



Estimation de sommes multiples de fonctions arithmétiques

(Estimation of Multiple Sums of Arithmetical Functions)

RÉGIS DE LA BRETÈCHE

*Laboratoire d'Arithmétique et de Géométrie Algébrique d'Orsay, Université de Paris XI,
91405 Orsay Cedex, France. e-mail: breteche@math.u-psud.fr*

(Received: 3 March 1999; accepted: 28 August 2000)

Abstract. We estimate some sums of the shape

$$S(X^{\beta_1}, \dots, X^{\beta_m}) := \sum_{1 \leq d_1 \leq X^{\beta_1}} \dots \sum_{1 \leq d_m \leq X^{\beta_m}} f(d_1, \dots, d_m),$$

when $m \in \mathbb{N}$ and f is a nonnegative arithmetical function. We relate them to the behaviour of the associated Dirichlet series

$$F(s_1, \dots, s_m) = \sum_{d_1=1}^{\infty} \dots \sum_{d_m=1}^{\infty} \frac{f(d_1, \dots, d_m)}{d_1^{s_1} \dots d_m^{s_m}}.$$

The main aim of this work is to develop analytic tools to count the rational points of bounded height on toric varieties.

Mathematics Subject Classifications (2000). 11N37, 11N45.

Key words. asymptotic result on arithmetical functions.

1. Introduction et résultats

1.1. MOTIVATIONS

Il existe de nombreux résultats en théorie analytique des nombres qui relie le comportement asymptotique de la somme $S(X) = \sum_{d \leq X} f(d)$, où f est une fonction arithmétique, aux propriétés analytiques de la série de Dirichlet

$$F(s) = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{f(d)}{d^s}.$$

Nous renvoyons le lecteur intéressé au livre de Tenenbaum [T95]. Nous citons aussi les travaux de Sargos [S84], [S86] ou de Lichtin [L91], [L95] sur les propriétés

analytiques de

$$\sum_{d_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{d_m=1}^{\infty} P(d_1, \dots, d_m)^{-s}$$

lorsque P est un polynôme vérifiant certaines propriétés.

Cependant, dans certains cas, il peut être utile d'avoir un tel résultat pour des fonctions arithmétiques à plusieurs variables. Nous nous proposons d'estimer certaines sommes multiples de la forme

$$S(X_1, \dots, X_m) := \sum_{1 \leq d_1 \leq X_1} \cdots \sum_{1 \leq d_m \leq X_m} f(d_1, \dots, d_m),$$

lorsque $m \in \mathbb{N}$ et f est une fonction arithmétique positive, en fonction du bon comportement de la série de Dirichlet associée

$$F(s_1, \dots, s_m) = \sum_{d_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{d_m=1}^{\infty} \frac{f(d_1, \dots, d_m)}{d_1^{s_1} \cdots d_m^{s_m}}. \quad (1.1)$$

Il s'agit donc d'établir un théorème taubérien pour les séries de Dirichlet à plusieurs variables. Dans ce travail, nous supposons les propriétés de F connues. Cette démarche diffère de celle de Sargos [S84] [S86] ou Lichtin [L91], [L95] pour qui la première motivation est d'établir des propriétés analytiques de F . Citons aussi les récents travaux de Brion et Vergne [BV97], [BV99] qui décrivent le calcul des résidus itérés de fonctions à plusieurs variables lorsque les pôles sont des réunions d'hyperplans.

Nous nous restreindrons au cas $X_j = X^{\beta_j}$ où $\beta_j > 0$. Par souci de concision, nous utilisons la notation

$$\mathbf{X}^{\boldsymbol{\beta}} := (X^{\beta_1}, \dots, X^{\beta_m}) \quad (\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m) \in (\mathbb{R}_*^+)^m). \quad (1.2)$$

La motivation première de ce travail est de développer des outils analytiques suffisants pour démontrer une formule asymptotique précise dans un problème de compte sur les variétés toriques. Nous développons cette application dans [dlB01].

Comme autres applications, on pourrait envisager l'étude asymptotique du nombre de points \mathbf{d} à n coordonnées entières positives appartenant à un domaine défini par des inégalités $P_j(\mathbf{d}) \leq X^{\beta_j}$ où les P_j sont des monômes en n variables. Nous verrons en (1.8) que la fonction de Dirichlet associée s'écrit comme un produit de fonctions zêta dont les propriétés analytiques sont bien connues.

Il est clair que ce type de résultat suppose que l'on puisse déterminer les propriétés analytiques de F la série de Dirichlet définie en (1.1). Ceci est notamment possible lorsque F s'écrit sous la forme d'un produit eulérien. Comme dans le cas de la dimension un (voir théorème I.2.4 de [T95]), F s'écrit sous la forme d'un produit

eulérien \star si, et seulement si, f est multiplicative i.e.

$$f(d_1, \dots, d_m)f(d'_1, \dots, d'_m) = f(d_1d'_1, \dots, d_md'_m) \quad (\forall \mathbf{d} \in (\mathbb{N}_*)^m, \forall \mathbf{d}' \in (\mathbb{N}_*)^m)$$

dès que

$$\left(\text{ppcm}_{i=1, \dots, n}(d_i), \text{ppcm}_{i=1, \dots, n}(d'_i) \right) = 1.$$

Dans [dlB98], l'auteur étudie le cas de la fonction indicatrice f de l'ensemble

$$E := \left\{ (d_1, d_2, d_3) \in (\mathbb{N}_*)^3 : \text{pgcd}_{i=1,2,3}(d_i) = 1, \exists d_4 \in \mathbb{N} : d_1d_2d_3 = d_4^3 \right\}.$$

Soit

$$\mathcal{N}_1(X) := \text{card}\{(d_1, d_2, d_3) \in E : \max_{i=1,2,3}(d_i) \leq X\}. \quad (1.3)$$

Il obtient dans [dlB98] le résultat suivant.

THÉORÈME ([dlB98]). *Soit $g(X) := (\log X)^{3/5}(\log_2 X)^{-1/5}$. Il existe un polynôme $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ de degré 6 et un réel $c_1 > 0$ tels que l'on ait, pour $X \geq 3$,*

$$\mathcal{N}_1(X) = XQ_1(\log X) + O(X^{7/8} \exp\{-c_1g(X)\}).$$

Nous déterminons aussi le coefficient dominant de Q_1 . Le terme d'erreur est optimal pour la méthode d'analyse complexe utilisée étant donné le domaine sans zéro de la fonction ζ de Riemann actuellement connu.

1.2. NOTATIONS

Nous désignons par \mathbf{s} le m -uplet défini par $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_m)$ lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté. Soit $\mathcal{L}_m(\mathbb{C})$ l'espace des formes \mathbb{C} -linéaires de \mathbb{C}^m dans \mathbb{C} . Nous notons $\{e_j\}_{j=1}^m$ la base canonique de \mathbb{C}^m et $\{e_j^*\}_{j=1}^m$ la base duale dans $\mathcal{L}_m(\mathbb{C})$. Nous noterons $\mathcal{LR}_m(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathcal{LR}_m^+(\mathbb{C})$) l'ensemble des formes linéaires de $\mathcal{L}_m(\mathbb{C})$ dont la restriction à \mathbb{R}^m (resp. $(\mathbb{R}^+)^m$) est à valeurs dans \mathbb{R} (resp. dans \mathbb{R}^+). Soient $\beta_j > 0$ pour $j = 1, \dots, m$. Nous notons \mathcal{B} la forme linéaire de $\mathcal{LR}_m^+(\mathbb{C})$ définie par

$$\mathcal{B} = \sum_{j=1}^m \beta_j e_j^* \quad (1.4)$$

et $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ la matrice ligne associée.

\star On a formellement

$$F(\mathbf{s}) = \prod_p \left(\sum_{\mathbf{v} \in \mathbb{N}^m} \frac{f(p^{v_1}, \dots, p^{v_m})}{p^{v_1 s_1 + \dots + v_m s_m}} \right).$$

La norme $\|\cdot\|_1$ est définie par

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_1 := \sum_{j=1}^m |\tau_j| \quad (\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_m) \in \mathbb{R}^m).$$

Dans toute la suite \mathbf{s} désignera un élément de \mathbb{C}^m qui pourra s'écrire

$$\mathbf{s} = (\sigma_1 + i\tau_1, \dots, \sigma_m + i\tau_m).$$

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, on notera

$$\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_m) = \Im m(\mathbf{s}).$$

Dans \mathbb{R}^m , nous définissons la relation d'ordre \succ dans \mathbb{R}^m par

$$(\mathbf{d} \succ \mathbf{d}') \iff (d_j > d'_j \quad (\forall j)) \quad (\mathbf{d} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{d}' \in \mathbb{R}^m).$$

Nous utilisons aussi la notation $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ pour désigner $\sum_{j=1}^m x_j y_j$ lorsque $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$.

1.3. ÉNONCÉ DES RÉSULTATS

Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat en toute généralité.

THÉORÈME 1. *Soit f une fonction arithmétique positive définie sur \mathbb{N}^m et F la série de Dirichlet associée*

$$F(\mathbf{s}) = \sum_{d_1=1}^{\infty} \dots \sum_{d_m=1}^{\infty} \frac{f(d_1, \dots, d_m)}{d_1^{s_1} \dots d_m^{s_m}}. \quad (1.5)$$

On suppose qu'il existe $\mathbf{a} \in (\mathbb{R}^+)^m$ tel que F satisfasse aux trois propriétés suivantes:

- (P1) *La série $F(\mathbf{s})$ est absolument convergente pour \mathbf{s} tel que $\Re(\mathbf{s}) \succ \mathbf{a}$.*
 (P2) *Il existe une famille \mathcal{L} de n formes linéaires non nulles $\mathcal{L} := \{\ell^{(i)}\}_{i=1}^n$ de $\mathcal{LR}_m^+(\mathbb{C})$ et une famille d'un nombre fini de formes linéaires $\{h^{(r)}\}_{r \in \mathcal{R}}$ de $\mathcal{LR}_m^+(\mathbb{C})$, telles que la fonction H de \mathbb{C}^m dans \mathbb{C} définie par*

$$H(\mathbf{s}) = F(\mathbf{s} + \mathbf{a}) \prod_{i=1}^n \ell^{(i)}(\mathbf{s})$$

soit prolongeable en une fonction holomorphe dans le domaine

$$\mathcal{D}(\delta_1, \delta_3) := \{\mathbf{s} \in \mathbb{C}^m : \Re(\ell^{(i)}(\mathbf{s})) > -\delta_1 \quad (\forall i), \\ \Re(h^{(r)}(\mathbf{s})) > -\delta_3 \quad (\forall r \in \mathcal{R})\}$$

où δ_1, δ_3 sont des réels strictement positifs.

(P3) Il existe $\delta_2 > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $\varepsilon' > 0$, la majoration

$$|H(\mathbf{s})| \ll \prod_{i=1}^n (|\mathfrak{S}m(\ell^{(i)}(\mathbf{s}))| + 1)^{1-\delta_2 \min\{0, \Re e(\ell^{(i)}(\mathbf{s}))\}} \left(1 + \|\mathfrak{S}m(\mathbf{s})\|_1^\varepsilon\right) \tag{1.6}$$

soit uniformément valable dans le domaine $\mathcal{D}(\delta_1 - \varepsilon', \delta_3 - \varepsilon')$.

Soit $J(\mathbf{a}) := \{j \in \{1, \dots, m\} : \alpha_j = 0\}$. On pose $r := \text{card}(J(\mathbf{a}))$ et $\ell^{(n+1)}, \dots, \ell^{(n+r)}$ les r formes linéaires e_j^* où $j \in J(\mathbf{a})$.

Alors il existe un polynôme $Q_\beta \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à $n + r - \text{rang}(\{\ell^{(i)}\}_{i=1}^{n+r})$ et un réel $\theta = \theta(\mathcal{L}, \{h^{(r)}\}_{r \in \mathcal{R}}, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \mathbf{a}, \beta) > 0$ tels que l'on ait, pour $X \geq 1$,

$$\begin{aligned} S(\mathbf{X}^\beta) &= \sum_{1 \leq d_1 \leq X^{\beta_1}} \dots \sum_{1 \leq d_m \leq X^{\beta_m}} f(d_1, \dots, d_m) \\ &= X^{\langle \mathbf{a}, \beta \rangle} (Q_\beta(\log X) + O(X^{-\theta})). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Dans la démonstration de ce résultat, nous indiquons une formule explicite de θ en fonction des δ_i , de \mathbf{a} et β , et de \mathcal{L} et $\{h^{(r)}\}_{r \in \mathcal{R}}$. Étant donné la généralité du résultat, cette formule explicite de θ n'est pas optimale.

Pour démystifier les hypothèses du Théorème 1, nous donnons un exemple de fonction f les vérifiant avec $\mathbf{a} \in (\mathbb{R}_*^+)^m$. Ayant choisi une famille de formes linéaires $\{\ell^{(i)}\}_{i=1}^n$ satisfaisant à $\ell^{(i)}(\mathbf{a}) = 1$ et $\ell^{(i)}(e_j) \in \mathbb{N}$ pour tout i et j , la fonction

$$f(d_1, \dots, d_m) := \text{card}\{\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{N}_*^n : P_j(\mathbf{y}) = d_j \quad (\forall j)\}, \tag{1.8}$$

où les P_j sont définis par

$$P_j(\mathbf{y}) = \prod_{i=1}^n y_i^{\ell^{(i)}(e_j)} \quad (\forall j),$$

vérifie les trois propriétés imposées au Théorème 1. En effet, la série de Dirichlet associée à f s'écrit

$$F(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{d} \in \mathbb{N}_*^m} \frac{f(\mathbf{d})}{\prod_{j=1}^m d_j^{s_j}} = \sum_{\mathbf{y} \in \mathbb{N}_*^n} \frac{1}{\prod_{j=1}^m P_j(\mathbf{y})^{s_j}} = \prod_{i=1}^n \zeta(\ell^{(i)}(\mathbf{s})). \tag{1.9}$$

Nous n'aborderons dans cet article le problème du choix de \mathbf{a} . Notons seulement qu'il faut le choisir de sorte que $\langle \mathbf{a}, \beta \rangle$ soit minimal. Ce type de propriété peut être interprétée géométriquement.

Les conditions (P1), (P2), (P3) sont semblables aux trois hypothèses (i), (ii), (iii) proposées par Lichtin dans l'introduction de [L91]. Alors que Lichtin utilise la théorie des \mathcal{D} -modules holonomique et le calcul de résidu de Leray, nous privilégions une approche simple. Grâce à un parallèle fait avec la méthode du pivot de Gauss, nous montrons par récurrence sur le nombre de variables que l'approche usuelle dans le cas d'une variable peut être itérée m fois et donner des résultats précis.

Nous énonçons maintenant un corollaire de la démonstration du Théorème 1 qui, pour certaines applications, est plus facile d'utilisation.

COROLLAIRE 2.1. *Dans l'énoncé du Théorème 1, on peut remplacer la propriété (P3) sans altérer le résultat par l'existence de réels $\delta_{k,j}^{(i)} > 0$ tels que, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $\varepsilon' > 0$, on ait la majoration*

$$|H(\mathbf{s})| \ll \prod_{i=1}^n (|\Im m(\ell^{(i)}(\mathbf{s}))| + 1) \times \sum_k \prod_{j=1}^m (|\tau_j| + 1)^{-\sum_{i=1}^n \delta_{k,j}^{(i)} \min\{0, \Re e(\ell^{(i)}(\mathbf{s}))\}} (1 + \|\boldsymbol{\tau}\|_1^\varepsilon) \tag{1.10}$$

dans le domaine $\mathcal{D}(\delta_1 - \varepsilon', \delta_3 - \varepsilon')$.★

Pour compléter l'énoncé du Théorème 1, nous donnons certaines conditions suffisantes pour une détermination du degré du polynôme Q_β . En effet, il est important de savoir quand le terme relevant de Q_β est un terme principal, autrement dit, quand Q_β est non nul. Par exemple, B. Lichtin dans [L95] se restreint au cas de la dimension 2 pour pouvoir étudier la taille de Q_β . La dissociation de la preuve de la formule (1.7) de l'étude du polynôme Q_β nous permet d'obtenir une plus grande généralité. Ici, nous avons supposé que les singularités sont des pôles appartenant à des hyperplans. Cependant, la méthode utilisée permet d'étudier les cas où elles ne sont pas des pôles.

Nous obtenons une détermination du degré de Q_β à partir de la géométrie de la famille \mathcal{L} .

THÉORÈME 2. *Soit une fonction arithmétique f satisfaisant à toutes les hypothèses du Théorème 1. Soit $J(\mathbf{a}) := \{j \in \{1, \dots, m\} : \alpha_j = 0\}$. On pose $r := \text{card}(J(\mathbf{a}))$ et $\ell^{(n+1)}, \dots, \ell^{(n+r)}$ les r formes linéaires e_j^* où $j \in J(\mathbf{a})$.*

- (i) *Si on a $\mathcal{B} \notin \text{Vect}(\{\ell^{(i)}\}_{i=1}^{n+r})$, alors $Q_\beta = 0$.*
- (ii) *Si \mathcal{B} satisfait aux deux conditions supplémentaires*
 - (C1) *Il existe une fonction G telle que $H(\mathbf{s}) = G(\ell^{(1)}(\mathbf{s}), \dots, \ell^{(n+r)}(\mathbf{s}))$.*
 - (C2) *$\mathcal{B} \in \text{Vect}(\{\ell^{(i)}\}_{i=1}^{n+r})$ et il n'existe pas de sous-famille stricte \mathcal{L}' de $\{\ell^{(i)}\}_{i=1}^{n+r}$ telle que $\mathcal{B} \in \text{Vect}(\mathcal{L}')$ et*

$$\text{card}(\mathcal{L}') - \text{rang}(\mathcal{L}') = \text{card}(\{\ell^{(i)}\}_{i=1}^{n+r}) - \text{rang}(\{\ell^{(i)}\}_{i=1}^{n+r}).$$

★Nous avons ici utilisé la notation classique $\tau_j = \Im m s_j$ ($j = 1, \dots, m$).

