COMPOSITIO MATHEMATICA

Sur les rapprochements par conjugaison en dimension 1 et classe C^1

Andrés Navas

Compositio Math. **150** (2014), 1183–1195.

doi:10.1112/S0010437X13007811

FOUNDATION COMPOSITIO MATHEMATICA

LONDON MATHEMATICAL SOCIETY

Compositio Math. 150 (2014) 1183–1195
doi:10.1112/S0010437X13007811

Sur les rapprochements par conjugaison en dimension 1 et classe C^1

Andrés Navas

Abstract

We show that the space of actions of every finitely generated, nilpotent group by C^1 orientation-preserving diffeomorphisms of the circle is path-connected. This is done via a general result that allows any given action on the interval to be connected to the trivial one by a continuous path of topological conjugates.

Introduction

Toute action d'un groupe dénombrable par homéomorphismes d'une variété unidimensionnelle (séparée) est topologiquement conjuguée à une action par des homéomorphismes bilipschitziens. Ce résultat à l'air innocent a été établi dans [DKN07] via une méthode probabiliste pour des variétés compactes, mais une preuve plus simple et générale a été donnée par Deroin dans [Der13]. Il est important de signaler que ceci est loin d'être valable en dimension supérieure même pour des actions de $\mathbb{Z}$, d'après notamment [Har75].

Les résultats de cette Note sont inspirés (entre autres) par le fait ci-dessus ainsi que par les questions suivantes.

– *Sous quelles conditions une action donnée peut-elle être conjuguée en une action dont les générateurs deviennent aussi (Lipschitz ou C^1) proches de translations que l'on veut ?*

– *Dans le cas où de telles conjugaisons existent, peut-on les relier par un chemin continu de conjugués ?*

Voici un premier résultat dans le contexte lipschitzien qui nous sert de motivation pour la suite. Pour simplifier, nous désignérons par X soit le cercle soit l'intervalle fermé, et par la suite nous ne considérerons que des homéomorphismes de X qui respectent l'orientation.

Théorème A. *Si Γ est un groupe de type fini et à croissance sous-exponentielle d'homéomorphismes de X, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des conjugués topologiques de Γ pour lesquels les générateurs (et leurs inverses) sont des homéomorphismes lipschitziens à des contantes de Lipschitz $\leqslant e^{\varepsilon}$.*

Dans le cadre des difféomorphismes de classe C^1, nous ne savons pas traiter en général les actions de groupes à croissance sous-exponentielle. Cependant, nous pouvons donner une réponse affirmative à nos questions pour les groupes nilpotents. Signalons d'une part que des constructions différentes d'actions de groupes (sans torsion et) nilpotents par difféomorphismes de classe C^1 de l'intervalle (ainsi que des résultats de rigidité en classe $C^{1+\tau}$) sont données dans [CJN, FF03, Jor12, Nav13]. D'autre part, un exemple d'un groupe de difféomorphismes à croissance sous-exponentielle et non virtuellement nilpotent est donné dans [Nav08].

Received 23 January 2013, accepted in final form 8 November 2013, published online 19 June 2014.
2010 Mathematics Subject Classification 20D15, 37C85, 37E99 (primary).
Keywords: nilpotent group, connectedness, actions on the interval.

Théorème B. *Si Γ est un groupe nilpotent et de type fini de difféomorphismes de classe C^1 de X, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des conjugués topologiques de Γ pour lesquels les générateurs (et leurs inverses) sont encore des difféomorphismes de classe C^1 de X mais à dérivée $\leqslant e^{\varepsilon}$ partout.*

Rappelons que pour une action sur X, l'orbite d'une paire de points $x < y$ est dite *de type ressort* s'il existe des éléments f, g tels que

$$x < f(x) < f(y) < g(x) < g(y) < y. \tag{1}$$

L'existence de telles orbites est une obstruction pour rapprocher (au sens de Lipschitz) des actions par des translations. En effet, les relations (1) sont stables par conjugaison topologique, et elles entraînent évidemment que l'un des éléments doit contracter d'un facteur $< 1/2$ une partie de l'intervalle correspondant. Encore plus, ces orbites donnent lieu à de l'entropie positive pour l'action [GLW88]. D'un coté algébrique, les orbites de type ressort entraînent l'existence de semigroupes libres (par une application directe du lemme du ping-pong de Klein dans sa version positive), donc une croissance exponentielle pour le groupe. Ceci rend naturelle la question suivante :

Question. L'absence d'orbites de type ressort pour une action par difféomorphismes de classe C^1 entraîne-t-elle l'existence de conjugaisons topologiques de telle sorte que les générateurs deviennent aussi Lipschitz (C^1 ?) proches de translations que l'on veut ?

Cette question se pose plus naturellement dans le contexte des pseudo-groupes d'homéomorphismes (donc, pour des feuilletages de codimension 1). Dans ce cadre, une réponse par l'affirmatif donnerait une preuve alternative du résultat de [Hur00] qui établit la nullité de l'entropie géométrique [GLW88] de tout feuilletage de codimension 1, transversalement C^1 et sans feuille ressort. Signalons en passant qu'il existe des actions lipschitziennes à entropie positive et sans orbite ressort [GLW88], mais ces actions ne sont pas C^1 lissables [CC02].

Pour conclure, nous considérons une version améliorée du Théorème B, où les conjugués forment un chemin continu pour la topologie C^1. Ceci est étroitement lié à des problèmes de déformation de feuilletages de codimension 1 (voir [Eyn09]).[1] Dans cet esprit, dans [Eyn11], H. Eynard s'intéresse aux réprésentations de $\mathbb{Z}^d$ dans $\mathrm{Diff}_+([0,1])$ et démontre la C^1-connexité par arcs de l'espace des réprésentations par difféomorphismes de classe C^2 (voir la prépublication récente [BE12] pour la connexité par arcs en classe C^∞). Le théorème plus bas étend ce résultat en ce qui concerne le groupe qui agit, la régularité des difféomorphismes concernés et la variété unidimensionnelle sous-jacente.

