Canad. J. Math. Vol. **55** (4), 2003 pp. 693–710

Une formule de Riemann-Roch équivariante pour les courbes

Niels Borne

Abstract. Soit G un groupe fini agissant sur une courbe algébrique projective et lisse X sur un corps algébriquement clos k. Dans cet article, on donne une formule de Riemann-Roch pour la caractéristique d'Euler équivariante d'un G-faisceau inversible $\mathcal{L}$, à valeurs dans l'anneau $R_k(G)$ des caractères du groupe G. La formule donnée a un bon comportement fonctoriel en ce sens qu'elle relève la formule classique le long du morphisme $\dim\colon R_k(G) \to \mathbb{Z}$, et est valable même pour une action sauvage. En guise d'application, on montre comment calculer explicitement le caractère de l'espace des sections globales d'une large classe de G-faisceaux inversibles, en s'attardant sur le cas particulier délicat du faisceau des différentielles sur la courbe.

1 Introduction

L'idée relativement courante de construire une théorie équivariante des courbes a une justification de nature fonctorielle, qui peut être résumée ainsi. Si X est une courbe projective sur un corps algébriquement clos k, de nombreuses formules concernant des invariants entiers relatifs à X sont en fait des égalités entre dimensions de certains k-espaces vectoriels, et proviennent d'isomorphismes entre ces espaces. Si de plus la courbe X est munie d'une action d'un groupe fini G, on peut espèrer que ces isomorphismes commutent avec l'action de G, et qu'ils fournissent ainsi des égalités entre les caractères associés aux représentations de G correspondantes. On est ainsi amené à rechercher des formules non plus à valeur dans $\mathbb{Z}$, mais dans l'anneau des caractères du groupe $R_k(G)$.

Dans ce travail, on s'intéresse aux analogues équivariants du théorème classique de Riemann-Roch sur les courbes. De telles formules ont été établies au début des années 1980 tout d'abord par Ellingsrud et Lønsted [2] dans le cas d'une action réductive, puis par Nakajima [10] dans le cas d'une action modérée. Bien que d'un intérêt pratique considérable, ces résultats comportent cependant certaines limites qui en restreignent l'usage, en particulier leur mauvais comportement fonctoriel. Autrement dit, ces formules ne se spécialisent pas "manifestement" en les formules classiques lorsqu'on les applique au cas de l'action triviale.

Le résultat principal de cet article (théorème 4.10) est une formule de Riemann-Roch équivariante présentant deux avantages. D'une part, elle s'envoie sur la formule classique par le morphisme $\dim\colon R_k(G) \to \mathbb{Z}$. D'autre part, elle est valable *sans hypothèse sur la nature de l'action*, y compris dans le cas d'une action sauvage. Pour permettre à cette formule d'être fonctorielle, on fait au paragraphe 3 les quelques

Reçu par la rédaction le 7 août, 2001; revu le 27 juin, 2002.
Classification (AMS) par sujet: 14L30, 14C40.
Mots clés: group actions on varieties or schemes, Riemann-Roch theorems.

très brefs rappels de K-théorie équivariante nécessaires à définir la caractéristique d'Euler équivariante, avant d'introduire à la section 4.4 la notion de *degré équivariant* d'un G-faisceau inversible. Ce degré équivariant s'exprime en termes de *caractères de ramification de l'action*, qui sont des caractères des stabilisateurs des points fixes, qu'on définit précisement dans la section 4.3.

Dans les deux sections suivantes, on donne des applications du théorème 4.10. Ce théorème permet de donner des preuves concises de résultats déja connus, l'exemple le plus frappant étant le lemme 4.16, qui peut être aussi déduit de [11, Theorem 1]. Dans la section 4.6.1, on s'intéresse à la structure galoisienne de l'espace des sections globales des G-faisceaux inversibles de grand degré, qu'on explicite complètement dans le cas d'une action modérée (théorème 4.19), retrouvant ainsi un résultat de Nakajima. Pour cela, on établit auparavant dans ce cadre une formule de Hurwitz équivariante (théorème 4.15). Dans la section 4.9, on aborde le problème de la structure galoisienne de l'espace des différentielles holomorphes sur la courbe considérée. En se plaçant d'abord dans le cas modéré, on donne une preuve directe d'un résultat de Kani (théorème 4.23) concernant la structure d'un espace de différentielles logarithmiques le long du lieu de ramification de l'action. Dans le cas sauvage, on prouve une formule "à la Weil" (théorème 4.25). Outre le théorème 4.10, un ingrédient essentiel est le théorème 4.20 qui relie les représentations d'Artin de $\pi\colon X \to Y = X/G$ au degré équivariant du faisceau des différentielles, et qui semble d'un intérêt indépendant.

Je tiens à remercier Boas Erez et Bernhard Köck pour m'avoir à la fois aidé et encouragé à publier ces résultats.

2 Rappels sur les G-faisceaux

2.1 Définitions

Soit X un G-schéma, *i.e.*, un schéma muni d'une action à gauche d'un groupe G, qu'on supposera toujours fini. Rappelons qu'on dit que l'action est admissible si toute orbite de G est contenue dans un ouvert affine (voir [SGA 1], [5, chapitre V, proposition 1.8]). Cette condition assure l'existence d'un schéma quotient.

Définition 2.1 Soit $\mathcal{F}$ un faisceau (d'ensembles, de groupes ...) sur X. On appelle G-linéarisation de $\mathcal{F}$ la donnée d'une collection $(\psi_g)_{g\in G}$ de morphismes de faisceaux $\psi_g\colon g_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ vérifiant les conditions suivantes :

(1) $\psi_1 = \mathrm{Id}$

(2) $\psi_{hg} = \psi_h \circ h_*(\psi_g)$ (condition de cocycle), autrement dit, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} h_*g_*\mathcal{F} \arrow[r, "h_*\psi_g"] \arrow[d, equal] & h_*\mathcal{F} \arrow[r, "\psi_h"] & \mathcal{F} \\ (hg)_*\mathcal{F} \arrow[urr, "\psi_{hg}"'] & & \end{tikzcd}$$

Un *G-faisceau sur X* est un faisceau muni d'une G-linéarisation.

Remarque Si $\mathcal{F}$ est un G-faisceau, il est immédiat que le groupe G agit sur $H^0(X,\mathcal{F})$, ce qui a pour conséquence que les $H^i(X,\mathcal{F})$ sont aussi munis d'une action naturelle de G (voir section 3).

2.2 G-faisceaux inversibles

Définition 2.2 Le *groupe de Picard équivariant* de X, noté $\operatorname{Pic}_G X$, est le groupe des classes de G-isomorphismes de G-faisceaux inversibles sur X, muni du produit induit par le produit tensoriel.