Alors, le polynôme Q_β satisfait à la relation

$$Q_\beta(\log X) = C_0 X^{-(a, \beta)} I(\mathbf{X}^\beta) + O((\log X)^{\rho-1}) \quad (X \geq 3)^* \quad (1.11)$$

où l'on a posé $C_0 := H(0, \dots, 0)$, $\rho := n + r - \text{rang}(\{\ell^{(i)}\}_{i=1}^{n+r})$,

$$I(\mathbf{X}^\beta) := \iiint_{A(\mathbf{X}^\beta)} \frac{dy_1 \dots dy_n}{\prod_{i=1}^n y_i^{1-\ell^{(i)}(\mathbf{a})}}, \quad (1.12)$$

avec

$$A(\mathbf{X}^\beta) := \left\{ \mathbf{y} \in [1, +\infty[^n : \prod_{i=1}^n y_i^{\ell^{(i)}(e_j)} \leq X^{\beta_j} \quad (\forall j) \right\}. \quad (1.13)$$

(iii) On suppose $C_0 \neq 0$ et $n + r = m = \text{rang}(\{\ell^{(i)}\}_{i=1}^{n+r})$. Alors il existe une famille de réels $\{a_i\}_{i=1}^{n+r}$ telle que

$$\mathcal{B} = \sum_{i=1}^{n+r} a_i \ell^{(i)}. \quad (1.14)$$

Si pour tout i on a $a_i > 0$, alors $\deg(Q_\beta) = 0$.

S'il existe i_0 tel que $a_{i_0} < 0$, alors Q_β est nul.

(iv) Si $\text{rang}(\{\ell^{(i)}\}_{i=1}^{n+r}) = m$, $C_0 \neq 0$ et $\mathcal{B} \in \text{Conv}^*(\{\ell^{(i)}\}_{i=1}^{n+r})^{**}$, alors

$$\deg(Q_\beta) = \rho = n + r - m.$$

Remarques. (i) Les formes linéaires $\ell^{(i)}$ sont définies de manière unique à une constante multiplicative près. Le produit de C_0 par l'intégrale de (1.13) est donc défini intrinsèquement à partir de F .

Le volume (1.13) est borné, et pour tout i il existe j tel que $\ell^{(i)}(e_j) \neq 0$. On en déduit que l'intégrale $I(\mathbf{X}^\beta)$ est bien définie.

Il est à noter que si $\mathbf{a} \in (\mathbb{R}_*^+)^m$, autrement dit si $J(\mathbf{a}) = \emptyset$, alors

$$\rho = n - \text{rang}(\{\ell^{(i)}\}_{i=1}^n).$$

(ii) Nous verrons, dans la démonstration, que l'intégrale (1.12) apparaît très naturellement. Dans le cas où $\alpha_j > 0 \quad (\forall j)$, nous pouvons normaliser les $\ell^{(i)}$ par la condition $\ell^{(i)}(\mathbf{a}) = 1$. Nous avons alors $I(\mathbf{X}^\beta) = \text{Vol}(A(\mathbf{X}^\beta))$. Ainsi, dans le cas de la fonction de compte du nombre de points à coordonnées entières dans un certain domaine définie en (1.8) et $\alpha_j > 0 \quad (\forall j)$, on approche ce cardinal par le volume du domaine considéré.

Ici, nous avons imposé des conditions très facile à vérifier. Par exemple, la condition (C2) est vérifiée si $\mathcal{B} \in \text{Conv}^*(\{\ell^{(i)}\}_{i=1}^{n+r})$, c'est-à-dire lorsqu'il existe une famille

*Nous rappelons la notation $\mathbf{X}^\beta = (X^{\beta_1}, \dots, X^{\beta_m})$.

**Nous utilisons les notations $\text{Conv}(\mathcal{L}) = \sum_{\ell \in \mathcal{L}} \mathbb{R}_*^+ \ell$ et $\text{Conv}^*(\mathcal{L}) = \sum_{\ell \in \mathcal{L}} \mathbb{R}_*^+ \ell$

$\{a_i\}_{i=1}^{n+r}$ de réels strictement positifs telle que $\mathcal{B} = \sum_{i=1}^{n+r} a_i \ell^{(i)}$. Géométriquement, cela signifie que le vecteur \mathcal{B} est dans l'intérieur du cône engendré par les $\ell^{(i)}$ où $i = 1, \dots, n+r$.

Les méthodes que nous utilisons dans la démonstration pourraient permettre de déterminer le degré de Q_β dans d'autres cas. Au vu de la démonstration du Théorème 2, nous indiquons aussi qu'il serait possible de déterminer d'autres coefficients du polynôme Q_β .

(iii) Lorsque $m = 1$, on peut facilement prévoir l'estimation (1.11). Pour clarifier l'exposition de cette remarque, nous supposons de plus que $h^{(r)} = 0$ pour tout $r \in \mathcal{R}$ de sorte que cette condition supplémentaire n'intervienne pas.

On a $F(s + \alpha) = H(s)s^{-n} / \prod_{i=1}^n \ell^{(i)}(e_1)$ avec H une fonction holomorphe pour $\Re s > -\delta_1$ satisfaisant pour tout $\varepsilon > 0$, tout $\varepsilon' > 0$ la majoration

$$H(s) \ll (|\tau| + 1)^{n-\delta_2} \sum_{i=1}^n \ell^{(i)}(e_1)^{\min\{\Re s, 0\} + \varepsilon} \tag{1.15}$$

pour $\Re s \geq -\delta_1 + \varepsilon'$.

En utilisant la formule de Perron et le théorème des résidus, on obtient l'existence d'un polynôme Q et d'un réel $\theta > 0^*$ tels que

$$S(X) = X^{\alpha\beta} (Q(\beta \log X) + O(X^{-\theta})).$$

Le polynôme Q est défini par

$$Q(Y) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n \ell^{(i)}(e_1)} \operatorname{Res}_{s=0} \left(\frac{H(s)e^{sY}}{s^n(s + \alpha)} \right).$$

Nous regardons tout d'abord le cas $\alpha > 0$. On a alors

$$S(X) = C_0 \frac{\beta^{n-1}}{\alpha \prod_{i=1}^n \ell^{(i)}(e_1)} X^{\alpha\beta} \frac{(\log X)^{n-1}}{(n-1)!} + O(X^{\alpha\beta} (\log X)^{n-2}).$$

De simples manipulations sur des intégrales fournissent

$$\begin{aligned} S(X) &= C_0 \frac{\alpha^n}{\prod_{i=1}^n \ell^{(i)}(e_1)} \int_0^{\alpha\beta \log X} \frac{t^{n-1} e^t}{(n-1)!} dt + O(X^{\alpha\beta} (\log X)^{n-2}) \\ &= C_0 \iint_{A_1(X^\beta)} \frac{dy_1 \dots dy_n}{\prod_{i=1}^n y_i^{1-\ell^{(i)}(a)}} + O(X^{\alpha\beta} (\log X)^{n-2}) \end{aligned}$$

où $A_1(X^\beta) := \{y \in [1, +\infty[^n : \prod_{i=1}^n y_i^{\ell^{(i)}(e_1)} \leq X^\beta\}$. Cela correspond bien à la formule (1.12).

Si $\alpha = 0$, on a

$$S(X) = \frac{C_0}{\prod_{i=1}^n \ell^{(i)}(e_1)} \frac{(\beta \log X)^n}{n!} + O((\log X)^{n-1}).$$

*Si $\alpha \geq \delta_1 > 0$, la formule est valable pour $\theta < \delta_1/1 + \delta_1 \delta'_2$ où $\delta'_2 = \delta_2 \sum_{i=1}^n \ell^{(i)}(e_1)$.

De la même manière, on obtient

$$\begin{aligned} S(X) &= \frac{C_0}{\prod_{i=1}^n \ell^{(i)}(e_1)} \iint_{0 \leq \sum_{i=1}^n t_i \leq \beta \log X} dt_1 \dots dt_n + O((\log X)^{n-1}) \\ &= C_0 \iint_{A(\mathbf{X}^\beta)} \frac{dy_1 \dots dy_n}{\prod_{i=1}^n y_i} + O((\log X)^{n-1}) \\ &= C_0 I(\mathbf{X}^\beta) + O((\log X)^{n-1}). \end{aligned}$$

Remerciements. Je tiens ici à remercier chaleureusement Tenenbaum et Sargos pour leurs conseils et leurs suggestions. C'est un plaisir aussi d'exprimer ma gratitude à Fouvry pour tous ses encouragements.

2. Présentation de la démonstration du théorème 1

Tout au long de ce travail, nous utilisons la convention

$$\prod_{i \in \emptyset} = 1.$$

2.1. FORMULE SOMMATOIRE

Afin d'estimer $S(\mathbf{X}^\beta)$, nous commençons par lisser la fonction indicatrice η_0 de l'intervalle $[0, 1]$. Pour un $\xi > 0$, nous notons η_ξ la fonction affine par morceaux définie par

$$\begin{aligned} \eta_\xi(x) &= 1 && \text{si } x \in [0, 1], \\ \eta_\xi(x) &= \frac{1 + \xi - x}{\xi} && \text{si } x \in]1, 1 + \xi], \\ \eta_\xi(x) &= 0 && \text{si } x \in]1 + \xi, +\infty[. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Nous désignons par $\hat{\eta}_\xi$ l'opposé de sa transformée de Mellin–Stieltjes. On a

$$\hat{\eta}_\xi(s) := - \int_{0+}^{+\infty} t^s d\eta_\xi(t) = \frac{(1 + \xi)^{s+1} - 1}{\xi(s+1)} \quad (\Re(s) > -1). \quad (2.2)$$

Nous notons aussi $\hat{\eta}_\xi$ son prolongement holomorphe à tout \mathbb{C} . Nous aurons besoin des majorations

$$\hat{\eta}_\xi(s) \ll \min\left(\frac{1}{\xi|s+1|}, 1\right), \quad (\hat{\eta}_\xi(s) - 1) \ll (s+1)\xi, \quad \hat{\eta}_\xi^{(k)}(s) \ll \xi^k \quad (2.3)$$

uniformes pour $\xi \in]0, 1]$ et $\Re s$ dans un compact donné. Un théorème d'inversion

(voir [W46], chapitre VI théorème 9b) fournit, lorsque $\kappa > 0$,

$$\eta_\xi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty} \frac{x^{-s}}{s} \hat{\eta}_\xi(s) ds. \tag{2.4}$$

Nous remarquons que l'intégrale définissant η_ξ est absolument convergente ce qui est cruciale dans l'application.

Nous approchons $S(\mathbf{X}^\beta)$ par

$$M(\mathbf{X}^\beta, \xi) := \sum_{\mathbf{d} \in \mathbb{N}_*^m} f(\mathbf{d}) \prod_{j=1}^m \eta_\xi\left(\frac{d_j}{X^{\beta_j}}\right). \tag{2.5}$$

Un simple encadrement de $S(\mathbf{X}^\beta)$ justifié par la positivité de f fournit

$$S(\mathbf{X}^\beta) = M(\mathbf{X}^\beta, \xi) + O(M(\mathbf{X}_{(+)}^\beta, \xi) - M(\mathbf{X}_{(-)}^\beta, \xi)) \tag{2.6}$$

avec la convention d'écriture $X_{(+)} = e^{+\xi/\min \beta_k} X$ et $X_{(-)} = e^{-\xi/\min \beta_k} X^*$. Grâce à (2.6), nous sommes donc ramener à estimer $M(\mathbf{X}^\beta, \xi)$.

La formule (2.4) implique la formule sommatoire suivante.

LEMME 2.1. *Soit F une série de Dirichlet à m variables absolument convergente pour $\Re \mathbf{s} > \mathbf{a}$ et M la quantité définie par (2.5). Lorsque $X \geq 1$, $\xi > 0$, et $\kappa > 0$, on a*

$$M(\mathbf{X}^\beta, \xi) = \frac{X^{(\mathbf{a}, \beta)}}{(2\pi i)^m} \int_{\kappa_m-i\infty}^{\kappa_m+i\infty} \dots \int_{\kappa_1-i\infty}^{\kappa_1+i\infty} F(\mathbf{s} + \mathbf{a}) X^{\mathcal{B}(\mathbf{s})} \prod_{j=1}^m \frac{\hat{\eta}_\xi(s_j + \alpha_j)}{(s_j + \alpha_j)} ds. \tag{2.7}$$

où \mathcal{B} est défini en (1.4).

Démonstration du Lemme 2.1. La formule (2.4) implique que, pour $\kappa > 0$, on a

$$\prod_{j=1}^m \eta_\xi\left(\frac{d_j}{X^{\beta_j}}\right) = \frac{1}{(2\pi i)^m} \int_{\kappa_m-i\infty}^{\kappa_m+i\infty} \dots \int_{\kappa_1-i\infty}^{\kappa_1+i\infty} \frac{X^{\mathcal{B}(\mathbf{s})}}{\prod_{j=1}^m d_j^{\beta_j}} \prod_{j=1}^m \frac{\hat{\eta}_\xi(s_j)}{s_j} ds. \tag{2.8}$$

En reportant dans la définition (2.5) de $M(\mathbf{X}^\beta, \xi)$, on peut intervertir les deux sommations à condition de prendre $\kappa > \mathbf{a}$. Ainsi, $F(\mathbf{s})$ est une série absolument convergente. Le résultat s'en déduit grâce à une translation des variables. \square

LEMME 2.2. *Soit F une fonction à m variables satisfaisant aux propriétés (P1), (P2) et (P3) énoncées au Théorème 1 et M la quantité définie par (2.7). Lorsque*

*Ici, nous avons utilisé l'encadrement $(e^{-\xi/\min \beta_k})^{\beta_j} \leq 1 < 1 + \xi \leq (e^{+\xi/\min \beta_k})^{\beta_j}$ pour tout $j = 1, \dots, m$

$T \geq 1$, $\xi \in]0, 1]$, $\kappa_j \asymp 1/\log X$, on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$M(\mathbf{X}^\beta, \xi) = \frac{X^{(\mathbf{a}, \beta)}}{(2\pi i)^m} \int_{\kappa_m - iT}^{\kappa_m + iT} \cdots \int_{\kappa_1 - iT}^{\kappa_1 + iT} F(\mathbf{s} + \mathbf{a}) X^{\mathcal{B}(\mathbf{s})} \prod_{j=1}^m \frac{\hat{\eta}_\xi(s_j + \alpha_j)}{(s_j + \alpha_j)} d\mathbf{s} \\ + O\left(X^{(\mathbf{a}, \beta)} \frac{(\log X)^{n+m}}{\xi T^{1-\varepsilon}}\right). \quad (2.9)$$

Démonstration. La majoration (1.6) implique lorsque $\kappa_j \asymp 1/\log X$, $s_j = \kappa_j + i\tau_j$,

$$F(\mathbf{s} + \mathbf{a}) \ll \prod_{i=1}^n \frac{|\Im m(\ell^{(i)}(\mathbf{s}))| + 1}{|\ell^{(i)}(\mathbf{s})|} (1 + \|\Im m(\mathbf{s})\|_1^\varepsilon) \ll (\log X)^n (1 + \|\Im m(\mathbf{s})\|_1^\varepsilon).$$

ce qui permet de démontrer ce lemme en utilisant le Lemme 2.1 et (2.3). Une simple manipulation permet de montrer que le terme d'erreur est majoré par

$$\ll (\log X)^{n+m} \iiint \cdots \int_{\max_j \tau_j > T} (1 + \|\tau\|_1^\varepsilon) \prod_{j=1}^m \left(\min \left\{ 1, \frac{1}{\xi(|\tau_j| + 1)} \right\} \frac{d\tau_j}{|\tau_j| + 1} \right) \\ \ll \frac{(\log X)^{n+m}}{\xi} \int_{\tau_1 > T} \iint \cdots \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \prod_{j=2}^m \frac{d\tau_j}{(|\tau_j| + 1)^{1+\varepsilon}} \frac{d\tau_1}{(|\tau_1| + 1)^{2-(m-1)\varepsilon}}.$$

L'exposant $n + m$ provient de la possibilité d'avoir des α_j nuls. \square

La preuve du Théorème 1 se réduit à celle du résultat suivant.