Théorème C. *L'espace des actions de tout groupe nilpotent de type fini par difféomorphismes de classe C^1 de l'intervalle fermé est connexe par arcs. Ceci reste valable pour le cas du cercle pour des actions de $\mathbb{Z}^d$; plus généralement, toute action d'un groupe nilpotent de type fini par difféomorphismes de classe C^1 du cercle est dans la composante connexe d'une action qui transite par un morphisme vers un groupe fini de rotations.*

Au delà des groupes nilpotents, nous ne connaissons pas d'autres groupes *moyennables* pours lesquels ce théorème reste valable. Dans cette direction, deux exemples intéressants à traiter pour commencer ce sont le groupe de Grigorchuk–Machì [Nav08] et le groupe de

[1] Une autre motivation vient d'une vieille question de H. Rosenberg à propos de l'existence d'actions structurellement stables de $\mathbb{Z}^2$ par difféomorphismes du cercle. À notre connaissance, cette question reste encore ouverte.

https://doi.org/10.1112/S0010437X13007811 Published online by Cambridge University Press

Baumslag–Solitar $BS(1,2)$. Notons cependant que dans la preuve du Théorème C, l'arc qui joint deux réprésentations transite par une réprésentation par des translations. Pour joindre une réprésentation donnée à une réprésentation par des translations, nous construisons un chemin explicite formé par des conjugués topologiques de la réprésentation originelle. Or, pour le cas du groupe $BS(1,2)$, les résultats de [CC02, GL11, Riv10] plus la discussion autour des orbites de type ressort plus haut impliquent que l'action triviale ne peut être rapprochée (en topologie C^1) par des conjugués topologiques d'aucune action fidèle par difféomorphismes de classe C^1.

Bien évidemment, le théorème est valable aussi pour des actions du groupe libre. En effet, dans ce contexte, un argument simple de transversalité montre que l'espace des actions *fidèles* est connexe par arcs. Or, ces chemins ne peuvent pas toujours venir de conjugués topologiques des actions données. Par exemple, une action de type Schottky sur le cercle ne peut jamais rapprocher – même continûment – aucune action par des rotations via des conjugaisons topologiques.

Pour conclure cette Introduction, signalons qu'étant donnée la méthode de démonstration du Théorème C décrite plus haut, nous n'obtenons aucune information de connexité *locale* par arcs pour l'espace de réprésentations. Ce problème reste largement ouvert.

1. Sur les actions de groupes à croissance sous-exponentielle

Pour la preuve du Théorème A, nous suivons la méthode de [Der13]. Fixons $\lambda := e^{-\varepsilon} < 1$. Puisque Γ a une croissance sous-exponentielle, étant fixé un système fini de générateurs $\mathcal{G}$, il existe $C = C_{\varepsilon,\mathcal{G}}$ tel que le cardinal de la boule $B(n)$ de rayon n correspondante est $\leqslant C([\lambda+1]/2\lambda)^n$. Considérons la mesure μ sur X définie par

$$\mu := \sum_{f\in\Gamma} \lambda^{\ell(f)} f_*(\mathrm{Leb}),$$

où $\ell(f)$ désigne la longueur de l'élément f par rapport au système de générateurs choisi et Leb désigne la mesure de Lebesgue sur X. Nous affirmons que μ a une masse totale finie. En effet, si l'on désigne par $S(n)$ la sphère de rayon n dans Γ, alors

$$\mu(X) = \sum_{n\geqslant 0} \lambda^n |S(n)| \leqslant \sum_{n\geqslant 0} \lambda^n |B(n)| \leqslant C \sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{\lambda+1}{2}\right)^n = \frac{2C}{1-\lambda} < \infty.$$

De plus, puisque pour tout générateur g et tout $f \in \Gamma$ l'inégalité $|\ell(gf) - \ell(f)| \leqslant 1$ a lieu, nous avons

$$g_*(\mu) = \sum_{f\in\Gamma} \lambda^{\ell(f)} (gf)_*(\mathrm{Leb}) \leqslant \frac{1}{\lambda} \sum_{f\in\Gamma} \lambda^{\ell(gf)} (gf)_*(\mathrm{Leb}) = \frac{\mu}{\lambda}. \tag{2}$$

La mesure μ est de masse finie, à support totale et sans atôme. Elle est donc équivalente par conjugaison topologique à la mesure de Lebesgue à un facteur près. Après un changement de coordonées envoyant $\mu/\mu(X)$ sur Leb, la relation (2) devient, pour tout intervalle $I \subset X$,

$$|g^{-1}(I)| = g_*(\mathrm{Leb})(I) \leqslant \frac{\mathrm{Leb}(I)}{\lambda} = \frac{|I|}{\lambda}.$$

Ceci entraîne que dans ces nouvelles coordonnées, g^{-1} est lipschitzien de constante $\leqslant 1/\lambda$.

Remarque. Nous ignorons si dans le cas d'une action par homéomorphismes lipschitziens, le conjugant (*i.e.* le changement de coordonnées) ci-dessus peut toujours être pris lipschitzien (voir [VW04] pour un résultat qui, d'après le § 2 plus bas, pointe dans une direction plutôt négative). En ce qui concerne les Théorèmes B et C, la nécessité de considérer des conjugaisons topologiques vient des points fixes hyperboliques, dont on ne peut pas se débarrasser par des conjugaisons lisses.

https://doi.org/10.1112/S0010437X13007811 Published online by Cambridge University Press

2. Des rapprochements par des conjugaisons lisses via des équations cohomologiques

Un difféomorphisme f du cercle (respectivement de l'intervalle) est C^1-proche de la rotation d'angle $\rho(f)$ (respectivement de l'identité) si et seulement si sa dérivée Df est partout proche de 1. Donc, pour obtenir des rapprochements via des conjugaisons par difféomorphismes soit à une rotation soit à l'identité, nous devons chercher φ de telle sorte que

$$|\log D(\varphi \circ f \circ \varphi^{-1})| = |\log(D\varphi) \circ (f \circ \varphi^{-1}) + \log(Df) \circ (\varphi^{-1}) - \log(D\varphi) \circ (\varphi^{-1})|$$

soit partout petit. En d'autres termes, nous devons chercher des solutions raprochées $u = \log(D\varphi)$ de *l'équation cohomologique*

$$u - u \circ f = \log(Df). \tag{3}$$

Il se trouve que d'après [OP77], ces solutions raprochées existent non seulement pour un difféomorphisme mais aussi pour des groupes presque nilpotents pourvu que certains exposants de Lyapunov associés soient tous nuls.[2] Dans notre contexte, cela apparaît explicitement dans le cas (ii) du lemme ci-dessous.

