ÉTUDE SUR LA SURVENANCE DES SINISTRES EN ASSURANCE AUTOMOBILE

M. Brichler

1. Distribution des assurés selon le nombre des sinistres dans une période de temps déterminée

On sait que la loi de Poisson simple représente mal la distribution des sinistres d'un groupe observé d'automobilistes du fait que tout groupe que l'on peut étudier en pratique, même s'il est composé d'assurés présentant des caractéristiques communes (même zone de circulation, même type de véhicule, même utilisation de ce véhicule, ...) est hétérogène quant aux autres caractéristiques et surtout quant au comportement personnel des assurés, élément dont l'influence sur les résultats du risque est prépondérante.

M. Delaporte a obtenu une représentation intéressante du phénomène en supposant que les sinistres d'un véhicule se répartissent suivant une loi de Poisson de moyenne donnée, et que les moyennes de chaque véhicule du groupe étudié se distribuent selon une loi de Pearson type III d'équation:

$$dF(s) = \frac{a^b}{\Gamma(b)}\, e^{-a(s-s_0)}\, (s - s_0)^{b-1}\, ds$$

où $\Gamma(b)$ est la fonction eulérienne de $2^{\text{ième}}$ espèce:

$$\Gamma(b) = \int_0^\infty e^{-x}\, x^{b-1}\, dx$$

a, b, et s_0 étant des paramètres dont la valeur est calculée en égalant les expressions des 3 premiers moments théoriques aux moments correspondants observés.

Cette formule conduit à des calculs assez longs.

M. Depoid a proposé une formule plus simple.

Si n_x est, sur 10.000 véhicules, le nombre de ceux ayant eu dans l'année *au moins* x sinistres, on a sensiblement:

$$\log n_x = 4 - t_x$$

https://doi.org/10.1017/S0515036100010813 Published online by Cambridge University Press

t étant donné par la relation

$$\frac{1}{t} = a + bF$$

où F = fréquence du groupe.

M. Depoid utilisait:

en province:

$$\frac{1}{t} = 0,68 + 3F$$

à Paris:

$$\frac{1}{t} = 0,84 + 3,5F$$

M. Brichler a obtenu des résultats améliorés avec la formule suivante:

$$t = \log\left(1 + \frac{1}{F}\right)$$

qui permet en outre des calculs très simplifiés. On en tire en effet, en appelant N le nombre des véhicules du groupe et N_x le nombre de ceux ayant eu *exactement* x sinistres:

$$N_0 = \frac{N}{1 + F}$$

$$N_1 = N_0 \frac{F}{1 + F}$$

$$N_2 = N_1 \frac{F}{1 + F}$$

$$\ldots\ldots$$

$$N_x = N_{x-1} \frac{F}{1 + F}$$

$$\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots$$

On vérifie facilement que $\sum_{x=0}^{x=\infty} N_x = N$

https://doi.org/10.1017/S0515036100010813 Published online by Cambridge University Press

et que:
$$\sum_{x=0}^{x=\infty} xN_x = NF$$

En sommant de x à l'infini, on a le nombre de véhicules ayant (x et $+$) sinistres:

$$N_x \text{ et } + = N_{x-1}\, F$$

L'expression ci-dessus est très commode en pratique, puisqu'elle permet de classer la totalité de la population, par exemple:

Assurés ayant 0 sinistre
Assurés ayant 1 sinistre
Assurés ayant 2 sinistres
Assurés ayant 3 sinistres et plus.

On démontre encore que le nombre moyen de sinistres des assurés ayant (x et $+$) sinistres est:

$$x + F$$

Par exemple, si la fréquence du groupe est $F = 0{,}4$, la fréquence moyenne des assurés ayant (3 sinistres et $+$) est 3, 4.

Ces formules simplifient considérablement les calculs liés aux sinistres (calculs de bonus-malus par exemple).

Applications numériques (exemples tirés de l'ouvrage de M. Depoid)

1. Sur un groupe de 1.744 voitures de tourisme, usage promenade en 1958. Fréquence moyenne: 0,324.

Nombre de Sinistres	Nombre de véhicules				
	Obser-vations	Ajustements			
		Poisson simple	Pearson III (Delaporte)	Formule Depoid	Formule Brichler
0	1.316	1.261	1.316	1.319	1.317
1	323	409	325	322	322
2	81	66	79	79	79
3	18	7,2	19	19	19
4	4	0,6	4,6	4,5	4,7
5	2		1,3	1,3	1,2
6 et +	—		0,3	0,2	0,4

Les trois ajustements sont très bons.