PROPOSITION 1. *Soit F une fonction à m variables holomorphe dans le domaine $\Re(\mathbf{s}) > \mathbf{a}$ vérifiant aux propriétés (P2) et (P3) énoncées au Théorème 1 et la quantité M définie par la formule intégrale du Lemme 2.1. Il existe un polynôme Q_β de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à $n + r - \text{rang}(\{\ell^{(i)}\}_{i=1}^{n+r})$ et un réel $\theta' > 0$ tels que, pour tout $\varepsilon > 0$, on ait la formule asymptotique, quand $X \geq 1$ et $T = X^\mu$, pourvu que μ soit suffisamment grand, $\xi \in]0, 1]$*

$$X^{-(\mathbf{a}, \beta)} M(\mathbf{X}^\beta, \xi) = Q_\beta(\log X) + O(\xi T^\varepsilon (\log X)^{n+m} + X^{-\theta'(1-\varepsilon)}/\xi). \quad (2.10)$$

Ceci implique le Théorème 1 grâce à la formule (2.6). En effet, l'inégalité des accroissements finis fournit

$$X_{(+)}^{(\mathbf{a}, \beta)} Q_\beta(\log X_{(+)}) - X_{(-)}^{(\mathbf{a}, \beta)} Q_\beta(\log X_{(-)}) \\ \ll X^{(\mathbf{a}, \beta)-1} (\log X)^{\deg(Q_\beta)} (X_{(+)} - X_{(-)}) \\ \ll \xi X^{(\mathbf{a}, \beta)} (\log X)^{\deg(Q_\beta)}.$$

On conclut en choisissant $\xi \asymp X^{-(\theta'(1-\varepsilon)+\varepsilon)/2}$. Il est à noter qu'ainsi la relation (1.7) est valable pour tout $\theta \in]0, \theta'/2[$.

Dans l'énoncé de la Proposition 1, on ne suppose pas que F est une série de Dirichlet associée à une fonction arithmétique. Ainsi la fonction F définie par

$$F(\mathbf{s}) = \frac{C_0}{\prod_{i=1}^n (\ell^{(i)}(\mathbf{s}) - \ell^{(i)}(\mathbf{a}))},$$

où la famille $\{\ell^{(i)}\}_{i=1}^n$ satisfait les propriétés (P2) et (P3) énoncées au Théorème 1. Cette remarque permettra dans la démonstration de faire apparaître l'intégrale définie par la formule (1.13).

Nous appliquons le Lemme 2.2 en prenant

$$\kappa_j = \frac{\gamma^j}{\log X} \tag{2.11}$$

où γ est une constante positive choisie de la manière suivante. On note K l'extension de \mathbb{Q} engendré par les $\ell^{(i)}(e_j)$ et on choisit un nombre réel positif γ parmi les nombres transcendants sur le corps K . Cette astuce technique permettra d'affirmer que

$$\sum_{j=1}^m a_j \kappa_j \neq \sum_{j=1}^m a'_j \kappa_j \tag{2.12}$$

dès que $(a_1, \dots, a_m) \neq (a'_1, \dots, a'_m)$ avec les a_j et a'_j des éléments de K . En fait, nous utiliserons cette propriété sous la forme suivante:

Soit $\ell \in \mathcal{L}_m(\mathbb{C})$ telle que $\ell(e_j) \in K$ pour tout $j \in [1, m]$. Il existe des nombres complexes s_j tels que $\Re s_j = \kappa_j$ satisfaisant à $\ell(s_1, \dots, s_m) = 0$ si, et seulement si, $\ell = 0$.

Pour estimer l'intégrale multiple du Lemme 2.2, nous fixons les s_j pour $j \geq 2$ et nous commençons par évaluer l'intégrale en s_1 en décalant la droite d'intégration d'abscisse κ_1 vers la gauche en appliquant le théorème des résidus. Puis, on recommence avec s_2 . Pour itérer ce procédé, nous faisons une récurrence. Nous avons à faire face à deux sortes de problème. L'un est de calculer les résidus des pôles rencontrés et de prévoir leur forme dans l'hypothèse de récurrence ; l'autre est de montrer que la contribution à l'intégrale de certains contours peut être englobée par le terme d'erreur (2.10).

Afin de clarifier la démonstration du Théorème 1, nous commençons par montrer le résultat lorsque $\alpha_j > 0$ ($\forall j$). Les précautions supplémentaires dans le cas où les α_j peuvent être nuls sont détaillées à la sous-section 3.5.

2.2. LA MÉTHODE DU PIVOT DE GAUSS

Pour contrôler cette itération, nous mettons cette récurrence en parallèle avec la méthode du pivot de Gauss associée à la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ définie par

$$A := (\ell^{(i)}(e_j))_{\substack{i \in [1, n] \\ j \in [1, m]}}$$

où l'indice de récurrence sera le nombre de pivot. La démonstration du Théorème 1

repose de manière fondamentale sur la remarque suivante: *le calcul d'un résidu est semblable à une opération dans la méthode du pivot de Gauss.*

Nous détaillons maintenant les opérations licites pour la méthode que nous employons. Nous dirons qu'une matrice A' est déduite de A par la méthode du pivot de Gauss si et seulement s'il existe une suite de matrice $\{A_g\}_{g \in \mathbb{N}}$ telle que $A_0 = A$, A' soit un élément de cette suite et A_{g+1} soit obtenue à partir de A_g par la méthode récursive exposée ci-dessous. Nous notons $L_g^{(i)}$ les n_g matrices lignes de A_g et $\ell_g^{(i)}$ les formes linéaires associées à la matrice ligne $L_g^{(i)}$ de sorte que

$$A_g = (\ell_g^{(i)}(e_j))_{\substack{j \in [1, n_g] \\ i \in [1, m-g]}}.$$

- (i) On choisit arbitrairement un couple d'entiers (i_0, j_0) tel que $\ell_g^{(i_0)}(e_{j_0}) \neq 0$.
- (ii) On remplace les lignes $L_g^{(i)}$ par

$$L_g^{(i)} - \frac{\ell_g^{(i)}(e_{j_0})}{\ell_g^{(i_0)}(e_{j_0})} L_g^{(i_0)}. \tag{2.13}$$

- (iii) Lorsque que l'on obtient une ligne nulle par cette manipulation, i.e.

$$\ell_g^{(i_0)}(e_{j_0}) L_g^{(i)} = \ell_g^{(i)}(e_{j_0}) L_g^{(i_0)},$$

on peut prendre la liberté de remplacer cette ligne par une autre ligne obtenue non nulle. Il est clair que cela n'est pas la méthode du pivot de Gauss la plus rapide quand on cherche l'ensemble des solutions X de $AX = 0$ mais ce n'est pas ici notre propos ! Cette précision est nécessaire pour pouvoir traiter le cas des pôles de multiplicité supérieure à deux.

Étant donné cette tolérance, le choix de la place du pivot ne définit pas entièrement la matrice A_{g+1} .

(iv) Les lignes $L_{g+1}^{(i)}$ de longueur $m - g - 1$ sont obtenues à partir de (2.13) en supprimant le j_0 -ième terme de la ligne obtenue en (2.13) qui, par construction, est nul. Autrement dit, dans l'écriture de A_{g+1} on supprime la j_0 -ième colonne, la ligne du pivot et toutes les lignes nulles n'apparaissent pas dans A_{g+1} . Ainsi, $A_{g+1} \in \mathcal{M}_{n_{g+1}, m-g-1}(\mathbb{R})$ avec $n_{g+1} \leq n_g - 1$. L'ordre des lignes dans l'écriture de la matrice A_{g+1} pourra être choisi comme on veut.

Nous désignons par I_g la matrice *identité* de $\mathcal{M}_{g,g}(\mathbb{R})$ et \mathcal{B}_g l'ensemble des matrices de $B \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R})$ telle qu'il existe une matrice B' de $\mathcal{M}_{g,m-g}(\mathbb{R})$ satisfaisant à

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ I_{m-g} & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ B' & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

La seule matrice de \mathcal{B}_0 est I_m .

Une deuxième matrice est associée à ce calcul. Nous définissons la suite $\{B_g\}_{g \in \mathbb{N}}$, où $B_g \in \mathcal{B}_g$, associée à la suite $\{A_g\}_{g \in \mathbb{N}}$, obtenue par la méthode du pivot de Gauss de la manière suivante: on pose $B_0 = I_m$, puis on définit la matrice B_g par les lignes $B_g^{(i)}$ de longueur $m - g$ telle que

$$(B_g^{(i)}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{g \text{ zéros}})$$

soit la j -ième ligne de B_g . On note $b_g^{(i)}$ la forme linéaire de $\mathcal{L}_{m-g}(\mathbb{C})$ définie par la matrice ligne $B_g^{(i)}$ dans la base canonique $\{e_j\}_{j=1}^{m-g}$ de \mathbb{C}^{m-g} .

(ii') On remplace $B_g^{(i)}$ par

$$B_g^{(i)} - \frac{b_g^{(i)}(e_{j_0})}{\ell_g^{(i_0)}(e_{j_0})} L_g^{(i_0)}$$

où (i_0, j_0) désigne la place du pivot choisi lors de la transformation de A_g en A_{g+1} .

(iv') Puis, on décale les colonnes comprises entre la j_0 -ième et la $(m - g)$ -ième d'un cran vers la gauche. Ceci revient à écrire la matrice obtenue dans la base

$$\{e_1, \dots, e_{j_0-1}, e_{j_0+1}, e_{j_0+2}, \dots, e_{m-g}, e_{j_0}, e_{m-g+1}, \dots, e_m\}.$$

Il est intéressant de noter ici que le choix du pivot dans la matrice A_g définit entièrement B_{g+1} à partir de la donnée de B_g .

Enfin, nous ferons les mêmes opérations sur une troisième matrice C de $\mathcal{M}_{|\mathcal{R}|, m}(\mathbb{R})$ dont les lignes sont associées aux formes linéaires $h^{(r)}$.

On peut voir chaque étape du pivot de Gauss comme la restriction des formes linéaires $\ell^{(i)}$ à l'hyperplan $\ker(\ell^{(i_0)})$ dans une base obtenue par projection des vecteurs

$$(e_1, \dots, e_{j_0-1}, e_{j_0+1}, \dots, e_{m-g}).$$

Ainsi, à la g -ième étape, toutes les formes linéaires pourront être vues comme des restrictions des formes originelles à l'intersection d'hyperplans de la forme $\bigcap_{i \in I} \ker(\ell^{(i)})$ où I est un ensemble d'indices de cardinal g .

3. La récurrence

Dans les quatre premières sous-sections, nous nous restreignons au cas $\alpha_j > 0$ ($\forall j$). Dans la cinquième, nous détaillerons les modifications à effectuer pour englober le cas où $\alpha_j = 0$ pour certain j c'est-à-dire $J(\alpha) \neq \emptyset$.

3.1. ÉNONCÉ DE LA RÉCURRENCE

Soient $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ trois réels strictement positifs et $\{\ell^{(i)}\}_{i=1}^m$ et $\{h^{(r)}\}_{r \in \mathcal{R}}$ et $\{b^{(j)}\}_{j=1}^m$ trois familles de formes linéaires de $\mathcal{LR}_m(\mathbb{C})$ dans \mathbb{C} . Nous dirons qu'une fonction H

à m variables possède la propriété

$$\mathcal{H}_m(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \mathbf{a}; \{\ell^{(i)}\}_{i=1}^n, \{h^{(r)}\}_{r \in \mathcal{R}}, \{b^{(j)}\}_{j=1}^m)$$

si H est holomorphe dans le domaine

$$\mathcal{D}(\delta_1, \delta_3, \mathbf{a}) := \left\{ \mathbf{s} \in \mathbb{C}^m : \begin{array}{ll} \Re e(\ell^{(i)}(\mathbf{s})) > -\delta_1 & (\forall i) \\ \Re e(h^{(r)}(\mathbf{s})) > -\delta_3 & (r \in \mathcal{R}) \\ \Re e(b^{(j)}(\mathbf{s})) > -\alpha_j & (\forall j) \end{array} \right\}$$

et si pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $\varepsilon' > 0$, on a la majoration

$$|H(\mathbf{s})| \ll \prod_{i=1}^n (|\mathfrak{N}m(\ell^{(i)}(\mathbf{s}))| + 1)^{1-\delta_2 \min\{0, \Re e(\ell^{(i)}(\mathbf{s}))\}} (1 + \|\boldsymbol{\tau}\|_1^\varepsilon) \tag{3.1}$$

dans le domaine $\mathcal{D}(\delta_1 - \varepsilon', \delta_3 - \varepsilon', \mathbf{a} - \varepsilon' \mathbf{v}_1)^*$.

La fonction H introduite dans l'énoncé du Théorème 1 possède donc la propriété

$$\mathcal{H}_m(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \mathbf{a}; \{\ell^{(i)}\}_{i=1}^n, \{h^{(r)}\}_{r \in \mathcal{R}}, \{b^{(j)}\}_{j=1}^m)$$

avec $b^{(j)} = e_j^*$ ($\forall j$).

Avant d'énoncer l'hypothèse de récurrence, nous indiquons que celle-ci est triviale au rang 0 et qu'au rang m elle implique l'existence d'un polynôme Q_β de degré inférieur ou égal à $n - \text{rang}(\{\ell^{(i)}\}_{i=1}^n)$ satisfaisant à (2.10), c'est-à-dire la Proposition 1.

L'HYPOTHÈSE DE RÉCURRENCE AU RANG g . *La quantité notée \mathbf{s} désigne le vecteur ligne de \mathbb{C}^{m-g} défini par $\mathbf{s} := (s_1, \dots, s_{m-g})$. Il existe un réel $\theta_g > 0$ et un polynôme $Q_g \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à $n - \text{rang}(\{\ell^{(i)}\}_{i=1}^n)$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, lorsque $T = X^\mu$ avec $\mu > 0$ suffisamment grand, $\zeta \in]0, 1]$ on ait*

$$M(\mathbf{X}^\beta, \zeta) X^{-(\mathbf{a}, \beta)} = \sum_k P_{k,g}(\log X) M_{k,g} + Q_g(\log X) + O(\zeta T^\varepsilon (\log X)^{2n} + X^{-\theta_g(1-\varepsilon)} / \zeta) \tag{3.2}$$

où les quantités $M_{k,g}$ sont définies par

$$M_{k,g} = \frac{1}{(2\pi i)^{m-g}} \int_{\kappa_{\sigma_{k,g}(m-g)} - iT}^{\kappa_{\sigma_{k,g}(m-g)} + iT} \dots \int_{\kappa_{\sigma_{k,g}(1)} - iT}^{\kappa_{\sigma_{k,g}(1)} + iT} X^{\mathcal{B}_{k,g}(\mathbf{s})} \Theta_{k,g}(\mathbf{s}) \mathbf{d}\mathbf{s} \tag{3.3}$$

avec

$$\Theta_{k,g}(\mathbf{s}) := \frac{H_{k,g}(\mathbf{s})}{\prod_{i=1}^{n_{k,g}} \ell_{k,g}^{(i)}(\mathbf{s})} \prod_{j=1}^m \frac{\hat{\eta}_\zeta(b_{k,g}^{(j)}(\mathbf{s}) + \alpha_{\sigma_{k,g}(j)})}{(b_{k,g}^{(j)}(\mathbf{s}) + \alpha_{\sigma_{k,g}(j)})} \tag{3.4}$$

*Nous avons posé $\mathbf{v}_1 = \sum_{j=1}^m e_j$.

et

$$\mathcal{B}_{k,g} := \sum_{j=1}^m \beta_{\sigma_{k,g}(j)} b_{k,g}^{(j)}.$$

Les quantités intervenant dans la définition de $M_{k,g}$ vérifient les propriétés suivantes:

(H1) Les formes linéaires $\ell_{k,g}^{(i)}$ définissent les lignes d'une matrice $A_{k,g} \in \mathcal{M}_{n_{k,g}, m-g}(\mathbb{R})$ déduite de A par la méthode du pivot de Gauss; $B_{k,g} := (b_{k,g}^{(i)}(e_j))_{i \leq m, j \leq m} \in \mathcal{B}_g$ (resp. $C_{k,g} := (h_{k,g}^{(r)}(e_j))_{r \in \mathcal{R}, j \leq m} \in \mathcal{M}_{|\mathcal{R}|, m}(\mathbb{R})$) est la matrice associée à la suite $\{A_{k,g}\}_{g \in \mathbb{N}}$ obtenue par la méthode du pivot de Gauss.

(H2) L'application $\sigma_{k,g}$ est une permutation de \mathfrak{S}_m .

(H3) La fonction $H_{k,g}$ possède la propriété

$$\mathcal{H}_{m-g}(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \mathbf{a}_{k,g}; \{\ell_{k,g}^{(i)}\}_{i=1}^{n_{k,g}}, \{h_{k,g}^{(r)}\}_{r \in \mathcal{R}}, \{b_{k,g}^{(j)}\}_{j=1}^m)$$

où $\mathbf{a}_{k,g}$ a pour j -ième coordonnée $\alpha_{\sigma_{k,g}(j)}$.

(H4) $P_{k,g}$ est un polynôme à m variables dont le degré satisfait à l'inégalité

$$0 \leq \deg(P_{k,g}) + n_{k,g} - \text{rang}(\{\ell_{k,g}^{(i)}\}_{i=1}^{n_{k,g}}) \leq n - \text{rang}(\{\ell^{(i)}\}_{i=1}^n). \tag{3.5}$$

(H5) Le degré de Q_g est inférieur ou égal à $n - \text{rang}(\{\ell^{(i)}\}_{i=1}^n)$.