Lemme (d'existence de solutions rapprochées). *Soit Γ un sous-groupe presque nilpotent et de type fini de $\mathrm{Diff}^1_+(X)$ engendré par une partie finie $\mathcal{G}$. Alors :*

(i) *soit Γ admet des orbites finies ;*

(ii) *soit Γ n'admet pas de telles orbites mais il est topologiquement semi-conjugué à un groupe de rotations.*

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction continue u telle que pour tout $f \in \mathcal{G}$ l'inégalité $|u - u \circ f - \log(Df)| \leqslant \varepsilon$ est partout satisfaite.

Preuve. Pour des actions sur l'intervalle, on est bien sûr toujours dans le cas (i). Pour des actions sur le cercle, la dichotomie entre (i) et (ii) s'applique plus généralement aux actions de groupes moyennables : voir [Nav11, Lemma 4.1.2]. Passons maintenant à l'existence de solutions rapprochées de l'équation cohomologique dans le cas (ii). Pour cela, notons qu'une application directe de [OP77, Théorème 1] au cocycle $f \mapsto \log(Df)$ montre que pour assurer l'existence de ces solutions, nous devons montrer que pour tout élément $g \in \Gamma$ et toute mesure de probabilité μ invariante par Γ, nous avons

$$\int_X \log Dg(x)\, d\mu(x) = 0.$$

Nous affirmons que ceci est toujours valable dans le cas (ii). En effet, si g a un nombre de rotation irrationnel, alors la moyenne du logarithme de sa dérivée par rapport à l'unique mesure de probabilité invariante est nulle (voir [Her79, Proposition I.I, Chapitre VI]). Pour le cas de nombre de rotation rationnel, notons d'abord que puisque Γ est semi-conjugué à un groupe infini de rotations, il existe une unique mesure de probabilité sur S^1 qui est supportée sur l'unique ensemble non vide compact invariant et minimal de l'action (cet ensemble K soit il coïncide avec tout le cercle, soit il est homéomorphe à l'ensemble de Cantor). De plus, tout élément ayant des points fixes doit fixer chaque point de K. En particulier, si $g \in \Gamma$ a un nombre de rotation rationnel, alors pour un certain $N \geqslant 1$ on a que g^N fixe tous les points de K. Par suite, la dérivée

[2] Pour le cas d'une seule application, ceci résulte d'une application directe du théorème de Hahn-Banach lorsque la moyenne de $\log(Df)$ est nulle par rapport à toute probabilité invariante.

de g^N est égale à 1 partout sur $K = \mathrm{supp}(\mu)$, donc

$$0 = \int_{\mathrm{S}^1} \log Dg^N(x)\, d\mu(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{\mathrm{S}^1} \log Dg(g^i(x))\, d\mu(x) = N \int_{\mathrm{S}^1} \log Dg(x)\, d\mu(x).$$

Par conséquent, $\int_{\mathrm{S}^1} \log Dg(x)\, d\mu(x) = 0$, tel que nous le voulions. □

À l'aide du lemme précédent, nous pouvons traiter le problème du rapprochement par conjugaison dans le cas (ii) plus haut (l'autre cas sera traité plus tard). Pour chaque $n \geqslant 1$ et chaque $s \in [0,1]$, posons

$$v_{n+s} := (1-s)u_n + s u_{n+1} + C_{n+s},$$

où u_n est une fonction partout vérifiant

$$|u_n - u_n \circ f - \log(Df)| \leqslant \frac{1}{n}$$

pour tout $f \in \mathcal{G}$ et C_{n+s} est l'unique constante qui satisfait

$$\int_X \exp((1-s)u_n + s u_{n+1}) = \exp(-C_{n+s}).$$

On vérifie alors que $x \to \int_0^x \exp(v_{n+s})$ définit un difféomorphisme φ_{n+s} de X qui varie continûment par rapport au paramètre. De plus, $\varphi_1 = \mathrm{Id}$, et en renversant les calculs précédents, on constante aisément que $|\log D(\varphi_{n+s} \circ f \circ \varphi_{n+s}^{-1})|$ converge uniformément vers zéro lorsque n tends vers l'infini pour tout $f \in \mathcal{G}$, tel qu'on le souhaitait.

Nous venons donc de montrer que toute action vérifiant la condition (ii) contient une réprésentation (non nécessairement fidèle !) par des rotations dans son adhérence par conjugaisons C^1. De plus, cette réprésentation est aboutie par un chemin continu de conjugués. Il nous reste donc à joindre deux réprésentations quelconques par des rotations. Or, pour le cas des actions de $\mathbb{Z}^d$, cela se fait tout simplément en faisant bouger les angles associés aux générateurs. Pour le cas d'un groupe nilpotent quelconque, les angles associés aux générateurs d'ordre infini peuvent encore être raménés à zéro de manière continue, ce qui montre que la représentation est dans la composante connexe d'une action qui transite par un morphisme vers un groupe fini de rotations. Ceci établit donc les Théorèmes B et C dans le cas (ii).

Remarque. Les calculs précédents ne peuvent pas être renversés de façon à montrer par exemple que toute action libre par difféomorphismes du cercle est contenue dans l'adhérence par conjugaisons de la réprésentation par des rotations correspondante. En effet, celui-ci est un problème qui ne se modèle pas par des équations cohomologiques. D'ailleurs, nous ignorons si cela est toujours vrai. Signalons cependant que c'est le cas pour des actions de $\mathbb{Z}$, d'après un résultat récent de C. Bonatti et N. Guelman [BG12]. Pour le cas de l'intervalle, un résultat analogue a été aussi récemment prouvé par É. Farinelli [Far12].

3. À propos des solutions rapprochées

La preuve précédente est un peu obscure car elle fait appel à [OP77]. Pour la commodité du lecteur, nous rendons explicite l'argument pour $\Gamma \sim \mathbb{Z}^d$, ce qui nous permettra de mieux expliquer notre méthode dans le cas des orbites finies. De plus, pour la commodité du lecteur, une nouvelle preuve (d'une version plus générale mais sous une hypothèse légèrement plus forte) du résultat de [OP77] sera donnée plus bas.

