

## UNE REMARQUE SUR LES DEFORMATIONS D'UN GERME D'HYPERSURFACES A TYPE TOPOLOGIQUE CONSTANT

PAR  
SPYROS N. PNEVMATIKOS

RESUMÉ. Soit  $f$  un germe de fonction holomorphe centré à l'origine de  $\mathbb{C}^n$  à singularité isolée et  $F$  une déformation centrée de  $f$  de base  $\mathbb{C}^p$ . On se propose d'établir que lorsque la déformation  $X_t = F_t^{-1}(0)$  de l'hypersurface  $X_0 = f^{-1}(0)$  est à type topologique constant alors la factorisation de  $F$  à travers la déformation miniverselle centrée de  $f$  concernant les espaces de paramètres correspondants est unique. Il en résulte en particulier immédiatement le théorème classique de détermination finie pour les fonctions ainsi que pour leurs déformations.

### 1. Sur les déformations d'un germe de fonction holomorphe. Soit

$$f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$$

un germe de fonction holomorphe centré (i.e.,  $f(0) = 0$ ) à singularité isolée. Nous considérons les déformations centrées de base  $\mathbb{C}^p$  de  $f$ , c'est à dire, les germes de fonctions holomorphes

$$F: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$$

tels que

$$F(z, 0) = f(z) \quad \text{et} \quad F(0, t) = 0.$$

On désigne:

$\mathcal{O}_n$  l'anneau des germes de fonctions holomorphes à l'origine de  $\mathbb{C}^n$ ,

$\mathcal{M}_n$  l'idéal maximal de l'anneau  $\mathcal{O}_n$ ,

$J(f)$  l'idéal jacobien de  $f$ .

Il est bien connu que la condition de singularité isolée de  $f$  équivaut à la finitude de la dimension de l'espace vectoriel complexe  $\mathcal{O}_n/J(f)$ , dimension habituellement notée  $\mu(f)$ . Dans ce cas l'espace vectoriel complexe  $\mathcal{M}_n/\mathcal{M}_n J(f)$  est aussi de dimension finie égale à  $\mu'(f) = \mu(f) + n - 1$ . En effet, si  $1, v_2(z), \dots, v_\mu(z)$  est une base de  $\mathcal{O}_n/J(f)$ , alors  $v_2(z), \dots, v_\mu(z), f'_{z_1}, \dots, f'_{z_n}$  est une base de  $\mathcal{M}_n/\mathcal{M}_n J(f)$  et réciproquement. L'espace  $\mathcal{M}_n/\mathcal{M}_n J(f)$  constitue la base de la déformation miniverselle centrée de  $f$ , dans le sens du théorème suivant:

---

Reçu par la rédaction le 4 juillet 1983 et, sous une forme révisée finale, le 18 avril 1984.

AMS Classification (1980): 32B30.

© Canadian Mathematical Society 1984.

THEOREME I. Soit

$$f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$$

un germe de fonction holomorphe centré à singularité isolée et

$$G(z, u_1, \dots, u_{\mu'}) = f(z) + \sum_{i=1}^{\mu'} a_i(z)u_i$$

sa déformation centrée définie par une base  $a_1(z), \dots, a_{\mu'}(z)$  de l'espace  $\mathcal{M}_n/\mathcal{M}_n J(f)$ . Alors, pour toute déformation centrée  $F(z, t)$  de base  $\mathbb{C}^p$  de  $f$ , il existe, un germe d'application holomorphe

$$\lambda: (\mathbb{C}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{\mu'}, 0)$$

et une déformation centrée  $\Phi(z, t)$  de base  $\mathbb{C}^p$  de l'identité de  $(\mathbb{C}^n, 0)$ , tels que

$$F(\Phi(z, t), t) = G(z, \lambda(t)). \tag{X}$$

De plus, la dérivée de  $\lambda$  à l'origine de  $\mathbb{C}^p$  est unique.

Cette propriété de déformation miniverselle centrée d'un germe de fonction holomorphe est bien connu mais, nous verrons ici qu'il est possible de l'obtenir par une simple vérification formelle dont la convergence est assurée par un lemme classique de M. Artin [1] généralisé par H. Grauert et J. L. Verdier [2]. Le caractère "centré" de notre énoncé interviendra essentiellement dans la seconde partie de cet article.

