Ergod. Th. & Dynam. Sys., (2023), **43**, 1351–1362 © The Author(s), 2022. Published by Cambridge University Press.
doi:10.1017/etds.2021.172

Sur le spectre des opérateurs rigides

PIERRE MAZET† et ERIC SAIAS‡

† *Independent Scholar*
(e-mail: piermazet@laposte.net)
‡ *Sorbonne Université, Laboratoire de Probabilités, Statistique et Modélisation (LPSM) 4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France*
(e-mail: eric.saias@upmc.fr)

(*Received* 14 *April* 2021 *and accepted in revised form* 13 *December* 2021)

Pour Mustapha Krazem,
à l'occasion de son soixantième anniversaire

Abstract. For any $r \in [0, 1]$ we give an example of a rigid operator whose spectrum is the annulus $\{\lambda \in \mathbb{C} : r \leq |\lambda| \leq 1\}$. In particular, when $r = 0$ this operator is rigid and non-invertible, and when $r \in]0, 1[$ this operator is invertible but its inverse is not rigid. This answers two questions of Costakis, Manoussos and Parissis [Recurrent linear operators. *Complex Anal. Oper. Theory* **8** (2014), 1601–1643].

Key words: dynamical systems, rigid operators, spectrum
2020 Mathematics Subject Classification: 37B20, 47A10 (Primary); 47A10 (Secondary)

1. *Introduction*

Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$. On appellera ici opérateur de E toute application linéaire continue u de E dans E. Il est dit rigide (respectivement uniformément rigide) quand il existe une suite strictement croissante $(n_k)_{k\geq 1}$ d'entiers telle que pour tout x de E, on a $\lim_{k\to+\infty} u^{n_k}x = x$ (respectivement telle que $\lim_{k\to+\infty} u^{n_k} = \mathrm{id}_E$ dans l'espace vectoriel normé des opérateurs de E). On dira que $(n_k)_{k\geq 1}$ est une suite de rigidité de u (respectivement d'uniforme rigidité de u).

En 2014, Costakis, Manoussos et Parissis [2] ont entrepris une étude systématique des opérateurs rigides et uniformément rigides. Ils passent notamment en revue des familles classiques d'opérateurs (certaines familles d'opérateurs diagonaux, certaines familles d'opérateurs de composition, etc) et pour chacune d'entre elles, ils donnent un critère de rigidité, voire d'uniforme rigidité. Ils se demandent en particulier à quelle condition nécessaire et suffisante un endomorphisme de dimension finie est rigide, et de même pour uniformément rigide.

Poser la question, c'est y répondre. Encore faut il la poser! C'est tout le mérite de Costakis, Manoussos et Parissis de l'avoir fait.

https://doi.org/10.1017/etds.2021.172 Published online by Cambridge University Press

Cela les amène à effectuer une démarche en trois temps. En notant $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ et $\sigma(u)$ le spectre de u, ils donnent donc d'abord la preuve (voir le theorem 4.1 et la remark 4.3 de [2]) du théorème suivant.

THÉORÈME CMP. *Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *u est rigide;*
(ii) *u est uniformément rigide;*
(iii) *u est diagonalisable et $\sigma(u) \subset \mathbb{U}$.*

Ils se demandent ensuite dans quelle mesure ce résultat s'étend à la dimension infinie. Dans cette direction, ils montrent (voir la proposition 2.19 de [2]) la proposition suivante.

PROPOSITION CMP. *Soit u un opérateur uniformément rigide d'un espace de Banach complexe. Alors $\sigma(u) \subset \mathbb{U}$.*

(Nous donnons en Annexe 1 une preuve de ce résultat plus rapide que celle de [2].)

Enfin quid des opérateurs rigides? La proposition CMP s'étend-elle à ceux-ci? Dans leur question 2.20 ils posent deux questions précises.

Question 1. Est-ce que tous les opérateurs rigides sont inversibles?

Question 2. Est-ce que pour tout opérateur rigide et inversible, son inverse est rigide?

La réponse aux deux questions est négative. On y répond en donnant des exemples qui montrent que la proposition CMP ne s'étend pas aux opérateurs rigides.

Plus précisément, on rappelle qu'un opérateur de $\ell^2(\mathbb{N}^*)$ est dit diagonal quand sa matrice infinie dans la base orthonormale canonique de $\ell^2(\mathbb{N}^*)$ est diagonale. Quand plus généralement, cette matrice est diagonale par blocs, tous finis, on dira que l'opérateur est diagonal par blocs. On a alors le théorème suivant.

