres de (3,3) sont bilinéaires sur les nombres réels, il suffit de vérifier (3,3) dans le cas où x et y sont de la forme h, e_α ou ie_α avec $\alpha \in S_+$. On peut poser $h_k = h + \bar{h}$ pour $h \in \bar{\mathfrak{m}}$ et $(e_\alpha)_k = u_\alpha, (ie_\alpha)_k = v_\alpha$ pour $\alpha \in S_+$, où u_α, v_α sont les vecteurs définis dans (2,3). Alors, sauf dans le cas où $x = e_\alpha$ et $y = ie_\alpha$, on constate que $\gamma_0([(ix)_k, (iy)_k])$ et $\gamma_0([x_k, y_k])$ sont dans $\sum_{\alpha \in S_0 \cup S_-} \{e_\alpha\}^c$ qui est contenu dans \mathfrak{u}' d'après (2,8) et que les deux membres de (3,5) sont donc nuls. Si $x = e_\alpha$ et $y = ie_\alpha$, alors $x_k = u_\alpha, y_k = v_\alpha, (ix)_k = v_\alpha, (iy)_k = -u_\alpha$ et (3,5) est trivialement vérifiée. D'après la remarque ci-dessus, cela démontre (3,3); la forme Ω est de type (1,1) sur X .

Montrons la dernière partie du théorème où l'on suppose que X est kaehlérienne. Soient ω et ω' deux formes de connexion de type (1,0) dont les formes de courbure Ω et Ω' sont de type (1,1) et invariantes par K . Puisque

le groupe A est abélien, il existe alors une forme ξ de type $(1,0)$ sur X , à valeurs dans \mathfrak{a} , telle que $\omega - \omega' = \xi p$. Il en résulte que $\Omega - \Omega' = d\xi$. Puisque Ω et Ω' sont harmoniques par rapport à une métrique kaehlerienne sur X (Lemme 4), cela implique $\Omega = \Omega'$ et par suite $d\xi = 0$. La forme ξ est donc holomorphe et par conséquent harmonique. Puisque le premier nombre de Betti de X est nulle, on a $\xi = 0$, ce qui démontre que $\omega = \omega'$. Le Théorème 4 est ainsi démontré.

2. Connexions holomorphes. Le but de cette section est d'établir le théorème suivant.

THÉORÈME 5. *Soit P un espace fibré principal de groupe A ayant pour base une C -variété X . Si P admet une connexion holomorphe, P est un espace fibré trivial.*

Pour démontrer ce théorème on emploie la fibration de Wang d'une C -variété X par un groupe abélien, la base étant une C -variété kaehlerienne. Soit $X = G/U = K/B$ au sens de (2,2) où K est le sous-groupe compact maximal de G construit dans § 2.2. On utilisera les notations du § 2.2. Posons

$$\hat{u} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \mathfrak{h}_0} \langle e_\alpha \rangle^c + \sum_{\alpha \in \mathfrak{g}_-} \langle e_\alpha \rangle^c.$$

D'après Wang [12], \hat{u} correspond à un sous-groupe de Lie complexe connexe fermé \hat{U} dans G et l'espace homogène complexe $\hat{X} = G/\hat{U}$ est une C -variété kaehlerienne. Il résulte de (2,8) que la sous-algèbre des commutateurs de \hat{u} coïncide avec la sous-algèbre \mathfrak{u}' des commutateurs de \mathfrak{u} ; par conséquent, le quotient $T = \hat{U}/U$ est un groupe de Lie complexe abélien connexe. Les opérations de T dans $X = G/U$ définissent une structure d'espace fibré principal holomorphe de base $\hat{X} = G/\hat{U}$ et de groupe T . On désignera par \hat{p} la projection de cet espace fibré X ; \hat{p} commute avec les opérations de G dans X et dans \hat{X} . Si $\hat{B} = \hat{U} \cap K$, on a donc $U\hat{B} = \hat{U}$. Par conséquent, les opérations du groupe $T = \hat{U}/U$ dans X sont induites par les opérations du groupe \hat{B} dans X .