Il est clair que l'hypothèse de récurrence est vraie pour $g = 0$ avec

$$\begin{aligned} A_{0,0} &= A, & B_{0,0} &= I_m, & C_{0,0} &= (h^{(r)}(e_j))_{r \in \mathcal{R}, j \leq m}, \\ \sigma_{0,0} &= Id, & H_{0,0} &= H, & G_{0,0} &= G, & P_{0,0} &= 1, & Q_0 &= 0 \end{aligned}$$

et $M_{0,0}$ défini par (3.3) ce qui permet d'initialiser la récurrence.

Examinons maintenant la preuve de l'hypothèse de récurrence au rang $g + 1$ en supposant celle-ci vérifiée pour les rangs inférieurs à g . Nous devons donc estimer chacune des intégrales complexes définies en (3.3). Il y a trois cas à envisager suivant la valeur de $n_{k,g}$ et de $\mathcal{B}_{k,g}$. On note que

$$\mathcal{B}_{0,0} = \mathcal{B} = \sum_{j=1}^m \beta_j e_j^* \neq 0.$$

3.2. LE CAS $\mathcal{B}_{k,g} \neq 0$ ET $n_{k,g} \in \mathbb{N}^*$.

- *Première étape: majoration du terme d'erreur.*

Dans cette sous-section, nous majorons le terme résiduel résultant de l'application du théorème des résidus dans l'évaluation de $M_{k,g}$.

Puisque $\mathcal{B}_{k,g} \neq 0$, il existe j_0 tel que $\mathcal{B}_{k,g}(e_{j_0}) \neq 0$. Nous supposons sans perte de généralité que $j_0 = 1$ quitte à changer $\sigma_{k,g}$ en $(1, j_0) \circ \sigma_{k,g}$ et à intervertir la première et la j_0 -ième colonne de $A_{k,g}$ de sorte que $\mathcal{B}_{k,g}(e_1) \neq 0$.

Dans la suite de ce travail, nous notons $\mathbf{s}' := (s_2, \dots, s_{m-g})$ et nous identifions \mathbf{s} à (s_1, \mathbf{s}') . La quantité $M_{k,g}$ s'écrit sous la forme

$$M_{k,g} = \frac{1}{(2\pi i)^{m-g}} \int_{\kappa_{\sigma_{k,g}(m-g)} - iT}^{\kappa_{\sigma_{k,g}(m-g)} + iT} \dots \left(\int_{\kappa_{\sigma_{k,g}(1)} - iT}^{\kappa_{\sigma_{k,g}(1)} + iT} X^{\mathcal{B}_{k,g}(s_1, \mathbf{s}')} \Theta_{k,g}(s_1, \mathbf{s}') ds_1 \right) d\mathbf{s}'.$$

Si $\mathcal{B}_{k,g}(e_1) > 0$, nous décalons la droite d'intégration en s_1 vers la gauche de $\kappa_{\sigma_{k,g}(1)}$ jusqu'à l'abscisse $-\theta_{k,g}(1 - \varepsilon')$ de sorte que $\mathbf{s} = (s_1, \mathbf{s}')$ satisfasse les inégalités

$$\begin{cases} \Re e(\ell_{k,g}^{(i)}(\mathbf{s})) > -\delta_1 & (\forall i) \\ \Re e(h_{k,g}^{(r)}(\mathbf{s})) > -\delta_3 & (r \in \mathcal{R}) \\ \Re e(b_{k,g}^{(j)}(\mathbf{s})) > -\alpha_j & (\forall j) \end{cases}$$

et que

$$\sum_{i=1}^{n_{k,g}} \delta_2 \min\{0, \Re e(\ell^{(i)}(\mathbf{s}))\} \leq (1 - \varepsilon').$$

Pour cela, on choisit

$$\theta_{k,g} := \min \left\{ \frac{\delta_1}{\lambda_{k,g}^{(1)}}, \frac{1}{\delta_2 \lambda_{k,g}^{(2)}}, \frac{\delta_3}{\lambda_{k,g}^{(3)}}, \frac{1}{\lambda_{k,g}^{(4)}} \right\}, \tag{3.6}$$

avec

$$\begin{aligned} \lambda_{k,g}^{(1)} &:= \max \left\{ \max_{i=1, \dots, n_{k,g}} \{\ell_{k,g}^{(i)}(e_1)\}, 0 \right\}, & \lambda_{k,g}^{(2)} &:= \sum_{i=1}^{n_{k,g}} \max \{\ell_{k,g}^{(i)}(e_1), 0\}; \\ \lambda_{k,g}^{(3)} &:= \max \left\{ \max_{r \in \mathcal{R}} \{h_{k,g}^{(r)}(e_1)\}, 0 \right\}, & \lambda_{k,g}^{(4)} &:= \max_{j=1, \dots, m} \left\{ \frac{b_{k,g}^{(j)}(e_1)}{\alpha_{\sigma_{k,g}(j)}} \right\}. \end{aligned}$$

Nous utilisons ici la convention $1/0 = +\infty$. Pour vérifier que $\theta_{k,g} > 0$, il suffit d'étudier le signe de $\lambda_{k,g}^{(4)}$. Étant donné que $\mathcal{B}_{0,0} = \sum_{j=1}^m \beta_j b^{(j)}$, on a $\mathcal{B}_{k,g} = \sum_{j=1}^m \beta_j b_{k,g}^{(j)}$ et $\sum_{j=1}^m \beta_j b_{k,g}^{(j)}(e_1) = \mathcal{B}_{k,g}(e_1) > 0$, on a bien $\lambda_{k,g}^{(4)} > 0$.

On remarque que le premier et les deux derniers termes de (3.6) portent sur l'holomorphie de $\Theta_{k,g}$ et que le deuxième concerne la taille de $H_{k,g}$ sur les bandes verticales.

De même, si $\mathcal{B}_{k,g}(e_1) < 0$, nous calculons $\theta_{k,g}$ en changeant les $\ell_{k,g}^{(i)}$ en $-\ell_{k,g}^{(i)}$, $h_{k,g}^{(r)}$ en $-h_{k,g}^{(r)}$ et $b_{k,g}^{(j)}$ en $-b_{k,g}^{(j)}$ dans la définition de $\lambda_{k,g}^{(1)}$, $\lambda_{k,g}^{(2)}$, $\lambda_{k,g}^{(3)}$ et $\lambda_{k,g}^{(4)}$. Nous décalons alors la droite d'intégration en s_1 vers la droite de $\kappa_{\sigma_{k,g}(1)}$ jusqu'à l'abscisse $\theta_{k,g}(1 - \varepsilon)$.

Pour estimer $M_{k,g}$, nous fixons \mathbf{s}' et nous appliquons le théorème des résidus à l'intégrale en s_1 et au contour orienté $\partial\mathcal{K}_{k,g}$ où $\partial\mathcal{K}_{k,g}$ est le rectangle joignant

successivement les points d'affixe*

$$\begin{aligned} &\kappa_{\sigma_{k,g}(1)} - iT_{k,g}, \quad \kappa_{\sigma_{k,g}(1)} - iT, \quad \kappa_{\sigma_{k,g}(1)} + iT, \quad \kappa_{\sigma_{k,g}(1)} + iT_{k,g}, \\ & - (\mathcal{B}_{k,g}(e_1))\theta_{k,g}(1 - \varepsilon') + iT_{k,g}, \quad - (\mathcal{B}_{k,g}(e_1))\theta_{k,g}(1 - \varepsilon') - iT_{k,g}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Ici, $T_{k,g}$ est un paramètre supérieur à T que l'on choisira suffisamment grand. Si $\mathcal{B}_{k,g}(e_1) > 0$ (respectivement $\mathcal{B}_{k,g}(e_1) < 0$), le contour $\partial\mathcal{K}_{k,g}$ est orienté positivement (resp. négativement). Les seuls pôles de la fonction $s_1 \rightarrow \Theta_{k,g}(s_1, \mathbf{s}')$ à l'intérieur de $\mathcal{K}_{k,g}$ sont des zéros de $s_1 \rightarrow \ell_{k,g}^{(i)}(s_1, \mathbf{s}')$. Nous désignons par $I_{k,g}$ l'ensemble des indices i tels que $\ell_{k,g}^{(i)}(e_1) \neq 0$ et tels que

$$\begin{aligned} & - \sum_{j=1}^{m-g} \frac{\beta_{\sigma_{k,g}(j)} \ell_{k,g}^{(i)}(e_j)}{\beta_{\sigma_{k,g}(1)} \ell_{k,g}^{(i)}(e_1)} \kappa_{\sigma_{k,g}(j)} \in] - \theta_{k,g}(1 - \varepsilon'), \kappa_{\sigma_{k,g}(1)}[\\ & \text{(resp. }]\kappa_{\sigma_{k,g}(1)}, \theta_{k,g}(1 - \varepsilon')[\text{ si } \mathcal{B}_{k,g}(e_1) < 0). \end{aligned}$$

De plus, si plusieurs formes linéaires $\ell^{(i)}$ sont proportionnelles, nous choisissons au plus un indice i dans $I_{k,g}$ de sorte que si $i, i' \in I_{k,g}$ et $i \neq i'$, alors $\ell_{k,g}^{(i)}$ et $\ell_{k,g}^{(i')}$ ne soient pas proportionnelles.

Nous choisissons $T_{k,g}$, introduit dans la définition (3.7), de sorte que tous les zéros de $s_1 \rightarrow \prod_{i \in I_{k,g}} \ell_{k,g}^{(i)}(s_1, \mathbf{s}')$ soient dans $\mathcal{K}_{k,g}$, par exemple

$$T_{k,g} = T \max \left\{ 1, 2 \max_{i \in I_{k,g}} \left(\sum_{j=2}^{m-g} \frac{\beta_{\sigma_{k,g}(j)} \ell_{k,g}^{(i)}(e_j)}{\beta_{\sigma_{k,g}(1)} \ell_{k,g}^{(i)}(e_1)} \right) \right\}.$$

Il est à noter que les κ_j ont été choisis en (2.11) pour qu'il n'y ait pas de pôle de $s_1 \rightarrow \Theta_{k,g}(s_1, \mathbf{s}')$ sur le contour $\partial\mathcal{K}_{k,g}$. En effet, pour X suffisamment grand, on a

$$\left| \sum_{j=2}^{m-g} \frac{\beta_{\sigma_{k,g}(j)} \ell_{k,g}^{(i)}(e_j)}{\beta_{\sigma_{k,g}(1)} \ell_{k,g}^{(i)}(e_1)} \kappa_{\sigma_{k,g}(j)} \right| < \theta_{k,g}(1 - \varepsilon')$$

et, compte tenu de (2.11), on a toujours

$$\beta_{\sigma_{k,g}(1)} \kappa_{\sigma_{k,g}(1)} \neq - \sum_{j=2}^{m-g} \frac{\ell_{k,g}^{(i)}(e_j)}{\ell_{k,g}^{(i)}(e_1)} \beta_{\sigma_{k,g}(j)} \kappa_{\sigma_{k,g}(j)}.$$

Le choix de $\theta_{k,g}$ fournit la majoration valable lorsque $\Re e s_j = \kappa_{\sigma_{k,g}(j)}$ ($2 \leq j \leq m - g$)

$$\Theta_{k,g}(s_1, \mathbf{s}') \ll \frac{(\log X)^{n \zeta - 1}}{\prod_{j=1}^{m-g} (|\tau_j| + 1)} \tag{3.8}$$

lorsque $s_1 \in \partial\mathcal{K}_{k,g}$ et $\Re e s_1 \in [-\theta_{k,g}(1 - \varepsilon'), \kappa_{\sigma_{k,g}(1)}[$ (resp. $\Re e s_1 \in]\kappa_{\sigma_{k,g}(1)}, \theta_{k,g}(1 - \varepsilon')]$) si $\mathcal{B}_{k,g}(e_1) < 0$.

Ici, et dans la suite, $\text{sgn}(x) = 1$ si $x \in \mathbb{R}_^+$ ou -1 si $x \in \mathbb{R}_*^-$

Nous montrons maintenant cette majoration. La propriété

$$\mathcal{H}_{m-g}(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \mathbf{a}_{k,g}; \{\ell_{k,g}^{(i)}\}_{i=1}^{n_{k,g}}, \{h_{k,g}^{(r)}\}_{r \in \mathcal{R}}, \{b_{k,g}^{(j)}\}_{j=1}^m)$$

de la fonction $H_{k,g}$ et la définition (3.6) de $\theta_{k,g}$ implique la majoration

$$\frac{|H_{k,g}(\mathbf{s})|}{\prod_{i=1}^{n_{k,g}} \ell_{k,g}^{(i)}(\mathbf{s})} \ll (\log X)^n \prod_{i=1}^{n_{k,g}} (|\Im m(\ell_{k,g}^{(i)}(\mathbf{s}))| + 1)^{-\delta_2 \min\{0, \ell_{k,g}^{(i)}(e_1)\Re e(s_1)\}} (1 + \|\boldsymbol{\tau}\|_1^\varepsilon), \quad (3.9)$$

qui peut s'écrire

$$\frac{|H_{k,g}(\mathbf{s})|}{\prod_{i=1}^{n_{k,g}} \ell_{k,g}^{(i)}(\mathbf{s})} \ll (\log X)^n \sum_{\mu} \prod_{j=1}^{m-g} |\tau_j|^{a_{j,\mu}}$$

où μ décrit un ensemble fini d'indices tel que $a_{j,\mu} \geq 0$ et $\sum_j a_{j,\mu} \leq 1 - \varepsilon'$ pour tout μ .

Ici, les exposants $a_{j,\mu}$ sont soit nuls soit égaux à $\max\{\ell_{k,g}^{(i)}(e_1)\delta_2\theta_{k,g}(1 - \varepsilon'), 0\}$. D'après la condition (3.6), leur somme est donc bien inférieure à

$$\sum_j a_{j,\mu} \leq \delta_2\theta_{k,g}(1 - \varepsilon') \sum_{i=1}^{n_{k,g}} \max\{\ell_{k,g}^{(i)}(e_1), 0\} \leq 1 - \varepsilon'.$$

Pour majorer $\Theta_{k,g}$, nous utilisons la majoration $\hat{\eta}_\xi(s) \ll ((|s| + 1)\xi)^{-a}$ valable pour $a \in [0, 1]$ et $\xi \in]0, 1]$. Nous obtenons

$$\prod_{j=m-g+1}^m \frac{\hat{\eta}_\xi(b_{k,g}^{(j)}(\mathbf{s}) + \alpha_{\sigma_{k,g}(j)})}{(b_{k,g}^{(j)}(\mathbf{s}) + \alpha_{\sigma_{k,g}(j)})} \ll 1 \quad (s_1 \in \partial\mathcal{K}_{k,g}, \Re e s_j = \kappa_{\sigma_{k,g}(j)} \quad (j \geq 2))$$

et

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{m-g} \frac{\hat{\eta}_\xi(b_{k,g}^{(j)}(\mathbf{s}) + \alpha_{\sigma_{k,g}(j)})}{(b_{k,g}^{(j)}(\mathbf{s}) + \alpha_{\sigma_{k,g}(j)})} &= \prod_{j=1}^{m-g} \frac{\hat{\eta}_\xi(s_j + \alpha_{\sigma_{k,g}(j)})}{(s_j + \alpha_{\sigma_{k,g}(j)})} \\ &\ll \prod_{j=1}^{m-g} \frac{1}{(|\tau_j| + 1)^{1+a_{j,\mu}} \xi^{a_{j,\mu}}} \\ &\ll \prod_{j=1}^{m-g} \frac{\xi^{-1}}{(|\tau_j| + 1)^{1+a_{j,\mu}}}. \end{aligned}$$

En rassemblant ces résultats dans (3.4), on achève la démonstration de la majoration (3.8).

Si on remplace dans les hypothèses du théorème la majoration (1.6) par une majoration de la forme (1.10), un choix judicieux de la valeur de $\theta_{k,g}$ aboutit à des majorations du même type. Ceci est la seule différence entre la démonstration du Corollaire 2.1 et le Théorème 1.

En utilisant ces majorations, le théorème des résidus fournit

$$\begin{aligned}
 M_{k,g} &= \frac{\operatorname{sgn}(\mathcal{B}_{k,g}(e_1))}{(2\pi i)^{m-g-1}} \times \\
 &\times \sum_{i \in I_{k,g}} \int_{\kappa_{\sigma_{k,g}(2)} - iT}^{\kappa_{\sigma_{k,g}(2)} + iT} \dots \int_{\kappa_{\sigma_{k,g}(m-g)} - iT}^{\kappa_{\sigma_{k,g}(m-g)} + iT} \operatorname{Res}_{s_1: \ell_{k,g}^{(i)}(s)=0} (X^{\mathcal{B}_{k,g}(s_1, s')} \Theta_{k,g}(s_1, s')) ds' + \quad (3.10) \\
 &+ O(X^{-\theta_{k,g} |\mathcal{B}_{k,g}(e_1)| (1-\varepsilon)} \zeta^{-1})
 \end{aligned}$$

pourvu que le paramètre μ , définissant T par $T = X^\mu$, soit suffisamment grand. On remarque que

$$\begin{aligned}
 \theta_{g+1} &:= \min_k (\theta_{k,g} |\mathcal{B}_{k,g}(e_1)|) \\
 &\geq \min_k (|\mathcal{B}_{k,g}(e_1)|) \min \left\{ \frac{\delta_1}{\lambda_{g+1}^{(1)}}, \frac{1}{\delta_2 \lambda_{g+1}^{(2)}}, \frac{\delta_3}{\lambda_{g+1}^{(3)}}, \frac{1}{\lambda_{g+1}^{(4)}} \right\}
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \lambda_{g+1}^{(1)} &:= \max_k \{ \lambda_{k,g}^{(1)} \}, & \lambda_{g+1}^{(2)} &:= \max_k \{ \lambda_{k,g}^{(2)} \}, \\
 \lambda_{g+1}^{(3)} &:= \max_k \{ \lambda_{k,g}^{(2)} \}, & \lambda_{g+1}^{(4)} &:= \max_k \{ \lambda_{k,g}^{(2)} \}.
 \end{aligned}$$

afin que le précédent terme d'erreur soit englobé par celui de la formule de récurrence (3.3). Ceci répond à la remarque suivant l'énoncé du Théorème 1.