Pour chaque $n \geqslant 1$, on considère la boule positive $B_+(n)$ de rayon n dans $\mathbb{Z}^d$ par rapport au système canonique des générateurs $\mathcal{G} := \{f_1, \ldots, f_d\}$, c'est-à-dire l'ensemble

$$B_+(n) := \{f_1^{k_1} \cdots f_d^{k_d} : 0 \leqslant k_i < n,\ 1 \leqslant i \leqslant d\}.$$

On pose

$$u_n(x) := \frac{1}{|B_+(n)|} \sum_{f \in B_+(n)} \log Df(x). \tag{4}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} u_n(f_i(x)) &= \frac{1}{|B_+(n)|} \sum_{f \in B_+(n)} \log Df(f_i(x)) \\ &= \frac{1}{|B_+(n)|} \sum_{f \in B_+(n)} [\log D(f \circ f_i)(x) - \log Df_i(x)] \\ &= -\log Df_i(x) + \frac{1}{|B_+(n)|} \sum_{f \in B_+(n) f_i} \log Df(x), \end{aligned}$$

où $B_+(n)f_i := \{gf_i : g \in B_+(n)\}$. Donc, la valeur de l'expression

$$|u_n(x) - u_n(f_i(x)) - \log Df_i(x)| \tag{5}$$

est inférieure ou égale à

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n^d} \bigg| \sum_{f \in B_+(n)} \log Df(x) - \sum_{f \in B_+(n) f_i} \log Df(x) \bigg| \\ &\quad = \frac{1}{n^d} \bigg| \sum_{0 \leqslant m_j < n, j \neq i} [\log D(f_1^{m_1} \cdots f_i^0 \cdots f_d^{m_d})(x) - \log D(f_1^{m_1} \cdots f_i^n \cdots f_d^{m_d})(x)] \bigg| \\ &\quad = \frac{1}{n^d} \bigg| \sum_{0 \leqslant m_j < n, j \neq i} -\log D(f_i^n)(f_1^{m_1} \cdots f_{i-1}^{m_{i-1}} f_{i+1}^{m_{i+1}} \cdots f_d^{m_d}(x)) \bigg| \\ &\quad = \frac{1}{n^d} \bigg| \sum_{0 \leqslant m_j < n} -\log Df_i(f_1^{m_1} \cdots f_i^{m_i} \cdots f_d^{m_d}(x)) \bigg| \\ &\quad = \bigg| \int_X \log Df_i(y)\, d\mu_{n,x}(y) \bigg|, \end{aligned}$$

où $\mu_{n,x}$ désigne la mesure de probabilité

$$\frac{1}{|B_+(n)|} \sum_{f \in B_+(n)} \delta_{f(x)}$$

(notons que la commutativité – en non la simple moyennabilité – a été utilisée pour obtenir les deuxième et troisième égalités plus haut). Or, si μ est un point d'accumulation d'une suite de mesures μ_{n,x_n}, alors μ est invariante par l'action de Γ, et l'intégrale en considération pour $x_n := x$ converge vers $\int_X \log(Df_i)\, d\mu$. Donc, si ces moyennes sont supposés d'être toutes nulles, alors la valeur de (5) tend vers zéro. En d'autres termes, les fonctions (u_n) forment une suite explicite de solutions rapprochées de notre équation cohomologique, ce qui nous permet de conjuguer l'action donnée en une action prôche d'une action par des translations et ainsi conclure la preuve.

L'argument plus haut montre qu'une condition suffisante (at d'ailleurs nécessaire) pour l'existen- ce de solutions rapprochées pour notre équation cohomologique est la nullité de l'intégrale de chaque fonction $\log(Df_i)$ par rapport à toute mesure de probabilité invariante. De plus, ce calcul montre que si cette condition n'est pas satisfaite mais ces intégrales sont petites en valeur absolue, alors on peut trouver des solutions à des erreurs petits. Ceci est rendu explicite dans le lemme ci-dessous, qui étend [OP77, Théorème 1] sous une hypothèse légèrement plus forte (dans [OP77], l'hypothèse porte seulement sur les probabilités invariantes par Γ). Cependant, cette version sera suffisante pour nos besoins, et elle a l'avantage d'admettre une preuve relativement simple avec des outils modernes.[3]

Lemme (d'existence de solutions érronées). *Soit Γ un groupe nilpotent engendré par une partie finie $\mathcal{G}$. Il existe une partie génératrice finie $\mathcal{G}'$ contenant $\mathcal{G}$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ qui satisfait la propriété suivante : si $\Phi\colon \Gamma \to \mathrm{Diff}^1_+(X)$ est une réprésentation telle que pour tout $f \in \mathcal{G}'$ la valeur absolue de la moyenne de $\log D\Phi(f)$ par rapport à toute mesure de probabilité invariante par f est inférieure à δ, alors il existe une fonction continue u partout satisfaisant l'inégalité $|u - u \circ \Phi(f) - \log D\Phi(f)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $f \in \mathcal{G}$.*

La preuve résulte d'une application directe de la proposition suivante au cocycle $f \mapsto \log D\Phi(f)$ au dessus de l'action Φ. (Rappelons qu'un *cocycle* associé à une action d'un groupe par homéomorphismes d'un espace X est une application $g \mapsto c(g) \in C(X)$ telle que l'égalité $c(fg) = c(g) + c(f) \circ g$ est partout vérifiée pour tout f, g dans le groupe.)

Proposition. *Soit Γ un groupe nilpotent engendré par une partie finie $\mathcal{G}$ et agissant par homéomorphismes sur un espace métrique compact X. Il existe une partie génératrice finie $\mathcal{G}'$ contenant $\mathcal{G}$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ vérifiant la propriéte suivante : si $c : \Gamma \to C(X)$ est un cocycle associé à cette action satisfaisant $|\int_X c(f)\, d\mu| < \delta$ pour tout $f \in \mathcal{G}'$ et toute probabilité μ invariante par f, alors il existe $u \in C(X)$ telle que l'inégalité $|u - u \circ f - c(f)| \leqslant \varepsilon$ est partout vérifiée pour tout $f \in \mathcal{G}$.*

Preuve. Tout d'abord, nous affirmons que si $c(f)$ a une moyenne de valeur absolue inférieure à δ pour toute probabilité invariante par f, alors il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $N \geqslant N_0$ et tout $y \in X$,

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} c(f) \circ f^n(y) \right| < \delta. \tag{6}$$

En effet, l'expression en question n'est autre que

$$\int_X c(f)\, d\mu_{y,N} \quad \text{où} \quad \mu_{y,N} := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta_{f^n(y)}.$$

Puisque la famille $\mu_{y,N}$ contient des probabilités invariantes par f dans son adhérence, un argument simple de de compacité permet de conclure que (6) a lieu pour tout N assez large.