2. Exemples avec des fréquences extrêmes.

a) Renault 4 CV — Province en 1955 — groupe de 10.784 véhicules de fréquence moyenne 0,093

Nbr de sinistres	Nombre de véhicules		
	Observations	Poisson simple	Formule Brichler
0	9.835	9.799	9.839
1	843	911	836
2	70	43	71
3	6	1	7
4 et +	—	—	1

b) Citroen ID 19 — Paris en 1958 — groupe de 2.224 véhicules de fréquence moyenne 0,679

Nbr de sinistres	Nombre de Véhicules		
	Observations	Poisson simple	Formule Brichler
0	1.345	1.130	1.325
1	508	765	536
2	228	260	217
3	78	58	83
4	36	10	36
5	17	1	14
6 et +	12	—	10

La formule Brichler est un cas particulier de la formule Delaporte en faisant:

$$a = \frac{1}{F} \quad b = 1 \quad s_0 = 0$$

2. Liaisons entre les fréquences d'années successives

M. Depoid a donné dans son ouvrage l'exemple suivant qui fait apparaître dans une population d'assurés, les liaisons entre les résultats des années successives:

1.250 contrats observés pendant 4 ans en ne conservant que les assurés restés dans la Société 18 mois au moins

Sinistres la 1ère année	Fréquence moyenne			
	de 2ème année	de 3ème année	de 4ème année	de la 2e à la 4e
0 1 2 et + (moyenne 2,5)	0,47 0,72 1,06	0,39 0,60 0,90	0,33 0,45 0,58	0,41 0,63 0,94
Ensemble fréquence moyenne 0,671	0,631	0,517	0,386	0,550

(On observe une baisse de la fréquence générale du fait qu'on opère sur une population fermée).

M.Delaporte a proposé le modèle suivant:

Fréquence liée par le résultat x d'une année:

$$f/x = \frac{\int_{f0}^{\infty} f\, P(x/f)\, dF(f)}{\int_{f0}^{\infty} P(x/f)\, dF(f)}$$

et si on a x sinistres en n années:

$$f_{n/x} = \frac{\int_{f0}^{\infty} f\, P(x_{1/f}) \ldots P(x_{n/f})\, dF(f)}{\int_{f0}^{\infty} P(x_{1/f}) \ldots P(x_{n/f})\, dF(f)}$$

x = nombre annuel de sinistres

$$P(x_{i/f}) = \frac{e^{-f} f^{x_i}}{x_i!}$$

Sur l'exemple ci-dessus de M.Depoid, cette formulation permet de calculer les espérances mathématiques de 2ème, 3ème, 4ème années, liées par les fréquences de 1ère année; en corrigeant de la tendance à la baisse signalée, on trouve:

Sinistres de la	Fréquences liées		
	de 2ème année	de 3ème année	de 4ème année
0	0,469	0,384	0,287
1	0,710	0,582	0,434
2 et +	1,066	0,874	0,652

https://doi.org/10.1017/S0515036100010813 Published online by Cambridge University Press

La concordance avec les résultats observés est satisfaisante, mais les calculs sont assez longs.

Travaux récents du Groupement Technique Accidents

Les observations récentes ont confirmé l'existence de liaisons entre les résultats d'années successives. Par exemple, sur 170.000 véhicules dont les résultats ont été observés en 1960, 1961, 1962 (en zone normale, tous usages), on a trouvé:

a)

Sinistres la 1ère année:	0	1	2	3	4 et +
Fréquence de 2e année:	0,17	0,37	0,59	0,85	1,15

b)

Sinistres *en 2 ans*: Soit fréquence annuelle:	0 0	1 0,5	2 1	3 1,5	4 2	5 2,5	6 3	7 et + 3,5 et +
Fréquence de 3e année:	0,135	0,26	0,41	0,62	0,91	1,31	1,85	vers 3

Le G.T.A. s'est proposé d'établir une formule simple rendant compte de ces liaisons.