On peut, comme dans le cadre classique (*i.e.*, sans action), décrire le groupe $\operatorname{Pic}_G X$ en termes de diviseurs G-invariants. Pour cela, on note $\operatorname{CaCl}(X) := H^0(X,\mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$ le groupe des diviseurs de Cartier sur X, et $\operatorname{Princ} X = H^0(X,\mathcal{K}_X^*)/H^0(X,\mathcal{O}_X^*)$ le sous-groupe des diviseurs principaux.

Théorème 2.3 *Soit X un schéma intègre muni d'une action fidèle et admissible d'un groupe fini G, tel que morphisme quotient $\pi\colon X \to Y = X/G$ soit plat. L'association $D \to \mathcal{L}_X(D)$ induit un isomorphisme entre le groupe des classes de diviseurs invariants pour l'équivalence Y-rationelle* $(\operatorname{CaCl} X)^G/\pi^* \operatorname{Princ} Y$ *et le groupe de Picard équivariant* $\operatorname{Pic}_G X$.

Preuve Analogue à la preuve classique, voir par exemple [8, Chapter II, Section 6]. ∎

3 Caractéristique d'Euler équivariante d'un G-faisceau

Dans cette section on rappelle très brièvement les seuls faits de K-théorie équivariante qui seront utiles par la suite. Pour les preuves manquantes on renvoie à [7] et [16].

3.1 Action sur les groupes de cohomologie

Soit X un G-schéma. On note $\operatorname{Ab}(G,X)$ la catégorie des G-faisceaux de groupes abéliens sur X. On vérifie qu'il s'agit d'une catégorie abélienne. Le fait suivant est bien connu :

Proposition 3.1 *La catégorie* $\operatorname{Ab}(G,X)$ *a assez d'objects injectifs.*

On dispose donc des foncteurs dérivés du foncteur des sections globales de la catégorie $\operatorname{Ab}(G,X)$ des G-faisceaux abéliens sur X dans la catégorie $\operatorname{Ab}(G)$ des groupes abéliens avec action de G. Pour chaque G-faisceau $\mathcal{F}$ on obtient des G-groupes de cohomologie qu'on note par un abus très provisoire $H^i(X,\mathcal{F})$. Le rapport avec les groupes de cohomologie usuels est donné par la proposition suivante.

Proposition 3.2 *Le foncteur d'oubli de la catégorie* $\mathrm{Ab}(G)$ *des groupes abéliens avec action de G dans la catégorie* Ab *des groupes abéliens envoie les G-groupes de cohomologie sur les groupes de cohomologie usuels.*

3.2 Groupe de Grothendieck équivariant

Définition 3.3 Soit X un G-schéma noethérien. On désigne par $K'(G, X)$ (resp. $K(G, X)$) le groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphismes $[\mathcal{F}]$ de G-faisceaux cohérents (resp. de G-faisceaux localement libres de rang fini) sur X, modulo les relations $[\mathcal{F}] = [\mathcal{F}'] + [\mathcal{F}'']$ s'il existe une suite exacte de G-faisceaux $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$.

Lorsque X est régulier, on montre que ces deux groupes sont canoniquement isomorphes, ce qui permet de les identifier.

Si $f : X \to Y$ est un G-morphisme propre de G-schémas noethériens, et $\mathcal{F}$ est un G-faisceau cohérent sur X, alors les $R^i f_*(\mathcal{F})$ sont des faisceaux cohérents ([EGA III], [6, 3.2.1]) qu'on peut munir de G-linéarisations par transfert de structure. D'autre part $R^i f_* = 0$ pour i assez grand (EGA III [6, 1.4.12]), on peut donc poser :

$$f_*([\mathcal{F}]) = \sum_i (-1)^i [R^i f_*(\mathcal{F})].$$

La suite exacte longue de cohomologie associée au foncteur f_* assure que le morphisme f_* est bien défini. D'autre part, la suite spectrale de Leray assure que cette opération est compatible avec la composition. En conclusion :

Proposition 3.4 $(G, X) \to K'(G, X)$ *définit un foncteur covariant par rapport aux G-morphismes propres de G-schémas noethériens.*

3.3 Définition de la caractéristique d'Euler équivariante

Définition 3.5 Soient k un corps algébriquement clos sur lequel G agit trivialement et X un G-schéma noethérien muni d'un morphisme structurel $s : X \to \operatorname{spec} k$ propre et équivariant. Si $\mathcal{F}$ est un G-faisceau cohérent sur X on définit sa *caractéristique d'Euler-Poincaré équivariante* comme étant le module virtuel de $R_k(G)$:

$$\chi(G, \mathcal{F}) := s_*([\mathcal{F}]) = \sum_{i=0}^{\dim X} (-1)^i [H^i(X, \mathcal{F})].$$

La définition de la caractéristique d'Euler-Poincaré équivariante suggère qu'elle a un bon comportement par image directe. La proposition suivante souligne le fait que c'est bien le cas avec les immersions fermées.

Proposition 3.6 *On considère le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "s'"'] & X \arrow[d, "s"] \\ & \operatorname{spec} k \end{tikzcd}$$

où X, X' sont deux schémas noethériens, i est une G-immersion fermée, s et s' sont deux G-morphismes propres, et le diagramme commute. Alors pour tout G-faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X' on a : $\chi(G, i_*\mathcal{F}) = \chi(G, \mathcal{F})$.

Preuve Le diagramme commutatif ci-dessus induit un diagramme commutatif de foncteurs :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ab}(G, X') \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "s'_*"'] & \mathrm{Ab}(G, X) \arrow[d, "s_*"] \\ & k[G]\text{-Mod}. \end{tikzcd}$$

On conclut grâce au fait que le foncteur i_* est exact. ■

4 Formule de Riemann-Roch équivariante

4.1 Définitions

Le mot *courbe* désignera une courbe projective et lisse sur un corps algébriquement clos k de caractéristique p (au sens de [8, Chapter IV]). Elle sera toujours supposée irréductible, et on notera ξ son point générique. On parlera des *points* d'une courbe pour désigner ses points fermés. Si X est une courbe on notera $\mathrm{Aut}_k(X)$ le groupe de ses automorphismes fixant le corps de base k. Les actions de groupe sur les courbes considérées seront fidèles et définies sur k, autrement dit si X est une courbe et G est un groupe, une action de G sur X est la donnée d'un morphisme injectif $G \to \mathrm{Aut}_k(X)$. On supposera toujours le groupe G *fini*. Cette condition n'est pas trop limitative : en effet il est connu que les courbes de genre supérieur ou égal à 2 ont un groupe d'automorphismes fini. Les faits suivants sont également bien connus.