• *Deuxième étape: calcul de résidu.*

La deuxième étape consiste à montrer que chaque terme de la somme (3.2) peut s'écrire comme une somme de $P_{k',g+1} M_{k',g+1}$ telle que $M_{k',g+1}$ soit défini par (3.3) et vérifie les conditions (H1)–(H3) et telle que le degré de $P_{k',g+1}$ satisfasse à (H4). Quoiqu'élémentaire, cette partie *combinatoire* est la clé de démonstration par récurrence. Chaque terme indicé par k, g pouvant s'écrire comme somme de plusieurs termes, nous indiquons les nouveaux termes trouvés par $k', g + 1$.

Nous n'étudions que

$$\operatorname{Res}_{s_1: \ell_{k,g}^{(1)}(s_1, s')=0} (s_1 \mapsto X^{\mathcal{B}_{k,g}(s_1, s')} \Theta_{k,g}(s_1, s')) \quad (3.11)$$

lorsque $s' = (s_2, \dots, s_{m-g})$ a des coordonnées fixées satisfaisant à $\Re e s_j = \kappa_{\sigma_{k,g}(j)}$ et lorsque

$$\begin{aligned}
 &1 \in I_{k,g}, \\
 &\ell_{k,g}^{(i)} \text{ est proportionnelle a } \ell_{k,g}^{(1)} \text{ lorsque } 1 \leq i \leq v, \\
 &\ell_{k,g}^{(i)} \text{ n'est pas proportionnelle a } \ell_{k,g}^{(1)} \text{ lorsque } i \geq v + 1.
 \end{aligned}$$

Étant donné que l'ordre des $\ell_{k,g}^{(i)}$ est indifférent, ceci nous permettra de conclure dans tous les autres cas.

Soit $p_{k',g+1}$ la forme linéaire de $\mathcal{L}_{m-g-1}(\mathbb{C})$ définie par

$$p = p_{k',g+1} := - \sum_{j=2}^{m-g} \frac{\ell_{k,g}^{(1)}(e_j)}{\ell_{k,g}^{(1)}(e_1)} e_j^*, \quad (3.12)$$

autrement dit, on a

$$\ell_{k,g}^{(1)}(p_{k',g+1}(\mathbf{s}'), \mathbf{s}') = 0 \quad (\forall \mathbf{s}' : \exists! e_{s_j} = \kappa_{\sigma_{k,g}(j)} \quad (j \geq 2)).$$

Dans la suite, nous omettrons d'écrire des indices de p . Nous utiliserons que p vérifie aussi

$$\begin{aligned} \ell_{k,g}^{(i)}(p(\mathbf{s}'), \mathbf{s}') &= 0 & (1 \leq i \leq v), \\ \ell_{k,g}^{(i)}(p(\mathbf{s}'), \mathbf{s}') &\neq 0 & (i \geq v+1), \end{aligned} \quad (\forall \mathbf{s}'). \quad (3.13)$$

La première identité est triviale ; la deuxième découle de la transcendance de γ (2.12).

Nous mettons le calcul du résidu en parallèle avec passage de $A_{k,g}$ à $A_{k',g+1}$ où le pivot est situé en $(1, 1)$. Si nous devons calculer le résidu de la fonction $s_{j_0} \mapsto \Theta_{k,g}(\mathbf{s})$ en un zéro de $s_{j_0} \mapsto \ell^{(i_0)}(\mathbf{s})$, le pivot se situerait en (i_0, j_0) . Dans ce cas, nous composerions à gauche $\sigma_{k,g}$ par la transposition $(1, j_0)$, pour se ramener au cas $j_0 = 1$. De plus, nous réordonnerions les lignes de $A_{k,g}$ de sorte que $i_0 = 1$ qui permettrait de nous ramener au cas présentement traité.

Étant donné que $B_{k',g+1}$ est la matrice déduite de $B_{k,g}$ par la méthode du pivot de Gauss et que $\sigma_{k',g+1}$ ne dépendent que du choix du pivot, nous les définissons tout de suite. Nous posons $\sigma_{k',g+1} = \sigma' \circ \sigma_{k,g}$ où σ' désigne le cycle $(1, 2, \dots, m-g)$ de S_m . Les formes linéaires $b_{k',g+1}^{(i)}$ associées aux lignes de la matrice $B_{k,g}$ sont définies par

$$\begin{aligned} b_{k',g+1}^{(m-g)}(\mathbf{s}') &= b_{k,g}^{(1)}(p(\mathbf{s}'), \mathbf{s}') = p(\mathbf{s}') \\ b_{k',g+1}^{(i)}(\mathbf{s}') &= s_{i+1} = b_{k,g}^{(i)}(p(\mathbf{s}'), \mathbf{s}') & (1 \leq i \leq m-g-1) \\ b_{k',g+1}^{(i)}(\mathbf{s}') &= b_{k,g}^{(i)}(p(\mathbf{s}'), \mathbf{s}') & (m-g+1 \leq i \leq m). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Nous posons aussi

$$\mathcal{B}_{k',g+1} := \sum_{j=1}^m \beta_{\sigma_{k',g+1}(j)} b_{k',g+1}^{(j)}, \quad h_{k',g+1}^{(r)}(\mathbf{s}') = h_{k,g}^{(r)}(p(\mathbf{s}'), \mathbf{s}').$$

Nous arrivons au cœur de la démonstration du calcul de résidus. Des notations précédentes, nous déduisons la formule

$$X^{\mathcal{B}_{k,g}(\mathbf{s})} = \exp \{ (s_1 - p(\mathbf{s}')) \mathcal{B}_{k,g}(e_1) \log X \} X^{\mathcal{B}_{k',g+1}(\mathbf{s}')}. \quad (3.15)$$

D'autre part, les relations (3.13) nous permettent d'écrire pour $\Re e s_j = \kappa_j$ ($2 \leq j \leq m - g$)

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n_{k,g}} \ell_{k,g}^{(i)}(\mathbf{s}) &= \prod_{i=1}^v \left(\ell_{k,g}^{(i)}(e_1)(s_1 - p(\mathbf{s}')) \right) \prod_{i=v+1}^{n_{k,g}} \ell_{k,g}^{(i)}(\mathbf{s}) \\ &= (s_1 - p(\mathbf{s}'))^v \prod_{i=1}^v \ell_{k,g}^{(i)}(e_1) \prod_{i=v+1}^{n_{k,g}} \left(\ell_{k,g}^{(i)}(e_1)(s_1 - p(\mathbf{s}')) + \ell_{k,g}^{(i)}(p(\mathbf{s}'), \mathbf{s}') \right) \\ &= (s_1 - p(\mathbf{s}'))^v \prod_{i=1}^v \ell_{k,g}^{(i)}(e_1) \prod_{i=v+1}^{n_{k,g}} \ell_{k,g}^{(i)}(p(\mathbf{s}'), \mathbf{s}') \times \\ &\quad \times \prod_{i=v+1}^{n_{k,g}} \left(1 + \frac{\ell_{k,g}^{(i)}(e_1)(s_1 - p(\mathbf{s}'))}{\ell_{k,g}^{(i)}(p(\mathbf{s}'), \mathbf{s}')} \right). \end{aligned}$$

Nous décomposons $\Theta_{k,g}$ sous forme d'un produit de facteurs. Pour cela, nous introduisons les notations intermédiaires suivantes

$$\begin{aligned} \Psi_1(s_1, \mathbf{s}') &:= \prod_{i=v+1}^{n_{k,g}} \left(1 + \frac{\ell_{k,g}^{(i)}(e_1)}{\ell_{k,g}^{(i)}(p(\mathbf{s}'), \mathbf{s}')} (s_1 - p(\mathbf{s}')) \right)^{-1} \prod_{i=1}^v \ell_{k,g}^{(i)}(e_1)^{-1}, \\ \Psi_2(s_1, \mathbf{s}') &:= \prod_{j=1}^m \frac{1}{(b_{k,g}^{(j)}(s_1, \mathbf{s}') + \alpha_{\sigma_{k,g}(j)})}, \\ \Psi_3(s_1, \mathbf{s}') &:= \prod_{j=1}^m \hat{\eta}_\xi(b_{k,g}^{(j)}(s_1, \mathbf{s}') + \alpha_{\sigma_{k,g}(j)}), \\ \Upsilon_{k,g}(s_1, \mathbf{s}') &:= H_{k,g}(s_1, \mathbf{s}') \Psi_1(s_1, \mathbf{s}') \Psi_2(s_1, \mathbf{s}') \Psi_3(s_1, \mathbf{s}'). \end{aligned} \tag{3.16}$$

On a

$$\Theta_{k,g}(s_1, \mathbf{s}') = \frac{\exp \{ (s_1 - p(\mathbf{s}')) \mathcal{B}_{k,g}(e_1) \log X \} \Upsilon_{k,g}(s_1, \mathbf{s}')}{\left(\prod_{i=v+1}^{n_{k,g}} \ell_{k,g}^{(i)}(p(\mathbf{s}'), \mathbf{s}') \right) \times (s_1 - p(\mathbf{s}'))^v}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \text{Res} &= \frac{X^{\mathcal{B}_{k,g}(e_1)}}{\prod_{i=v+1}^{n_{k,g}} \ell_{k,g}^{(i)}(p(\mathbf{s}'), \mathbf{s}')} \times \\ &\quad \times \text{Res}_{s_1=p(\mathbf{s}')} \left(s_1 \rightarrow \frac{\exp \{ (s_1 - p(\mathbf{s}')) \mathcal{B}_{k,g}(e_1) \log X \} \Upsilon_{k,g}(s_1, \mathbf{s}')}{(s_1 - p(\mathbf{s}'))^v} \right) \end{aligned} \tag{3.17}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \text{Res}_{s_1=p(\mathbf{s}')} \left(s_1 \rightarrow \frac{\exp \{ (s_1 - p(\mathbf{s}')) \mathcal{B}_{k,g}(e_1) \log X \} \Upsilon_{k,g}(s_1, \mathbf{s}')}{(s_1 - p(\mathbf{s}'))^v} \right) \\ = \sum_{v'=0}^{v-1} \frac{(\mathcal{B}_{k,g}(e_1) \log X)^{v-1-v'}}{(v-v'-1)!v'} \left(\frac{\partial^{v'}}{\partial s_1^{v'}} \right) (p(\mathbf{s}'), \mathbf{s}'). \end{aligned}$$

Nous calculons les dérivées partielles de $\Upsilon_{k,g}$ par la formule du binôme de Newton. Il existe des coefficients $a(v_1, v_2, v_3, v_4)$ tels que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^{v'} \Upsilon_{k,g}}{\partial s_1^{v'}}\right) &= \sum_{v_1+v_2+v_3+v_4=v'} a(v_1, v_2, v_3, v_4) \left(\frac{\partial^{v_1} \Psi_1}{\partial s_1^{v_1}}\right) \times \\ &\times \left(\frac{\partial^{v_2} \Psi_2}{\partial s_1^{v_2}}\right) \left(\frac{\partial^{v_3} \Psi_3}{\partial s_1^{v_3}}\right) \left(\frac{\partial^{v_4} H_{k,g}}{\partial s_1^{v_4}}\right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Il s'agit donc d'évaluer en $(p(\mathbf{s}'), \mathbf{s}')$ toutes les dérivées intervenant dans le membre de droite. Tout d'abord, on a

$$\left(\frac{\partial^{v_1} \Psi_1}{\partial s_1^{v_1}}\right)(p(\mathbf{s}'), \mathbf{s}') = \sum_J a_J \prod_{i \in J} \frac{\ell_{k,g}^{(i)}(e_1)}{\ell_{k,g}^{(i)}(p(\mathbf{s}'), \mathbf{s}')}$$

où $J = (i_1, \dots, i_{v_1})$ décrit l'ensemble des v_1 -uplets à coordonnées dans $[v+1, m-g] \cap \mathbb{N}$ (coordonnées qui ne sont pas forcément distinctes) et a_J est un coefficient rationnel que nous n'avons pas besoin de préciser dans lesquels nous avons compté le facteur de Ψ_1 constant $1/\prod_{i=1}^{v_1} \ell_{k,g}^{(i)}(e_1)$.

Nous notons

$$\mathcal{D}'_{k',g+1}(\mathbf{a}) := \left\{ \mathbf{s}' \in \mathbb{C}^{m-g-1} : \Re e(b_{k',g+1}^{(j)}(\mathbf{s}')) > -\alpha_{\sigma_{k,g}(j)} \quad (1 \leq j \leq m) \right\},$$

Il est clair que, pour tout $v_2 \in \mathbb{N}$, il existe une fonction Φ_{v_2} satisfaisant à

$$\frac{\partial^{v_2} \Psi_2}{\partial s_1^{v_2}}(p(\mathbf{s}'), \mathbf{s}') = \Psi_2(p(\mathbf{s}'), \mathbf{s}') \Phi_{v_2}(\mathbf{s}')$$

et telle qu'elle soit holomorphe dans $\mathcal{D}'_{k',g+1}(\mathbf{a})$ et, pour tout $\varepsilon > 0$, uniformément bornée dans $\mathcal{D}'_{k',g+1}(\mathbf{a} - \varepsilon \mathbf{v}_1)$.*

Nous montrons que la contribution des termes correspondant à des valeurs de v_3 supérieures à 1 est négligeable en utilisant la majoration

$$\left(\frac{\partial^{v_3} \Psi_3}{\partial s_1^{v_3}}\right)(p(\mathbf{s}'), \mathbf{s}') \ll \xi.$$

Notons R_3 cette contribution. Nous majorons R_3 en utilisant la majoration (3.24) démontrée indépendamment de ce qui suit. Celle-ci implique facilement que

$$R_3 \ll \xi (\log X)^n T^\varepsilon \int_{-T}^T \dots \int_{-T}^T \frac{d\tau_2 \dots d\tau_{m-g}}{\prod_{j=2}^{m-g} (|\tau_j| + 1)} \ll \xi (\log X)^n T^\varepsilon (\log T)^n.$$

Quitte à changer la valeur de ε , ceci est englobé par le terme d'erreur de (2.10). Ceci termine l'étude des termes correspondants à $v_3 \geq 1$.

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer les quantités relatives aux $M_{k',g+1}$. Nous désignons par $A_{k',g+1}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n_{k',g+1}, m-g-1}(\mathbb{R})$ avec

*Nous rappelons la notation $\mathbf{v}_1 = \sum_{j=1}^m e_j$.

$n_{k',g+1} = n_{k,g} - v + v_1$ définie par les formes linéaires $\ell_{k',g+1}^{(i)}$ de la façon suivante

$$\begin{aligned} \ell_{k',g+1}^{(i)}(\mathbf{s}') &:= \ell_{k,g}^{(i+v)}(p(\mathbf{s}'), \mathbf{s}') & (1 \leq i \leq n_{k,g} - v) \\ \ell_{k',g+1}^{(\mu+n_{k,g}-v)}(\mathbf{s}') &:= \ell_{k,g}^{(i_\mu)}(p(\mathbf{s}'), \mathbf{s}') & ((i_1, \dots, i_\mu, \dots, i_{v_1}) = J) \end{aligned} \tag{3.19}$$

Ceci correspond à la manipulation (iii) de la sous-section 2.2 lorsque $J \neq \emptyset$. Ainsi, les matrices $B_{k',g+1}$ et $A_{k',g+1}$ satisfont à la propriété (H1).

Nous posons

$$P_{k',g+1}(Y) = P_{k,g}(Y)(\mathcal{B}_{k,g}(e_1)Y)^{v-1-v'} \frac{a(v_1, v_2, \mathbf{0}, v_4) a_J}{(v-v'-1)! v!} \prod_{i \in J} \ell_{k,g}^{(i)}(e_1) \tag{3.20}$$

et

$$H_{k',g+1}(\mathbf{s}') := \Phi_{v_2}(\mathbf{s}') \left(\frac{\partial^{v_4} H_{k,g}}{\partial s_1^{v_4}} \right) (p(\mathbf{s}'), \mathbf{s}') \tag{3.21}$$

de sorte que l'on puisse écrire la formule (3.10) sous la forme

$$P_{k,g} M_{k,g} := \sum_{k'} P_{k',g+1} M_{k',g+1} + R_3 + O(X^{-\theta_{g+1}(1-\varepsilon)})$$

pourvu que μ , définissant T , soit choisi suffisamment grand.