THÉORÈME. *Pour tout $r \in [0, 1]$, il existe un opérateur diagonal par blocs de $\ell^2(\mathbb{N}^*)$ et rigide dont le spectre est $\{\lambda \in \mathbb{C} : r \leq |\lambda| \leq 1\}$.*

Pour $r = 0$, un tel opérateur est non inversible. Cela répond donc négativement à la Question 1. Signalons qu'après avoir prouvé notre théorème, nous avons été informés par Sophie Grivaux que l'existence d'opérateurs rigides dont le spectre est le disque unité fermé peut également être établie à partir du travail [3].

Pour $r \in]0, 1[$, l'inverse d'un tel opérateur n'est pas rigide. En effet son spectre est $\{\lambda \in \mathbb{C} : 1 \leq |\lambda| \leq r^{-1}\}$. Or on sait que le spectre d'un opérateur rigide est inclus dans le disque unité fermé (voir l'Annexe 2 pour une preuve rapide qui utilise le théorème de Banach and Steinhaus). Cela répond donc négativement à la Question 2.

Nous avons donc utilisé que le rayon spectral d'un opérateur rigide est inférieur ou égal à un. Il est facile d'en déduire que dès que le Banach n'est pas réduit au vecteur nul, le rayon spectral d'un opérateur rigide est égal à un.

Toujours pour tout opérateur rigide u d'un Banach, on a de plus que

$$\text{toute composante connexe du spectre de } u \text{ rencontre le cercle unité.} \tag{1.1}$$

https://doi.org/10.1017/etds.2021.172 Published online by Cambridge University Press

Cela découle facilement du théorème de décomposition de Riesz (theorem D.2.1 de l'appendice D.2 de [1]) comme l'ont montré Costakis, Manoussos et Parissis à la proposition 2.11 de [2], sous une hypothèse plus faible que la rigidité. En réalité, la même argumentation avait déjà été utilisée par Kitai en 1982 pour établir que les opérateurs u d'un Banach qui satisfont la propriété

$$u \text{ a au moins un vecteur d'orbite dense} \tag{1.2}$$

vérifient également la propriété (1.1) (voir le theorem 1.18 de [1]). Signalons au passage que les opérateurs qui vérifient (1.2) sont appelés hypercycliques et que le livre [1] de Bayart et Matheron constitue l'ouvrage de référence pour leur étude générale.

Le spectre d'un opérateur diagonal de $\ell^2(\mathbb{N}^*)$ est égal à l'adhérence de son spectre ponctuel (voir le problem 63 de [4]). Or il est immédiat que le spectre ponctuel d'un opérateur rigide est inclus dans $\mathbb{U}$. On ne peut donc pas puiser dans les opérateurs diagonaux pour traiter les cas du théorème correspondant à $0 \leq r < 1$. Nos exemples montrent que cela devient possible quand on élargit aux opérateurs diagonaux par blocs de $\ell^2(\mathbb{N}^*)$.

Notre construction d'opérateurs diagonaux par blocs mais non diagonaux donne également un exemple quand $r = 1$, mais il y a alors plus simple. En effet un opérateur diagonal de $\ell^2(\mathbb{N}^*)$ avec $e^{i\pi\mathbb{Q}}$ comme ensemble de ses éléments diagonaux est rigide de spectre $\mathbb{U}$.

2. *Une famille d'opérateurs en dimension finie*

On désigne par Ω l'ensemble des triplets $\omega = (p, q, \alpha)$ où $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$ et $\alpha \in [1, +\infty[$.

Pour tout ω de Ω, on note n l'entier et β le réel appartenant à $]0, 1]$ définis par

$$n = p + q$$

et

$$\alpha^p \beta^q = 1.$$

Pour tout ω de Ω, on désigne par $\gamma = \gamma(\omega)$ le n-uplet $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) = (\gamma_1(\omega), \gamma_2(\omega), \ldots, \gamma_n(\omega))$ défini par

$$\gamma_j = \begin{cases} \alpha & (1 \leq j \leq p), \\ \beta & (p+1 \leq j \leq n). \end{cases}$$

On désigne par $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Les opérateurs que nous étudions dans ce chapitre sont les endomorphismes $v = v_\omega$ de $\mathbb{C}^n$ définis par

$$v(e_j) = \gamma_j\, e_{j+1} \quad (1 \leq j \leq n)$$

avec la convention $e_{n+j} = e_j$. On convient également que $\gamma_{n+j} = \gamma_j$.