Fait 4.1 *Si X est une courbe munie d'une action d'un groupe fini G, alors X est un G-schéma admissible.*

En effet toute orbite sous G est contenue dans un ouvert affine (on peut prendre le complémentaire de n'importe quel point n'appartenant pas à cette orbite, par exemple).

Fait 4.2 *Si X est une courbe munie d'une action d'un groupe fini G, de quotient $\pi\colon X \to Y = X/G$, alors Y est lisse.*

En effet, X étant lisse et de dimension 1, X est en fait normale, ce dont on déduit sans difficulté que Y est normale, donc lisse.

4.2 Ramification de l'action

Soit P un point de X, on note $G_P = \{g \in G \mid gP = P\}$ son stabilisateur, et e_P le cardinal de G_P. D'un point de vue arithmétique, G_P est aussi le groupe de décomposition en P de l'extension $\pi\colon X \to Y = X/G$; il coïncide avec le groupe d'inertie en P, puisque le corps de base est supposé algébriquement clos. On notera X_{ram} l'ensemble fini des points de X à inertie non triviale.

Définition 4.3 L'action de G sur X est dite *modérée* si l'ordre des stabilisateurs est premier à la caractéristique du corps de base ; elle est dite *libre* si tous les stabilisateurs sont triviaux.

Dans le cas d'une action modérée sur une courbe, on peut préciser la structure des stabilisateurs :

Fait 4.4 *Si l'action de G sur X est modérée, les stabilisateurs sont cycliques.*

Ceci découle par exemple de [14, chapitre IV, section 2, corollaire 1].

4.3 Caractères de ramification

Par la suite on notera $\mathcal{O}_{X,P}$ l'anneau local d'un point P de X et $\mathfrak{m}_P$ son idéal maximal. On appellera *espace cotangent à X en P* le k-espace vectoriel unidimensionel $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$. Enfin pour tout groupe G, $\hat{G}$ désignera l'ensemble des caractères irréductibles de G, c'est un groupe égal à $\mathrm{Hom}(G, k^*)$ si G est commutatif.

Définition 4.5 Soit P un point de X. On appelle *caractère de ramification de X en P* et on note ψ_P le caractère de G_P par lequel G_P agit sur l'espace cotangent à X en P.

Proposition 4.6

(i) $\forall f \in k(X)^* \; \forall g \in G_P \; f^g/f \equiv \psi_P(g)^{v_P(f)} \mod \mathfrak{m}_P$ *dans* $\mathcal{O}_{X,P}$.
(ii) $\forall \omega \in \Omega^*_{X,\xi} \; \forall g \in G_P \; \omega^g/\omega \equiv \psi_P(g)^{v_P(\omega)+1} \mod \mathfrak{m}_P$ *dans* $\mathcal{O}_{X,P}$.
(iii) *Si $P' = gP$ alors $\psi_{P'} = \psi_P^g$ (i.e., $\forall g' \in G_{P'}$, $\psi_{P'}(g') = \psi_P(g^{-1}g'g)$).*
(iv) *Si la ramification est modérée ψ_P est un générateur de $\hat{G}_P$.*

Preuve Immédiat, sauf pour le (iv), qui découle de [14, chapitre IV, section 2, corollaire 1]. ■

4.4 Degré équivariant

4.4.1 Degré équivariant d'un diviseur invariant

On appelera *orbite réduite* tout diviseur du type $D' = \sum_{g \in G \setminus G_P} gP$ où P est un point de X, G_P est son stabilisateur dans G, et $G \setminus G_P$ l'ensemble des classes à gauche de G modulo G_P. On appelera de même *orbite* tout diviseur du type $D = rD'$ où $r \in \mathbb{Z}$ et où D' est une orbite réduite. Les orbites engendrent $(\mathrm{Div}\, X)^G$ comme groupe ce qui permet de poser la définition suivante :

Définition 4.7 On définit l'application degré équivariant $\deg_{\mathrm{eq}}\colon (\mathrm{Div}\, X)^G \to R_k(G)$ comme étant l'application vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $\deg_{\mathrm{eq}}$ est additif sur les G-diviseurs à supports disjoints ;
(2) soit $D = rD'$ une orbite comme ci-dessus. On pose :

$$\deg_{\mathrm{eq}}(D) = \begin{cases} \mathrm{Ind}_{G_P}^G \sum_{l=1}^{r} \psi_P^{-l} & \text{si } r > 0, \\ 0 & \text{si } r = 0, \\ -\,\mathrm{Ind}_{G_P}^G \sum_{l=0}^{-(r+1)} \psi_P^{l} & \text{si } r < 0. \end{cases}$$

Remarques

(1) Le fait que dans la formule ci-dessus $\deg_{\mathrm{eq}}(D)$ est bien défini indépendamment du choix de P résulte du lemme 4.6 (iii).
(2) Le degré équivariant n'a pas de bonnes propriétés fonctorielles : il n'est pas additif, de plus il n'est pas clair que l'on ait un analogue équivariant de la formule classique $\deg\big(f^*(D)\big) = \deg(f)\cdot\deg(D)$.

4.4.2 Degré équivariant d'un G-faisceau inversible

D'après le théorème 2.3 on a un isomorphisme entre $\mathrm{Pic}_G X$ et $(\mathrm{CaCl}\, X)^G/\pi^* \,\mathrm{Princ}\, Y$. Comme la courbe X étudiée est lisse, le groupe des diviseurs de Cartier sur X coïncide avec le groupe des diviseurs de Weil sur X [8, Chapter II, Proposition 6.11] et on a donc un isomorphisme :

$$\mathrm{Pic}_G X \simeq (\mathrm{Div}\, X)^G/\pi^*\big(\mathrm{Princ}(Y)\big)$$

où $\mathrm{Princ}(Y)$ désigne le groupe des diviseurs principaux sur Y.

Le corollaire de la proposition suivante montre que l'application $\deg_{\mathrm{eq}}$ définie au paragraphe précédent est invariante sur les classes modulo $\pi^*\big(\mathrm{Princ}(Y)\big)$, et induit donc une application $\deg_{\mathrm{eq}}\colon\ \mathrm{Pic}_G X \to R_k(G)$.

Proposition 4.8 *Soit H un groupe fini produit semi-direct d'un sous-groupe cyclique Z d'ordre e_0 premier à p et d'un sous-groupe distingué P d'ordre une puissance de p. Soit de plus ψ' un caractère primitif de Z et ψ le caractère de H correspondant. Alors on a l'égalité suivante dans $R_k(H)$:*

$$\sum_{l=1}^{\#H} \psi^l = \big[k[H]\big].$$

Preuve Rappelons qu'à une représentation d'un groupe H d'ordre divisible par p sur le corps k (de caractéristique p) on associe un caractère de Brauer qui "relève la trace en caractéristique zéro". Formellement c'est une fonction $H_{\mathrm{reg}} \to A$ de l'ensemble des éléments p-réguliers de H (*i.e.*, ceux d'ordre premier à p) vers un anneau de valuation discrète de caractéristique 0 et de corps résiduel k (voir [15, chapitre 18] pour une définition plus précise). D'après [15, chapitre 18, corollaire 1 du théorème 42], le caractère de Brauer d'une représentation de H détermine sa classe dans $R_k(H)$.