DÉMONSTRATION DU THÉOREME I. On se donne une déformation centrée de base  $\mathbb{C}^p$  de  $f$ :

$$F(z, t) = f(z) + \sum_{|m| \geq 1} F_m(z)t^m$$

où  $m = (m_1, \dots, m_p)$ . On cherche  $\lambda$  et  $\Phi$  sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda(t) = \left( \sum_{|m| \geq 1} \lambda_{1m} t^m, \dots, \sum_{|m| \geq 1} \lambda_{\mu'm} t^m \right) \\ \Phi(z, t) = z + \sum_{|m| \geq 1} \varphi_m(z)t^m \end{array} \right.$$

$\varphi_m = (\varphi_{m_1}, \dots, \varphi_{m_p})$  étant composé d'éléments de  $\mathcal{M}_n$ . On note  $(t)$  l'idéal de  $\mathbb{C}^p_n$  engendré par les  $(t_1, \dots, t_p)$  et on résoud d'abord (X) à l'ordre 1, c'est à dire modulo  $(t)^2$ . Posons à ceci

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda^{(1)}(t) = \left( \sum_{j=1}^p \lambda_{1j} t_j, \dots, \sum_{j=1}^p \lambda_{\mu'j} t_j \right) \\ \Phi_1(z, t) = z + \sum_{j=1}^p \varphi_j(z)t_j. \end{array} \right.$$

La relation (X) donne

$$[f'_{z_1}, \dots, f'_{z_n}] \left[ \sum_{j=1}^p \varphi_j(z) t_j \right] + \sum_{j=1}^p F_j(z) t_j = \sum_{j=1}^p \left( \sum_{i=1}^{\mu'} a_i(z) \lambda_{ij} \right) t_j \tag{X_1}$$

ce qui revient à la résolution de chaque équation

$$[f'_{z_1}, \dots, f'_{z_n}][\varphi_j(z)] + F_j(z) = \sum_{i=1}^{\mu'} a_i(z) \lambda_{ij}. \tag{X_{1,j}}$$

Chaque  $F_j \in \mathcal{M}_n$  se décompose en une combinaison linéaire unique  $\sum_{i=1}^{\mu'} \lambda_{ij} a_i(z)$  et un élément de l'idéal  $\mathcal{M}_n J(f)$  qui peut s'écrire  $[f'_{z_1}, \dots, f'_{z_n}][\varphi_j(z)]$ . On résoud ainsi ces équations avec  $\varphi_j(0) = 0$  et on en déduit  $\lambda^{(1)}(t)$  et  $\Phi_1(z, t)$  vérifiant

$$F(\Phi_1(z, t), t) = G(z, \lambda^{(1)}(t)).$$

En raisonnant par récurrence, supposons donnés jusqu'à l'ordre  $k$ :

$$\lambda^{(k)}(t) = \left( \sum_{|m| \leq k} \lambda_{1m} t^m, \dots, \sum_{|m| \leq k} \lambda_{\mu' m} t^m \right)$$

et

$$\Phi^{(k)}(z, t) = \Phi_1 \circ \tilde{\Phi}_2 \circ \dots \circ \tilde{\Phi}_k(z, t)$$

où

$$\tilde{\Phi}_s(z, t) = (\Phi_s(z, t), t)$$

avec

$$\Phi_s(z, t) = z + \sum_{|m|=s} \varphi_{sm}(z) t^m,$$

de sorte que, modulo l'idéal  $(t)^{k+1}$ , on ait:

$$F(\Phi^{(k)}(z, t), t) = G(z, \lambda^{(k)}(t)). \tag{X_k}$$

Déterminons les  $\lambda_{1m}, \dots, \lambda_{\mu' m}$  avec  $|m| = k + 1$  pour construire

$$\lambda^{(k)}(t) = \left( \sum_{|m| \leq k+1} \lambda_{1m} t^m, \dots, \sum_{|m| \leq k+1} \lambda_{\mu' m} t^m \right),$$

