Canad. Math. Bull. Vol. **16** (4), 1973

SUR LE CALCUL DES ZEROS D'UN OPERATEUR DISCONTINU PAR ITERATION

PAR
S. MARUŠTER

On considère un opérateur $U(x)$ qui transforme l'espace euclidien E_n en soi-même, en général discontinu, et on étudie la convergence d'un procéssus itératif de la forme $x_{p+1}=x_p-\mu U(x_p)$ (μ est une constante numérique positive). Procéssus de ce type, avec $U(x)$ discontinu, se rencontrent par exemple à l'algorithme de relaxation pour la résolution des systèmes d'inéquations [1], [2], de même qu'au calcul des polynômes de la meilleure approximation sur un ensemble fini de points [3].

Nous noterons par S l'ensemble des zéros de l'opérateur $U(x)$ et nous supposerons dans ce qui suit que S n'est pas vide.

1650 THÉORÈME. *Si*

(1) *il y a l'implication* $x_n \to x^*$, $\|U(x_n)\| \to 0 \Rightarrow x^* \in S$,

(2) $\inf\limits_{\substack{x\in E_n\setminus S \\ \xi\in S}} \dfrac{\langle x-\xi, U(x)\rangle}{\|U(x)\|^2} = \eta > 0,$

(3) $0<\mu<2\eta$

alors la suite $\{x_p\}$ *donnée par*

(1) $$x_{p+1} = x_p-\mu U(x_p)$$

converge vers un point de S, *quel que soit l'itération initiale* x_0.

Démonstration. Si pour un certain indice p_0, $U(x_{p_0})=0$, alors pour tout $p>p_0$ on a $x_p=x_{p_0}$ et le théorème se trouve démontré. Supposons donc que $x_p \notin S$, $p=0, 1, \ldots$ et soit $\xi \in S$ d'ailleurs arbitraire. On a

$$\begin{aligned}\|x_{p+1}-\xi\|^2 &= \|x_p-\xi-\mu U(x_p)\|^2 \\ &= \|x_p-\xi\|^2-2\langle x_p-\xi, U(x_p)\rangle\mu+\|U(x_p)\|^2\mu^2 \\ &= \|x_p-\xi\|^2-\mu\,\|U(x_p)\| \left(\frac{2\langle x_p-\xi, U(x_p)\rangle}{\|U(x_p)\|^2}-\mu\right) < \|x_p-\xi\|^2,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

(2) $$\|x_{p+1}-\xi\| < \|x_p-\xi\|.$$

Donc, la suite $\{x_p\}$ est bornée.

Reçu par les rédacteurs le 20 décembre 1971.

https://doi.org/10.4153/CMB-1973-088-7 Published online by Cambridge University Press

Supposons que $\inf\|U(x_p)\|=0$ $(p=0, 1, \ldots)$; alors il existe une sous-suite $\{x_{p_i}\}$ de $\{x_p\}$ telle que $x_{p_i}\to x^*$ et $\|U(x_{p_i})\|\to 0$. En vertu de la condition 1 il découle que $x^* \in S$ et la relation (2) est vraie avec $\xi=x^*$. Puisque $\|x_{p_i}-x^*\|\to 0$, il résulte immédiatement que la suite $\{x_p\}$ converge vers x^* et le théorème est démontré.

Supposons maintenant que

$$\inf_{p=0,1,\ldots} \|U(x_p)\| = a > 0.$$

Soit alors $0<\varepsilon<a(2\eta-\mu)/2$ et τ un vecteur arbitraire avec $\|\tau\|\le 1$. L'ensemble $S'=\{\xi' \mid \xi'=\xi+\varepsilon\tau,\ \xi \in S,\ \|\tau\|\le 1\}$ a, évidemment, la dimension n. Pour tout $\xi' \in S'$ on a

$$\begin{aligned}\frac{\langle x_p-\xi', U(x_p)\rangle}{\|U(x_p)\|^2} &= \frac{\langle x_p-\xi, U(x_p)\rangle}{\|U(x_p)\|^2}-\varepsilon\frac{\langle \tau, U(x_p)\rangle}{\|U(x_p)\|^2}\\ &\ge \eta-\varepsilon\left|\left\langle\frac{\tau}{\|U(x_p)\|}, \frac{U(x_p)}{\|U(x_p)\|}\right\rangle\right| \ge \eta-\frac{\varepsilon}{a} > \frac{\mu}{2}.\end{aligned}$$

On obtient l'analogue de la relation (2), $\|x_{p+1}-\xi'\|<\|x_p-\xi'\|$. La suite $\{x_p\}$ étant bornée, il a au moins un point limite; supposons qu'il y en a duex, x^* et y^*. Alors $\|x^*-\xi'\|=\|y^*-\xi'\|$ et donc ξ' appartient au hyperplan H, lieu géometrique des points égaux distancés de x^* et y^*. Comme ξ' a été arbitraire dans S' il resulte que $S' \subset H$, ce qui contredit le fait que S' a la dimension n. La suite $\{x_p\}$ a par conséquent un seul point limite x^* et on a

$$\|U(x_p)\| = \frac{1}{\mu}\|x_{p+1}-x_p\| \to 0 \quad \text{pour} \quad p\to\infty,$$

donc $x^* \in S$, conformément à la condition 1.