Revenant à l'énoncé de notre proposition, on voit qu'il suffit de montrer l'égalité des caractères de Brauer des représentations $x = \sum_{l=1}^{\#H} \psi^l$ et $y = k[H]$, qu'on note respectivement ϕ_x et ϕ_y. Soit h un élément p-régulier non trivial de H. Comme ψ' est supposé primitif, $\psi(h)$ est une racine e_0-ième de l'unité non triviale. On en déduit que le caractère ϕ_x est donné par :

$$\phi_x(h) = \begin{cases} \#H & \text{si } h = 1, \\ 0 & \text{si } h \neq 1, \end{cases}$$

et donc $\phi_x = \phi_y$, d'où la proposition. ■

Corollaire 4.9 *Soient D un diviseur G-invariant sur X et δ un diviseur sur Y. On a :*

$$\deg_{\mathrm{eq}}\bigl(D + \pi^*(\delta)\bigr) = \deg_{\mathrm{eq}} D + \deg \delta \bigl[k[G]\bigr].$$

Preuve On peut supposer que le support de δ est réduit à un point Q. Soit P un antécédent de Q par $\pi \colon X \to Y$. D'après [14, section IV, corollaire 4 de la proposition 7], on peut appliquer le lemme ci-dessus au stabilisateur G_P de P, ce qui donne l'égalité annoncée. (On peut raisonner modulo $\bigl[k[G]\bigr]$ et se ramener au cas où $\delta = Q$ et $D = rD'$, où D' est l'orbite réduite au dessus de Q. Alors une discussion immédiate sur r permet de conclure.) ■

4.5 Formule de Riemann-Roch équivariante

4.5.1 Enoncé

Théorème 4.10 *Soit $\mathcal{L}$ un G-faisceau inversible sur X. On a l'égalité dans $R_k(G)$:*

$$\chi(G, \mathcal{L}) = \chi(G, \mathcal{O}_X) + \deg_{\mathrm{eq}}(\mathcal{L}).$$

4.5.2 Démonstration

D'après la section 4.4.2, $\mathcal{L} \simeq_G \mathcal{L}_X(\Delta)$ pour un diviseur invariant Δ. On suppose que le support de Δ contient une orbite $D = rD'$ comme ci-dessus. On pose : $\Delta' = \Delta - D$. On va montrer :

$$(1)\quad \forall s \in \mathbb{Z}, \quad \chi\Bigl(G, \mathcal{L}_X\bigl(\Delta' + (s+1)D'\bigr)\Bigr) - \chi\bigl(G, \mathcal{L}_X(\Delta' + sD')\bigr) = \mathrm{Ind}_{G_P}^{G} \psi_P^{-(s+1)}$$

ce qui suffira à démontrer le théorème, par récurrence. Soit i l'immersion fermée : $D' \to X$. On part de la suite exacte définissant la structure réduite de D' :

$$0 \to \mathcal{L}_X(-D') \to \mathcal{O}_X \to i_*(\mathcal{O}_{D'}) \to 0.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2003-029-2 Published online by Cambridge University Press

On tensorise par $\mathcal{L}_X\big(\Delta'+(s+1)D'\big)$ qui est localement libre, donc plat, ce qui donne :

$$0 \to \mathcal{L}_X(\Delta'+sD') \to \mathcal{L}_X\big(\Delta'+(s+1)D'\big) \to i_*(\mathcal{O}_{D'})\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{L}_X\big(\Delta'+(s+1)D'\big) \to 0.$$

Posons $\mathcal{S} = i_*(\mathcal{O}_{D'}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}_X\big(\Delta' + (s+1)D'\big)$.

L'égalite (1) découle alors de

$$\chi(G,\mathcal{S}) = \operatorname{Ind}_{G_P}^{G} \psi_P^{-(s+1)}. \tag{2}$$

Le calcul (2) résultera du lemme suivant.

Lemme 4.11 *Soit $\mathcal{R}$ un G-faisceau de torsion sur X, à support dans $D' = \sum_{g\in G\backslash G_P} gP$. Si $\mathcal{R} = i_*(\mathcal{R}')$ où $i\colon D' \to X$ est l'immersion fermée, on a pour tout point P de D' :*

$$\chi(G,\mathcal{R}) = [\operatorname{Ind}_{G_P}^{G} \mathcal{R}'_P].$$

Preuve D'après la proposition 3.6 l'immersion fermée $i\colon D' \to X$ induit un morphisme $K(G,D') \to K(G,X)$ qui commute avec les caractéristiques d'Euler équivariantes. On doit donc montrer en fait que : $\chi(G,\mathcal{R}') = [\operatorname{Ind}_{G_P}^{G} \mathcal{R}'_P]$.

La catégorie des G-faisceaux cohérents sur D' est naturellement équivalente à la catégorie des G_P-faisceaux cohérents sur P ce qui donne un isomorphisme naturel :

$$K(G,D') \simeq K(G_P,P).$$

On conclut en remarquant que cet isomorphisme commute également avec les caractéristiques d'Euler équivariantes, plus précisement, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} K(G,D') \arrow[r, equal] \arrow[d, "\chi(G,\cdot)"'] & K(G_P,P) \arrow[d, equal, "\chi(G_P,\cdot)"] \\ R_k(G) & R_k(G_P). \arrow[l, "\operatorname{Ind}"'] \end{tikzcd}$$

En effet $\chi(G,\mathcal{R}') = [H^0(D',\mathcal{R}')]$ et de plus :

$$H^0(D',\mathcal{R}') = \bigoplus_{P\in D'} \mathcal{R}'_P = \bigoplus_{g\in G\backslash G_P} \mathcal{R}'_{gP} = \operatorname{Ind}_{G_P}^{G} \mathcal{R}'_P. \qquad \blacksquare$$

Revenons à la démonstration de l'égalité 2. Ici le faisceau de torsion considéré est $\mathcal{S} = i_*(\mathcal{O}_{D'})\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{L}_X\big(\Delta'+(s+1)D'\big) = i_*(\mathcal{S}')$ avec $\mathcal{S}' = i^*\Big(\mathcal{L}_X\big(\Delta'+(s+1)D'\big)\Big)$ donc $\mathcal{S}'_P = \mathcal{O}_P \otimes_{\mathcal{O}_{X,P}} \mathfrak{m}_P^{-(s+1)} = \mathfrak{m}_P^{-(s+1)}/\mathfrak{m}_P^{-(s+2)}$, où $\mathfrak{m}_P$ désigne l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,P}$. Donc G_P agit par $\psi_P^{-(s+1)}$ sur $\mathcal{S}'_P$, d'où le résultat.