Nous utiliserons le fait que les groupes nilpotents satisfont une version forte de la propriété de *génération bornée* : il existe une partie génératrice finie $\mathcal{G}' = \{f_1, \ldots, f_\ell\}$ (qui peut être choisie contenant $\mathcal{G}$) et une constante M telles que tout élément $f \in B(k) \subset \Gamma$ peut être écris sous la

[3] En suivant la méthode de [OP77], on peut montrer l'enoncé sous l'hypothèse plus faible ne comportant que les mesures invariantes par Γ.

forme $f = f_{i_1}^{n_1} \cdots f_{i_m}^{n_m}$, où chaque f_{i_j} appartient à $\mathcal{G}'$ et de plus $m \leqslant M$ et $|n_j| \leqslant Mk$ (voir par exemple [BG11, Appendix B]). Dans ce qui suit, nous travaillerons avec la partie génératrice $\mathcal{G}'$, mais nous la noterons encore par $\mathcal{G}$.

Nous utiliserons aussi le fait que Γ est à croissance polynomiale, ce qui implique l'existence d'une constante $C > 0$ ainsi que d'une suite croissante d'entiers positifs k_n telles que

$$\frac{|B(k_n+1) \backslash B(k_n)|}{|B(k_n)|} \leqslant \frac{C}{k_n},$$

où $B(k)$ désigne la boule de rayon k dans Γ. En effet, dans le cas contraire, pour tout $d \geqslant 1$ on aurait pour quelques constantes positives C', C'', C''' et tout k suffisament large,

$$|B(k)| \geqslant C' \prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{C''}{j}\right) \geqslant C''' \exp\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{C'''}{j}\right) \geqslant C''' k^d,$$

ce qui contredit la croissance polynomiale.

Avec ces deux outils, nous pouvons raisonner comme dans la cas commutatif au début du § 3, avec quelques modifications. Posons

$$u_n := \frac{1}{|B(k_n)|} \sum_{f \in B(k_n)} c(f).$$

Alors pour tout $f_i \in \mathcal{G}$ nous avons

$$\begin{aligned} u_n \circ f_i - u_n &= \frac{1}{|B(k_n)|} \sum_{f \in B(k_n)} [c(f) \circ f_i - c(f)] \\ &= \frac{1}{|B(k_n)|} \sum_{f \in B(k_n)} [c(ff_i) - c(f_i) - c(f)] = -c(h_i) + \frac{1}{|B(k_n)|} \sum_{f \in B(k_n)} [c(ff_i) - c(f)]. \end{aligned}$$

Donc, la valeur de $|u_n - u_n \circ f_i - c(f_i)|$ est bornée par

$$\frac{1}{|B(k_n)|} \left| \sum_{f \in B(k_n)} [c(ff_i) - c(f)] \right| \leqslant \frac{1}{|B(k_n)|} \sum_{f \in B(k_n+1) \backslash B(k_n)} |c(f)|$$

En écrivant chaque $f \in B(k_n+1) \backslash B(k_n)$ sous la forme $f = f_{i_1}^{n_1} \cdots f_{i_m}^{n_m}$ ci-dessus, cette expression se transforme en

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|B(k_n)|} \sum_{f \in B(k_n+1) \backslash B(k_n)} \left| \sum_{j=1}^{m} c(f_{i_j}^{n_j}) \circ f_{i_{j+1}}^{n_{j+1}} \cdots f_{i_n}^{n_m} \right| \\ &\qquad = \frac{1}{|B(k_n)|} \sum_{f \in B(k_n+1) \backslash B(k_n)} \left| \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=0}^{n_j - 1} c(f_{i_j}) \circ f_{i_j}^{n} f_{i_{j+1}}^{n_{j+1}} \cdots f_{i_n}^{n_m} \right|. \end{aligned}$$

Puisque $m \leqslant M$, en notant $y := f_{i_{j+1}}^{n_{j+1}} \cdots f_{i_n}^{n_m}(x)$ nous voyons que nous devons traiter des expressions du type

$$\frac{1}{|B(k_n)|} \sum_{f \in B(k_n+1) \backslash B(k_n)} \left| \sum_{n=0}^{n_j - 1} c(f_{i_j}) \circ f_{i_j}^{n}(y) \right|.$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X13007811 Published online by Cambridge University Press

Prenons N_0 de telle dorte que (6) ait lieu pour tout $N \geqslant N_0$, tout $y \in X$ et tout $f_i \in \mathcal{G}$. Deux cas peuvent alors se présenter. Si $n_j \leqslant N_0$ alors

$$\frac{1}{|B(k_n)|} \sum_{f \in B(k_n+1) \setminus B(k_n)} \left| \sum_{n=0}^{n_j-1} c(f_{i_j}) \circ f_{i_j}^n(y) \right| \\ \leqslant \frac{N_0}{|B(k_n)|} \sum_{f \in B(k_n+1) \setminus B(k_n)} \max_{x \in X} |c(f_j)(x)| \leqslant \frac{C N_0 \max_{x \in X} |c(f_j)(x)|}{k_n},$$

qui tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Si $n_j \geqslant N_0$ alors

$$\frac{1}{|B(k_n)|} \sum_{f \in B(k_n+1) \setminus B(k_n)} \left| \sum_{n=0}^{n_j-1} c(f_{i_j}) \circ f_{i_j}^n(y) \right| < \frac{1}{|B(k_n)|} \sum_{f \in B(k_n+1) \setminus B(k_n)} \delta n_j \leqslant \frac{C \delta n_j}{k_n} \leqslant MC\delta,$$