Il reste à montrer que ces quantités relatives à $P_{k',g+1}$ et $M_{k',g+1}$ vérifient les conditions décrites en (H3)–(H4).*

Vérification de (H3): La fonction $H_{k,g}$ est holomorphe dans le domaine (3.22)

$$\mathcal{D}_{k,g}(\delta_1, \delta_3, \mathbf{a}) = \left\{ (s_1, \mathbf{s}') \in \mathbb{C}^{m-g} : \begin{aligned} &\Re e(\ell_{k,g}^{(i)}(s_1, \mathbf{s}')) > -\delta_1 & (1 \leq i \leq n_{k,g}), \\ &\Re e(h_{k,g}^{(r)}(s_1, \mathbf{s}')) > -\delta_3 & (r \in \mathcal{R}), \\ &\Re e(b_{k,g}^{(j)}(s_1, \mathbf{s}')) > -\alpha_{\sigma_{k,g}(j)} & (1 \leq j \leq m). \end{aligned} \right\}. \tag{3.22}$$

Donc la fonction $(s_1, \mathbf{s}') \mapsto \left(\frac{\partial^{v_4} H_{k,g}}{\partial s_1^{v_4}} \right) (s_1, \mathbf{s}')$ est holomorphe dans $\mathcal{D}_{k,g}(\delta_1, \delta_3, \mathbf{a})$ et elle satisfait, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $\varepsilon' > 0$, à la majoration

$$\left| \frac{\partial^{v_4} H_{k,g}}{\partial s_1^{v_4}}(s_1, \mathbf{s}') \right| \ll \prod_{i=1}^{n_{k,g}} (|\Im m \ell_{k,g}^{(i)}(s_1, \mathbf{s}')| + 1)^{1-\delta_2 \min\{0, \Re e(\ell_{k,g}^{(i)}(s_1, \mathbf{s}'))\}} (1 + \|\boldsymbol{\tau}\|_1^\varepsilon) \tag{3.23}$$

dans $\mathcal{D}_{k,g}(\delta_1 - \varepsilon', \delta_3 - \varepsilon', (1 - \varepsilon')\mathbf{a})$. Pour établir ce résultat, on peut appliquer la formule de Cauchy qui permet de majorer la dérivée v_4 -ième de $H_{k,g}(\cdot, \mathbf{s}')$ à partir d'une majoration de $H_{k,g}(\cdot, \mathbf{s}')$ dans un voisinage. On pourra prendre par exemple le disque de rayon ε centré en s_1 .

*La propriété (H5), qui ne concerne que le polynôme Q_{g+1} , ne sera étudiée qu'à la sous-section 3.4.

Posons

$$\mathcal{D}_{k',g+1}(\delta_1, \delta_3, \mathbf{a}) = \left\{ \mathbf{s}' \in \mathbb{C}^{m-g-1} : \begin{array}{l} \Re e(\ell_{k',g+1}^{(i)}(p(\mathbf{s}'), \mathbf{s}')) > -\delta_1 \quad (i \leq n_{k',g+1}), \\ \Re e(h_{k',g+1}^{(r)}(p(\mathbf{s}'), \mathbf{s}')) > -\delta_3 \quad (r \in \mathcal{R}), \\ \Re e(b_{k',g+1}^{(j)}(p(\mathbf{s}'), \mathbf{s}')) > -\alpha_{\sigma_{k,g}(j)} \quad (j \leq m), \end{array} \right\},$$

de sorte que

$$(p(\mathbf{s}'), \mathbf{s}') \in \mathcal{D}_{k,g}(\delta_1, \delta_3, \mathbf{a}) \iff \mathbf{s}' \in \mathcal{D}_{k',g+1}(\delta_1, \delta_3, \mathbf{a}).$$

La fonction $\mathbf{s}' \mapsto \left(\frac{\partial^{v_4} H_{k,g}}{\partial s_1^{v_4}}\right)(p(\mathbf{s}'), \mathbf{s}')$ est holomorphe dans $\mathcal{D}_{k',g+1}(\delta_1, \delta_3, \mathbf{a})$ et pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $\varepsilon' > 0$, grâce à (3.23), on a lorsque $\mathbf{s}' \in \mathcal{D}_{k',g+1}(\delta_1 - \varepsilon', \delta_3 - \varepsilon', (1 - \varepsilon')\mathbf{a})$

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{\partial^{v_4} H_{k,g}}{\partial s_1^{v_4}}\right)(p(\mathbf{s}'), \mathbf{s}') \right| \\ & \ll \prod_{i=1}^{n_{k,g}} (|\Im m \ell_{k,g}^{(i)}(p(\mathbf{s}'), \mathbf{s}')| + 1)^{1-\delta_2 \min\{0, \Re e(\ell_{k,g}^{(i)}(p(\mathbf{s}'), \mathbf{s}'))\}} (1 + \|\boldsymbol{\tau}'\|_1^\varepsilon) \\ & \ll \prod_{i=1}^{n_{k',g+1}} (|\Im m \ell_{k',g+1}^{(i)}(\mathbf{s}')| + 1)^{1-\delta_2 \min\{0, \Re e(\ell_{k',g+1}^{(i)}(\mathbf{s}'))\}} (1 + \|\boldsymbol{\tau}'\|_1^\varepsilon) \end{aligned} \tag{3.24}$$

où l'on a utilisé les définitions (3.19). Puisque $\mathcal{D}_{k',g+1}(\mathbf{a}) \supset \mathcal{D}_{k',g+1}(\delta_1, \delta_3, \mathbf{a})$, nous en déduisons que $H_{k',g+1}$ la fonction définie en (3.21) possède la propriété

$$\mathcal{H}_{m-g-1}(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \mathbf{a}; \{\ell_{k',g+1}^{(i)}\}_{i=1}^{n_{k',g+1}}, \{h_{k',g+1}^{(r)}\}_{r \in \mathcal{R}}, \{b_{k',g+1}^{(j)}\}_{j=1}^m).$$

Vérification de (H4): D'après (3.20), on a

$$\deg(P_{k',g+1}) \leq \deg(P_{k,g}) + v - 1 - v'.$$

Il est clair que l'on a aussi

$$\begin{aligned} \text{rang}(\{\ell_{k',g+1}^{(i)}\}_{i=1}^{n_{k',g+1}}) &= \text{rang}(\{\ell_{k,g}^{(i)}\}_{i=1}^{n_{k,g}}) - 1, \\ n_{k',g+1} - \text{rang}(\{\ell_{k',g+1}^{(i)}\}_{i=1}^{n_{k',g+1}}) &= n_{k,g} - \text{rang}(\{\ell_{k,g}^{(i)}\}_{i=1}^{n_{k,g}}) + 1 - v + v_1. \end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} \deg(P_{k',g+1}) + n_{k',g+1} - \text{rang}(\{\ell_{k',g+1}^{(i)}\}_{i=1}^{n_{k',g+1}}) \\ \leq \deg(P_{k,g}) + n_{k,g} - \text{rang}(\{\ell_{k,g}^{(i)}\}_{i=1}^{n_{k,g}}) + v_1 - v' \end{aligned}$$

L'inégalité $v_1 \leq v'$ issue de (3.18) et l'hypothèse de récurrence impliquent alors

$$\begin{aligned} \deg(P_{k',g+1}) + n_{k',g+1} - \text{rang}(\{\ell_{k',g+1}^{(i)}\}_{i=1}^{n_{k',g+1}}) &\leq \deg(P_{k,g}) + n_{k,g} - \text{rang}(\{\ell_{k,g}^{(i)}\}_{i=1}^{n_{k,g}}) \\ &\leq n - \text{rang}(\{\ell_{k,g}^{(i)}\}_{i=1}^n), \end{aligned}$$

ce qui correspond bien à la condition (H4).

3.3. LE CAS $\mathcal{B}_{k,g} \neq 0$ ET $n_{k,g} = 0$

Nous reprenons le fil de la démonstration suivi à la section 3.2 dans le cas $n_{k,g} > 0$. Ici, il n’y a plus de pôle dans la région $\mathcal{K}_{k,g}$ balayée. Nous posons

$$\theta_{k,g} := \min \left\{ \frac{1}{\delta_2 \eta_{k,g}^{(2)}}, \frac{1}{\delta_3 \eta_{k,g}^{(3)}} \right\}.$$

En décalant vers la gauche si $\mathcal{B}_{k,g}(e_1) > 0$ (resp. vers la droite si $\mathcal{B}_{k,g}(e_1) < 0$) la droite d’intégration en s_1 de l’abscisse $\kappa_{\sigma_{k,g}(1)}$ à l’abscisse $-\theta_{k,g}$ (resp. $+\theta_{k,g}$), nous obtenons à la place de la formule (3.10) la majoration

$$P_{k,g} M_{k,g} \ll X^{-\theta_{k,g} |\mathcal{B}_{k,g}(e_1)| (1-\varepsilon)} / \zeta$$

ce qui est englobé dans le terme d’erreur de (3.2).

3.4. LE CAS $\mathcal{B}_{k,g} = 0$

On remarque qu’il existe un sous-ensemble $\mathcal{I}_{k,g}$ de $\{1, \dots, n\}$ à g éléments tel que

$$\mathcal{B} \in \text{vect}(\{\ell^{(i)}\}_{i \in \mathcal{I}_{k,g}}). \tag{3.25}$$

En effet, pour tout g , la forme linéaire $\mathcal{B}_{k',g+1}$ peut être vu comme la restriction de $\mathcal{B}_{k,g}$ au noyau de $\ell_{k,g}^{(i_0)}$ où $\ell_{k,g}^{(i_0)}(e_{j_0})$ a été choisi comme pivot. Donc, il existe un sous-ensemble $\mathcal{I}_{k,g}$ de $\{1, \dots, n\}$ à g éléments tel que $\mathcal{B}_{k,g}$ est la restriction de \mathcal{B} à $\bigcap_{i \in \mathcal{I}_{k,g}} \ker(\ell^{(i)})$. Un simple argument d’algèbre linéaire permet de trouver le résultat annoncé.

L’ensemble $\mathcal{I}_{k,g}$ est choisi tel que $\{\ell^{(i)}\}_{i \in \mathcal{I}_{k,g}}$ soit une famille libre satisfaisant à

$$\ell^{(i)}(b_{k,g}^{(\sigma_{k,g}^{-1}(1))}(\mathbf{s}), \dots, b_{k,g}^{(\sigma_{k,g}^{-1}(m))}(\mathbf{s})) = 0 \quad (\forall \mathbf{s}). \tag{3.26}$$

Sous cette condition, $M_{k,g}$ ne peut pas être évalué efficacement en décalant la droite d’intégration. On a en effet

$$M_{k,g} = \frac{1}{(2\pi i)^{m-g}} \int_{\kappa_{\sigma_{k,g}(1)} - iT}^{\kappa_{\sigma_{k,g}(1)} + iT} \dots \int_{\kappa_{\sigma_{k,g}(m-g)} - iT}^{\kappa_{\sigma_{k,g}(m-g)} + iT} \Theta_{k,g}(\mathbf{s}) ds$$

avec

$$\Theta_{k,g}(\mathbf{s}) = \frac{H_{k,g}(\mathbf{s})}{\prod_{i=1}^{n_{k,g}} \ell_{k,g}^{(i)}(\mathbf{s})} \prod_{j=1}^m \frac{\hat{\eta}_{\zeta}(b_{k,g}^{(j)}(\mathbf{s}) + \alpha_{\sigma_{k,g}(j)})}{(b_{k,g}^{(j)}(\mathbf{s}) + \alpha_{\sigma_{k,g}(j)})}.$$

Nous voulons montrer que $M_{k,g}$ peut être approché de manière satisfaisante par une constante. Nous cherchons dans un premier temps une majoration de $\Theta_{k,g}$.

Les identités $s_j = b_{k,g}^{(j)}(\mathbf{s})$ pour $1 \leq j \leq m - g$ et la condition $\sum_{i=1}^m \beta_{\sigma_{k,g}(i)} b_{k,g}^{(i)} = 0$ fournissent

$$\sum_{j=1}^{m-g} \beta_{\sigma_{k,g}(j)} s_j = - \sum_{j=m-g+1}^m \beta_{\sigma_{k,g}(j)} b_{k,g}^{(j)}(\mathbf{s}). \tag{3.27}$$

Cette formule implique alors la majoration

$$\frac{\left| \sum_{j=1}^{m-g} \beta_{\sigma_{k,g}(j)} s_j \right| + 1}{\prod_{j=m-g+1}^m |b_{k,g}^{(j)}(\mathbf{s}) + \alpha_{\sigma_{k,g}(j)}|} \ll 1$$

et, par conséquent,

$$\left| \prod_{j=1}^m \frac{1}{(b_{k,g}^{(j)}(\mathbf{s}) + \alpha_{\sigma_{k,g}(j)})} \right| \ll \frac{1}{\left| \sum_{j=1}^{m-g} \beta_{\sigma_{k,g}(j)} \tau_j \right| + 1} \prod_{j=1}^{m-g} \frac{1}{|\tau_j| + 1} \tag{3.28}$$

uniformément pour $s_j = \kappa_{\sigma_{k,g}(j)} + i\tau_j$. Cette majoration est bien entendu valable que lorsque les $\alpha_j > 0$ sont fixés.

D'une majoration de $H_{k,g}$ du type (3.1), nous en déduisons, pour tout $\varepsilon > 0$, lorsque X est suffisamment grand, la majoration

$$\Theta_{k,g}(\mathbf{s}) \ll (\log X)^n \frac{1 + \|\boldsymbol{\tau}\|_1^\varepsilon}{\left| \sum_{j=1}^{m-g} \beta_{\sigma_{k,g}(j)} \tau_j \right| + 1} \prod_{j=1}^{m-g} \frac{1}{|\tau_j| + 1} \quad (s_j = \kappa_{\sigma_{k,g}(j)} + i\tau_j, \forall j).$$

Pour estimer $M_{k,g}$, nous utilisons la formule

$$\prod_{j=1}^m \hat{\eta}_\zeta(b_{k,g}^{(j)}(\mathbf{s}) + \alpha_{\sigma_{k,g}(j)}) = 1 + O\left(\sum_{j=1}^m (|b_{k,g}^{(j)}(\mathbf{s})| + 1)\zeta\right) = 1 + O\left(\sum_{j=1}^{m-g} (|\tau_j| + 1)\zeta\right)$$

issue de la majoration (2.3). Posant

$$\Theta_{k,g}^*(\mathbf{s}) := \frac{H_{k,g}(\mathbf{s})}{\prod_{i=1}^{n_{k,g}} \ell_{k,g}^{(i)}(\mathbf{s}) \prod_{j=1}^m (b_{k,g}^{(j)}(\mathbf{s}) + \alpha_{\sigma_{k,g}(j)})},$$

nous obtenons

$$M_{k,g} = M_{k,g}^* + O(\zeta R_1)$$

avec

$$M_{k,g}^* = \frac{1}{(2\pi i)^{m-g}} \int_{\kappa_{\sigma_{k,g}(1)} - iT}^{\kappa_{\sigma_{k,g}(1)} + iT} \cdots \int_{\kappa_{\sigma_{k,g}(m-g)} - iT}^{\kappa_{\sigma_{k,g}(m-g)} + iT} \Theta_{k,g}^*(\mathbf{s}) ds$$

et

$$R_1 \ll (\log X)^n \sum_{j=1}^{m-g} \int_{-T}^T \cdots \int_{-T}^T \frac{(1 + \|\boldsymbol{\tau}\|_1^\varepsilon) d\tau_1 \cdots d\tau_m}{\left(\left| \sum_{j=1}^{m-g} \beta_{\sigma_{k,g}(j)} \tau_j \right| + 1 \right) \prod_{j=1, j \neq j'}^{m-g} (|\tau_j| + 1)}$$

La majoration uniforme par rapport à T et $\{\tau_j\}_{j \neq j'}$

$$\int_{-T}^T \frac{d\tau_{j'}}{(|\sum_{j=1}^{m-g} \beta_{\sigma_{k,g}(j)} \tau_j| + 1)} \ll \log(T + 2),$$

permet d'obtenir la majoration

$$R_1 \ll (\log X)^n T^\varepsilon$$

et, donc, que le terme $\zeta P_{k,g}(\log X) R_1$ est bien englobé par le terme d'erreur de (2.10).

Nous considérons maintenant $M_{k,g}^*$. Posant

$$c_{k,g} := \frac{1}{(2\pi i)^{m-g}} \int_{\kappa_{\sigma_{k,g}(1)} - i\infty}^{\kappa_{\sigma_{k,g}(1)} + i\infty} \dots \int_{\kappa_{\sigma_{k,g}(m-g)} - i\infty}^{\kappa_{\sigma_{k,g}(m-g)} + i\infty} \Theta_{k,g}^*(\mathbf{s}) ds,$$

nous obtenons

$$M_{k,g}^* = c_{k,g} + O(R_2)$$

avec

$$R_2 := (\log X)^n \iint_{C(T)} \frac{(1 + \|\boldsymbol{\tau}\|_1^\varepsilon) d\boldsymbol{\tau}}{(|\sum_{j=1}^{m-g} \beta_{\sigma_{k,g}(j)} \tau_j| + 1) \prod_{j=1}^{m-g} (|\tau_j| + 1)}$$

où $C(T)$ est le complémentaire dans \mathbb{R}^{m-g} du l'hypercube centré en O d'arête de longueur $2T$.