Le théorème est complètement démontré.

Les conditions 1, 2 du théorème n'impliquent pas la continuité de l'opérateur $U(x)$. Par exemple, l'opératuer qui intervient dans la seconde application ci-dessous vérifie les conditions 1, 2 mais il n'est pas continu. Par suite, l'opératuer $x-\mu U(x)$ n'est pas en général une contraction et la convergence de l'algorithme (1) ne peut pas se démonstrer à l'aide du théorème de la contraction de Banach.

Application pour les systèmes linéaires. Soit un système compatible uniquement déterminé d'équations algébriques linéaires $Ax+B=0$ à matrice quelconque et l'opérateur $U(x)=A'(Ax+B)$. On peut prouver facilement que $U(x)$ satisfait les conditions du théorème. Donc, on obtient:

COROLLAIRE 1. *Si μ est une constante positive suffisamment petite, le procéssus itératif*

$$x_{p+1} = x_p-\mu A'(Ax_p+B)$$

converge vers la solution du système, quel que soit l'itération initiale x_0.

Ce résultat est bien connu et la constante μ est précisée aussi.

Application à l'algorithme de Motzkin-Agmon.

Soit

$$\Delta_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i \geq 0 \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

un système d'inéquations algébriques linéaires. Motzkin, Agmon, Schoenberg ont proposé en 1954 le suivant algorithme de relaxation pour déterminer une solution de celui-ci. Soit x_p l'itération d'ordre p, i_p le moindre indice pour lequel

$$|\Delta_{i_p}(x_p)| = \max_{\Delta_i(x_p)<0} |\Delta_i(x_p)|$$

et ξ_p la projection de x_p sur le hyperplan $\Delta_{i_p}(x)=0$. L'itération suivante est donnée par

$$x_{p+1} = x_p - \mu(x_p - \xi_p) \tag{3}$$

où $0<\mu<2$. Si, pour tout i, $\Delta_i(x_p)\geq 0$, alors on prend $x_{p+1}=x_p$. On voit que l'algorithme (3) est de type (1) avec $U(x_p)=x_p-\xi_p$. En exprimant les composantes de ξ_p par celles de x_p, on obtient

$$U(x_p) = x_p - \xi_p = \frac{\Delta_{i_p}(x_p)}{\|A_{i_p}\|^2} A_{i_p} = \Delta_{i_p}(x_p)\, \|A_{i_p}\|^{-2} A_{i_p},$$

$$A_{i_p} = (a_{i_p} \;\ldots\; a_{i_p n}).$$

Pour $x \in E_n$ quelconque, $U(x)$ se définie analoguement. (Nous désignerons l'indice i_p correspondant par i_x). Les conditions du théorème se verifient comme il suit:

(1) Soit $\{x_n\}$ une suite telle que $x_n \to x^*$ et $\|x_n - \xi_n\| \to 0$. On a

$$\|\xi_n - x^*\| \leq \|x_n - \xi_n\| + \|x_n - x^*\|$$

d'où $\|\xi_n - x^*\| \to 0$, ou $\xi_n \to x^*$. Comme S est un ensemble fermé il découle que $x^* \in S$.

(2) Si $x \notin S$ et $y \in S$ alors $\Delta_{i_x}(x)<0$ et $\Delta_{i_x}(y)\geq 0$. On a

$$\frac{\langle x-y, U(x)\rangle}{\|U(x)\|^2} = \frac{\Delta_{i_x}(x)\, \|A_{i_x}\|^{-2} \langle x-y, A_{i_x}\rangle}{\Delta^2_{i_x}(x)\, \|A_{i_x}\|^{-2}} = \frac{\Delta_{i_x}(x)-\Delta_{i_x}(y)}{\Delta_{i_x}(x)} \geq 1$$

c'est-à-dire, la condition 2 avec $\eta=1$ (par suite $\mu<2$). On peut énoncer

Corollaire 2. *L'algorithme de relaxation Motzkin-Agmon est toujours convergent.*

Cet algorithme a été généralisé encore dans [4], [5].

BIBLIOGRAPHIE

1. S. Agmon, *The relaxation method for linear inequalities*, Canad. J. Math., **6** (1954), 382–392.

2. T. S. Motzkin, I. I. Schoenberg, *The relaxation method for linear inequalities*, Canad. J. Math., **6** (1954), 393–404.

3. S. Maruster, *Algorithme pour déterminer la meilleure solution approximatif d'un système d'équations linéaires*, An. Univ. Timisoara Ser. Sti. Mat.-Fiz. **9** (1971), 83–89.

4. I. I. Eremin, *La généralisation de méthode de relaxation de Motzkin-Agmon*, Uspehi Mat. Nauk, **20** (1965), 183–187.

5. V. A. Jakubowicz, *Algorithme itératif fini convergente pour la résolution des systèmes d'inéquation*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **166** (1966), 1308–1311.

CENTRE DE CALCUL DE L'INSTITUT POLYTECHNIQUE,
TIMISOARA, ROUMANIE