qui est plus petit que ε pour δ assez petit. □

D'après ce qui précède, pour conclure la preuve du Théorème B dans le cas (i) où il existe des orbites finies pour l'action, notre problème consiste à montrer que par conjugaison topologique on peut obtenir des conjugués C^1 dont les moyennes (par rapport à toutes les probabilités invariantes) du logarithme de la dérivée des générateurs sont petites en valeur absolue. Pour ce faire, notons d'une part qu'il suffit de considérer les mesures invariantes *ergodiques*, c'est-à-dire celles qui ne peuvent pas être exprimées comme combinaison convexe non triviale de probabilités invariantes. Puisque Γ admet des orbites finies, tout élément $f \in \Gamma$ possède des points périodiques. De plus, toute probabilité invariante par f doit être supportée sur ses orbites périodiques, car le complémentaire est formé par des points errants. En particulier, toute probabilité invariante par f et ergodique est la moyenne sur une telle orbite. L'intégrale de $\log(Df)$ par rapport à une telle mesure n'est autre que la moyenne des logarithmes des dérivées le long de l'orbite. Nous avons ainsi réduit le problème à prouver le lemme suivant.

LEMME (d'applatissement des points hyperboliques). *Soit Γ un sous-groupe de $\mathrm{Diff}^1_+(X)$ engendré par une partie finie $\mathcal{G}$. Alors pour tout $\delta > 0$ il existe des conjugués de Γ par des homéomorphismes ψ tels que :*

- *pour tout $f \in \Gamma$, l'application $\psi \circ f \circ \psi^{-1}$ est un difféomorphisme de classe C^1,*
- *si $f \in \mathcal{G}$ admet un point périodique x et N est sa période, alors le multiplicateur du conjugué de f au point x satisfait $e^{-\delta} \leqslant D(\psi \circ f^N \circ \psi^{-1})(x) \leqslant e^{\delta}$.*

Preuve. Soit $\delta > 0$ donné, et soit $\{x_1, \ldots, x_N\}$ l'une des orbites périodiques de $f \in \mathcal{G}$. Fixons $\alpha > 0$, et prenons $\psi_\alpha \in \mathrm{Homéo}_+(\mathrm{S}^1)$ qui soit un difféomorphisme en dehors de $\{x_1, \ldots, x_N\}$ et près de chaque x_j coïncide avec $y \mapsto x_j + (y - x_j)^{1/\alpha}$. Nous affirmons alors que pour tout $g \in \Gamma$, chaque $g_\alpha := \psi_\alpha \circ g \circ \psi_\alpha^{-1}$ est un difféomorphisme de classe C^1 ; de plus, si α est suffisamment grand, alors pour tout indice j,

$$|\log D(\psi_\alpha \circ f^N \circ \psi_\alpha^{-1})(x_j)| \leqslant \delta.$$

En effet, on constate d'abord que pour y proche de x_j,

$$\psi_\alpha \circ g \circ \psi_\alpha^{-1}(y) = [g(x_j + (y - x_j)^\alpha) - g(x_j)]^{1/\alpha} + g(x_j).$$

Donc,

$$\begin{aligned}
D(\psi_\alpha \circ g \circ \psi_\alpha^{-1})(y) &= \alpha(y-x_j)^{\alpha-1} Dg(x_j+(y-x_j)^\alpha)\frac{1}{\alpha}[g(x_j+(y-x_j)^\alpha)-g(x_j)]^{1/\alpha-1}\\
&= (y-x_j)^{\alpha-1} Dg(x_j+(y-x_j)^\alpha)\left[\frac{g(x_j+(y-x_j)^\alpha)-g(x_j)}{(y-x_j)^\alpha}\right]^{1/\alpha-1}\\
&\quad \times [(y-x_j)^\alpha]^{1/\alpha-1}\\
&= Dg(x_j+(y-x_j)^\alpha)\left[\frac{g(x_j+(y-x_j)^\alpha)-g(x_j)}{(y-x_j)^\alpha}\right]^{1/\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Lorsque y tend vers x_j, cette expression converge vers

$$Dg(x_j)[Dg(x_j)]^{1/\alpha-1} = [Dg(x_j)]^{1/\alpha},$$

ce qui démontre de manière simultanée les deux propriétés annoncées.

Nous pouvouns répéter cet argument avec chaque orbite périodique d'un générateur de Γ dont le multiplicateur soit $\leqslant e^{-\delta}$ ou $\geqslant e^{\delta}$. Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de telles orbites, ceci permet de conclure la preuve du lemme. □

La preuve du Théorème B est enfin terminée.

Remarque. Ci-dessus, on aurait pu conjuguer directement par un homéomorphisme qui est un difféomorphisme loin des points de l'orbite concernée et dont le germe autour de ces points coïncide avec celui de $x \to \exp(-1/x)$ à l'origine. En effet, ceci rend tangent à l'identité tout difféomorphisme de classe C^1 qui préserve l'orbite (voir [Tsu84]).

4. Sur la connexité par arcs

Dans la preuve du Théorème B, l'action par des translations est aboutie par un chemin continu de réprésentations lorsqu'il n'y a pas d'orbite finie. Ceci est encore valable lorsqu'il y a des orbites finies mais les points périodiques des générateurs sont tous paraboliques. En effet, la preuve du lemme du § 2 s'applique encore dans ce contexte.

Dans le cas qui nous reste, c'est-à-dire lorsque quelques générareurs possèdent des orbites périodiques hyperboliques, nous voudrions encore aboutir à une réprésentation par des translations par un chemin formé par des conjugués topologiques de l'action originelle. Pour ce faire, on aimerait appliquer une méthode semblable à celle de la fin du § 3 en prenant une famille de difféomorphimes ψ_α qui varie continûment pour la topologie C^1 par rapport à α en dehors de telles orbites (ou du moins, en dehors des orbites avec un multiplicateur trop grand). En effet, les calculs de la preuve du lemme d'applatissemment des points hyperboliques montrent que pour tout $f \in \Gamma$, l'application $\alpha \to f_\alpha$ est continue pour la topologie C^1. Cependant, ce procédé pourrait *à priori* faire exploser les dérivées. Nous devrons donc être un peu plus soigneux, et pour cela il nous sera plus confortable de raisoner au niveau des équations cohomologiques, tout en cherchant des solutions rapprochées non nécessairement bornées au vosinage des extrémités.