Majorons maintenant R_2 . Pour des raisons de symétrie, on a

$$R_2 \ll (\log X)^n \int_T^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 + \|\boldsymbol{\tau}\|_1^\varepsilon) d\tau_2 \dots d\tau_{m-g}}{(|\sum_{j=1}^{m-g} \beta_{\sigma_{k,g}(j)} \tau_j| + 1) \prod_{j=2}^{m-g} (|\tau_j| + 1)} \right) \frac{d\tau_1}{|\tau_1| + 1}.$$

Pour majorer cette dernière intégrale, on utilise $m - g - 1$ fois la majoration uniforme par rapport à $a \in \mathbb{R}$, pour chaque $\varepsilon > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|t|^\varepsilon + 1}{(|t| + 1)(|t + a| + 1)} dt \ll \frac{1}{(|a| + 1)^{1-2\varepsilon}}.$$

Ceci fournit

$$R_2 \ll (\log X)^n \int_T^{+\infty} \frac{d\tau_1}{(|\tau_1| + 1)^{2-2m\varepsilon}} \ll (\log X)^{2n} T^{-1+2m\varepsilon}.$$

En choisissant μ suffisamment grand, nous obtenons

$$P_{k,g}(\log X) M_{k,g} = c_{k,g} P_{k,g}(\log X) + O(\zeta T^\varepsilon (\log X)^{2n} + X^{-\theta_{g+1}}).$$

Nous choisissons donc

$$Q_{g+1} = Q_g + \sum_k c_{k,g} P_{k,g},$$

avec la convention $c_{k,g} = 0$ lorsque $\mathcal{B}_{k,g} \neq \emptyset$. Le polynôme Q_{g+1} , ainsi défini, vérifie la propriété (H5).

Ceci clôt la démonstration de la récurrence.

3.5. LE CAS OÙ $J(\mathbf{a}) \neq \emptyset$

Nous nous contentons de détailler les modifications qu'implique l'hypothèse $J(\mathbf{a}) \neq \emptyset$. Soit $r := \text{card}(J(\mathbf{a}))$. Pour des commodités d'écriture, nous ordonnons l'ensemble $J(\mathbf{a}) = \{j_1, \dots, j_r\}$ et nous notons

$$e_{j_p}^* = \ell^{(p+n)} \quad (p = 1, \dots, r). \quad (3.29)$$

La démonstration de la majoration du terme d'erreur dans l'estimation du Théorème 1 est identique à celle où $J(\mathbf{a}) = \emptyset$. Pour le calcul des résidus, les pôles maintenant sont les zéros de $n+r$ formes linéaires. Ainsi, la matrice A utilisée dans la récurrence a $n+r$ lignes. Le domaine d'holomorphie (3.22) de $H_{k,g}$ est maintenant défini par

$$\mathcal{D}_{k,g}(\delta_1, \delta_3, \mathbf{a}) = \left\{ (s_1, \mathbf{s}') \in \mathbb{C}^{m-g} : \begin{array}{ll} \Re(\ell_{k,g}^{(i)}(s_1, \mathbf{s}')) > -\delta_1 & (1 \leq i \leq n_{k,g}), \\ \Re(h_{k,g}^{(r)}(s_1, \mathbf{s}')) > -\delta_3 & (r \in \mathcal{R}), \\ \Re(b_{k,g}^{(j)}(s_1, \mathbf{s}')) > -\alpha_{\sigma_{k,g}(j)} & (\alpha_{\sigma_{k,g}(j)} \neq 0), \\ \Re(b_{k,g}^{(j)}(s_1, \mathbf{s}')) > -1 & (\alpha_{\sigma_{k,g}(j)} = 0). \end{array} \right\}.$$

Chaque étape de la démonstration de la récurrence est alors semblable à celles développées dans les quatre premières sous-sections de la partie 3. Nous obtenons donc l'existence d'un polynôme Q_β de degré inférieur ou égal à $n+r - \text{rang}(\{\ell^{(i)}\}_{i=1}^{n+r})$ et un réel $\theta = \theta(\mathcal{L}, \{h^{(r)}\}_{r \in \mathcal{R}}, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \mathbf{a}, \beta) > 0$ tels que l'on ait la formule asymptotique

$$S(\mathbf{X}^\beta) = X^{(a,\beta)} (Q_\beta(\log X) + O(X^{-\theta})).$$

Cela termine la démonstration du Théorème 1.

4. Démonstration du théorème 2: étude du polynôme Q_β

4.1. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2(i)

Nous sommes dans le cas où $\mathcal{B} \notin \text{Vect}(\{\ell^{(i)}\}_{i=1}^{n+r})$. D'après (3.25), ceci implique que, pour tout k, g , on a

$$\mathcal{B}_{k,g} = \sum_{i=1}^m \beta_{\sigma_{k,g}(i)} b_{k,g}^{(i)} \neq 0.$$

Chaque étape de la récurrence correspond donc au cas de la sous-section 3.2 sauf

pour la dernière étape où il s'agit de la sous-section 3.3. Pour tout g , on a $Q_g = 0$ ce qui prouve que $Q_\beta = 0$.

4.1. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2(ii)

Pour $i_0 = 1, \dots, n$, nous désignons par G_{i_0} la fonction définie par

$$G_{i_0}(z_1, \dots, z_{n+r}) = \frac{1}{z_{i_0}} \left(\underbrace{G(0, \dots, 0, z_{i_0}, \dots, z_{n+r})}_{i_0-1 \text{ zéros}} - \underbrace{G(0, 0, \dots, 0, z_{i_0+1}, \dots, z_{n+r})}_{i_0 \text{ zéros}} \right)$$

lorsque $\Re z_i > -\delta_1 \quad (i \leq n)$ et, pour $i_0 = n + 1, \dots, n + r$,

$$G_{i_0}(z_1, \dots, z_{n+r}) = \underbrace{G(0, \dots, 0, z_{i_0}, \dots, z_{n+r})}_{i_0-1 \text{ zéros}} - \underbrace{G(0, 0, \dots, 0, z_{i_0+1}, \dots, z_{n+r})}_{i_0 \text{ zéros}}.$$

La fonction H_{i_0} associée est définie par

$$H_{i_0}(\mathbf{s}) = G_{i_0}(\ell^{(1)}(\mathbf{s}), \dots, \ell^{(n+r)}(\mathbf{s})) \quad (i_0 = 1, \dots, n + r)$$

lorsque $\Re \ell^{(i_0)}(\mathbf{s}) > -\delta_1 \quad (i_0 \leq n)$. Nous notons aussi $H_0(\mathbf{s}) = C_0$. Nous avons ainsi

$$H(\mathbf{s}) = H_0(\mathbf{s}) + \sum_{i_0=1}^n \ell^{(i_0)}(\mathbf{s}) H_{i_0}(\mathbf{s}) + \sum_{i_0=n+1}^{n+r} H_{i_0}(\mathbf{s}).$$

Pour $i_0 = 0, 1, \dots, n + r$, notons P_{i_0} le polynôme issu de la Proposition 1* associé à la fonction F_{i_0} définie par la relation

$$F_{i_0}(\mathbf{s} + \mathbf{a}) := \frac{H_{i_0}(\mathbf{s})}{\prod_{i=1, i \neq i_0}^n \ell^{(i)}(\mathbf{s})} \quad (i_0 = 0, 1, \dots, n + r). \tag{4.1}$$

Nous avons

$$Q_\beta = P_0 + \sum_{i_0=1}^{n+r} P_{i_0},$$

puisque $F = F_0 + \sum_{i_0=1}^{n+r} F_{i_0}$.

Cette manipulation permet pour $i_0 = 1, \dots, n + r$ de diminuer d'un le cardinal de la famille $\{\ell^{(i)}\}_{i=1}^{n+r}$. Montrons que $\deg(P_{i_0}) \leq \rho - 1$ pour $i_0 \geq 1$. Dans le cas $\ell^{(i_0)} \in \text{Vect}(\{\ell^{(i)}\}_{i=1, i \neq i_0}^{n+r})$, grâce à la Proposition 1, on a

$$\deg(P_{i_0}) \leq \text{card}(\{\ell^{(i)}\}_{i=1, i \neq i_0}^{n+r}) - \text{rang}(\{\ell^{(i)}\}_{i=1, i \neq i_0}^{n+r}) \leq \rho - 1.$$

*Nous précisons qu'ici la notation P_{i_0} a été choisie indépendamment de la notation $P_{k,g}$ et $P_{k',g+1}$ de la section 3.

Dans le cas $\mathcal{B} \notin \text{Vect}(\{\ell^{(i)}\}_{i=1, i \neq i_0}^{n+r})$, d'après le point (i), on a $P_{i_0} = 0$ ce qui est encore admissible. On a donc bien $\deg(P_{i_0}) \leq \rho - 1$ pour $i_0 \geq 1$ et, par conséquent,

$$Q_{\beta}(\log X) = P_0(\log X) + O((\log X)^{\rho-1}) \quad (X \geq 3).$$

Il reste à comparer $P_0(\log X)$ avec $C_0 X^{-(\mathbf{a}, \beta)} I(\mathbf{X}^{\beta})$. Pour démontrer le Théorème 2, le résultat suivant est largement suffisant.

LEMME 4.1. *Il existe $\theta'' > 0$ tel que*

$$P_0(\log X) = C_0 X^{-(\mathbf{a}, \beta)} I(\mathbf{X}^{\beta}) + O(X^{-\theta''}) \quad (X \geq 1)$$

où le polynôme P_0 est défini par la fonction (4.1) et la Proposition 1.

Démonstration du Lemme 4.1. Il est clair qu'il nous suffit d'estimer

$$M_0(\mathbf{X}^{\beta}, \xi) = C_0 \iiint_{[1, +\infty[^n} \prod_{j=1}^m \eta_{\xi} \left(\frac{\prod_{i=1}^n y_i^{\ell^{(i)}(e_j)}}{X^{\beta_j}} \right) \frac{dy}{\prod_{i=1}^n y_i^{1-\ell^{(i)}(\mathbf{a})}} \tag{4.2}$$

afin d'appliquer la Proposition 1. En effet, de la même manière qu'en (2.6), on a

$$C_0 I(\mathbf{X}^{\beta}) = M_0(\mathbf{X}^{\beta}, \xi) + O(M_0(\mathbf{X}_{(+)}^{\beta}, \xi) - M_0(\mathbf{X}_{(-)}^{\beta}, \xi)).$$

La formule (2.8) appliquée à $d_j = P_j(\mathbf{y}) = \prod_{i=1}^n y_i^{\ell^{(i)}(e_j)}$ fournit

$$M_0(\mathbf{X}^{\beta}, \xi) = C_0 \iiint_{[1, +\infty[^n} \prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_j - i\infty}^{\kappa_j + i\infty} \frac{X^{\beta_j(s_j + \alpha_j)} \hat{\eta}_{\xi}(s_j + \alpha_j)}{P_j(\mathbf{y})^{s_j + \alpha_j} (s_j + \alpha_j)} ds_j \right) \times \prod_{i=1}^n y_i^{\ell^{(i)}(\mathbf{a}) - 1} dy. \tag{4.3}$$

On a la relation

$$\prod_{j=1}^m P_j(\mathbf{y})^{-s_j - \alpha_j} \prod_{i=1}^n y_i^{\ell^{(i)}(\mathbf{a}) - 1} = \prod_{i=1}^n y_i^{-\ell^{(i)}(\mathbf{s}) - \ell^{(i)}(\mathbf{a})} \prod_{i=1}^n y_i^{\ell^{(i)}(\mathbf{a}) - 1} = \prod_{i=1}^n y_i^{\ell^{(i)}(\mathbf{s}) - 1}.$$

Nous utilisons maintenant la formule

$$\int_1^{+\infty} y_i^{-\ell^{(i)}(\mathbf{s}) - 1} dy_i = \frac{1}{\ell^{(i)}(\mathbf{s})}$$

valable dès que $\Re \ell^{(i)}(\mathbf{s}) > 0$. Lorsque $\Re s_j > 0$ ($j = 1, \dots, m$), nous obtenons

$$\iiint_{[1, +\infty[^n} \prod_{j=1}^m P_j(\mathbf{y})^{-s_j - \alpha_j} \prod_{i=1}^n y_i^{\ell^{(i)}(\mathbf{a}) - 1} dy = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\ell^{(i)}(\mathbf{s})}.$$

Après interversion des sommations, la formule (4.3) devient donc

$$M_0(\mathbf{X}^\beta, \zeta) = \frac{1}{(2\pi i)^m} \int_{\kappa_1 - i\infty}^{\kappa_1 + i\infty} \cdots \int_{\kappa_m - i\infty}^{\kappa_m + i\infty} \frac{C_0 X^{\mathcal{B}(\mathbf{s}+\mathbf{a})}}{\prod_{i=1}^n \ell^{(i)}(\mathbf{s})} \prod_{j=1}^m \frac{\hat{\eta}_\zeta(s_j + \alpha_j)}{(s_j + \alpha_j)} \, d\mathbf{s}.$$

Grâce à la Proposition 1, nous en déduisons la formule du Lemme 4.1. Cela conclut la démonstration du Théorème 2(ii).

On constate que, par la méthode utilisée dans ce paragraphe, on pourrait d’obtenir le coefficient du deuxième terme du polynôme Q_β pour certaines classes de famille \mathcal{L} .

4.3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2(iii)

La première assertion est une conséquence directe de l’hypothèse $\text{rang}(\{\ell^{(i)}\}_{i=1}^{n+r}) = m$.

Il existe des réels $a_{i,j}$ telle que

$$e_i^* = \sum_{j=1}^m a_{i,j} \ell^{(j)} \quad (i = 1, \dots, m).$$

Nous notons $f_i := \sum_{j=1}^m a_{i,j} e_j^* \in \mathcal{L}_m(\mathbb{C})$ les formes linéaires définies par $e_i^* = f_i(\ell^{(1)}, \dots, \ell^{(m)})$ lorsque $i \notin J(\mathbf{a})$. De (1.14), nous déduisons que

$$\sum_{i=1}^m \beta_i a_{i,j} = a_j \quad (j = 1, \dots, m).$$

Faisons le changement de variable $w_i = \ell^{(i)}$ dans l’intégrale multiple définissant $M(\mathbf{X}^\beta, \zeta)$. Soit Jac le jacobien associé. On a

$$M(\mathbf{X}^\beta, \zeta) = X^{(a,\beta)} \frac{|\text{Jac}|}{(2\pi i)^m} \int_{\ell^{(1)}(\kappa) - i\infty}^{\ell^{(1)}(\kappa) + i\infty} \cdots \int_{\ell^{(m)}(\kappa) - i\infty}^{\ell^{(m)}(\kappa) + i\infty} \times \\ \times X^{\sum_{j=1}^m a_j w_j} \frac{G(\mathbf{w})}{\prod_{j=1}^{m-r} w_j} \prod_{j=m-r+1}^m \frac{\hat{\eta}_\zeta(w_j)}{w_j} \prod_{j \notin J(\mathbf{a})} \frac{\hat{\eta}_\zeta(f_j(\mathbf{w}) + \alpha_j)}{(f_j(\mathbf{w}) + \alpha_j)} \, d\mathbf{w}.$$

Supposons que $a_i > 0$ pour tout $i = 1, \dots, m$. En décalant successivement la droite d’intégration en w_i vers la gauche, grâce au théorème des résidus, nous prouvons l’existence d’un réel strictement positif θ' tel que

$$M = |\text{Jac}| C_0 \left(\prod_{j \notin J(\mathbf{a})} \frac{1}{\alpha_j} \right) X^{(a,\beta)} \{1 + O(X^{-\theta'} \zeta^{-1} + (\log X)^{2m} \zeta)\}.$$

Nous avons donc

$$Q_\beta = |\text{Jac}| C_0 \prod_{j \notin J(\mathbf{a})} \frac{1}{\alpha_j}.$$

S’il existe i_0 tel que $a_{i_0} < 0$, en décalant la droite d’intégration en w_{i_0} vers la droite,

nous ne rencontrons aucun pôle. Il existe donc un réel strictement positif θ' tel que

$$M \ll X^{(\alpha, \beta)} (X^{-\theta'} \zeta^{-1} + (\log X)^n \zeta).$$

Nous avons bien $Q_\beta = 0$. Cela achève la démonstration du Théorème 2(iii).

En fait, nous venons de montrer le résultat suivant.

LEMME 4.2. *Soit une fonction arithmétique f satisfaisant à toutes les hypothèses du Théorème 2(iii). Soit F un fermé de $\text{Conv}^*(\{\ell^{(i)}\}_{i=1}^{n+r})$. Il existe $\theta(F) > 0$ tel que l'on ait uniformément pour $\mathcal{B} \in F$*

$$S(\mathbf{X}^\beta) = X^{(\alpha, \beta)} \left(|\text{Jac}| C_0 \prod_{j \notin J(\alpha)} \frac{1}{\alpha_j} + O(X^{-\theta(F)}) \right).$$

4.4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2(iv)

La famille $\{\ell^{(i)}\}_{i=1}^{n+r}$ est une famille génératrice de $\mathcal{L}_m(\mathbb{C})$, donc (C1) est vérifiée. Puisque $\mathcal{B} \in \text{Conv}^*(\{\ell^{(i)}\}_{i=1}^{n+r})$, \mathcal{B} et $\{\ell^{(i)}\}_{i=1}^{n+r}$ vérifient la condition (C2). D'après le Théorème 2(ii), il nous suffit de montrer que

$$X^{-(\alpha, \beta)} I(\mathbf{X}^\beta) \gg (\log X)^\rho. \quad (4.4)$$

Grâce à un changement de variables, nous obtenons

$$I(\mathbf{X}^\beta) = \iiint_{\Delta(\beta, \log X)} \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \ell^{(i)}(\mathbf{a}) t_i \right\} dt \quad (4.5)$$

où nous avons posé

$$\Delta(\beta, \log X) := \left\{ \mathbf{t} \in [0, +\infty[^n : \sum_{i=1}^n \ell^{(i)}(e_j) t_i \leq \beta_j \log X \ (\forall j) \right\}.$$

La démonstration de (4.4) se décompose en trois étapes.