https://doi.org/10.1017/etds.2021.172 Published online by Cambridge University Press

LEMME 2.1. *Soit $\omega \in \Omega$.*

On a pour tous j et k vérifiant $1 \le j \le n-1$ et $1 \le k \le n$

$$\gamma_k \gamma_{k+1} \cdots \gamma_{k+j-1} \le \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_j.$$

Démonstration. On a

$$\gamma_1 \ge \gamma_2 \ge \cdots \ge \gamma_n. \tag{2.1}$$

L'inégalité demandée est donc immédiate si $k+j-1 \le n$. Si $k+j-1 > n$, on a d'après (2.1)

$$\gamma_\ell \le \gamma_{\ell-(n-j)} \quad \text{pour } k \le \ell \le n.$$

D'où

$$\begin{aligned}\gamma_k \gamma_{k+1} \cdots \gamma_{k+j-1} &= (\gamma_k \gamma_{k+1} \cdots \gamma_n)(\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_{k+j-1-n}) \\ &\le (\gamma_{k-n+j} \gamma_{k-n+j+1} \cdots \gamma_j)(\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_{k+j-1-n}) \\ &= \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_j.\end{aligned}$$

□

Soit $\omega = (p, q, \alpha) \in \Omega$ et $t > 0$. On note $\omega^2 = (p, q, \alpha^2)$ et

$$S(\omega, t) = t^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_j}{t^j}.$$

Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $\rho = |\lambda|$.

Si $\lambda \ne 0$, on note également pour $v = v_\omega$,

$$\psi_\lambda(v) = \lambda^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{v}{\lambda}\right)^j.$$

On munit de plus $\mathbb{C}^n$ de sa structure usuelle d'espace hermitien qui fait de la base $(e_j)_{1 \le j \le n}$ une base orthonormale.

LEMME 2.2. *Soient $\omega \in \Omega$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $1 \le j \le n-1$. On a alors pour $v = v_\omega$,*

$$\textit{le polynôme minimal de } v \textit{ est } X^n - 1, \tag{2.2}$$

$$(v - \lambda\,\mathrm{id})\psi_\lambda(v) = (1 - \lambda^n)\mathrm{id}, \tag{2.3}$$

$$\|v^j\| = \|v^j(e_1)\| = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_j, \tag{2.4}$$

$$\|\psi_\lambda(v)\| \le S(\omega, \rho), \tag{2.5}$$

$$\|\psi_\lambda(v)(e_1)\|^2 = S(\omega^2, \rho^2). \tag{2.6}$$

Démonstration. On a $\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_n = 1$. On en déduit que v permute circulairement les vecteurs de la base $(e_1, \gamma_1 e_2, \gamma_1 \gamma_2 e_3, \ldots, \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_{n-1} e_n)$ de $\mathbb{C}^n$. D'où (2.2).

https://doi.org/10.1017/etds.2021.172 Published online by Cambridge University Press

On a

$$v\psi_\lambda(v) = \lambda^n \sum_{j=1}^{n} (v/\lambda)^j = \lambda\psi_\lambda(v) + v^n - \lambda^n \mathrm{id} = \lambda\psi_\lambda(v) + (1-\lambda^n)\mathrm{id}$$

d'après (2.2). Cela entraîne (2.3).

On a $\|v^j e_1\| = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_j$, d'où $\|v^j\| \geq \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_j$. Par ailleurs on a

$$\begin{aligned}\left\| v^j\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right)\right\|^2 &= \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \gamma_k\gamma_{k+1}\cdots\gamma_{k+j-1} e_{k+j}\right\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} (\gamma_k\gamma_{k+1}\cdots\gamma_{k+j-1}|x_k|)^2 \leq (\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_j)^2 \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\end{aligned}$$

d'après le lemme 2.1 On a donc aussi $\|v^j\| \leq \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_j$, ce qui permet d'achever la preuve de (2.4).