Fin de la preuve du Théorème C. Soit Γ un groupe nilpotent engendré par une partie finie $\mathcal{G}$ et admettant des orbites finies. Étant donné $\varepsilon > 0$, fixons le $\delta > 0$ donné par le lemme d'existence de solutions érronées. Bien évidemment, la réunion des orbites des points périodiques hyperboliques des générateurs à multiplicateur soit $\leqslant e^{-\delta}$ soit $\geqslant e^{\delta}$ est un ensemble fini, disons $\{x_1, \ldots, x_k\}$. Soit ψ un homéomorphisme de X qui est un difféomorphisme C^1 restreint au complémentaire de $\{x_1, \ldots, x_k\}$ et fixe chaque point x_i de telle sorte que son germe autour d'un tel point coïncide avec celui de $x \to x^\alpha$ à l'origine. Pour $\alpha > 0$ assez large, les multiplicateurs sur les points x_i des conjugués par ψ des générateurs sont tous compris entre $e^{-\delta}$ et e^{δ}. Fixons un tel α et notons $v := \log(D\psi)$. Puisque l'action conjuguée par ψ est une action par difféomorphismes de classe C^1 qui satisfait les hypothèses du lemme d'existence de solutions érronnées, il existe une solution ε-rapprochée continue w de l'équation cohomologique associée à cette action, que l'on peut prendre comme étant le logarithme de la dérivée d'un difféomorphisme φ de classe C^1 de X. La fonction $u := w \circ \psi + v$ est alors une solution ε-raprochée de l'équation cohomologique associée à l'action originelle. Même si elle n'est pas continue (elle est non bornée au voisinage des points x_i), elle coïncide sur $X \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}$ avec le logarithme de la dérivée de $\phi := \varphi \circ \psi$, qui est homéomorphisme de X qui transforme par conjugaison l'action originelle en une autre action par difféomorphismes de classe C^1 de X.

Pour chaque $\varepsilon := 1/n$ prenons la fonction $u := u_n$ induite comme ci-dessus. Ces fonctions sont reliées par des chemins affines $t \to (1-t)u_n + tu_{n+1} =: \hat{u}_{n+t}$. Nous affirmons que quitte à rajouter une constante C_{n+t}, on peut supposer que $u_{n+t} := \hat{u}_{n+t} + C_{n+t}$ est le logarithme de la dérivée d'un homéomorphisme ϕ_{n+t} de X. En effet, l'intégrale totale de la fonction $\exp(\hat{u}_{n+t})$ est finie : ceci découle directement de la convexité de la fonction exponentielle en tenant compte que $\exp(u_n)$ et $\exp(u_{n+1})$ sont toutes les deux d'intégrale totale finie (égale à 1). On prend alors C_{n+t} comme étant l'exponentielle de l'inverse de cette intégrale, on fixe $x_0 \in X$ et on définit

$$\phi_{n+t}(x) := \int_{x_0}^{x} \exp u_{n+t}.$$

Le logarithme de la dérivée du conjugué par ϕ_{n+t} de $f \in \Gamma$ au point $\phi^{-1}(x)$ est égal à

$$\begin{aligned}\log Df(x) + u_{n+t} \circ f(x) - u_{n+t}(x) = (1-t)&[\log Df(x) + u_n \circ f(x) - u_n(x)] \\ &+ t[\log Df(x) + u_{n+1} \circ f(x) - u_{n+1}(x)].\end{aligned}$$

Il s'agit donc une fonction continue, ce qui montre que l'action originelle conjuguée par ϕ_{n+t} est une action par difféomorphismes de classe C^1. De plus, cette action varie continûment par rapport au paramètre t. Finalement, l'égalité ci-dessus montre que pour tout $f \in \mathcal{G}$ le logarithme de la dérivée de $\phi_{n+t} \circ f \circ \phi_{n+t}^{-1}$ est inférieur ou égal à $1/n$ partout. Il s'en suit que le chemin d'actions conjuguées par ϕ_{n+t} est continu pour la topologie C^1 et aboutit à l'infini en une réprésentation par des translations, tel qu'on le désirait.

Nous venons donc de montrer que toute réprésentation soit dans $\mathrm{Diff}^1_+([0,1])$ soit dans $\mathrm{Diff}^1_+(\mathrm{S}^1)$ est dans la même composante connexe par arcs d'une réprésentation par des translations. En particulier, étant données deux réprésentations dans $\mathrm{Diff}^1_+([0,1])$, on peut les joindre par un chemin qui passe par la réprésentation triviale. Ceci montre la connexité par arcs pour le cas des actions sur l'intervalle. Pour le cas du cercle, on répète l'argument de la fin du § 2.

5. Quelques commentaires finales

Nous voudrions conclure par une proposition et un corollaire qui aident à mieux comprendre le cas des orbites finies. Même si l'on peut donner des preuves purement combinatoires de ces deux résultats, mais nous préférons de faire appel à [OP77] afin d'illustrer le type d'information contenue dans le résultat cohomologique là-dedans.

PROPOSITION (à propos des points périodiques hyperboliques). *Si Γ est un groupe nilpotent de type fini de difféomorphismes de classe C^1 de X, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

https://doi.org/10.1112/S0010437X13007811 Published online by Cambridge University Press

– *les points périodiques des éléments de* Γ *sont tous paraboliques ;*
– *les points périodiques des éléments de* Γ *appartenant au support d'une mesure de probabilité invariante par* Γ *sont tous paraboliques.*

Preuve. Si la deuxième condition est valable, alors d'après [OP77, Théorème 1] nous sommes encore dans le cas où il existe des solutions rapprochées à notre équation cohomologique. Or, l'existence de telles solutions entraîne que les points périodiques des éléments sont tous paraboliques. En effet, une inégalité (partout) du type

$$|u - u \circ f - \log(Df)| < \varepsilon$$

entraîne

$$|u - u \circ f^N - \log(Df^N)| < N\varepsilon.$$

En particulier, si $f^N(x_0) = x_0$, alors $|\log Df^N(x_0)| < N\varepsilon$. Donc, si de telles fonctions u existent pour tout $\varepsilon > 0$, alors nous avons nécessairement $Df^N(x_0) = 1$. $\square$

Corollaire. *Soit* Γ *un groupe nilpotent de type fini de difféomorphismes de classe* C^1 *de* X*. Si* $f \in \Gamma$ *admet un point périodique hyperbolique* x_0*, alors l'orbite de* x_0 *par* Γ *est finie.*

