

TREILLIS DE SÉPARATION DES GRAPHES

NORBERT POLAT

L'objet de cet article est essentiellement de poursuivre la généralisation entreprise par Sabidussi [4] du concept d'ensemble *primitif* de sommets d'un graphe, introduit par Halin [1].

Rappelons brièvement ce que développe Sabidussi dans l'introduction de son article [4], auquel nous nous référons constamment. Si A , B et C sont des ensembles de sommets d'un graphe X , C sépare A et B si et seulement si toute AB -chaîne de X contient un sommet de C . A étant fixé, nous écrivons $C \leq_A B$ si et seulement si C sépare A et B . Il est évident que cette relation, qui est un préordre sur l'ensemble des parties de l'ensemble des sommets de X , n'est en général pas un ordre. Afin qu'elle en soit un et afin de travailler avec des ensembles de sommets et non de passer à la structure quotient associée modulo la relation d'équivalence σ_A définie par $B \sigma_A C$ si et seulement si $B \leq_A C$ et $C \leq_A B$, Halin [1] a proposé une solution qui a été ensuite modifiée de façon fort intéressante par Sabidussi [4]. Chacun d'eux définit des ensembles dits primitifs comme représentant canonique des classes d'équivalence modulo certaines relations d'équivalence définies sur l'ensemble des sommets d'un graphe en termes de séparation, mais qui sont toutes deux plus faibles que la relation σ_A précédente.

Dans cet article nous avons modifié légèrement la définition d'ensembles primitifs donnée par Sabidussi de façon que ceux-ci coïncident avec les représentants canoniques des classes d'équivalence modulo σ_A . Pour cela il suffit de considérer des ensembles qui sont "presque atteints" par certaines chaînes "issues" de A . Aussi dans la section 1 définissons-nous les notions de *chaîne* et de *graphe de préaccessibilité* d'où nous déduisons cette nouvelle notion de primitivité qui avait déjà été obtenue de façon différente par Pym et Perfect dans la section 7 de l'article [2]. Nous y retrouvons aussi, en étudiant certaines restrictions connexes de X , le résultat établi dans le lemme 7.3 de [2], soit que ces ensembles primitifs munis de l'ordre \leq_A forment un treillis complet que nous notons $P(X, A)$ et appelons le *treillis de séparation* de (X, A) . Ces treillis sont complètement caractérisés dans la section 5 et les propriétés de semi-modularité, de modularité et de distributivité sont étudiées dans la section 6. On prouve dans la section 3, tout comme l'a fait Sabidussi avec ses treillis de séparation faibles, que l'association de $P(X, A)$ au couple (X, A) est *fonctorielle*. La section 4 est réservée à l'étude de la classe des couples ayant même treillis de séparation, tandis que les ensembles primitifs sont utilisés dans la section 2 pour donner une nouvelle preuve du théorème de Menger.

Reçu le 1 juin, 1974 et sous forme révisée, le 15 juillet, 1975.

Contrairement aux définitions et notations générales de la théorie des graphes, que le lecteur trouvera dans [4], nous avons cru bon de rappeler, au fur et à mesure des besoins, celles qui sont spécifiques à cette étude afin que cette dernière demeure autonome.

Ajoutons aux notations générales que si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-graphes d'un graphe X on note $\bigvee_{i \in I} X_i$ la restriction de X telle que $V(\bigvee_{i \in I} X_i) = \bigcup_{i \in I} V(X_i)$. De plus si Y est une restriction de X nous écrirons $Y \leq X$.

Nous poserons la définition suivante: Soit X un graphe et $A \subset V(X)$. X est dit *A-connexe* si et seulement si toute composante connexe C de X rencontre A , i.e. $V(C) \cap A \neq \emptyset$.

Et dans tout cet article, sauf mention expresse du contraire, X désignera un graphe *A-connexe*.

1. Ensembles primitifs.

1.1. *Définition.* Soient X un graphe et Y un sous-graphe de X . On appelle *frontière* de Y par rapport à X l'ensemble

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_X Y &= \{y \in V(Y) \mid E(y; X) \not\subset E(y; Y)\} \\ &= V(Y \cap (X \setminus Y)). \end{aligned}$$

Par *confrontière* de Y par rapport à X , on entendra l'ensemble $\mathfrak{C}_X Y = \mathfrak{R}_X(X - Y)$.

Si aucune confusion n'est à craindre, on notera respectivement $\mathfrak{R}Y$ et $\mathfrak{C}Y$, la frontière et la confrontière de Y (par rapport à X).

1.2. *Définition.* Soient X un graphe et $A, B \subset V(x)$. Une *AB-chaîne d'accessibilité* (resp. une *AB-chaîne de préaccessibilité*) dans X est une chaîne $W = (x_0, \dots, x_n) \subset X$ telle que $x_0 \in A$ et $x_i \notin B$ pour $0 \leq i < n$ (resp. $0 \leq i \leq n$).

Nous noterons \mathfrak{A}_{AB} (resp. \mathfrak{A}_{AB}^-) l'ensemble des *AB-chaînes d'accessibilité* (resp. de *préaccessibilité*) de X et nous poserons

$$X_{AB} = \bigcup \mathfrak{A}_{AB} \quad (\text{resp. } X_{AB}^- = \bigcup \mathfrak{A}_{AB}^-).$$

L'ensemble A étant désormais considéré fixe, nous appellerons X_{AB} (resp. X_{AB}^-) le *graphe d'accessibilité* (resp. de *préaccessibilité*) déterminé par B .

Comme, pour tout $B \subset V(X)$, $\mathfrak{A}_{\emptyset B}^- = \mathfrak{A}_{\emptyset B}^- = \emptyset$, nous supposons donc par la suite $A \neq \emptyset$.