En utilisant (2.4), on a

$$\|\psi_\lambda(v)\| \leq \rho^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \|v^j\|/\rho^j = \rho^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_j}{\rho^j} = S(\omega, \rho).$$

ce qui montre (2.5). Enfin la formule (2.6) est immédiate. □

3. *Endomorphismes de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ et opérateurs de $\ell^2(\mathbb{N}^*)$, diagonaux par blocs*

On pose $\ell^2 := \ell^2(\mathbb{N}^*)$ et on note $(\delta_r)_{r\geq 1}$ sa base orthonormale canonique définie par

$$\delta_r(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = r, \\ 0 & \text{si } j \neq r. \end{cases}$$

Pour alléger les notations, on écrit ≪ k ≫ à la place de ≪ $k \geq 1$ ≫. On choisit une suite $n(1), n(2), \ldots$ d'entiers de $\mathbb{N}^*$ et on définit $s(1), s(2), \ldots$ par les formules

$$s(1) = 1 \tag{3.1}$$

et pour tout k

$$s(k+1) - s(k) = n(k). \tag{3.2}$$

On note

$$E_k = \mathrm{Vect}\{\delta_r : s(k) \leq r < s(k+1)\}. \tag{3.3}$$

On choisit pour tout k un endomorphisme v_k de E_k. En écrivant un vecteur générique y de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ sous la forme

$$y = \sum_k y_k$$

avec $y_k \in E_k$, on définit un endomorphisme v de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ par la formule

$$v(y) = \sum_k v_k(y_k).$$

https://doi.org/10.1017/etds.2021.172 Published online by Cambridge University Press

On dira que v est l'endomorphisme diagonal par blocs de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ défini par les endomorphismes v_k.

Dans le cas où $v(\ell^2) \subset \ell^2$, on note $u = v_{|\ell^2}$ la restriction de v à ℓ^2, à la fois pour l'espace de départ et l'espace d'arrivée. On verra alors que u est automatiquement continu. On dira que u est l'opérateur diagonal par blocs de ℓ^2 défini par les endomorphismes v_k.

Le lemme suivant précise tout cela. Il généralise le cas des opérateurs diagonaux traité dans l'excellent livre [4] de Halmos sur les Hilbert, aux problèmes 61 et 62.

LEMME 3.1. *Soit v un endomorphisme diagonal par blocs de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ défini par des endomorphismes v_k. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) $v(\ell^2) \subset \ell^2$;

(ii) $\sup_k \|v_k\| < +\infty$.

Quand ces conditions sont réalisées, on a pour $u := v_{|\ell^2}$:

$$\text{(iii)} \quad \begin{cases} u \text{ est continu} \\ \text{et} \\ \|u\| = \sup\limits_k \|v_k\|. \end{cases}$$

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) On raisonne par l'absurde; on suppose donc que $\sup_k \|v_k\| = +\infty$.

On extrait une sous-suite k_n pour laquelle $\|v_{k_n}\| \geq n$ pour tout n. En choisissant y avec $\|y_k\| = 1/n$ et $\|v_k(y_k)\| = \|v_k\| \cdot \|y_k\|$ quand $k = k_n$, et $y_k = 0$ sinon, on voit que $y \in \ell^2$ et $v(y) \notin \ell^2$. Donc $v(\ell^2) \not\subset \ell^2$.

(ii) $\Rightarrow$ [(i) et (iii)] Soit $y \in \ell^2$. On a

$$\sum_k \|v(y_k)\|^2 \leq \sum_k \|v_k\|^2 \cdot \|y_k\|^2 \leq \sup_k \|v_k\|^2 \cdot \|y\|^2.$$

Donc avec (ii), $v(\ell^2) \subset \ell^2$, $u = v_{|\ell^2}$ est continu et

$$\|u\| \leq \sup_k \|v_k\|.$$

Par ailleurs, en considérant, pour chaque k, un vecteur y_k de E_k qui vérifie $\|y_k\| = 1$ et $\|v_k(y_k)\| = \|v_k\|$, on a

$$\|u\| \geq \sup_k \|v_k(y_k)\| = \sup_k \|v_k\|. \qquad \square$$

Dans les deux lemmes suivants on suppose vérifiée la condition (ii) du lemme 3.1. La condition (i) est donc vérifiée et la lettre u désignera implicitement l'opérateur diagonal par blocs $u = v_{|\ell^2}$.