4.6 G-faisceaux inversibles de grand degré et ramification modérée

Le théorème 4.10 permet de calculer la *différence* de deux caractéristiques d'Euler équivariantes. Cependant, si on en considère une seule, on ne dispose pour l'instant d'aucune d'expression *absolue* (*i.e.*, totalement explicite en fonction des données de ramification). Le but de cette section est de montrer que *si on suppose la ramification modérée*, on peut donner une expression absolue de toute caractéristique d'Euler équivariante. Il suffit bien sûr de calculer l'une d'entre elles, les autres s'en déduisant grâce au théorème 4.10. On choisit naturellement de calculer celle du faisceau structurel (théorème 4.15). Celle-ci s'exprime en fonction d'un certain *module de ramification* qu'on introduit à la section 4.6.2. La preuve est donnée à la section 4.7.

Comme application de ce calcul, on donne à la section 4.8 un résultat (théorème 4.19) explicitant la structure de représentation de l'espace des sections globales d'un G-faisceau de grand degré.

Un des ingrédients essentiels de ces deux résultats est un *critère de projectivité* dû à Nakajima, dont on donne une démonstration directe.

4.6.1 Projectivité de l'espace des sections globales d'un G-faisceau inversible de grand degré

On rappelle tout d'abord le critère de projectivité classique suivant :

Proposition 4.12 *Soit G un groupe fini, M un $k[G]$-module de type fini, p la caractéristique de k, H un p-Sylow de G. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *M est un $k[G]$-module projectif ;*
(ii) *$M_{|H}$ est un $k[H]$-module libre ;*
(iii) $H^1(H, M_{|H}) = 0$.

Preuve L'équivalence de (i) et (ii) est une conséquence d'un théorème de Green [4, Corollary to Theorem 6]. On peut en donner une preuve élémentaire n'utilisant que la notion de projectivité relative (voir par exemple [1]), comme suit. Le fait que H est un p-Sylow de G permet d'affirmer que M est projectif relativement à H, ou de manière équivalente que M est facteur direct de $\mathrm{Ind}_H^G M_{|H}$. Ainsi il est clair que (ii) implique (i). Réciproquement, si M est un $k[G]$-module projectif, $M_{|H}$ est un $k[H]$-module projectif, ce qui équivaut au fait d'être libre, car H est un p-groupe.

Pour l'équivalence de (ii) et (iii), voir par exemple [1, Proposition 3.14.4]. ■

On en déduit une nouvelle preuve du critère suivant :

***Corollaire 4.13* (Nakajima)** *Soit X une courbe munie d'une action d'un groupe fini G. Si l'action de G sur X est modérée alors pour tout G-faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X vérifiant* $\deg(\mathcal{L}) > 2g_X - 2$ *l'espace $H^0(X, \mathcal{L})$ est $k[G]$-projectif.*

Preuve Soit H un p-Sylow de G. On note $\varpi\colon X \to Z = X/H$ le quotient. Les deux suites exactes fondamentales en cohomologie équivariante (voir [7]) s'écrivent ici :

$$0 \to H^1\big(H, \Gamma_X(\mathcal{L})\big) \to H^1(X, H, \mathcal{L}) \to 0,$$

$$0 \to H^1(Z, \varpi_*^H \mathcal{L}) \to H^1(X, H, \mathcal{L}) \to \Gamma_Z(R^1 \varpi_*^H \mathcal{L}) \to 0.$$

L'hypothèse de modération implique que H agit librement sur X, ce dont on déduit $R^1\varpi_*^H\mathcal{L} = 0$ d'une part (d'après [7, V, section 2]), et $H^1(Z, \varpi_*^H\mathcal{L}) = 0$ (pour des raisons de degré) d'autre part. Les deux suites exactes ci-dessus et la proposition 4.12 impliquent la conclusion. ■

4.6.2 Module de ramification

Par la suite on notera Γ_G le module de ramification de X pour l'action de G introduit par Kani et Nakajima [9], [11]. Rappelons en la définition.

Définition 4.14 On appelle *module de ramification de X pour l'action de G* le $k[G]$-module :

$$\Gamma_G = \sum_{P \in X} \mathrm{Ind}_{G_P}^G \sum_{l=1}^{e_P - 1} l\psi_P^l.$$

4.6.3 Formule de Hurwitz équivariante

***Théorème 4.15* (Kani)** *Soit X une courbe projective et lisse munie d'une action modérée de G. Il existe un unique $k[G]$-module $\tilde{\Gamma}_G$ tel que $\tilde{\Gamma}_G^{\oplus \# G} = \Gamma_G$. De plus, on a l'égalité suivante dans $R_k(G)$:*

$$\chi(G, \mathcal{O}_X) = \chi(\mathcal{O}_Y) \cdot \big[k[G]\big] - [\tilde{\Gamma}_G].$$

4.7 Preuve de la formule de Hurwitz équivariante

Par dualité, le théorème 4.15 est équivalent à [9, Corollary of Theorem 2]. On peut aussi le déduire de [11, Theorem 2]. On donne ici une preuve indépendante dont le principe est, grâce à des réductions successives, de pouvoir appliquer la *formule de Lefschetz* [3, VI, Section 9].

4.7.1 Première réduction

Montrons qu'il suffit de prouver l'égalité suivante dans $R_k(G)$:

$$\#G\big(\chi(\mathcal{O}_Y) \cdot \big[k[G]\big] - \chi(G, \mathcal{O}_X)\big) = [\Gamma_G]. \tag{3}$$

Supposons donc l'égalité 3 vérifiée. Comme $R_k(G)$ est le groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphismes de $k[G]$-modules simples, il suffit de démontrer :

$$\exists\,!\ \tilde{\Gamma}_G / \tilde{\Gamma}_G^{\oplus \# G} \simeq \Gamma_G. \tag{4}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2003-029-2 Published online by Cambridge University Press

On commence par noter que Γ_G est un $k[G]$-module projectif, ce qui montre l'unicité, puisque l'égalité 4 détermine le caractère de Brauer de $\tilde{\Gamma}_G$.

L'existence découle du lemme suivant, appliqué au faisceau structurel. Les notations sont celles de [15, partie III], en particulier $P_k(G)$ désigne le groupe de Grothendieck des $k[G]$-modules *projectifs* de type fini.