La Figure 1 nous montre pour un même graphe X avec $A = \{a\}$, à gauche

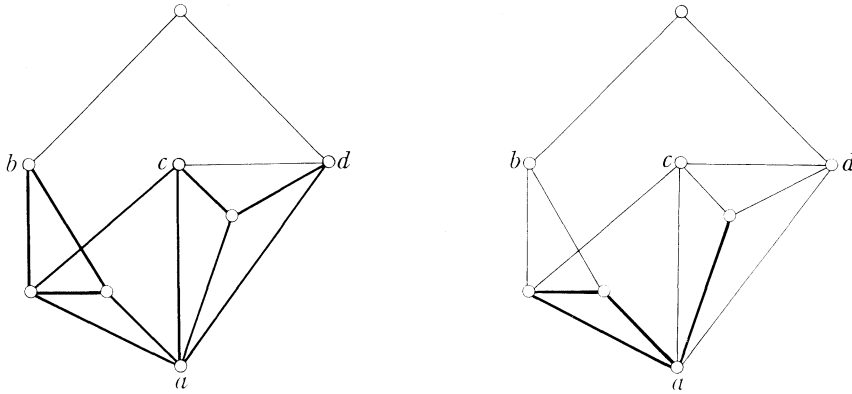


FIGURE 1

le graphe d'accessibilité et à droite celui de préaccessibilité déterminés par la même partie $B = \{b, c, d\}$ de $V(X)$.

1.3. On remarque aisément que, contrairement à X_{AB} , X_{AB}^- est toujours une restriction de X . En effet si $x \in V(X_{AB}^-)$ il existe une Ax -chaîne $W = (x_0, \dots, x_n) \in \mathfrak{B}_{AB}^-$; donc pour tout $y \in V(x; X) - B$ on a, si $y \notin V(W)$, $W \cup ([x, y]) \in \mathfrak{B}_{AB}^-$ et si $y = x_i$ pour $i < n$, $(x_0, \dots, x_{i-1}, y, x) \in \mathfrak{B}_{AB}^-$, et par suite dans tous les cas $[x, y] \in E(X_{AB}^-)$. D'ailleurs, comme nous le verrons prochainement, X_{AB}^- n'est autre que la réunion des composantes connexes de $X - B$ rencontrant A .

1.4.1. PROPOSITION. On a $B \leq_A C$ si et seulement si $\mathfrak{B}_{AB}^- \subset \mathfrak{B}_{AC}^-$.

Démonstration. (i) Supposons $B \leq_A C$ et soit $W = (x_0, \dots, x_n) \in \mathfrak{B}_{AB}^-$. Si $W \notin \mathfrak{B}_{AC}^-$ alors il existe $i \leq n$ tel que $x_i \in C$. Or $B \leq_A C$ implique l'existence d'un $j \leq i$ tel que $x_j \in B$ contrairement au fait que $W \in \mathfrak{B}_{AB}^-$.

(ii) Réciproquement soit $W = (x_0, \dots, x_n)$ une AC -chaîne. Si $V(W) \cap B = \emptyset$ alors $W \in \mathfrak{B}_{AB}^-$ et par suite $W \in \mathfrak{B}_{AC}^-$ contrairement à l'hypothèse $x_n \in C$.

1.4.2. En raison de la remarque 1.3 on a

$$\mathfrak{B}_{AB}^- \subset \mathfrak{B}_{AC}^- \text{ si et seulement si } X_{AB}^- \leq X_{AC}^-,$$

et par conséquent:

1.4.3. COROLLAIRE. On a $B \sigma_A C$ si et seulement si $X_{AB}^- = X_{AC}^-$.

1.5. Par la suite nous considérerons les couples (X, A) où X est un graphe et $A \subset V(X)$. Si de plus $A = \{a\}$, nous écrirons (X, a) au lieu de $(X, \{a\})$.

1.5.1. Etant donné un tel couple (X, A) , nous allons lui associer un couple

(Y, a) où a est un élément quelconque n'appartenant pas à $V(X)$ et où $Y = X \cup \bigcup_{x \in A} ([x, a])$.

Comparons tout d'abord les graphes de préaccessibilité relatifs à ces deux couples. Pour tout $B \subset V(X)$ on a

$$Y_{aB}^- = X_{AB}^- \cup \bigcup \{([x, a]) \mid x \in A \cap V(X_{AB}^-)\} \cup (a)$$

c'est-à-dire la restriction de Y à $X_{AB}^- \cup (a)$.

On en déduit immédiatement que, pour tout $B \subset V(X)$,

$$\mathfrak{C}_Y Y_{aB}^- = \mathfrak{C}_X X_{AB}^-$$

et de plus, pour tout $C \subset V(X)$, que

$$Y_{aB}^- \leq Y_{aC}^- \text{ si et seulement si } X_{AB}^- \leq X_{AC}^-,$$

les égalités ayant lieu en même temps. En conséquence et en raison de 1.4 on a

$$B \leq_A C \text{ si et seulement si } B \leq_a C.$$

1.5.2. A tout couple (X, A) nous allons dorénavant associer de la manière précédente un couple, noté (\tilde{X}_A, \tilde{A}) , choisi une fois pour toute en posant $\tilde{A} = \{V(X)\}$. Mais pour éviter l'utilisation de notations trop lourdes, et si évidemment aucune confusion importante n'est à craindre, nous poserons $\tilde{X}_A = \tilde{X}$, et à moins que $A = \{a\}$, la lettre a désignera l'élément \tilde{A} (et de même b désignera \tilde{B} , c désignera \tilde{C} , etc.), et nous réduirons l'emploi du symbole \sim au minimum, en écrivant par exemple X_{aB} au lieu de \tilde{X}_{aB} . L'allègement de la notation qui s'en suivra est de beaucoup préférable aux risques d'erreurs possibles.

D'autre part, étant donné un couple (Y, b) où $b \in V(Y)$, nous noterons $R(Y, b)$ l'ensemble des restrictions connexes de Y contenant b , et pour un couple (X, A) nous poserons $\tilde{R}(X, A) = R(\tilde{X}, a)$.