D'après le Théorème 4, l'espace fibré principal X de base \hat{X} et de groupe T admet une connexion bien déterminée dont la forme ω est de type $(1,0)$ et dont la forme de courbure Ω est une forme de type $(1,1)$ sur X invariante par K . La forme $d\omega = \Omega \hat{p}$ est alors de type $(1,1)$; par conséquent, on a :

$$(3,6) \quad d'' \omega = d\omega.$$

On observe de plus que ω est une forme sur X invariante par K . En effet,

chaque élément $k \in K$ définissant un automorphisme de l'espace fibré X , la transformée ωk de la forme ω est une forme de connexion de type $(1, 0)$ dont la forme de courbure est égale à Ωk . Puisque Ω est invariante par K ; $\Omega k = \Omega$, on a $\omega k = \omega$ d'après l'unicité de la connexion du type considéré.

Soit $\mathcal{C}^{(q)}(X)$ le module des formes différentielles de degré q sur X à valeurs complexes. La somme directe $\mathcal{C}(X) = \sum_{q \geq 0} \mathcal{C}^{(q)}(X)$ est l'algèbre graduée des formes sur X . Les formes sur X qui sont invariantes par les opérations de K sur X forment une sous-algèbre graduée $\mathcal{C}_I(X) = \sum_{q \geq 0} \mathcal{C}_I^{(q)}(X)$ de $\mathcal{C}(X)$. On définit de même les algèbres graduées $\mathcal{C}(\hat{X}) = \sum_{q \geq 0} \mathcal{C}^{(q)}(\hat{X})$ et $\mathcal{C}_I(\hat{X}) = \sum_{q \geq 0} \mathcal{C}_I^{(q)}(\hat{X})$. La projection \hat{p} de X sur \hat{X} induit un homomorphisme injectif de $\mathcal{C}(\hat{X})$ dans $\mathcal{C}(X)$. Soit d'autre part \mathfrak{t} l'algèbre de Lie du groupe T ; \mathfrak{t} est une algèbre de Lie complexe abélienne. Désignons par \mathfrak{t}^c la complexification de \mathfrak{t} en prenant \mathfrak{t} comme algèbre de Lie réelle. La variété X étant un espace fibré principal de groupe T , on a une anti-dérivation $i(z)$ de l'algèbre graduée $\mathcal{C}(X)$ pour chaque $z \in \mathfrak{t}^c$ [4]; on observe que les transformations de $\mathcal{C}(X)$ induites par les opérations de K sur X commutent avec $i(z)$ quel que soit $z \in \mathfrak{t}^c$, puisque les opérations de K sur X sont des automorphismes de l'espace fibré principal X . On sait que la forme $\psi \hat{p}$, image réciproque d'une forme $\psi \in \mathcal{C}(\hat{X})$ par $\hat{p} : X \rightarrow \hat{X}$, est annulée par $i(z)$ quel que soit $z \in \mathfrak{t}^c$.

Choisissons maintenant une base complexe $\{e_1, \dots, e_n\}$ de l'algèbre de Lie complexe \mathfrak{t} ($n =$ dimension complexe de \mathfrak{t}), et prenons les éléments de \mathfrak{t}^c :

$$\begin{aligned} z_1 &= e_1 - \sqrt{-1} i e_1, \dots, z_n = e_n - \sqrt{-1} i e_n, \\ z_{n+1} &= e_1 + \sqrt{-1} i e_1, \dots, z_{2n} = e_n + \sqrt{-1} i e_n, \end{aligned}$$

où $\sqrt{-1}$ (resp. i) est la structure complexe de \mathfrak{t}^c (resp. de \mathfrak{t}); on a ainsi une base complexe $\{z_1, \dots, z_{2n}\}$ de \mathfrak{t}^c . Soient g^1, \dots, g^{2n} les fonctions linéaires complexes sur \mathfrak{t}^c telles que $g^j(z_l) = \delta_{jl}$ pour $j, l = 1, \dots, 2n$. On pose

$$\omega^j = g^j(\omega) \quad \text{pour } j = 1, \dots, 2n.$$

Les formes $\omega^1, \dots, \omega^n$ (resp. $\omega^{n+1}, \dots, \omega^{2n}$) sont des formes de type $(1, 0)$ (resp. de type $(0, 1)$) invariantes par les opérations de K sur X . On a de plus :

$$(3, 7) \quad i(z_l) \omega^j = \delta_{jl} \quad \text{pour } j, l = 1, \dots, 2n.$$