Lemme 4.16 *Soit $\mathcal{L}$ un G-faisceau inversible sur une courbe X munie d'une action modérée de G. La caractéristique d'Euler équivariante $\chi(G,\mathcal{L})$ de $\mathcal{L}$ est dans l'image de l'homomorphisme de Cartan $c\colon P_k(G) \to R_k(G)$.*

Preuve L'hypothèse de modération implique que pour tout G-faisceau inversible $\mathcal{L}$, $\deg_{\mathrm{eq}} \mathcal{L}$ est dans l'image de c. D'après le théorème 4.10 il suffit donc de prouver le lemme pour un G-faisceau inversible quelconque. En appliquant le corollaire 4.13, on voit que n'importe quel G-faisceau de degré strictement supérieur à $2g_X - 2$ convient. ■

4.7.2 Deuxième réduction

Supposons que l'égalité 3 est vraie dans le cas où la courbe X est munie d'une action d'un groupe cyclique d'ordre premier à la caractéristique p de k, et montrons qu'elle est valable dans le cas général. En appliquant la formule de Hurwitz classique on se ramène à montrer : $-\#G\chi(G,\mathcal{O}_X) \equiv [\Gamma_G] \mod \big[k[G]\big]$. En considérant les caractères de Brauer associés, on voit que cette égalité est vraie si et seulement si elle l'est en restriction à tout sous-groupe cyclique H de G d'ordre premier à p. Le lemme suivant achève donc le dévissage.

Lemme 4.17

$$[\Gamma_G]_{|H} \equiv [G:H]\cdot[\Gamma_H] \mod \big[k[H]\big].$$

Preuve La formule se prouve par un calcul direct utilisant la formule de Mackey [15, chapitre 7, proposition 22]. Comme ce calcul est très analogue à celui de [11, Lemma, pp. 120–121], nous l'omettons. ■

4.7.3 Démonstration de l'égalité 3 dans le cas cyclique réductif

On suppose X munie d'une action d'un groupe G cyclique d'ordre n premier à la caractéristique de k. On note comme $x = \#G\big(\chi(\mathcal{O}_Y)\cdot\big[k[G]\big] - \chi(G,\mathcal{O}_X)\big)$ et $y = [\Gamma_G]$. Comme $k[G]$ est semi-simple, on peut utiliser la théorie classique des caractères. On note χ_x, χ_y les caractères de Frobénius associés à x et y.

Soit σ un générateur de G, il suffit, quitte à faire un nouveau dévissage, de montrer que $\chi_x(\sigma) = \chi_y(\sigma)$.

Fixons ζ une racine primitive n-ième de l'unité. Si P appartient à X^σ on note n_P l'entier, bien défini modulo n, tel que $\psi_P(\sigma) = \zeta^{n_P}$.

Pour calculer $\chi_x(\sigma)$ on applique la formule des points fixes de Lefschetz [3, VI, Section 9] au faisceau structurel ce qui donne :

$$\chi_x(\sigma) = n \sum_{P \in X^\sigma} \frac{1}{\zeta^{n_P} - 1}.$$

Dans le calcul de $\chi_y(\sigma)$, seuls interviennent les points totalement ramifiés, comme le montre le lemme suivant.

Lemme 4.18 *Si $P \notin X^\sigma$ et $l \in \mathbb{Z}$ alors $(\mathrm{Ind}_{G_P}^G \psi_P^l)(\sigma) = 0$.*

Preuve Soit χ le générateur de $\hat{G}$ défini par : $\chi(\sigma) = \zeta$. Comme la restriction $\hat{G} \to \hat{G}_P$ est surjective on peut trouver un entier n_P tel que $\psi_P = \chi_{|G_P}^{n_P}$. Il vient alors :

$$\mathrm{Ind}_{G_P}^G \psi_P^l = \mathrm{Ind}_{G_P}^G \chi_{|G_P}^{l n_P} = \chi_P' \cdot \chi^{l n_P}$$

où $\chi_P' = \mathrm{Ind}_{G_P}^G 1$ est la représentation de permutation associée à l'action de G sur G_P. Mais comme $P \notin X^\sigma$ et G est cyclique, σ ne fixe aucun des conjugués de P, et $\chi_P'(\sigma) = 0$. ■

On déduit immédiatement du lemme :

$$\chi_y(\sigma) = \sum_{P \in X^\sigma} \sum_{l=1}^{n-1} l \zeta^{l n_P}$$

et l'égalité $\chi_x(\sigma) = \chi_y(\sigma)$ découle de l'identité formelle :

$$\frac{n}{\omega - 1} = \sum_{l=1}^{n-1} l\,\omega^l$$

valable pour toute racine n-ième de l'unité ω différente de 1 (d'après la proposition 4.6 (iv) il est clair que $\zeta^{l n_P} \neq 1$).

4.8 Espace des sections globales d'un G-faisceau inversible de grand degré

Les théorèmes 4.10 et 4.15 donnent une expression explicite du caractère de Brauer de l'espace des sections globales d'un G-faisceau inversible de grand degré. Cette expression est moins générale que celle donnée par Nakajima [11, Theorem 2]). Dans le cas où la ramification est modérée, cette expression détermine la classe d'isomorphisme de cet espace de sections globales, ou de manière équivalente, la classe de $[H^0(X, \mathcal{L})]$ dans le groupe de Grothendieck des $k[G]$-modules projectifs $P_k(G)$:

Corollaire 4.19 *Soit X une courbe projective et lisse munie d'une action modérée de G. Soit $\mathcal{L}$ un G-faisceau inversible sur X, tel que $\deg \mathcal{L} > 2g_X - 2$. On a l'égalité suivante dans $P_k(G)$:*

$$[H^0(X, \mathcal{L})] = \chi(\mathcal{O}_Y)\big[k[G]\big] - [\tilde{\Gamma}_G] + \deg_{\mathrm{eq}} \mathcal{L}.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2003-029-2 Published online by Cambridge University Press

Preuve D'après les théorèmes 4.10 et 4.15 l'égalité est vraie dans $R_k(G)$. Pour justifier le corollaire, on peut invoquer l'injectivité de l'homomorphisme de Cartan à condition de montrer que tous les modules intervenant sont projectifs. La projectivité de $\tilde{\Gamma}_G$ et de $\deg_{\text{eq}} \mathcal{L}$ résulte de l'hypothèse sur la ramification. La projectivité de $H^0(X, \mathcal{L})$ découle du corollaire 4.13. ■

Remarque Ce résultat est une version explicite de [12, Theorem 2] (voir le corollaire 4.13) qui affirme abstraitement que $H^0(X, \mathcal{L})$ est projectif, sans donner de décomposition.