LEMME 3.2. *Soit v un endomorphisme diagonal par blocs de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ défini par des endomorphismes v_k, tel que*

$$\sup_k \|v_k\| < +\infty.$$

https://doi.org/10.1017/etds.2021.172 Published online by Cambridge University Press

Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) *u est inversible;*

(ii) *pour tout k, v_k est inversible, et*

$$\sup_k \|v_k^{-1}\| < +\infty.$$

Quand ces conditions sont réalisées, on a aussi

(iii) $\|u^{-1}\| = \sup_k \|v_k^{-1}\|$.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ [(ii) et (iii)] Supposons (i). On a alors pour tout k

$$\ker v_k \subset \left(\prod_{j\geq 1} \ker v_j\right) \cap \ell^2 = (\ker v) \cap \ell^2 = \ker u = \{0\}.$$

Donc v_k est inversible. On en déduit que v est inversible et

$$v^{-1} = (v_k^{-1})_k. \tag{3.4}$$

Soit maintenant $y \in \ell^2$. Notons $x = u^{-1}(y)$. On a $v^{-1}(y) = v^{-1}(u(x)) = x \in \ell^2$. Donc $v^{-1}(\ell^2) \subset \ell^2$ et ${v^{-1}}_{|\ell^2} = (v_{|\ell^2})^{-1}$. En appliquant le lemme 3.1 à v^{-1}, on a donc avec (3.4) que $\sup_k \|{v_k}^{-1}\| < +\infty$, ${v^{-1}}_{|\ell^2}$ est continu et

$$\|u^{-1}\| = \|{v^{-1}}_{|\ell^2}\| = \sup_k \|v_k^{-1}\|.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons (ii). On a alors v inversible et (3.4) est vérifié. En appliquant le lemme 3.1 à v, on a $v(\ell^2) \subset \ell^2$ et u est continu. En l'appliquant cette fois à v^{-1}, on a $v^{-1}(\ell^2) \subset \ell^2$ et u^{-1} est continu. Il découle de tout cela que u est inversible d'inverse ${v^{-1}}_{|\ell^2}$. □

On déduit immédiatement du lemme 3.2 le critère suivant d'appartenance au spectre.

LEMME 3.3. *Soit v un endomorphisme diagonal par blocs de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ défini par des endomorphismes v_k, tel que*

$$\sup_k \|v_k\| < +\infty.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) $\lambda \in \sigma(u)$;

(ii) $$\begin{cases} \lambda \in \bigcup_k \sigma(v_k) \\ \textit{ou} \\ \lambda \notin \bigcup_k \sigma(v_k) \textit{ et } \sup_k \|(v_k - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}\| = +\infty. \end{cases}$$

Remarque 1. Dans le cas particulier des opérateurs diagonaux, le critère (ii) s'écrit de manière plus simple

$$\lambda \in \overline{\bigcup_k \sigma(v_k)}$$

(voir le problème 63 de [4]).

https://doi.org/10.1017/etds.2021.172 Published online by Cambridge University Press

Remarque 2. Lorsque v n'est pas pas inversible, écrivons par convention $\|v^{-1}\| = +\infty$. On peut alors écrire (ii) sous la forme plus concise,

(ii)' $\sup_k \|(v_k - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}\| = +\infty$.

4. *Une famille d'opérateurs diagonaux par blocs*

On se donne une suite $\omega = (\omega(k))_{k\geq 3} = (\omega_{p(k),q(k),\alpha(k)})_{k\geq 3}$ d'éléments de l'ensemble Ω du chapitre 2. On pose $n(1) = n(2) = 1$ et $n(k) = p(k) + q(k)$ pour $k \geq 3$. On définit les sous-espaces E_k pour $k \geq 1$ par (3.1), (3.2) et (3.3).

Pour tout $k \geq 3$, on identifie $\mathbb{C}^{n(k)}$ à E_k en envoyant la base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_{n(k)})$ de $\mathbb{C}^{n(k)}$ sur la base $(\delta_{s(k)}, \delta_{s(k)+1}, \ldots, \delta_{s(k+1)-1})$ de E_k. On définit alors l'endomorphisme diagonal par blocs v de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ par $v_1 = \mathrm{id}_{|E_1}$, $v_2 = \mathrm{id}_{|E_2}$ et $v_k = v_{\omega(k)}$ pour tout $k \geq 3$. On dit que v est associé à ω.

LEMME 4.1. *Soit $\omega = (\omega_{p(k),q(k),\alpha(k)})_{k\geq 3}$ une suite d'éléments de Ω telle que la suite $(\alpha(k))_{k\geq 3}$ est bornée.*

Alors l'endomorphisme par blocs v de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ associé à ω laisse stable ℓ^2 et $u := v_{|\ell^2}$ est continu.