Par ailleurs, d'après (3.6), $d'' g^i(\omega) = g^i(d'' \omega) = g^i(d\omega) = dg^i(\omega)$ pour $i = 1, \dots, n$; on a donc :

$$(3, 8) \quad d^n \omega^i = d\omega^i \quad \text{pour } i = 1, \dots, n.$$

LEMME 5. Toute forme $\varphi \in \mathcal{C}^{(q)}(X)$ s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme

$$(3, 9) \quad \varphi = \sum_{r=0}^q \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq 2n} \varphi_{j_1 \dots j_r}^{(q-r)} \wedge \omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_r},$$

où $\varphi_{j_1 \dots j_r}^{(q-r)} \in \mathcal{C}^{(q-r)}(X)$ et où

$$i(z)\varphi_{j_1 \dots j_r}^{(q-r)} = 0$$

quel que soit $z \in I^c$. De plus, pour que $\varphi \in \mathcal{C}_1(X)$, il faut et il suffit qu'il existe des formes $\varphi_{j_1 \dots j_r}^{(q-r)} \in \mathcal{C}_1^{(q-r)}(\hat{X})$ telles que $\varphi_{j_1 \dots j_r}^{(q-r)} = \varphi_{j_1 \dots j_r}^{(q-r)} \hat{p}$ ($r = 0, \dots, q$, $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq 2n$).

Démonstration. Les images réciproques $\psi \hat{p}$ des formes $\psi \in \mathcal{C}(\hat{X})$ par $\hat{p} : X \rightarrow \hat{X}$ et les formes $\omega^1, \dots, \omega^{2n}$ engendrent l'algèbre $\mathcal{C}(X)$ sur le module des fonctions différentiables sur X , car les restrictions de ces formes à chaque point de X engendrent l'algèbre sur les nombres complexes constituée par les formes multilinéaires antisymétriques sur l'espace tangent à X en ce point. Puisque le produit de la forme $\psi \hat{p}$, image réciproque d'une forme $\psi \in \mathcal{C}(\hat{X})$ par $\hat{p} : X \rightarrow \hat{X}$, par une fonction sur X est annulé par $i(z)$ quel que soit $z \in I^c$, il en résulte que toute forme $\varphi \in \mathcal{C}^{(q)}(X)$ est de la forme (3, 9). Pour voir l'unicité de l'expression (3, 9) de φ , il suffit de montrer que, si $\varphi = 0$, alors $\varphi_{j_1 \dots j_r}^{(q-r)} = 0$ pour tout $r = 0, \dots, q$ et $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq 2n$. Supposons que, si $r > r_0$, $\varphi_{j_1 \dots j_r}^{(q-r)} = 0$ pour tout $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq 2n$. Si $r_0 > 0$, il résulte de (3, 7) que $\varphi_{j_1 \dots j_{r_0}}^{(q-r_0)} = (-1)^{(q-r_0)r_0} i(z_{j_{r_0}}) \dots i(z_{j_1}) \varphi = 0$ pour tout $1 \leq j_1 < \dots < j_{r_0} \leq 2n$. Si $r_0 = 0$, $\varphi^{(q)} = \varphi = 0$ et l'unicité de (3, 9) est démontré.

Montrons la seconde partie du lemme. Étant donnée une forme $\varphi \in \mathcal{C}^{(q)}(X)$ écrite sous la forme (3, 9), sa transformée φk par l'opération d'un élément $k \in K$ est représentée par

$$\varphi k = \sum_{r=0}^q \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq 2n} (\varphi_{j_1 \dots j_r}^{(q-r)} k) \wedge \omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_r},$$

puisque k induit un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{C}(X)$ et que $\omega^1, \dots, \omega^{2n}$ sont des formes invariantes par K . On a remarqué plus haut que, si $\varphi_* \in \mathcal{C}(X)$, $i(z)(\varphi_* k) = (i(z) \varphi_*) k$ quel que soit $z \in I^c$. Par conséquent, la formule ci-dessus donne l'expression (3, 9) de la forme φk . Il en résulte facilement que la