4.9 Le problème de la structure de l'espace des différentielles

4.9.1 Enoncé du problème

Il s'agit de résoudre le problème de Chevalley-Weil dans le cas modulaire, autrement dit, de déterminer la structure de $H^0(X, \Omega_X)$ comme $k[G]$-module lorsque p divise l'ordre de G. Plus précisement, on demande d'écrire $H^0(X, \Omega_X)$ comme somme directe $k[G]$-modules indécomposables (cela suppose que la théorie de la représentation modulaire de G soit bien comprise). Kani a donné une réponse satisfaisante à ce problème dans le cas où l'action est modérée (voir [9] et le paragraphe ci-dessous). Le problème est encore ouvert dans le cas d'une action sauvage, bien que résolu dans le cas p-cyclique (voir [17]) et certaines p-extensions abéliennes élémentaires (voir [13]). On se contente ici de donner une relation reliant dans le cas général le caractère de Brauer de $H^0(X, \Omega_X)$ à celui des caractères d'Artin de l'extension.

4.9.2 Degré équivariant du faisceau des différentielles et caractère d'Artin

Rappelons brièvement comment on définit le caractère d'Artin associé à la G-courbe X. Les notations sont inspirées de [14, chapitre VI, section 4]. Soit P un point de X, on définit une fonction centrale a_P sur G_P en posant pour $g \neq 1$: $a_P(g) = -i_P(g)$ avec $i_P(g) = v_P(u_P^g - u_P)$, où u_P est une uniformisante de X en P, et $a_G(1)$ tel que $\langle a_G, 1\rangle = 0$. C'est en fait un caractère de G_P, et pour Q un point de Y, dont un relèvement arbitraire par π est $\tilde{Q}$, on pose $a_Q = \operatorname{Ind}_{G_{\tilde{Q}}}^G a_{\tilde{Q}}$, caractère qui est indépendant du choix de $\tilde{Q}$. Enfin on peut définir le caractère d'Artin associé à X :

$$a_{G,X} = \sum_{Q \in Y} a_Q.$$

On s'intéresse à la décomposition de ce caractère. Pour préciser ce que cela signifie, on reprend les notations de [15] pour la théorie de la représentation modulaire. En particulier K désigne un corps de caractéristique 0 complet pour une valuation discrète et de corps résiduel k (le corps de base de la courbe X considérée). D'après [15, section 19.2], on peut choisir un tel K tel que $a_{G,X}$ soit réalisable sur K (par exemple le corps des vecteurs de Witt sur k convient). On peut alors énoncer :

Théorème 4.20 *L'image de $a_{G,X}$ par l'homomorphisme de décomposition d: $R_K(G) \to R_k(G)$ est égale à $\deg_{\mathrm{eq}} \Omega_X - (2g_Y - 2)\left[k[G]\right]$.*

Preuve Par commodité, on introduit le diviseur de ramification R du morphisme π ; plus précisement R est le diviseur associé au faisceau d'idéaux $\pi^*\Omega_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^{-1}$. Comme son faisceau d'idéaux est un G-faisceau, c'est un diviseur G-invariant.

On va comparer les caractères de Brauer associés aux deux expressions à comparer. En ces termes, $d(a_{G,X})$ s'interprète comme la restriction du caractère d'Artin aux p'-éléments de G.

La comparaison de ces deux caractères de Brauer en $g = 1$ est aisée, en effet en vertu de [14, chapitre IV, proposition 4], on a $a_P(1) = v_P(R)$, et il suffit alors d'appliquer la formule classique d'Hurwitz, qui affirme que $2g_X - 2 = \#G(2g_Y - 2) + \deg R$.

On note de plus que $\Omega_X \equiv \mathcal{L}_X(R) \mod \pi^*(\operatorname{Pic} Y)$, donc $\deg_{\mathrm{eq}} \Omega_X \equiv \deg_{\mathrm{eq}} R \mod \left[k[G]\right]$. Il suffit donc à présent de comparer les caractères de Brauer associés à $d(a_{G,X})$ et à $\deg_{\mathrm{eq}} R$ en les p'-éléments non triviaux de G.

Soit à présent P un point de X, g un p'-élément non trivial de G_P, il suffit de montrer l'égalité de $a_P(g) = -1$ et de $\sum_{l=1}^{v_P(R)} \psi_P(g)^{-l}$. On note $G_{P,i}$ le i-ème groupe de ramification et $e_{P,0} = \#G_{P,0}/\#G_{P,1}$ la p'-partie de l'indice de ramification de π en P. $\psi_P(g)$ est une racine $e_{P,0}$-ème de l'unité et le lemme suivant suffit donc à conclure. ■

Lemme 4.21 *Les coefficients du diviseur de ramification R vérifient la congruence suivante en tout point P :*

$$v_P(R) \equiv -1 \mod e_{P,0}.$$

Preuve Soit ω' une forme différentielle méromorphe non nulle sur Y, alors $\omega = \pi^*\omega'$ est une forme différentielle méromorphe non nulle sur X, et ω est de plus G-invariante, ce qui permet d'affirmer qu'on a un isomorphisme de G-faisceaux : $\Omega_X \simeq \mathcal{L}_X((\omega))$. On a donc $(\omega) \equiv R \mod \pi^*(\operatorname{Div} Y)$, et donc en particulier $v_P(\omega) \equiv v_P(R) \mod e_{P,0}$. Mais à présent le lemme 4.6 (ii) donne $\psi_P(g)^{v_P(\omega)+1} = 1$ pour tout g dans G_P. En choisissant g dans G_P tel que sa classe dans $G_{P,0}/G_{P,1}$ soit génératrice, on obtient la congruence souhaitée. ■

Corollaire 4.22 *Si l'action de G sur X est modérée on a l'égalité dans $R_k(G)$:*

$$\deg_{\mathrm{eq}} \Omega_X = (2g_Y - 2 + \#Y_{\mathrm{ram}})\left[k[G]\right] - [kX_{\mathrm{ram}}]$$

où $\#Y_{\mathrm{ram}}$ est le nombre d'orbites ramifiées de X et kX_{ram} est la représentation de permutation de G associée à l'ensemble des points de ramification de X.

Preuve L'image par d du caractère d'Artin s'écrit dans le cas modéré :

$$d(a_{G,X}) = \sum_{Q \in Y} \operatorname{Ind}_{G_{\bar{Q}}}^{G}\left(\left[k[G_{\bar{Q}}]\right] - [k]\right)$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2003-029-2 Published online by Cambridge University Press

(voir par exemple [15, chapitre 19, section 19.1]). Le théorème 4.20 permet alors de conclure. ■

4.9.3 Structure de l'espace des sections globales du faisceau des différentielles dans le cas modéré

On trace tout d'abord les grandes lignes de la stratégie de Kani dans [9]. Celui-ci a eu l'idée d'utiliser un faisceau $\Omega_X(S)$ de différentielles logarithmiques le long d'un ensemble G-stable non vide S contenant le lieu de ramification de π. L'intérêt de ce faisceau vient du fait que la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte de faisceaux :

$$0 \to \Omega_X \to \Omega_X(S) \to \mathcal{O}_S \to 0 \tag{5}$$

détermine complètement la structure de $H^0(X, \Omega_X)$ (voir [9, Section 5]). Il reste donc à expliciter la structure de $H^0\big(X, \Omega_X(S)\big)$. On va montrer que le résultat suivant est une conséquence directe des théorèmes 4.10 et 4.15.