1.5.3. LEMME. *Pour tout $Z \in R(Y, b)$ on a $\mathfrak{C}Z \leq_b V(Y - Z)$.*

Démonstration. Soit $W = (x_0, \dots, x_n)$ avec $x_0 = b$ et $x_n \in V(Y - Z)$, et soit i le plus petit indice tel que $x_i \in V(Y - Z)$. On a alors $x_i \in \mathfrak{R}(Y - Z) = \mathfrak{C}Z$.

1.5.4. LEMME. *Pour tout $Z \in R(Y, b)$ on a $Y_{b\mathfrak{C}Z}^- = Z$.*

Démonstration. Soit $x \in V(Y_{b\mathfrak{C}Z}^-)$. Il existe donc une bx -chaîne $W = (x_0, \dots, x_n) \in \mathfrak{B}_{b\mathfrak{C}Z}^- \subset \mathfrak{B}_{b, V(Y-Z)}$ (d'après 1.5.3), et par suite $x \notin V(Y - Z)$ i.e. $x \in V(Z)$.

On en déduit que $Y_{b\mathfrak{C}Z}^- \leq Z$ puisque les deux sont des restrictions de Y .

Or si $Z \neq Y_{b\mathfrak{C}Z}^-$ alors $\mathfrak{C}Z \cap V(Z) \neq \emptyset$ contrairement au fait que $\mathfrak{C}Z \subset V(Y - Z)$.

1.5.5. THEOREME. *L'application*

$$\begin{aligned} \gamma_A : \tilde{R}(X, A) &\rightarrow \mathfrak{F}_X = \mathfrak{F}(V(X)) \\ Z &\mapsto \mathfrak{C}_{\tilde{X}}Z \end{aligned}$$

est un monomorphisme de $(\tilde{R}(X, A), \leq)$ dans (\mathfrak{F}_X, \leq_A) .

Démonstration. (i) γ_A est injectif car d'après le lemme 1.5.4 l'application $\xi_A : \mathfrak{F}_X \rightarrow \tilde{R}(X, A)$, $B \mapsto \tilde{X}_{aB}^-$ est une rétraction de γ_A .

(ii) γ_A est biisotone. En effet on a

$$\begin{aligned} Z_1 \leq Z_2 &\Leftrightarrow \tilde{X}_{a\mathfrak{C}Z_1}^- \leq \tilde{X}_{a\mathfrak{C}Z_2}^- \quad (1.5.4) \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{C}Z_1 \leq_a \mathfrak{C}Z_2 \quad (1.4) \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{C}Z_1 \leq_A \mathfrak{C}Z_2 \quad (1.5.1) \end{aligned}$$

1.6. Nous sommes maintenant en mesure de définir les principaux concepts de cette étude.

Définissons π_A comme l'application

$$\pi_A = \gamma_A \circ \xi_A : \mathfrak{F}_X \rightarrow \mathfrak{F}_X, \quad B \mapsto \mathfrak{C}\tilde{X}_{aB}^-$$

et posons $\text{im } \pi_A = P(X, A)$.

Nous remarquons aisément que $\pi_A B = B \cap V(X_{AB})$.

1.6.1 *Définition.* Un ensemble $B \in \mathfrak{F}_X$ est dit *A-primitif* si et seulement si $\pi_A B = B$ (i.e. $B \subset V(X_{AB})$).

Or d'après 1.5.4 π_A est idempotent car $X_{a\pi_A B}^- = X_{aB}^-$ pour tout $B \in \mathfrak{F}_X$, donc $P(X, A)$ est l'ensemble des parties A-primitives de $V(X)$.

1.6.2 D'après le théorème 1.5.5 et ce qui précède γ_A est un isomorphisme de $(\tilde{R}(X, A), \leq)$ sur $(P(X, A), \leq_A)$. Or $(\tilde{R}(X, A), \leq)$ est un treillis complet avec

$$\sup_{i \in I} Z_i = \bigvee_{i \in I} Z_i$$

et

$$\inf_{i \in I} Z_i = \text{composante de } \bigcap_{i \in I} Z_i \text{ contenant } a.$$

Donc $(P(X, A), \leq_A)$ est un treillis complet appelé le treillis de séparation de (X, A) .

1.6.3 D'après 1.4.3 et 1.6.2 on a

$$B \sigma_A C \text{ si et seulement si } \pi_A B = \pi_A C.$$

Donc $P(X, A)$ est isomorphe à $\mathfrak{F}_X / \sigma_A$ en tant qu'ensembles ordonnés, ce qui fait que ce dernier est aussi un treillis complet. Et de plus tout ensemble A-primitif est un représentant naturel de sa classe d'équivalence modulo σ_A , et est d'ailleurs égal à l'intersection de cette classe comme nous le verrons par la suite.

1.6.4 On remarque, d'après, 1.5.1 et 1.6, que pour tout $B \in \mathfrak{F}_X$ on a $\pi_a B = \pi_A B$.

1.6.5 PROPOSITION. Pour toute famille $(B_i)_{i \in I}$ de $P(X, A)$ on a :

$$\sup_{i \in I} B_i = \mathfrak{C} \bigvee_{i \in I} X_{aB_i}^-; \quad \inf_{i \in I} B_i = \pi_A \bigcup_{i \in I} B_i.$$

Démonstration. La première formule est une conséquence de 1.6.2 et de la définition de π_A . Prouvons la seconde.

- (i) On a $\pi_A (\bigcup_{i \in I} B_i) \leq_A \bigcup_{i \in I} B_i \leq_A B_i$ pour tout $i \in I$.
- (ii) Soit $C \in P(X, A)$ tel que $C \leq_A B_i$ pour tout $i \in I$, et soit $W = (x_0, \dots, x_n)$ avec $x_0 \in A$ et $x_n \in \pi_A (\bigcup_{i \in I} B_i) \subset \bigcup_{i \in I} B_i$. W est donc une AB_i -chaîne pour un certain $i \in I$, d'où d'après l'hypothèse $V(W) \cap C \neq \emptyset$, et $C \leq_A \pi_A (\bigcup_{i \in I} B_i)$.