condition du lemme est suffisant pour que $\varphi \in \mathcal{C}_I^{(q)}(X)$. Supposons maintenant que $\varphi \in \mathcal{C}_I^{(q)}(X)$. Alors, $\varphi k = \varphi$ et, d'après l'unicité de (3, 9), $\varphi_{j_1 \dots j_r}^{(q-r)} k = \varphi_{j_1 \dots j_r}^{(q-r)}$, pour tout $r = 0, \dots, q$, $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq 2n$, quel que soit $k \in K$. Les formes $\varphi_{j_1 \dots j_r}^{(q-r)}$ sont donc invariantes par les opérations du groupe K sur X ; en particulier, elles sont invariantes par les opérations du groupe T dans X , lesquelles étant induites par les opérations du groupe $\hat{B} \subset K$. Comme $i(z)\varphi_{j_1 \dots j_r}^{(q-r)} = 0$ quel que soit $z \in I^c$, il en résulte qu'il existe des formes $\psi_{j_1 \dots j_r}^{(q-r)} \in \mathcal{C}^{(q-r)}(\hat{X})$ telles que $\varphi_{j_1 \dots j_r}^{(q-r)} = \psi_{j_1 \dots j_r}^{(q-r)} \hat{p}$ ($r = 0, \dots, q$, $1 \leq i_1 < \dots < j_r \leq 2n$). Il est alors clair que $\psi_{j_1 \dots j_r}^{(q-r)} \in \mathcal{C}_I^{(q-r)}(\hat{X})$. La condition est donc nécessaire. Le Lemme 5 est ainsi démontré.

On considère maintenant l'algèbre de d'' -cohomologie $H(X) = \sum_{q \geq 0} H^{(q)}(X)$ de la variété X , c'est-à-dire celle de l'algèbre graduée $\mathcal{C}(X) = \sum_{q \geq 0} \mathcal{C}^{(q)}(X)$ munie de l'opérateur différentiel d'' . Les opérations de K dans $\mathcal{C}(X)$ commutant avec d'' , d'' applique la sous-algèbre graduée $\mathcal{C}_I(X) = \sum_{q \geq 0} \mathcal{C}_I^{(q)}(X)$ en elle-même; soit $H_I(X) = \sum_{q \geq 0} H_I^{(q)}(X)$ l'algèbre de d'' -cohomologie de cette sous-algèbre.

LEMME 6. *L'homomorphisme de $H_I(X)$ dans $H(X)$ défini par l'injection de $\mathcal{C}_I(X)$ dans $\mathcal{C}(X)$ est injectif.*

En effet, pour $\varphi \in \mathcal{C}(X)$, soit $\int_K \varphi$ la forme que l'on obtient par l'intégration des transformées de φ par les opérations de K par rapport à la mesure invariante sur K de volume total 1 [5]. Pour que $\varphi \in \mathcal{C}_I(X)$, il faut et il suffit que $\varphi = \int_K \varphi$. D'autre part, puisque les opérations de K conservent le type de φ et que $d \int_K \varphi = \int_K d\varphi$, on a $d'' \int_K \varphi = \int_K d'' \varphi$. Par conséquent, si $\varphi \in \mathcal{C}_I(X)$ et si il existe une forme $\varphi' \in \mathcal{C}(X)$ telle que $\varphi = d'' \varphi'$, on a $\varphi = d'' \int_K \varphi'$. Le lemme en résulte.

LEMME 7. *Soit Ω une forme de type (1, 1) sur X invariante par K à valeurs dans un espace vectoriel complexe C^m de dimension m . Si il existe une forme ξ sur X , à valeurs dans C^m , telle que $\Omega = d'' \xi$, alors, il existe une forme φ de type (1, 0) sur X , à valeurs dans C^m , telle que $\Omega = d\varphi$.*

Démonstration. Il suffit de démontrer le lemme dans le cas où $m = 1$. D'après le Lemme 6, si $\Omega \in \mathcal{C}_I^{(2)}(X)$ et si $\Omega = d'' \xi$ avec $\xi \in \mathcal{C}^{(1)}(X)$, il existe une forme $\varphi \in \mathcal{C}_I^{(1)}(X)$ telle que $\Omega = d'' \varphi$; si Ω est de type (1, 1), φ est de type (1, 0).