et le

$$\Phi_{k+1}(z, t) = z + \sum_{|m|=k+1} \varphi_{(k+1)m}(z) t^m$$

pour construire

$$\Phi^{(k+1)}(z, t) = \Phi^{(k)}(\Phi_{k+1}(z, t), t)$$

de sorte que, modulo l'idéal  $(t)^{k+2}$ , on ait

$$F(\Phi^{(k+1)}(z, t), t) = G(z, \lambda^{(k+1)}(t)). \tag{X_{k+1}}$$

En posant

$$F(\Phi^{(k)}(z, t), t) = F^{(k)}(z, t) = \sum_{|m| \geq 0} F_m^{(k)}(z)t^m,$$

la relation précédente s'écrit

$$F^{(k)}(\Phi_{k+1}(z, t), t) = G(z, \lambda^{(k+1)}(t)),$$

et en développant, on s'amène à résoudre les équations

$$[f'_{z_1}, \dots, f'_{z_n}][\varphi_{km}(z)] + F_m^{(k)}(z) = \sum_{i=1}^{\mu'} a_i(z)\lambda_{im}. \tag{X_{k+1,m}}$$

On détermine, comme précédemment, les solutions  $\lambda_{im}$  et  $\varphi_{km}$  et ainsi s'achève la preuve formelle. Le lecteur trouvera dans [2] le lemme généralisé de M. Artin qui assure la convergence des solutions.

**II. Unicité de la factorisation d'une déformation centrée à travers la déformation miniverselle centrée:  $\mu$  constant implique  $\lambda$  unique. Soit**

$$f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$$

un germe de fonction holomorphe centré à l'origine à singularité isolée. Chaque déformation centrée  $F(z, t)$  de  $f$ , de base  $\mathbb{C}^p$ , définit une famille

$$(X_t) = (F_t^{-1}(0), 0)$$

de germes en 0 d'hypersurfaces dont la fibre en 0 est  $X_0 = (f^{-1}(0), 0)$ . Cette famille est dite topologiquement triviale s'il existe une famille continue  $(\varphi_t)$  de germes d'homéomorphismes de  $(\mathbb{C}^n, 0)$  tels que, pour chaque  $t$  proche de 0, on ait

$$\varphi_t(X_t) = X_0.$$

Rappelons que pour chaque  $t$ , le nombre  $\mu_t = \mu(F_t)$  est le nombre de cycles evenescents de  $F_t$  et qu'il est indépendant de  $t$  si la famille est topologiquement triviale, cf. [6]. Le théorème de Lè–Ramanujam–Perron, cf. [4] et [8], prouve que réciproquement la condition  $\mu_t = \mu_0$  est suffisante pour la trivialité topologique de  $(X_t)$ .

Nous nous proposons d'établir:

**THEOREME II. Soit**

$$f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$$

*un germe de fonction holomorphe centré à singularité isolée et  $F(z, t)$  une déformation centrée de base  $\mathbb{C}^p$  de  $f$  telle que le type topologique de la famille des germes à l'origine de  $\mathbb{C}^n$  d'hypersurfaces  $X_t = F_t^{-1}(0)$  soit constant. Alors la factorisation*

$$\lambda: (\mathbb{C}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{\mu'}, 0)$$

*à travers la déformation miniverselle centrée de  $f$  est unique.*

Reprenons l'interprétation classique du nombre de Milnor dans les espaces

$$J^k(n)_o = \mathcal{M}_n / \mathcal{M}_n^{k+1}$$

des  $k$ -jets en 0 de  $\mathbb{C}^n$  de fonctions holomorphes qui conservent l'origine. Pour plus de détail nous renvoyons le lecteur aux travaux de J. Mather, en particulier à [5]. Le groupe algébrique  $D^k(n)$  des  $k$ -jets de difféomorphismes holomorphes  $\varphi$  de  $(\mathbb{C}^n, 0)$  tangents à l'identité, i.e.  $j^1\varphi = j^1z$ , agit algébriquement sur  $J^k(n)_o$  par

$$j^k\varphi * j^kf = j^k(f \circ \varphi^{-1}).$$

Dans ce contexte on cherche à établir que: *lorsque le nombre de Milnor  $\mu_t$ , pour  $t$  proche à l'origine de  $\mathbb{C}^p$ , est constant, alors on a unicité de l'application  $\lambda$  qui vérifie*