1.7 Notation. Par la suite, pour tout treillis T et toute famille $(B_i)_{i \in I}$ de T , nous poserons :

$$\sup_{i \in I} B_i = \bigvee_{i \in I} B_i \quad \text{et} \quad \inf_{i \in I} B_i = \bigwedge_{i \in I} B_i.$$

1.8. Rappelons que Sapidussi [2] définit pour tout $B \in \mathfrak{P}_X, \beta_A B = \mathfrak{N}X_{AB}$ et $Q(X, A) = \{B \in \mathfrak{P}_X \mid \beta_A B = B\}$.

On remarque alors que $Q(X, A)$ est un sous-demi-treillis pour l'infimum de $P(X, A)$, et que l'application $B \mapsto \beta_A B$ est une fermeture du treillis $P(X, A)$.

La figure 2 nous montre un graphe et ses treillis de séparation $P(X, a)$ et $Q(X, a)$, les gros points étant les éléments de ce dernier. Dans cette figure comme dans celles qui suivront les ensembles sont écrits sans accolade ni virgule, ainsi bcd signifie $\{b, c, d\}$.

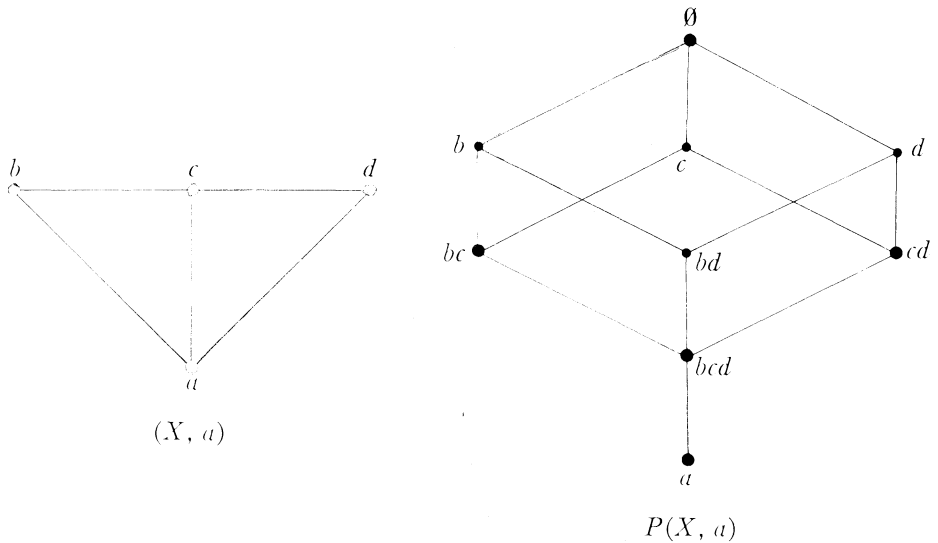


FIGURE 2

1.9 THEOREME. *L'application $\alpha : \mathfrak{P}_X \rightarrow \mathfrak{P}_X, B \mapsto \bar{B} = V(X - X_{AB}^-)$ est une fermeture, et le treillis $F(X, A)$ des α -fermés est complètement anti-isomorphe à $P(X, A)$.*

Démonstration. (i) α est une fermeture, en effet:

- a) α est évidemment extensif.
- b) α est isotone.

$$B \subset C \Rightarrow X_{AB}^- \supset X_{AC}^- \Rightarrow X - X_{AB}^- \subset X - X_{AC}^- \Rightarrow \bar{B} \subset \bar{C}.$$

c) α est idempotent: on prouve aisément que $X_{A\bar{B}}^- = X_{AB}^-$, par suite $X - X_{A\bar{B}}^- = X - X_{AB}^-$ et $\bar{\bar{B}} = \bar{B}$.

(ii) $F(X, A)$ est donc un treillis complet avec

$$\inf_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} B_i \quad \text{et} \quad \sup_{i \in I} B_i = \alpha(\bigcup_{i \in I} B_i)$$

pour toute famille $(B_i)_{i \in I}$.

Et $\alpha|P(X, A)$ est un anti-isomorphisme complet de $P(X, A)$ sur $F(X, A)$. En effet il est évidemment bijectif et on a pour tous $B, C \in P(X, A)$:

$$\begin{aligned} B <_A C &\Leftrightarrow X_{aB}^- < X_{aC}^- \quad (\text{d'après 1.6.2}) \\ &\Leftrightarrow X - X_{aB}^- = \bar{X} - X_{aB}^- > \bar{X} - X_{aC}^- = X - X_{aC}^- \\ &\Leftrightarrow \bar{B} \supset \bar{C} \quad \text{et} \quad \bar{B} \neq \bar{C} \end{aligned}$$

On remarque que $\bar{B} = \{x \in V(X) | B \leq_A \{x\}\}$.

2. Application à la démonstration du théorème de Menger.

2.1 Définition et notations.

2.1.1. Soit un graphe X et $A \subset V(X)$. Deux sous-graphes Y et Y' de X sont dits *A-indépendants* si et seulement si $V(Y) \cap V(Y') \subset A$.

2.1.2. Soient $A \subset V(X)$ et $W = (x_0, \dots, x_n)$ une chaîne de X telle que $V(W) \cap A = \{x_0\}$. On posera pour tout $i \leq n, d_W(A, x_i) = d_W(x_0, x_i) = i$.

2.1.3. Si $A, B \subset V(X), \mu(A, B)$ désignera un élément de $\mathfrak{S}_{AB} \cap \mathfrak{S}_{BA}$, et si de plus l'un des ensembles, par exemple B , est réduit à un seul élément b , on notera $\mu(A, b)$ à la place de $\mu(A, \{b\})$.