Preuve. D'après le lemme du § 2 et sa démonstration, Γ admet des orbites finies ; de plus, le sous-ensemble $\hat{\Gamma}$ des éléments de Γ ayant des points fixes est un sous-groupe distingué et d'indice fini (c'est le noyau de la fonction nombre de translation, qui est dans ce cas un homomorphisme ; voir [Nav11, Lemma 4.1.2]). Si N est la période de x_0 pour f, alors f^N appartient à $\hat{\Gamma}$. Supposons que x_0 ne soit pas fixé par $\hat{\Gamma}$, et soient a, b les points fixes de $\hat{\Gamma}$ à gauche et à droite de x_0 respectivement. Alors la proposition précédente donne une contradiction lorsqu'on l'applique à l'action de $\hat{\Gamma}$ sur $[a, b]$ après conjugaison par un homéomorphisme qui applatit complétement les dérivées aux extrémités (voir la remarque du § 3). Par suite, $\hat{\Gamma}$ fixe x_0, et puisque $\Gamma/\hat{\Gamma}$ est fini cyclique, l'orbite de x_0 par Γ doit être finie. $\square$

Remerciements

Je remercie S. Crovisier, É. Ghys, E. Giroux et A. Kocsard, qui ont été les premiers à me signaler la question de la connexité des réprésentations de $\mathbb{Z}^d$ par difféomorphismes en dimension 1. Je remercie aussi C. Bonatti, H. Eynard, N. Guelman et É. Farinelli, dont les résultats gentiment communiqués ont été une source importante d'inspiration, ainsi que Y. Matsuda, qui m'a signalé une erreur dans l'énoncé du Théorème C de la première version de ce travail. Finalement, je remercie le rapporteur anonyme dont les nombreuses remarques et critiques ont permis de nettement améliorer la présentation. Cette Note a été écrite lors de séjours à l'Institut des Mathématiques Pures de Téhéran et à l'Institut Mittag Leffler. Je remercie M. Nassiri et A. Karlsson pour leurs invitations respectives. Ce travail a été financé par le projet ACT 1103 DySyRF (Center of Dynamical Systems and Related Fields) ainsi que par le projet FONDECYT 1120131.

References

BE12 C. Bonatti and H. Eynard, Connectedness of the space of smooth actions of $\mathbb{Z}^n$ on the interval. Prépublication (2012).

BG12 C. Bonatti and N. Guelman, Smooth conjugacy classes of circle diffeomorphisms with irrational rotation number. Prépublication (2012).

BG11 E. Breuillard and B. Green, *Approximate groups. I: The torsion-free nilpotent case*, J. Inst. Math. Jussieu **10** (2011), 37–57.

CC02 J. Cantwell and L. Conlon, *An interesting class of C^1 foliations*, Topology Appl. **126** (2002), 281–297.

CJN G. Castro, E. Jorquera and A. Navas, *Sharp regularity for certain nilpotent group actions on the interval.* À paraître dans, Math. Ann.

Der13 B. Deroin, *The group of almost-periodic homeomorphisms of the real line*, Enseign. Math. **59** (2013), 183–194; doi:10.4171/LEM/59-1-7.

DKN07 B. Deroin, V. Kleptsyn and A. Navas, *Sur la dynamique unidimensionnelle en régularité intermédiaire*, Acta Math. **199** (2007), 199–262.

Eyn09 H. Eynard, Sur deux questions connexes de connexité concernant les feuilletages et leurs holonomies. Thèse de Doctorat, École Normale Supérieure de Lyon (2009). Disponible sur, http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00436304/fr/.

Eyn11 H. Eynard, *A connectedness result for commuting diffeomorphisms of the interval*, Ergodic Theory Dynam. Systems **31** (2011), 1183–1191.

FF03 B. Farb and J. Franks, *Groups of homeomorphisms of one-manifolds. III. Nilpotent subgroups*, Ergodic Theory Dynam. Systems **23** (2003), 1467–1484.

Far12 É. Farinelli, Classes de conjugaison des difféomorphismes de l'intervalle en régularité C^1. Prépublication (2012).

GLW88 É. Ghys, R. Langevin and P. Walczak, *Entropie géométrique des feuilletages*, Acta Math. **160** (1988), 105–142.

GL11 N. Guelman and I. Liousse, *C^1-actions of Baumslag–Solitar groups on S^1*, Algebr. Geom. Topol. **11** (2011), 1701–1707.

Har75 J. Harrison, *Unsmoothable diffeomorphisms*, Ann. of Math. (2) **102** (1975), 85–94.

Her79 M. Herman, *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **49** (1979), 5–233.

Hur00 S. Hurder, Entropy and dynamics of C^1 foliations. Prépublication (2000).

Jor12 E. Jorquera, *A universal nilpotent group of C^1-diffeomorphisms of the interval*, Topol. Appl. **159** (2012), 2115–2126.

Nav08 A. Navas, *Growth of groups and diffeomorphisms of the interval*, Geom. Funct. Anal. **18** (2008), 988–1028.

Nav11 A. Navas, *Groups of Circle Diffeomorphisms*, Chicago Lectures in Mathematics (University of Chicago Press, 2011).

Nav13 A. Navas, *On centralizers of interval diffeomorphisms in critical (intermediate) regularity*, J. Anal. Math. **121** (2013), 1–30.

OP77 J. M. Ollagnier and D. Pinchon, *Systèmes dynamiques topologiques I. Étude des limites de cobords*, Bull. Soc. Math. France **105** (1977), 405–414.

Riv10 C. Rivas, *On spaces of Conradian group orderings*, J. Group Theory **13** (2010), 337–353.

Tsu84 T. Tsuboi, *Γ_1-structures avec une seule feuille*, Asterisque **116** (1984), 222–234.

VW04 D. Volný and B. Weiss, *Coboundaries in L_0^∞*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **40** (2004), 771–778.

Andrés Navas andres.navas@usach.cl

Dpto. de Matemática y C.C., Universidad de Santiago de Chile (USACH),
Alameda 3363, Estación Central, 71783-5 Santiago, Chile

https://doi.org/10.1112/S0010437X13007811 Published online by Cambridge University Press