$$\varphi_t^{-1} * F_t = G_{\lambda(t)}.$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME II. D'après un théorème classique, cf. [7], les orbites  $\mathbb{O}(j^kh)$  de l'action algébrique du groupe  $D^k(n)$  sur l'espace  $J^k(n)_o$  sont des variétés lisses. L'espace tangent à l'orbite  $\mathbb{O}(j^kh)$  au point  $j^kh$  s'identifie à la classe de l'idéal  $\mathcal{M}_n \cdot J(h)$  dans  $\mathcal{M}_n / \mathcal{M}_n^{k+1}$ :

$$(1) \quad T_{(j^kh)}\mathbb{O}(j^kh) = (\mathcal{M}_n \cdot J(h) + \mathcal{M}_n^{k+1}) / \mathcal{M}_n^{k+1}.$$

D'autre part, si  $\mu(h)$  est fini le lemme de Nakayama permet de prouver l'existence d'un entier  $k'$  tel que

$$\mathcal{M}_n^{k'+1} \subset \mathcal{M}_n \cdot J(h)$$

et d'obtenir donc, pour  $k \geq k'$ , l'identification suivante:

$$(2) \quad T_{(j^kh)}J^k(n)_o / T_{(j^kh)}\mathbb{O}(j^kh) = \mathcal{M}_n / \mathcal{M}_n \cdot J(h).$$

Considérons l'application orbitale de  $j^kh$ :

$$\begin{aligned} L: D^k(n) &\rightarrow J^k(n)_o \\ j^k\varphi &\rightarrow j^k\varphi * j^kh. \end{aligned}$$

Elle est de rang constant, comme toute application orbitale de l'action d'un groupe de Lie, et c'est ainsi une submersion sur l'orbite  $\mathbb{O}(j^kh)$ . Le stabilisateur de  $j^kh$ :

$$St(j^kh) = L^{-1}(j^kh),$$

est un sous groupe fermé de  $D^k(n)$  donc une sous variété lisse. Soit  $H$  un germe, en l'élément neutre  $e = j^kz$ , de sous variété transverse à  $St(j^kf)$ . Puisque  $L: D^k(n) \rightarrow \mathbb{O}(j^kf)$  est une submersion, la restriction de  $L$  à  $H$  est un germe de difféomorphisme:

$$(3) \quad (L|_H): (H, e) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{O}(j^kf), j^kf).$$

Considérons d'autre part l'application

$$\begin{aligned} G^{(k)}: (\mathbb{C}^{\mu'}, 0) &\rightarrow (J^k(n)_o, j^kf) \\ u &\rightarrow j^k_o(G_u), \end{aligned}$$

$G$  étant la déformation miniverselle centrée de  $f$ . Comme les

$$\frac{\partial G}{\partial u_1}(z, 0), \dots, \frac{\partial G}{\partial u_{\mu'}}(z, 0)$$

induisent une base de  $\mathcal{M}_n / \mathcal{M}_n \cdot J(f)$ , et vu les identifications (1), (2) et (3) l'application composée

$$T_0\mathbb{C}^{\mu'} \xrightarrow{T_0G^{(k)}} T_{(j^k f)}J^k(n)_o \xrightarrow{\Gamma} T_{(j^k f)}J^k(n)_o / T_{(j^k f)}\mathbb{O}(j^k f)$$

est un isomorphisme, et  $G^{(k)}$  est une immersion strictement transverse à l'orbite de  $j^k f$ ; plus précisément

$$(4) \quad T_{(j^k f)}J^k(n) \approx \text{Im}(T_0G^{(k)}) \oplus T_{(j^k f)}\mathbb{O}(j^k f).$$

Considérons maintenant l'application

$$\begin{aligned} \Psi: (\mathbb{C}^{\mu'} \times H, (0, e)) &\rightarrow J^k(n)_o \\ (u, j^k \varphi) &\rightarrow j^k \varphi * G_u^{(k)}. \end{aligned}$$