2.1.4. Si W est une chaîne et si $x, y \in V(W)$, on notera $W(x, y)$ la sous-chaîne de W d'extrémités x et y .

2.2. Soit X un graphe fini et $A, B \in \mathfrak{P}_X - \{\emptyset\}$ telles que $(A \cup \bigcup_{x \in A} V(x; X)) \cap B = \emptyset$. Rappelons le théorème de Menger:

THEOREME. *On a $\text{Min} \{|D| \mid D <_A B \text{ et } D \cap (A \cup B) = \emptyset\} = \text{Max} \{|\mathfrak{S}| \mid \mathfrak{S} \text{ est un ensemble de } AB\text{-chaînes deux à deux } A \cup B\text{-indépendantes}\}$.*

On a évidemment l'inégalité \geq . Il suffit de prouver la réciproque. Pour cela,

nous allons construire, à partir d'une famille quelconque d' AB -chaînes deux à deux $A \cup B$ -indépendantes de cardinalité maximum, un séparateur dont chaque sommet appartient à une et une seule chaîne de la famille, donc de cardinalité minimum.

2.2.1. Soit donc $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{B}_{AB} \cap \mathfrak{B}_{BA}$ un ensemble de AB -chaînes deux à deux $A \cup B$ -indépendantes.

Posons $|\mathfrak{F}| = p$ et soit $C = V(\cup \mathfrak{F}) - A \cup B$ l'ensemble des sommets de ces chaînes n'appartenant pas à $A \cup B$.

Si D est une partie de C , il est évident, qu'en général, une chaîne quelconque de \mathfrak{F} aura plus d'un sommet appartenant à $\pi_A D$. Nous allons montrer, si \mathfrak{F} est de cardinalité maximum, qu'au bout d'un nombre fini d'étapes, en commençant avec $D = C$ et en supprimant chaque fois et sur chaque chaîne les sommets les moins "éloignés" de A , on obtient une partie D' de C telle que $\pi_A D'$ ne rencontre chaque chaîne de \mathfrak{F} qu'en un seul sommet. Ce qui fait que l'ensemble $\pi_A D'$ ainsi obtenu sera bien un séparateur de AB de cardinalité minimum.

2.2.2. Pour tout $D \subset C$ et tout $W \in \mathfrak{F}$, on notera x_W^D le sommet de W appartenant à $\pi_A D$, le plus "éloigné" de A , c'est-à-dire tel que $d_W(A, x_W^D) = \sup \{d_W(A, x) \mid x \in V(W) \cap \pi_A D\}$ et on posera

$$D^* = D \cap \cup_{W \in \mathfrak{F}} V(W(x_W^D, b_W)),$$

où b_W est l'unique élément de $V(W) \cap B$, i.e. l'ensemble des sommets de chaque chaîne, situés entre x_W^D et B , extrémités comprises, et appartenant à D .

2.2.3. On définit alors la suite $(C_n)_{n \in \omega}$ de manière que $C_0 = C$ et $C_{n+1} = C_n^*$.

Pour simplifier l'écriture on posera, pour tout $n \in \omega$ et tout $W \in \mathfrak{F}$, $x_W^D = x_W^n$ si $D = C_n$.

On a alors le résultat suivant:

2.2.4 LEMME. *Pour tout $n \in \omega$, tout $W \in \mathfrak{F}$ et tout sommet x de W tel que*

$$d_W(A, x_W^{n-1}) \leq d_W(A, x) < d_W(A, x_W^n)$$

il existe un ensemble $\{\mu(A, x_W^n) \mid W \in \mathfrak{F}\} \cup \{\mu(A, x)\}$ de $p + 1$ chaînes qui sont avec le graphe $\cup_{W \in \mathfrak{F}} (W(x_W^n, b_W) - (x_W^n))$ deux à deux A -indépendants.

Ce qui nous assure, qu'à chaque étape, il existe un ensemble de chaînes indépendantes reliant A au sommet le plus "éloigné" de chaque chaîne, et à un sommet intermédiaire quelconque d'une des chaînes.

Démonstration. (i) trivial pour $n = 0$.

(ii) Supposons la propriété vraie pour $k < n$ et soit x vérifiant les hypothèses du lemme.

D'après la construction on a $x_W^n \in \pi_A C_{n-1}$, donc il existe $W' \in \mathfrak{F}$ et $y \in$

$V(W')$ avec

$$d_{W'}(A, x_{W'^{n-2}}) \leq d_{W'}(A, y) < d_{W'}(A, x_{W'^{n-1}})$$

et une yx_{W^n} -chaîne $\mu(y, x_{W^n})$ telle que

$$V(\mu(y, x_{W^n})) \cap V(\cup \mathfrak{F}) = \{y, x_{W^n}\}.$$

Alors les chaînes: $\mu(A, x_{W^n}) = \mu(A, y) \cup \mu(y, x_{W^n})$, $\mu(A, x) = \mu(A, x_{W^{n-1}}) \cup W(x_{W^{n-1}}, x)$ et pour tout $W'' \in \mathfrak{F} - \{W\}$, $\mu(A, x_{W''^n}) = \mu(A, x_{W''^{n-1}}) \cup W''(x_{W''^{n-1}}, x_{W''^n})$ vérifient, d'après l'hypothèse de récurrence, la conclusion du lemme.