Démonstration. Cela découle de la combinaison du lemme 3.1 avec le point (2.4) du lemme 2.2 avec $j = 1$. □

Notations. Dans les chapitres 5 et 6 qui suivent, une fois donnée une telle suite ω d'éléments de Ω, on continuera à désigner par v l'endomorphisme diagonal par blocs de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ associé à ω, et par u l'opérateur diagonal par blocs de ℓ^2 défini par $u = v_{|\ell^2}$.

5. *Spectre*

LEMME 5.1. *Soit $\omega = (\omega(k))_{k\geq 3} = (\omega_{p(k),q(k),\alpha(k)})_{k\geq 3}$ une suite d'éléments de Ω telle que*

$$\text{la suite } n(k) \text{ n'est pas bornée} \tag{5.1}$$

et

$$\lim_{k\to+\infty} \alpha(k) = 1. \tag{5.2}$$

Alors

$$\sigma(u) = \{\lambda \in \mathbb{C} : r \leq |\lambda| \leq 1\}$$

où

$$r = \sup\{s \in [0, 1] : \text{la suite } (\alpha(k)^{p(k)} s^{q(k)})_{k\geq 3} \text{ est bornée}\}.$$

Dans la suite de cet article et en particulier pour la preuve de ce lemme, on utilise les notations suivantes. Soient f et g deux fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. On note $f \ll g$ (respectivement $f \gg g$) pour signifier qu'il existe un réel positif K tel que pour tout élément x de D, on a $f(x) \leq Kg(x)$(respectivement $f(x) \geq Kg(x)$). Si K dépend d'un paramètre η, c'est-à-dire est une fonction de η, on écrira par exemple $f \ll_\eta g$ à la place de $f \ll g$.

Démonstration. C'est la combinaison du lemme 4.1 avec l'hypothèse (5.2), qui assure que u est bien défini et continu.

https://doi.org/10.1017/etds.2021.172 Published online by Cambridge University Press

D'après le point (2.2) du lemme 2.2, on a

$$\bigcup_{k\geq 1} \sigma(v_k) = \bigcup_{k\geq 1} \{z \in \mathbb{C} : z^{n(k)} = 1\}. \tag{5.3}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On va maintenant discuter suivant les propriétés conjointes de $\rho := |\lambda|$ et de la suite $(\omega(k))_{k\geq 3} = (p(k), q(k), \alpha(k))_{k\geq 3}$.

1 $^{\text{er}}$*cas.* $\rho > 1$. En utilisant successivement les formules (2.3) et (2.4) du lemme 2.2, et l'hypothèse (5.2), on a

$$\begin{aligned}\|(v_k - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}\| &= \frac{\|\psi_\lambda(v_k)\|}{|1-\lambda^{n(k)}|} \ll_\rho \sum_{j=0}^{n(k)-1} \frac{\|v_k^j\|}{\rho^j} \\ &= \sum_{j=0}^{n(k)-1} \frac{\gamma_1(\omega(k))\gamma_2(\omega(k))\cdots\gamma_j(\omega(k))}{\rho^j} \leq \sum_{j=0}^{n(k)-1} \left(\frac{\alpha(k)}{\rho}\right)^j \ll_\rho 1.\end{aligned}$$

En utilisant (5.3) et le lemme 3.3, on en déduit que

$$\text{le rayon spectral de } u \text{ est égal à un.} \tag{5.4}$$

Pour les $2^{\text{ème}}$ et $3^{\text{ème}}$ cas, on note

$$\tilde{r} = \sup\{s \in [0,1] : \text{la suite } \alpha(k)^{p(k)} s^{q(k)} \text{ est bornée}\}.$$

$2^{\text{ième}}$ *cas.* $0 < \rho < 1$ et la suite $\alpha(k)^{p(k)}\rho^{q(k)}$ n'est pas bornée. En utilisant successivement les formules (2.3) et (2.6) du lemme 2.2 on a

$$\begin{aligned}\|(v_k - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}\| &\gg_\rho \|\psi_\lambda(v_k)\| \geq \|\psi_\lambda(v_k)(e_1)\| \\ &= S^{1/2}(\omega(k)^2, \rho^2) \geq \alpha(k)^{p(k)}\rho^{q(k)-1}.\end{aligned}$$

Donc $\sup_{k\geq 1} \|(v_k - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}\| = +\infty$.