D'après le Lemme 5, il existe alors une forme $\psi \in \mathcal{C}_I^{(1)}(\hat{X})$ et des formes $c_1, \dots, c_{2n} \in \mathcal{C}_I^{(0)}(\hat{X})$ telles que

$$\varphi = \psi \hat{p} + \sum_{j=1}^{2n} (c_j \hat{p}) \wedge \omega^j.$$

D'après le Lemme 4, $\psi = 0$; il est clair que c_1, \dots, c_{2n} sont des fonctions constantes. Par conséquent, on a :

$$\varphi = \sum_{j=1}^{2n} c_j \omega^j.$$

La composante de type $(0, 1)$ de $\sum_{j=1}^{2n} c_j \omega^j$ est égale à $\sum_{j=n+1}^{2n} c_j \omega^j$, puisque les formes $\omega^1, \dots, \omega^n$ (resp. $\omega^{n+1}, \dots, \omega^{2n}$) sont de type $(1, 0)$ (resp. de type $(0, 1)$). La forme φ étant de type $(1, 0)$, on a donc :

$$\varphi = \sum_{i=1}^n c_i \omega^i.$$

Compte tenu de (3, 8), il en résulte que

$$\Omega = d'' \varphi = \sum_{i=1}^n c_i d'' \omega^i = \sum_{i=1}^n c_i d\omega^i = d\varphi,$$

ce qui démontre le Lemme 7.

Démonstration du Théorème 5. D'après le Théorème 4, l'espace fibré P admet une connexion dont la forme ω est de type $(1, 0)$ et dont la forme de courbure Ω est une forme de type $(1, 1)$ invariante par K . Si il existe une forme de connexion holomorphe ω' sur P , on a $\omega - \omega' = \xi \hat{p}$ où ξ est une forme de type $(1, 0)$ sur X à valeurs dans \mathfrak{a} . Alors, $d\omega - d\omega' = d\xi \hat{p}$. Puisque $d\omega'$ est de type $(2, 0)$ et que $d\omega = \Omega \hat{p}$ est de type $(1, 1)$, il en résulte que $\Omega = d'' \xi$. Appliquant le Lemme 7, on peut trouver une forme φ de type $(1, 0)$ sur X , à valeurs dans \mathfrak{a} , telle que $\Omega = d\varphi$. La forme $\omega_0 = \omega - \varphi \hat{p}$ est une forme de connexion de type $(1, 0)$ sur P et $d\omega_0 = (\Omega - d\varphi) \hat{p} = 0$, ce qui montre que ω_0 définit une connexion holomorphe intégrable. La base X de P étant simplement connexe, P est alors un espace fibré trivial [1]. Le Théorème 5 est ainsi démontré.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. F. Atiyah, *Complex analytic connections in fibre bundles*, Trans. Amer. Math. Soc. 85 (1957), pp. 181-207.
- [2] A. Borel, *Kählerian coset spaces of semi-simple Lie groups*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.

- 40 (1954), pp. 1147–1151.
- [3] R. Bott, *Homogeneous vector bundles*, Ann. of Math. **66** (1957), pp. 203–248.
- [4] H. Cartan, *Notions d'algèbre différentielle; applications aux groupes de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie*, C.B.R.M. Colloque de Topologie (Espaces fibrés), Bruxelles, 1951.
- [5] C. Chevalley-S. Eilenberg, *Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **63** (1948), pp. 85–124.
- [6] F. Hirzebruch, *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Heft **9**, Berlin, 1956.
- [7] J.-L. Koszul, *Multiplicateurs et classes caractéristiques*, Trans. Amer. Math. Soc. **89** (1958), pp. 256–266.
- [8] J.-L. Koszul, *Espaces fibrés associés et préassociés*, à paraître dans Nagoya Math. J. **15** (1959).
- [9] D. Montgomery, *Simply connected homogeneous spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950), pp. 467–469.
- [10] A. Morimoto, *Sur le groupe d'automorphismes d'un espace fibré principal complexe analytique*, Nagoya Math. J. **13** (1958), pp. 157–178.
- [11] K. Nomizu, *Lie groups and differential geometry*, Publication of Japan Math. Soc. No. 2, Tokyo, 1956.
- [12] H. C. Wang, *Closed manifolds with homogeneous complex structure*, Amer. J. of Math. **76** (1954), pp. 1–32.
- [13] Séminaire Sophus Lie, E.N.S. 1954–1955, Paris, 1955.

Strasbourg, France et Osaka, Japon