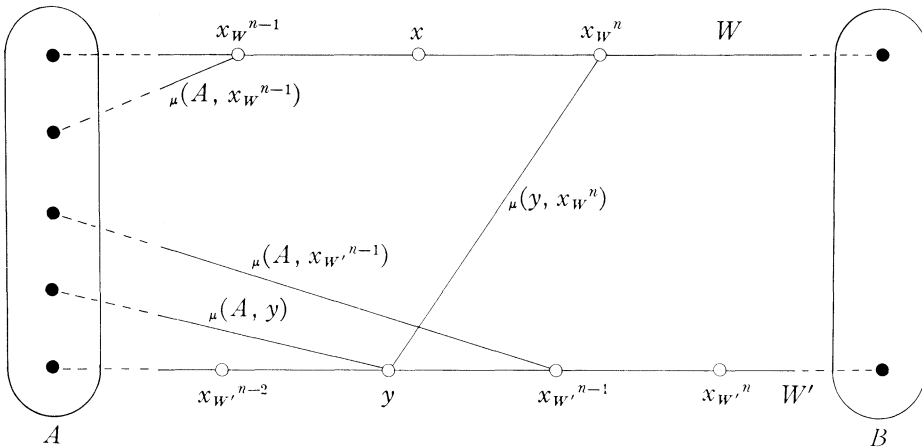


FIGURE 3

2.2.5 COROLLAIRE. Si $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{B}_{AB} \cap \mathfrak{B}_{BA}$ est un ensemble de cardinalité p maximum de chaînes $A \cup B$ -indépendantes, alors pour tout $n \in \omega$, tout $W \in \mathfrak{F}$ et tout sommet x de W tel que $d_W(A, x_{W^{n-1}}) \leq d_W(A, x) < d_W(A, x_{W^n})$ on a $x \notin \pi_B C$.

Ce qui nous assure, qu'à chaque étape, nous pourrions éliminer sans risque les sommets de chaque chaîne, les moins "éloignés" de A , pour passer à l'étape suivante.

Démonstration. Sinon, soit $\mu(x, B)$ une xB -chaîne telle que $V(\mu(x, B)) \cap C = \{x\}$, alors l'ensemble

$$\{\mu(A, x_{W^n}) \cup W(x_{W^n}, b_W) \mid W \in \mathfrak{F}\} \cup \{\mu(A, x) \cup \mu(x, B)\}$$

est un ensemble de $p + 1$ AB -chaînes $A \cup B$ -indépendantes, contrairement à la maximalité de p .

2.3 *Démonstration* (du théorème de Menger). Soit \mathfrak{S} un ensemble vérifiant l'hypothèse du corollaire précédent. Comme $|\mathfrak{S}|$ est maximum, nous avons $C <_A B$. Donc, d'après le corollaire précédent, pour tout $n \in \omega$ on a $C_n <_A B$ et par suite $\pi_A C_n <_A B$. Or comme X est fini, il existe $n \in \omega$ tel que $C_{n+1} = C_n$ i.e. pour tout $W \in \mathfrak{S}$ on a $|\pi_A C_n \cap V(W)| = 1$ ou encore $|\pi_A C_n| = |\mathfrak{S}|$.

3. Les foncteurs \tilde{R} et P . Nous allons prouver dans ce paragraphe, toute comme l'a fait Sabidussi [4] pour Q , que les correspondances \tilde{R} et P sont des foncteurs entre la catégorie des couples (X, A) munis de certaines applications que nous allons définir, et celle des treillis complets avec les applications préservant les infima.

3.1. Nous allons tout d'abord rappeler brièvement les définitions et propriétés élémentaires des contractions données dans [4].

3.1.1 *Définition*. Etant donné deux graphes X et Y , une application $\varphi: V(X) \rightarrow V(Y)$ est une *contraction faible* si et seulement si $[x, y] \in E(X)$ implique $\varphi x = \varphi y$ ou $[\varphi x, \varphi y] \in E(Y)$.

Notation. Soient $\varphi: V(X) \rightarrow V(Y)$ une contraction faible, et $X' \subset X$. On définit $\varphi X'$ comme le sous-graphe de Y tel que

$$\begin{aligned} V(\varphi X') &= \varphi V(X') \\ E(\varphi X') &= \{[\varphi x, \varphi y] \mid [x, y] \in E(X') \text{ et } \varphi x \neq \varphi y\}. \end{aligned}$$

De même, si $Y' \subset Y$, on note $\varphi^{-1} Y'$ la restriction de X à l'ensemble $\varphi^{-1} V(Y')$.

Propriété. Il est évident que si X' est connexe il en est de même de $\varphi X'$.

3.1.2 *Définition*. Etant donné deux graphes X et Y , une application $\varphi: V(X) \rightarrow V(Y)$ est une *contraction* si et seulement si (i) φ est une contraction faible et (ii) pour tout $y \in \varphi V(X)$ le graphe $\varphi^{-1}(y)$ est connexe.

Propriété. On en déduit aisément que si Y' est un sous-graphe connexe de φX , alors $\varphi^{-1} Y'$ est connexe.

3.2 *Définition*. Etant donné deux couples (X, A) et (Y, B) , une contraction faible (resp. une contraction) $\varphi: V(X) \rightarrow V(Y)$ telle que $\varphi A \subset B$ sera encore dite une *contraction faible* (resp. une *contraction*) de (X, A) dans (Y, B) , et on écrira $\varphi: (X, A) \rightarrow (Y, B)$.

Une contraction faible $\varphi: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ sera dite *surjective* si et seulement si $\varphi X = Y$ et $\varphi A = B$.

Il est évident que *les couples et les contractions faibles forment une catégorie* que l'on notera \mathbf{G}_{cf} .

Si $\varphi: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ est une contraction faible, on notera $\tilde{\varphi}$ l'application de $V(\tilde{X})$ dans $V(\tilde{Y})$ prolongeant φ et telle que $\tilde{\varphi} a = b$. Il est alors trivial que $\tilde{\varphi}$ est une contraction faible de (\tilde{X}, a) dans (\tilde{Y}, b) .

3.3. Soient (X, a) un couple avec $a \in V(X)$, et $Z \leq X$. Dans tout ce paragraphe, on notera Z^a la composante connexe de Z contenant a .