Avec le lemme 3.3, on en déduit que

$$\tilde{r} < |\lambda| < 1 \Longrightarrow \lambda \in \sigma(u). \tag{5.5}$$

$3^{\text{ème}}$ *cas.* Pour un certain réel γ, on a $0 \leq \rho < \gamma < 1$ et la suite $\alpha(k)^{p(k)}\gamma^{q(k)}$ est bornée. Si $\rho = 0$, on a en utilisant successivement les formules (2.2) et (2.4) du lemme 2.2,

$$\begin{aligned}\|v_k^{-1}\| = \|v_k^{n(k)-1}\| &= \gamma_1(\omega(k))\gamma_2(\omega(k))\cdots\gamma_{n(k)-1}(\omega(k)) \\ &= 1/\beta(k) = \alpha(k)^{p(k)/q(k)} \\ &= \frac{1}{\gamma}(\alpha(k)^{p(k)}\gamma^{q(k)})^{1/q(k)} \ll_\gamma 1.\end{aligned}$$

Si maintenant $\rho \neq 0$, il existe un grand $M > 1$ et un petit $\delta > 0$ tels que si

$$q(k) \geq M \tag{5.6}$$

alors

$$\rho/\beta(k) = (\alpha(k)^{p(k)}\gamma^{q(k)})^{1/q(k)}\rho/\gamma < 1 - \delta. \tag{5.7}$$

https://doi.org/10.1017/etds.2021.172 Published online by Cambridge University Press

En utilisant successivement les formules (2.3) et (2.5) du lemme 2.2 on a

$$\begin{aligned}\|(v_k - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}\| &\ll_\rho \|\psi_\lambda(v_k)\| \le S(\omega_k, \rho)\\ &\ll_\rho Q := \alpha(k)^{p(k)} \rho^{q(k)} \sum_{j=0}^{q(k)-1} (\beta(k)/\rho)^j.\end{aligned}$$

On a de plus $Q \ll_\rho 1$. En effet pour les k tels que l'on a (5.6), cela résulte de (5.7). Et quand (5.6) n'est pas vérifiée, la somme dans Q est bornée, ainsi que la suite $\alpha(k)^{p(k)}\rho^{q(k)}$.

On déduit de tout cela que si $0 \le \rho < \tilde r$, alors $\|(v_k - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}\| \ll_\rho 1$. En combinant avec (5.3) et le lemme 3.3, on obtient que

$$0 \le |\lambda| < \tilde r \Rightarrow \lambda \notin \sigma(u). \tag{5.8}$$

Par ailleurs on a $\sigma(v_k) \subset \sigma(u)$ pour tout $k \ge 1$. D'où avec (5.3)

$$\bigcup_{k\ge 1}\{z \in \mathbb{C} : z^{n(k)} = 1\} \subset \sigma(u). \tag{5.9}$$

On conclut la preuve du lemme 5.1, en utilisant l'hypothèse (5.1) et les propriétés du spectre $\sigma(u)$ que sont sa compacité, (5.4), (5.5), (5.8) et (5.9). □

6. *Rigidité*

LEMME 6.1. *Soit $(p(k), \alpha(k))_{k\ge 3}$ une suite d'éléments de $\mathbb{N}^* \times [1, +\infty[$ avec pour tout $k \ge 3$, $(k-1)! \le p(k) < k!$, $\alpha(k)$ décroissante et $\alpha(k+1) = 1 + O(1/k!)$. On note $\omega = (\omega_{p(k),k!-p(k),\alpha(k)})_{k\ge 3}$. Alors u est rigide de suite de rigidité $\ell!$.*

Démonstration. C'est la combinaison du lemme 4.1 avec la décroissance de $\alpha(k)$, qui assure que u est bien défini et continu.

Soit $y \in \ell^2$. On a en utilisant successivement les formules (2.2) et (2.4) du lemme 2.2, l'hypothèse sur $p(k)$ et les deux hypothèses sur $\alpha(k)$,

$$\begin{aligned}\|(u^{\ell!} - \mathrm{id})y\|^2 &= \sum_{k\ge \ell+1} \|(v_k^{\ell!} - \mathrm{id})y_k\|^2\\ &\le \sum_{k\ge\ell+1} \|v_k^{\ell!} - \mathrm{id}\|^2 \|y_k\|^2 \le 4 \sum_{k\ge\ell+1} \|v_k^{\ell!}\|^2\, \|y_k\|^2\\ &= 4 \sum_{k\ge\ell+1} (\alpha(k))^{2\ell!} \|y_k\|^2 \le 4(\alpha(\ell+1))^{2\ell!} \sum_{k\ge\ell+1} \|y_k\|^2\\ &\ll \sum_{k\ge\ell+1} \|y_k\|^2.\end{aligned}$$