En restriction à  $\mathbb{C}^{\mu'} \times \{e\}$ ,  $\Psi$  est égale à  $G^{(k)}$  et en restriction à  $\{e\} \times H$ ,  $\Psi$  vaut  $L|H$ . Ainsi, sa différentielle peut se décomposer dans la somme directe de (4) en:

$$T_{(0, e)}\Psi = T_0G^{(k)} \oplus T_e(L|H).$$

C'est un isomorphisme comme composition des isomorphismes:

$$T_0G^{(k)}: T_0\mathbb{C}^{\mu'} \rightarrow \text{Im}(T_0G^{(k)}) \quad \text{et} \quad T_e(L|H): T_eH \rightarrow T_{(j^k f)}\mathbb{O}(j^k f),$$

et ainsi  $\Psi$  est un germe de difféomorphisme. Donnons nous des voisinages ouverts connexes:  $U$  de 0 dans  $\mathbb{C}^{\mu'}$ ,  $W$  de  $e$  dans  $H$ , et  $V$  de  $j^k f$  dans  $J^k(n)_o$ , de sorte que la restriction de  $\Psi$  à  $U \times W$ , notée  $\psi$ , soit un difféomorphisme sur  $V$ :

$$\psi: U \times W \xrightarrow{\cong} V.$$

Par construction, quelque soit  $(u, j^k \varphi) \in U \times W$ , l'image  $\psi(\{u\} \times W)$  est toute entière contenue dans l'orbite de  $\psi(u, j^k \varphi)$ . En d'autre termes la projection  $p: U \times W \rightarrow U$  fibre les images réciproques des orbites, ce qui donne, pour chaque orbite, la fibration de fibre  $W$ :

$$(5) \quad p: \psi^{-1}(\mathbb{O}(j^k h) \cap V) \rightarrow \psi^{-1}(\mathbb{O}(j^k h) \cap V) \cap (U \times \{e\}).$$

Considérons la déformation  $F(z, t)$  à  $\mu$  constant et

$$\lambda: (\mathbb{C}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{\mu'}, 0)$$

une factorisation de  $F$  dans la déformation miniverselle centrée  $G$ :

$$(6) \quad G(\Phi(z, t), \lambda(t)) = F(z, t), \quad \Phi(z, 0) = z,$$

et notons  $\Phi^{(k)}, F^{(k)}$  les applications

$$\begin{aligned} \Phi^{(k)}: (\mathbb{C}^p, 0) &\rightarrow (D^k(n), e), & \Phi^{(k)}(t) &= j_o^{(k)}\Phi_t, \\ F^{(k)}: (\mathbb{C}^p, 0) &\rightarrow (J^k(n)_o, j^k f), & F^{(k)}(t) &= j_o^k F_t. \end{aligned}$$

Comme, pour chaque  $t$ , l'orbite de  $j^k F_t$  est de codimension indépendante de  $t$ :

$$\text{codim } \mathbb{O}(j^k F_t) = \mu',$$

l'image réciproque  $\psi^{-1}(\mathbb{O}(j^k F_t))$  coupe  $U \times \{t\}$  en des points isolés, qui correspondent, d'après la fibration (5), aux composantes connexes de  $\mathbb{O}(j^k F_t) \cap V$ . D'après (6) on a:

$$(7) \quad \psi(\lambda(t), e) = G^{(k)}(\lambda(t)) = \Phi^{(k)}(t) * F^{(k)}(t).$$

Si  $F^{(k)}(t)$  et  $G^{(k)}(\lambda(t))$  appartiennent à la même composante connexe de l'intersection  $\mathbb{O}(j^k F_t) \cap V$ , on aura, d'après (5) et (7):

$$(8) \quad \lambda(t) = p \circ \psi^{-1} \circ F^{(k)}(t).$$

Pour montrer l'unicité de  $\lambda$  il suffit de déterminer, pour tout  $t$  proche de 0, un chemin dans  $\mathbb{O}(j^k F_t) \cap V$  reliant  $F^{(k)}(t)$  et  $G^{(k)}(\lambda(t))$ . Donnons nous un voisinage ouvert convexe  $\Omega$  de l'origine de  $\mathbb{C}^p$  tel que, pour tout  $t_1, t_2 \in \Omega$ , on ait  $\Phi^{(k)}(t_1) * F^{(k)}(t_2) \in V$ . Un tel voisinage existe, car l'application

$$(t_1, t_2) \rightarrow \Phi^{(k)}(t_1) * F^{(k)}(t_2)$$

est continue. Le chemin

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow V, \quad \gamma(s) = \Phi^{(k)}(st) * F^{(k)}(t),$$

vérifie bien

$$\gamma(0) = \Phi^{(k)}(0) * F^{(k)}(t) = j^k F_t \text{ et } \gamma(1) = \Phi^{(k)}(t) * F^{(k)}(t) = j^k G_{\lambda(t)}$$

ce qui achève la démonstration.