PROPOSITION. Si $\varphi: (X, a) \rightarrow (Y, b)$ est une contraction faible alors $R(\varphi): R(Y, b) \rightarrow R(X, a)$, $Z \mapsto (\varphi^{-1}Z)^a$ préserve les infima.

La preuve de cette proposition nécessite trois lemmes où l'application $R(\varphi)$ sera notée plus simplement Φ .

3.3.1 LEMME. Soit $Z \leq Y$. On a alors $\Phi Z = \Phi Z^b$.

Démonstration. Il suffit de montrer que $\varphi V(\Phi Z) \subset V(Z^b)$. Soit donc $x \in V(\Phi Z)$. Il existe alors un ax-chaîne $W = (x_0, \dots, x_n) \subset \Phi Z$, or φ étant une contraction faible, φW est connexe, donc il existe une $b\varphi x$ -chaîne $W' = (y_0, \dots, y_r) \subset \varphi W \subset Z$. Par suite $W' \subset Z^b$ ce qui prouve que $\varphi x \in V(Z^b)$.

3.3.2 COROLLAIRE. Soit $(Z_i)_{i \in I}$ une famille de $R(Y, b)$. On a :

$$\Phi \bigcap_{i \in I} Z_i = \Phi \bigwedge_{i \in I} Z_i.$$

C'est une conséquence triviale de 3.3.1 et du fait que $\bigwedge_{i \in I} Z_i = (\bigcap_{i \in I} Z_i)^b$.

3.3.3 LEMME. Si $(Z_i)_{i \in I}$ est une famille de restrictions de X , alors on a :

$$\bigwedge_{i \in I} Z_i = \bigwedge_{i \in I} Z_i^a.$$

On omettra la preuve qui revient tout simplement à vérifier l'inclusion $V(\bigwedge_{i \in I} Z_i) \subset V(\bigwedge_{i \in I} Z_i^a)$.

3.3.4 Démonstration (de la proposition 3.3). Soit $(Z_i)_{i \in I}$ une famille de $R(Y, b)$. On a évidemment $\varphi^{-1} \bigcap_{i \in I} Z_i = \bigcap_{i \in I} \varphi^{-1} Z_i$. donc d'après 3.3.2 et 3.3.3 :

$$\begin{aligned} \Phi \bigwedge_{i \in I} Z_i &= \Phi \bigcap_{i \in I} Z_i \\ &= (\varphi^{-1} \bigcap_{i \in I} Z_i)^a = (\bigcap_{i \in I} \varphi^{-1} Z_i)^a \\ &= \bigwedge_{i \in I} \varphi^{-1} Z_i = \bigwedge_{i \in I} \Phi Z_i. \end{aligned}$$

3.4 LEMME. Si $\varphi: (X, a) \rightarrow (Y, b)$ et $\psi: (Y, b) \rightarrow (Z, c)$ sont des contractions faibles alors $R(\psi \circ \varphi) = R(\varphi) \circ R(\psi)$.

Démonstration. Soit $G \in R(Z, c)$. On a :

$$\begin{aligned} R(\psi \circ \varphi)G &= ((\psi \circ \varphi)^{-1}G)^a = (\varphi^{-1} \circ \psi^{-1}G)^a \\ &= (\varphi^{-1}(\psi^{-1}G))^a = (\varphi^{-1}(\psi^{-1}G)^b)^a \quad (\text{d'après 3.3.1}) \\ &= R(\varphi) (\psi^{-1}G)^b = R(\varphi) \circ R(\psi)G. \end{aligned}$$

3.5. La proposition 3.3 et le lemme 3.4 se résument dans la 1ère partie du théorème suivant, la 2ième étant une conséquence immédiate de la 1ère et de la remarque 1.6.2.

THEOREME. Les données pour tout $(X, A) \in \text{Ob } \mathbf{G}_{\text{ct}}$ et tout $\varphi \in \text{Mor } \mathbf{G}_{\text{ct}}$

des applications

$$(X, A) \mapsto \tilde{R}(X, A) \text{ et } \varphi \mapsto \tilde{R}(\varphi) = R(\tilde{\varphi})$$

$$(\text{resp. } (X, A) \mapsto P(X, A)) \text{ et } \varphi \mapsto P(\varphi) = \gamma_A \circ \tilde{R}(\varphi) \circ \gamma_B^{-1})$$

forment un foncteur contravariant noté \tilde{R} (resp. P) de la catégorie \mathbf{G}_{et} dans la catégorie \mathbf{T}_{int} des treillis complets avec les applications préservant les infima.

D'après la définition du foncteur P , il est clair que la famille $\gamma = (\gamma_A)$ est une équivalence naturelle entre R et P . Nous pouvons donc travailler indifféremment avec l'un ou l'autre, mais par la suite nous donnerons la préférence au foncteur P dans l'énoncé des propositions.

3.6. Quant aux supréma, une conséquence triviale du théorème précédent est, que pour toute famille $(C_i)_{i \in I}$ de $P(Y, B)$ et toute contraction faible $\varphi: (X, A) \rightarrow (Y, B)$, on a

$$\bigvee_{i \in I} P(\varphi) Z_i \leq_A P(\varphi) \bigvee_{i \in I} Z_i,$$

la réciproque étant fautive en général comme le montre l'exemple suivant (Fig. 4 et 5).