Théorème 4.23 **(Kani)** *Si l'action de G sur X est modérée on a un isomorphisme de $k[G]$-modules :*

$$H^0\big(X, \Omega_X(S)\big) \oplus \tilde{\Gamma}_G \simeq k[G]^{\oplus g_Y - 1 + \#(S/G)}.$$

Preuve Comme S est non vide, le corollaire 4.13 permet d'affirmer que $H^0\big(X, \Omega_X(S)\big)$ est projectif. Il suffit donc de prouver l'égalité du théorème dans $R_k(G)$. Le fait que $H^1\big(X, \Omega_X(S)\big) = 0$ et les théorèmes 4.10 et 4.15 montrent de plus que cette égalité équivaut à :

$$\deg_{\mathrm{eq}} \Omega_X(S) = \big(2g_Y - 2 + \#(S/G)\big) \cdot \big[k[G]\big].$$

Cette dernière égalité découle des deux faits suivants. En prenant les caractéristiques d'Euler équivariantes sur la suite exacte 5 et en appliquant une nouvelle fois le théorème 4.10 on obtient $\deg_{\mathrm{eq}} \Omega_X(S) = \deg_{\mathrm{eq}} \Omega_X + [kS]$ où kS est la représentation de permutation associée au G-ensemble S. D'autre part, $\deg_{\mathrm{eq}} \Omega_X$ se calcule à l'aide du corollaire 4.22. ■

4.9.4 Dualité équivariante et formule à la Weil

Dans le cas où l'action est sauvage, la démarche ci-dessus échoue, faute de projectivité. On peut cependant donner une relation concernant le caractère de Brauer de $H^0(X, \Omega_X)$. Pour cela on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 4.24 *Soit $\mathcal{F}$ un G-faisceau cohérent. On a un isomorphisme de $k[G]$-modules :*

$$H^1(X, \mathcal{F})^\vee \simeq H^0(X, \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \check{\mathcal{F}}).$$

Preuve Le cup-produit fournit un accouplement :

$$H^0(X, \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \check{\mathcal{F}}) \times H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \Omega_X).$$

Cet accouplement est naturel, et commute donc à l'action de G. Il suffit donc de montrer que $H^1(X, \Omega_X)$ est isomorphe à la représentation triviale, qu'on note k. Pour cela on considère la suite exacte longue associée à la suite exacte courte 5 du paragraphe ci-dessus, qui donne en particulier :

$$H^0\big(X, \Omega_X(S)\big) \to kS \to H^1(X, \Omega_X) \to 0.$$

Comme la somme des résidus d'une forme différentielle logarithmique est nulle, le G-morphisme trace tr : $kS \to k$ se factorise en un G-morphisme $H^1(X, \Omega_X) \to k$ qui est en fait un isomorphisme. ■

Théorème 4.25 *On a l'égalité dans $R_k(G)$:*

$$[H^0(X, \Omega_X)] + [H^0(X, \Omega_X)^\vee] = 2 \cdot [k] + (2g_Y - 2) \cdot \big[k[G]\big] + d(a_{G,X})$$

où $[k]$ désigne la classe de la représentation triviale de G.

Preuve C'est une conséquence directe du théorème 4.10 appliqué à $\mathcal{L} = \Omega_X$, du théorème 4.15, du lemme ci-dessus (qui donne les isomorphismes $H^1(X, \mathcal{O}_X) \simeq H^0(X, \Omega_X)^\vee$ et $H^1(X, \Omega_X) \simeq k$) et du théorème 4.20. ■

Remarque Cette propriété a été énoncée par Kani [9, Remark, p. 200] avec annonce d'une preuve apparemment jamais publiée.

Références

[1] D. J. Benson, *Representations and cohomology. I. Basic representation theory of finite groups and associative algebras.* Cambridge Stud. Adv. Math. **30**, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[2] Geir Ellingsrud and Knud Lønsted, *An equivariant Lefschetz formula for finite reductive groups.* Math. Ann. **251**(1980), 253–261.

[3] William Fulton and Serge Lang, *Riemann-Roch algebra.* Grundlehren Math. Wiss. **277**, Springer-Verlag, 1985.

[4] J. A. Green, *On the indecomposable representations of a finite group.* Math. Z. **70**(1958/59), 430–445.

[5] Alexandre Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental.* SGA 1, Lecture Notes in Math. **224**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[6] ———, *Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **17**, 1963.

[7] ———, *Sur quelques points d'algèbre homologique.* Tohoku Math. J. **9**(1957), 119–221.

[8] Robin Hartshorne, *Algebraic geometry.* Graduate Texts in Math. **52**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[9] Ernst Kani, *The Galois-module structure of the space of holomorphic differentials of a curve.* J. Reine Angew. Math. **367**(1986), 187–206 .

[10] Shoichi Nakajima, *On Galois module structure of the cohomology groups of an algebraic variety.* Invent. Math. **75**(1984), 1–8.

[11] ———, *Galois module structure of cohomology groups for tamely ramified coverings of algebraic varieties.* J. Number Theory **22**(1986), 115–123.
[12] ———, *Action of an automorphism of order p on cohomology groups of an algebraic curve.* J. Pure Appl. Algebra **42**(1986), 85–94.
[13] Martha Rzedowski-Calderón, Gabriel Villa-Salvador and Manohar L. Madan, *Galois module structure of holomorphic differentials in characteristic p.* Arch. Math. (Basel) (2) **66**(1996), 150–156.
[14] Jean-Pierre Serre, *Corps locaux.* Actualités Sci. Indust. **1296**, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago VIII, Hermann, Paris, 1980.
[15] ———, *Représentations linéaires des groupes finis.* Hermann, Paris, 1978.
[16] R. W. Thomason, *Algebraic K-theory of group scheme actions.* In: Algebraic topology and algebraic K-theory (Princeton, NJ, 1983), Ann. of Math. Stud. **113**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1987, 539–563.
[17] Robert C. Valentini and Manohar L. Madan, *Automorphisms and holomorphic differentials in characteristic p.* J. Number Theory **13**(1981), 106–115.

Laboratoire de Mathématiques Pures de Bordeaux
Université Bordeaux I
351, cours de la Libération
F-33405 Talence Cedex
France
courriel: borne@math.u-bordeaux.fr