1) *Formule approchée*:

En portant dans la formule des fréquences liées de M. Delaporte les valeurs des paramètres correspondant à la formule de distribution proposée par M. Brichler, elle se réduit à:

$$f_n/x = F \frac{1 + x}{1 + nF} \qquad \begin{aligned} F &= \text{fréquence d'ensemble} \\ x &= \text{sinistres de } n \text{ années} \end{aligned}$$

Appliquons cette formule aux résultats d'observations indiqués ci-dessus, pour lesquels $F = 0{,}212$

Sinistres la 1ère année	0	1	2	3	4 et +
Fréquence de 2ème année	0,17	0,33	0,50	0,67	0,87

La concordance n'est pas entièrement satisfaisante.

https://doi.org/10.1017/S0515036100010813 Published online by Cambridge University Press

2) *Formule développée*:

La formule indiquée plus haut a été améliorée récemment par MM. Acher et Thiry, au prix, bien entendu, d'une certaine complication.

Supposons une population fermée, dont la fréquence d'ensemble F reste constante dans le temps (en fait, on sait qu'elle s'améliore — on néglige ce facteur).

Pour un assuré de fréquence à l'origine supposée égale à f_0 [1]) on va déterminer f_1, f_2, ... fréquences des années 1, 2, ...en fonction des n années d'assurance écoulées et des sinistres observés pendant ces n années. L'ajustement a été déterminé sur 3 années du fait qu'en Statistique Commune, on a des observations pour 3 années consécutives:

60-61-62 61-62-63 63-64-65

et de façon que, pour l'ensemble des assurés, la fréquence soit F chaque année.

On pose, après n années

$$f_n + 1 = f_0 \frac{a + bs}{k + n}$$

où s = fonction de x (nombre de sinistres pendant les n années) et a, b, k des paramètres dépendant de f_0.

On suppose que $s = 0$ si $x = 0$.

Ajustement de a et de k:

1) Pour $n = 0$ qui entraîne $x = 0$, on a la fréquence de 1ère année f_1 qu'on suppose $= f_0$

d'où $$a = k$$

2) Pour $n = 1$, si on a eu 0 sinistre en 1ère année, on a $f_{2/0} =$

$$= f_0 \frac{a}{a + 1}$$

($f_{2/0}$ = fréquence 2ème année si 0 sinistre la 1ère année).

d'où $$a = \frac{1}{\dfrac{f_0}{f_{2/0}} - 1}$$

[1]) Fréquence d'origine = fréquence supposée à la souscription du contrat.

https://doi.org/10.1017/S0515036100010813 Published online by Cambridge University Press

Pour différentes f_0 et en utilisant les 3 séries d'observation, on trouve un ajustement global assez bon en prenant:

$$\log a = \frac{0{,}125}{f_0}$$

Ajustement de b:

Supposons au départ que $s = x$, nombre de sinistres.

Vu la stabilité de F, si on a une population de n assurés de fréquence de départ f_0,

$N_0 = \dfrac{N}{1 + f_0}$ ont 0 Sin. la 1ère année	En 2ème année la fréquence sera: $f_{2/0} = f_0 \dfrac{a}{a + 1}$
$N_1 = N_0 \dfrac{f_0}{1 + f_0}$ ont 1'' la 1ère année	$f_{2/1} = f_0 \dfrac{a + b}{a + 1}$
N_2 et $+ = N_1 f_0$ ont 2 Sin. et + la 1ère année	$f_{2/2+} = f_0 \dfrac{a + b\,(2 + \lambda)}{a + 1}$
(Formules Brichler)	où $\lambda = f_0$

En écrivant que F se conserve:

$$F = Nf_0 = N_0 x f_{2/0} + N_1\, x f_{2/1} + N_{2\,\text{et}} + x f_{2/2} +$$

d'où l'on tire: $b = \dfrac{1}{f_0}$

En fait, l'expérience montre que les résultats se rapprochent davantage des observations en prenant

pour $n = 1$ .... $s = x$
pour $n = 2$ .... $s =$ nombre de sin. 1ère année $\times$ 0,8
$+ =$ nombre de sin. 2me année $\times$ 1,2
pour $n = 3$ .... $s =$ (s ci-dessus pour $n = 2$) $\times$ 0,8
$+$ nombre de sin. 3me année $\times$ 1,2

ce qui ne change pas le calcul ci-dessus (puisqu'on a le même nombre total de sinistres chaque année). Cette pondération correspond au fait observé que les sinistres plus récents pèsent plus lourd.