Première étape: Nous traitons tout d'abord le problème en supposant, de plus, qu'il existe un ensemble $I \subset \{1, \dots, n\}$ de cardinal $m - r$ tel que

$$\mathcal{B} \in \text{Conv}^*(\{\ell^{(i)}\}_{i \in I}, \{e_j^*\}_{j \in J(\alpha)}). \quad (4.6)$$

Sans restreindre la généralité, on peut supposer $I = \{n - m + r + 1, \dots, n\}$. Nous introduisons les deux ensembles relatifs à un m -uplet δ

$$\Delta_1(\delta, \log X) = \left\{ \mathbf{t} \in [0, +\infty[^{n-m+r} : \sum_{i=1}^{n-m+r} \ell^{(i)}(e_j) t_i \leq \delta_j \log X \ (\forall j) \right\},$$

$$\Delta_2(\delta, \log X) = \left\{ \mathbf{t} \in [0, +\infty[^{m-r} : \sum_{i=n-m+r+1}^n \ell^{(i)}(e_j) t_i \leq \delta_j \log X \ (\forall j) \right\}.$$

Une séparation des variables dans l'intégrale (4.5) implique

$$\begin{aligned}
 I(\mathbf{X}^\beta) &= \iint_{\Delta_1(\beta, \log X)} \exp \left\{ \sum_{i=1}^{n-m+r} \ell^{(i)}(\mathbf{a}) t_i \right\} \times \\
 &\quad \times \left(\iint_{\Delta_2(\beta'(\mathbf{t}), \log X)} \exp \left\{ \sum_{i=n-m+r+1}^n \ell^{(i)}(\mathbf{a}) t_i \right\} dt_{n-m+r+1} \dots dt_n \right) dt_1 \dots dt_{n-m+r}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

où $\beta'(\mathbf{t})$ est défini par

$$\beta'_j = \beta_j - \frac{1}{\log X} \sum_{i=1}^{n-m+r} \ell^{(i)}(e_j) t_i \quad (\forall j). \tag{4.8}$$

Nous remarquons que l'hypothèse (4.6) implique l'existence de m fonctions $a_j = a_j(\beta')$ telles que $\sum_{j=1}^m \beta'_j e_j^* = \sum_{i=n-m+r}^{n+r} a_i(\beta') \ell^{(i)}$. Les fonctions a_j sont continues et positives dans un voisinage de β . Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\beta' \in B(\beta, \varepsilon)$, on ait $a_i(\beta') \geq \frac{1}{2} a_i(\beta) > 0$. Ici, $B(\beta, \varepsilon)$ désigne la boule de \mathbb{R}^m de centre β et de rayon ε pour la norme du sup. On a ainsi $B(\beta, \varepsilon) \subset F$ où $F := \sum_{i=n-m+r+1}^{n+r} [a_i(\beta)/2, +\infty[\ell^{(i)}$ est un fermé de $\text{Conv}^* (\{\ell^{(i)}\}_{i=n-m+r+1}^{n+r})$.

Minorons

$$I_2 := \iint_{\Delta_2(\beta'(\mathbf{t}), \log X)} \exp \left\{ \sum_{i \in I} \ell^{(i)}(\mathbf{a}) t_i \right\} dt_{n-m+r+1} \dots dt_n$$

lorsque $\beta' \in B(\beta, \varepsilon)$. D'après le Lemme 4.2, nous obtenons la formule uniforme pour $\beta' \in B(\beta, \varepsilon)$

$$I_2 = |\text{Jac}| X^{(a, \beta')} \left(\prod_{j=1}^m \frac{1}{\alpha_j} \right) \{1 + O(X^{-\theta})\}$$

où $\theta > 0$. Pour tout $\mathbf{t} \in \Delta_1(\varepsilon \mathbf{v}_1, \log X)$, on a $\beta'(\mathbf{t}) \in B(\beta, \varepsilon)$. De (4.7), nous en déduisons que, pour X suffisamment grand, nous avons

$$I(\mathbf{X}^\beta) \gg_\varepsilon \iint_{\Delta_1(\varepsilon \mathbf{v}_1, \log X)} \exp \left\{ \sum_{i=1}^{n-m+r} \ell^{(i)}(\mathbf{a}) t_i \right\} X^{(a, \beta'(\mathbf{t}))} dt_1 \dots dt_{n-m+r}.$$

Or

$$\exp \left\{ \sum_{i=1}^{n-m+r} \ell^{(i)}(\mathbf{a}) t_i \right\} X^{(a, \beta'(\mathbf{t}))} = X^{(a, \beta)},$$

nous avons donc

$$\begin{aligned}
 I(\mathbf{X}^\beta) &\gg_\varepsilon X^{(a, \beta)} \text{Vol}(\Delta_1(\varepsilon \mathbf{v}_1, \log X)) \\
 &= X^{(a, \beta)} (\log X)^{n-m+r} \text{Vol}(\Delta_1(\varepsilon \mathbf{v}_1, 1)) \gg_\varepsilon X^{(a, \beta)} (\log X)^{n-m+r}.
 \end{aligned}$$

Ceci clôt donc la démonstration du Théorème 2(iv) lorsque la condition supplémentaire (4.6) est satisfaite. Il s'agit maintenant de montrer que l'on peut toujours se ramener à la condition (4.6).

Deuxième étape: Nous nous plaçons dans le cas $J(\mathbf{a}) = \emptyset$. Soit I un sous-ensemble d'indice de $\{1, \dots, n\}$ tel que $\ell^{(i)}$ soit pour tout $i \in I$ une arête saillante du cône $\text{Conv}(\mathcal{L})$ choisi pour qu'il n'y ait pas de répétition. On a ainsi $\text{Conv}^*(\mathcal{L}) = \text{Conv}^*(\{\ell^{(i)}\}_{i \in I})$.

Nous utilisons maintenant un lemme de géométrie élémentaire démontré par J. Denef et P. Sargos dans [DS89].

LEMME 4.3 (J. Denef et P. Sargos). *Soit C un cône polyhedral saillant de \mathbb{R}^m , de sommet l'origine, admettant $p + m$ génératrices extrémales qui sont des demi-droites D_1, \dots, D_{m+p} . Alors il existe un nombre fini cônes C_k polyhedraux à m faces vérifiant les propriétés suivantes:*

- (i) *Chaque C_k est engendré par une sous-famille $\{D_{k_1}, \dots, D_{k_m}\}$ de $\{D_1, \dots, D_{m+p}\}$.*
- (ii) *Le cône C est, aux frontières près, réunion disjointe des cônes C_k .*

Nous utilisons la notation $\mathcal{L}(I) := \{\ell^{(i)}\}_{i \in I}$ lorsque I est un ensemble fini. $\mathcal{L}_m(\mathbb{R})$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension m que nous identifions à \mathbb{R}^m . Nous appliquons le Lemme 4.3 pour $C := \text{Conv}(\mathcal{L}(I))$. Nous envisageons deux cas.

Soit \mathcal{B} est dans l'intérieur d'un des C_k , les conditions imposées à la première étape sont alors satisfaites.

Soit \mathcal{B} appartient à l'intersection de deux cônes C_k et $C_{k'}$. Il existe donc deux sous-ensembles I_1 et I_2 de I , $I_1 \subset I_2$ tels que $\text{card}(I_1) \leq m - 1$ et $\text{card}(I_2) = m + 1$ et

$$\mathcal{B} \in \text{Conv}^*(\mathcal{L}(I_1)) \cap \text{Conv}^*(\mathcal{L}(I_2)).$$

Nous avons donc les deux écritures suivantes

$$\mathcal{B} = \sum_{i \in I_2} \gamma_i \ell^{(i)} = \sum_{i \in I_1} \delta_i \ell^{(i)}, \quad (4.9)$$

où $\gamma_i > 0$ et $\delta_i > 0$. Nous choisissons un indice $i' \in I_2 \setminus I_1$ et nous notons $I' = I_2 \setminus \{i'\}$. Nous remarquons que $\text{card}(I') = m$ et par conséquent $\mathcal{L}(I')$ est une base de \mathbb{R}^m . Nous notons

$$\Delta_\varepsilon(\boldsymbol{\beta}, \log X) := \left\{ \mathbf{t} \in [0, +\infty[^{n-m} : \begin{array}{l} \varepsilon \log X \leq t_{i'} \leq 2\varepsilon \log X \\ 0 \leq t_i \leq \varepsilon^2 \log X \quad (i \in \{1, \dots, n\} \setminus I_2) \\ \sum_{\substack{i=1 \\ i \notin I'}}^n \ell^{(i)}(e_j) t_i \leq \beta_j \log X \quad (\forall j) \end{array} \right\}$$

et

$$\begin{aligned} \beta'(\mathbf{t}) &:= \beta - \frac{t_{i'}}{\log X} \ell^{(i')} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \notin I_2}}^n \frac{t_i}{\log X} \ell^{(i)} \\ &= \sum_{i \in I_1} \left(\delta_i + \frac{t_{i'}}{\log X} \frac{\gamma_i - \delta_i}{\gamma_{i'}} \right) \ell^{(i)} + \frac{t_{i'}}{\log X} \sum_{i \in I' \setminus I_1} \frac{\gamma_i}{\gamma_{i'}} \ell^{(i)} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \notin I_2}}^n \frac{t_i}{\log X} \ell^{(i)}. \end{aligned}$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\} \setminus I_2$, la forme linéaire $\ell^{(i)}$ appartient à $\text{Vect}(\mathcal{L}(I'))$. Il existe donc un réel $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel que $\beta'(\mathbf{t}) \in \text{Conv}^*(\mathcal{L}(I'))$ quelque soit $\mathbf{t} \in \Delta_\varepsilon(\beta, \log X)$.

De la même manière que précédemment, pour X suffisamment grand, le Lemme 4.2 fournit

$$\begin{aligned} I(\mathbf{X}^\beta) &\gg_\varepsilon \iiint_{\Delta_\varepsilon(\beta, \log X)} \exp \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ i \notin I'}}^n \ell^{(i)}(\mathbf{a}) t_i \right\} X^{(\mathbf{a}, \beta'(\mathbf{t}))} d\mathbf{t} \\ &= X^{(\mathbf{a}, \beta)} \text{Vol}(\Delta_\varepsilon(\beta, \log X)) \\ &\gg_\varepsilon X^{(\mathbf{a}, \beta)} (\log X)^{n-m}, \end{aligned} \tag{4.10}$$

et, par conséquent, $\deg(Q_\beta) = n - m = n - m + r$. Cela termine la démonstration dans le cas $J(\mathbf{a}) = \emptyset$.

Troisième étape: Nous ramenons le cas $J(\mathbf{a}) \neq \emptyset$ au cas précédent. Pour simplifier la rédaction nous supposons $J(\mathbf{a}) = \{1, \dots, r\}$. Nous notons $\delta := \sum_{j=1}^r e_j$. Soit

$$\begin{aligned} \Delta(\beta, \log X) &:= \left\{ \mathbf{t} \in [0, +\infty[^n : \sum_{i=1}^n \ell^{(i)}(e_j) t_i \leq \beta_j \log X \quad (\forall j) \right\}, \\ \Delta'(\beta, \log X) &:= \left\{ \mathbf{t} \in [0, +\infty[^{n+r} : \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \ell^{(i)}(e_j) t_i + t_{n+j} &\leq \beta_j \log X & (j \leq r) \\ \sum_{i=1}^n \ell^{(i)}(e_j) t_i &\leq \beta_j \log X & (j \geq r+1) \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

Nous comparons $I(\mathbf{X}^\beta)$ à $X^{-(\delta, \beta)} I'(\mathbf{X}^\beta)$ où nous avons posé

$$\begin{aligned} I(\mathbf{X}^\beta) &= \iint_{\Delta(\beta, \log X)} \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \ell^{(i)}(\mathbf{a}) t_i \right\} d\mathbf{t} \\ I'(\mathbf{X}^\beta) &= \iint_{\Delta'(\beta, \log X)} \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \ell^{(i)}(\mathbf{a} + \delta) t_i + \sum_{j=1}^r t_{n+j} \right\} d\mathbf{t}. \end{aligned}$$

Un simple calcul fournit

$$\begin{aligned} X^{-(\delta, \beta)} I'(\mathbf{X}^\beta) &= \iint_{\Delta(\beta, \log X)} \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \ell^{(i)}(\mathbf{a} + \delta) t_i \right\} \times \\ &\quad \times \prod_{j=1}^r \left(\exp \left\{ \beta_j \log X - \sum_{i=1}^n \ell^{(i)}(e_j) t_i \right\} - 1 \right) dt. \quad (4.11) \\ &= I(\mathbf{X}^\beta) + O \left(\sum_{j=1}^r R_j \right) \end{aligned}$$

où

$$R_j := X^{-\beta_j} \iint_{\Delta(\beta, \log X)} \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \ell^{(i)}(\mathbf{a} + e_j) t_i \right\} dt.$$

L'intégrale de la définition de R_j relève du Lemme 4.1 où $\text{card}(J(\mathbf{a} + e_j)) = r - 1$. Nous obtenons ainsi

$$R_j \ll X^{(\mathbf{a}, \beta)} (\log X)^{n+r-1-m} = X^{(\mathbf{a}, \beta)} (\log X)^{\rho-1}. \quad (4.12)$$

et, grâce à (4.11),

$$I(\mathbf{X}^\beta) = X^{-(\delta + \mathbf{a}, \beta)} I'(\mathbf{X}^\beta) + O((\log X)^{\rho-1}).$$

Or l'intégrale $I'(\mathbf{X}^\beta)$ est associée à la famille de formes linéaires $\{\ell^{(i)}\}_{i=1}^{n+r}$ et au vecteur $\mathbf{a} + \delta$, nous obtenons donc grâce à (4.10)

$$X^{-(\delta + \mathbf{a}, \beta)} I'(\mathbf{X}^\beta) \gg (\log X)^\rho$$

et, par conséquent,

$$I(\mathbf{X}^\beta) \gg X^{(\mathbf{a}, \beta)} (\log X)^\rho.$$

Le point (iv) du Théorème 2 est ainsi entièrement démontré.

Nous indiquons que, dans le cas où $\ell^{(j)} = e_j^*/\alpha_j$ pour $j \in \{1, \dots, m\} \setminus J(\mathbf{a})$, la quantité $X^{-(\mathbf{a}, \beta)} I(\mathbf{X}^\beta)$ est clairement équivalente à

$$(\log X)^{n-m+r} \text{Vol} \left\{ \mathbf{t} \in [0, +\infty[^{n-m+r} : \sum_{i \in J(\mathbf{a})} \ell^{(i)}(e_j) t_i + \sum_{i=m+1}^n \ell^{(i)}(e_j) t_i \leq \beta_j \quad (\forall j) \right\}.$$

Bibliographie

- [BV97] Brion, M. and Vergne, M.: Residue formulae, vector partition functions and lattice points in rational polytopes, *J. Amer. Math. Soc.* **10**(4) (1997), 797–833.
 [BV97] Brion, M. and Vergne, M.: Arrangement of hyperplanes, I: Rational functions and Jeffrey–Kirwan residue, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **32**(4) (1999), 715–741.

- [dlB98] de la Bretèche, R.: Sur le nombre de points de hauteur bornée d'une certaine surface cubique singulière, *Astérisque* **251** (Volume intitulé *Nombre et répartition des points de hauteur bornée* édité par E. Peyre), (1998), 51–77.
- [dlB01] de la Bretèche, R.: Compter des points sur une variété torique, *J. Number Theory*, **87**(2) (2001), 315–331.
- [DS89] Denef, J. and Sargos, P.: Polyèdre de Newton et distribution f_+^s , *J. Anal. Math.* **53** (1989), 201–218.
- [L91] Lichtin, B.: The asymptotics of a lattice point problem associated to finitely many polynomials I, *Duke Math. J.* **63** (1991), 139–192.
- [L95] Lichtin, B.: The asymptotics of a lattice point problem associated to finitely many polynomials II, *Duke Math. J.* **77** (1995), 691–743.
- [S84] Sargos, P.: Prolongement méromorphe des séries de Dirichlet associées à des fractions rationnelles de plusieurs variables, *Ann. Inst. Fourier* **34**(3) (1984), 83–123.
- [S86] Sargos, P.: Croissance de certaines séries de Dirichlet et applications, *J. Reine Angew. Math.* **367** (1986), 139–154.
- [T95] Tenenbaum, G.: *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, 2ème éd., Cours Spécialisés, no. 1, Société Mathématique de France (1995).
- [W46] Widder, D. V.: *The Laplace Transform*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1946.