On a donc $\lim_{\ell\to+\infty} u^{\ell!}y = y$. □

7. *Preuve du théorème*

Pour tout $r \in [0, 1]$, on choisit l'opérateur par blocs $u = v_{|\ell^2}$ où v est associé à

$$\omega = (\omega_{p(k),q(k),\alpha(k)})_{k\ge 3} \text{ avec } p(k) + q(k) = k!$$

https://doi.org/10.1017/etds.2021.172 Published online by Cambridge University Press

et

$$(q(k), \alpha(k)) = \begin{cases} \left(k, 1 + \dfrac{\log(1/r)}{(k-1)!}\right) & \text{si } 0 < r \leq 1, \\ \left(1, 1 + \dfrac{1}{(k-1)!}\right) & \text{si } r = 0. \end{cases}$$

C'est en combinant les lemmes 5.1 et 6.1 que l'on vérifie que ce choix permet d'établir le théorème.

Remerciements. Nous remercions Etienne Matheron de nous avoir signalé l'article [2] de Costakis, Manoussos et Parissis, et Sophie Grivaux de nous avoir informé du lien entre son article [3] avec Maria Roginskaya et le présent travail.

A. *Annexe*

On utilisera pour cette annexe la notation

$$\overline{D(z_0, r)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}.$$

A.1. *Preuve alternative de la Proposition CMP.* Soit u un opérateur d'un Banach et $n \geq 1$ tels que

$$\|u^n - \mathrm{id}\| \leq 1/2. \tag{A.1}$$

On a alors

$$\sigma(u^n - \mathrm{id}) \subset \overline{D(0, 1/2)}$$

d'où

$$\sigma(u^n) \subset \overline{D(1, 1/2)} \subset \{z \in \mathbb{C} : 1/2 \leq |z| \leq 3/2\}$$

et

$$\sigma(u) \subset \{z \in \mathbb{C} : (1/2)^{1/n} \leq |z| \leq (3/2)^{1/n}\}. \tag{A.2}$$

Maintenant si u est uniformément rigide, il existe des entiers n arbitrairement grands vérifiant (A.1) et donc aussi (A.2). On en déduit que $\sigma(u) \subset \mathbb{U}$.

A.2. *Rayon spectral d'un opérateur rigide.* Il résulte immédiatement d'un résultat de Müller de 1986 (voir theorem de [5]) que l'on a l'énoncé suivant.

THÉORÈME M. *Le rayon spectral d'un opérateur rigide est inférieur ou égal à un.*

Preuve alternative du théorème M. Soit u un opérateur rigide d'un Banach de suite de rigidité $(n_k)_{k\geq 1}$. Alors pour tout élément x de E, la suite de vecteurs $(u^{n_k}x)_{k\geq 1}$ est bornée. D'après le théorème de Banach and Steinhaus, il existe un réel positif M tel que pour tout $k \geq 1$,

$$\|u^{n_k}\| \leq M.$$

https://doi.org/10.1017/etds.2021.172 Published online by Cambridge University Press

On procède alors comme dans §A.1: on en déduit d'abord que pour tout $k \geq 1$,

$$\sigma(u^{n_k}) \subset \overline{D(0, M)},$$

puis

$$\sigma(u) \subset \overline{D(0, M^{1/n_k})}.$$

On conclut en faisant tendre k vers $+\infty$. □

REFERENCES

[1] F. Bayart and E. Matheron. *Dynamics of Linear Operators (Cambridge Tracts in Mathematics, 179)*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[2] G. Costakis, A. Manoussos and I. Parissis. Recurrent linear operators. *Complex Anal. Oper. Theory* **8** (2014), 1601–1643.

[3] S. Grivaux and M. Roginskaya. On Read's type operators on Hilbert spaces. *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2008** (2008), rnn083.

[4] P. Halmos. *A Hilbert Space Problem Book (Graduate Texts in Mathematics, 19),* 2nd edn. Springer-Verlag, New York, 1982.

[5] V. Müller. Local spectral radius formula for operators in Banach spaces. *Czechoslovak Math. J.* **38** (1988), 726–729.

https://doi.org/10.1017/etds.2021.172 Published online by Cambridge University Press