On peut encore améliorer en prenant:

$$s = x\alpha^x \text{ où } \alpha = 1 + \varepsilon \quad \varepsilon \text{ étant de l'ordre de } 0{,}1$$

Il vient alors:
$$b \backsim \frac{1}{f_0\,(1+\varepsilon)}$$

En pratique, on a retenu au G.T.A. pour les calculs courants:
$$f_{n+1} = f_0\,\frac{a+bs}{a+n} \qquad s = x(1,1)^x$$
$$\text{avec log } a = \frac{0,125}{f_0} \qquad b = \frac{1}{f_0\,(1,1)}$$

Exemple d'application pour $f_0 = 0,212$

Il vient:
$$f_{n+1} = f_0\,\frac{3,89 + 4,29\,x(1,1)^x}{3,89+n}$$

On donne ici le rapport:
$$\frac{f_{n+1}}{f_0} \times 100$$

Dans chaque case la 1ère ligne est la valeur observée en Statistique Commune, la 2ème ligne est le résultat du calcul.

Indices de Fréquences de 2eme année

Sinistres la 1ère année	0	1	2	3	4 et +
Fréquences de 2ème année	79 80	173 176	278 292	400 430	722 786

Indices de fréquences de 3eme annee

Sistres la 1ère année \ Sinistres la 2° année	0	1	2	3	4 et +
0	67 66	157 161	258 277	413 416	895 773
1	125 132	231 226	350 343	570 481	795 831
2	191 204	300 306	442 416	595 554	966 911
3	242 299	402 394	494 510	897 649	1212 1006
4 et +	276 532	465 634	1080 743	915 882	2200 1232

La concordance est bonne sauf pour la dernière case du second tableau qui concerne un très petit nombre d'assurés.

ANNEXE

Les formules des pages 6 et 9 sont à rapprocher de celle de la „prime pondérée" proposée par M. Brichler dans une communication à l'Institut des Actuaires Français (Bulletin Juin 1967 p. 201). Il s'agit d'une prime variant chaque année en fonction du nombre de sinistres (comme la „prime modelée" de M. Delaporte).

Le principe en est le suivant:

La première année, l'assuré paye la prime Po correspondant au véhicule, à la zone, à l'usage, etc.... Après n années, s'il a eu x sinistres, le coût moyen des sinistres étant C, la prime pourrait être

$$\pi_n = \frac{xC}{n}$$

En fait, nous estimons que la prime à percevoir réellement doit être un compromis entre-la prime de sa catégorie (Po), prime moyenne établie au vu de statistiques provenant de nombreuses observations-et π_n, résultant de l'observation des sinistres individuels sur un nombre d'années en général petit et donc en partie aléatoire.

Le compromis peut être une moyenne pondérée:

$$P_n = \frac{\alpha P_0 + \beta\pi_n}{\alpha + \beta}$$

La précision de π_n s'améliorant chaque année, β doit être une fonction croissante de n. Prenons $\beta = n$, d'où:

$$P_n = \frac{\alpha P_0 + xC}{\alpha + n}$$

D'autre part, pour assurer un bon équilibre entre P_0 et π_n il convient de prendre α d'autant plus grand que Po est petit.

En posant $\qquad Po = f_0 xC, \qquad$ prenons $X = \dfrac{k}{f_0}$

Il vient $\qquad P_n = \dfrac{k + x}{k/f_0 + n}\, C = \dfrac{k + x}{k + nf_0}\, Po$

La formule de la page 6 correspond à $k = 1$.

Nous avons obtenu des résultats numériques très voisins de ceux de la prime modelée de M. Delaporte en prenant pour k une valeur un peu plus grande que 1 ($k = 1,7$), ce qui revient à donner un peu plus de poids à Po qu'à π_n.

La formule de la page 9 correspond à $k = 10^{\frac{0,125}{f_0}} x f_0$.

https://doi.org/10.1017/S0515036100010813 Published online by Cambridge University Press