REMARQUE. La construction précédente montre que l'application  $\lambda$  ne dépend que du jet d'ordre  $k$  en  $x$  de la déformation  $F(z, t)$ .

Voici une conséquence immédiate de cette remarque:

THEOREME III. *Soit*

$$f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$$

*un germe de fonction holomorphe centré à singularité isolée et  $F(z, t)$  une déformation centrée de base  $\mathbb{C}^p$  de  $f$  telle que le type topologique de la famille des germes à l'origine de  $\mathbb{C}^n$  d'hypersurfaces  $X_t = F_t^{-1}(0)$  soit constant. Alors, la déformation  $F_t$  est de détermination finie: Il existe un entier  $k$  tel que pour toute déformation centrée  $F'(z, t)$  de base  $\mathbb{C}^p$  de  $f$  vérifiant pour tout  $t$*

$$j^k F_t = j^k F'_t$$

*il existe une déformation centrée  $\Phi(z, t)$  de base  $\mathbb{C}^p$  de l'identité de  $(\mathbb{C}^n, 0)$  telle que*

$$F'(\Phi(z, t), t) = F(z, t).$$

DÉMONSTRATION. Puisque  $F_t - F'_t \in \mathcal{M}_n^{k+1}$ , pour  $k$  assez grand on a

$$\mu(F_t) = \mu(F'_t).$$

Ainsi  $F_t$  et  $F'_t$  se factorisent dans la déformation miniverselle centrée  $G(z, u)$  par la même application

$$\lambda: (\mathbb{C}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{\mu'}, 0).$$

Il existe donc deux déformations centrées  $\Phi(z, t)$  et  $\Phi'(z, t)$  de base  $\mathbb{C}^p$  de l'identité de  $(\mathbb{C}^n, 0)$  telles que

$$F_t \circ \Phi_t = G_{\lambda(t)} \text{ et } F'_t \circ \Phi'_t = G_{\lambda(t)}.$$

Il en découle que

$$F'_t = F_t \circ \Phi_t \circ \Phi'_t{}^{-1}$$

d'où la conclusion.

Il est clair que le théorème classique de détermination finie pour les germes de fonctions holomorphes est une conséquence immédiate de ce dernier théorème. Le théorème de détermination finie pour les déformations d'un germe de fonction à singularité isolée est aussi démontré par l'emploi de techniques différentes par J. P. G. Henry et B. Teissier dans [3].

#### REFERENCES

1. M. Artin, *On the solution of analytic equations*, Inv. Math. **5**, (1968), pp. 277–291.
2. A. Galligo and C. Houzel, *Module des singularités isolées d'après Verdier et Grauert*, Astérisque **7**, **8**, (1973), pp. 139–163.
3. J. P. G. Henry and B. Teissier, *Suffisance des familles de jets et équisingularité*, Séminaire F. Norguet (1974–75), Springer Lecture Notes in Math. No. 482.
4. Le Dung Trang and C. P. Ramanujan, *The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type*, Amer. Jour. Math. **98**(1), (1976), pp. 67–78.
5. J. N. Mather, *Stability of  $C^\infty$ -mappings: III Finitely determined map-germs*, Publ. Math. IHES **35**, (1969), pp. 127–156.
6. J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Ann. of Math. Studies 61, Princeton University Press, 1968.
7. D. Mumford, *Introduction to Algebraic Geometry*, Harvard University.
8. B. Perron,  $\mu$  constant implique type topologique constant en dimension complexe trois, C. R. Acad. Sciences Paris 295A, (1982), pp. 735–738.
9. B. Perron, *The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type in dimension three*, Mathematical Studies No. 103: Singularities and Dynamical Systems, North Holland, Amsterdam 1985.

UNIVERSITÉ DE CRÈTE  
GRÈCE