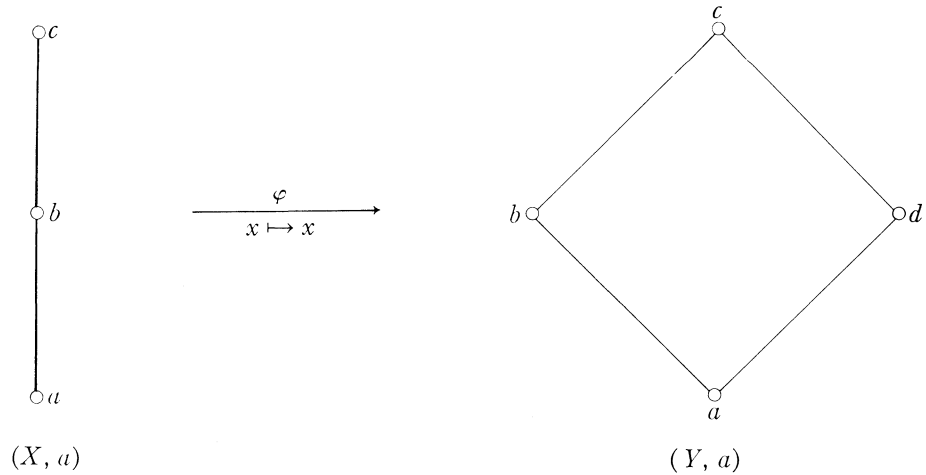


FIGURE 4

En effet, on a ici $P(\varphi): \{b\} \mapsto \{b\}, \{c, d\} \mapsto \{c\}, \emptyset \mapsto \emptyset$, or, si dans $P(Y, a): \{b\} \wedge \{c, d\} = \emptyset$, par contre dans $P(X, a): \{b\} \wedge \{c\} = \{c\}$.

3.7. On a par contre le théorème suivant:

THEOREME. Si $\varphi: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ est une contraction surjective alors $P(\varphi)$ est un monomorphisme de treillis.

C'est une conséquence immédiate de la définition de P et des lemmes suivants:

3.7.1 **LEMME.** Si $\varphi: (X, a) \rightarrow (Y, b)$ est une contraction surjective alors $(\varphi^{-1}Z)^a = \varphi^{-1}Z$ pour tout $Z \in R(Y, b)$.

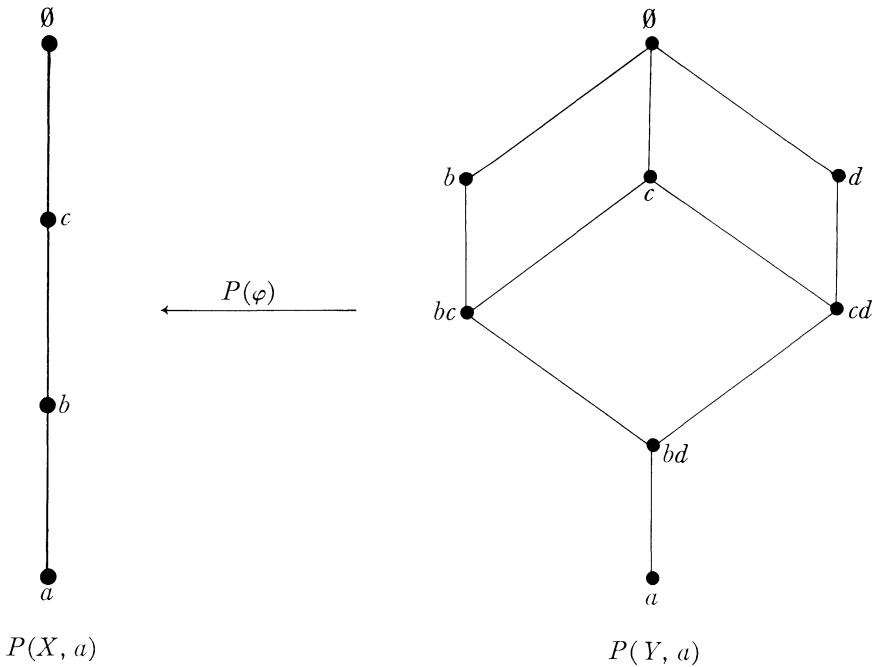


FIGURE 5

Démonstration. φ étant surjectif on a $Z \subset \varphi X$, donc φ étant une contraction, $\varphi^{-1}Z$ est connexe, d'où le résultat puisque $a \in \varphi^{-1}b \subset V(\varphi^{-1}Z)$.

3.7.2 LEMME. Si $\varphi: (X, a) \rightarrow (Y, b)$ est une contraction surjective alors $\Phi = R(\varphi)$ est un monomorphisme de treillis.

Démonstration. (i) Φ préserve les supréma. En effet φ étant une contraction faible on a évidemment $\varphi^{-1} \cup_{i \in I} Z_i = \cup_{i \in I} \varphi^{-1}Z_i$ pour toute famille $(Z_i)_{i \in I}$ de $R(Y, b)$, et par suite on voit aisément d'après la définition du suprémum que $\varphi^{-1} \bigvee_{i \in I} Z_i = \bigvee_{i \in I} \varphi^{-1}Z_i$, ce qui, si φ est une contraction surjective, devient d'après le lemme précédent:

$$\Phi \bigvee_{i \in I} Z_i = \bigvee_{i \in I} \Phi Z_i.$$

(ii) Que Φ soit injectif provient tout simplement du fait que $\Phi = \varphi^{-1}$.

3.8. Le théorème suivant nous permettra d'exprimer plus simplement l'image d'une contraction faible par le foncteur P sans avoir à utiliser \bar{R} .

THEOREME. Si $\varphi: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ est une contraction faible alors on a $P(\varphi) = \pi_A \circ \varphi^{-1}$.

La preuve exige un lemme.

3.8.1 LEMME. Si $\varphi: (X, a) \rightarrow (Y, b)$ est une contraction faible, alors pour tout $C \subset V(Y)$ on a $\Phi Y_{bC^-} = X_{a\varphi^{-1}C^-}$ où $\Phi = R(\varphi)$.

Démonstration. (i) Montrons tout d'abord que $X_{a\varphi^{-1}C^-} \subset \Phi Y_{bC^-}$ ou plutôt que $\varphi X_{a\varphi^{-1}C^-} \subset Y_{bC^-}$.

Soit $x \in V(X_{a\varphi^{-1}C^-})$. Il existe une ax -chaîne $W \in \mathfrak{B}_{a\varphi^{-1}C^-}$. Comme $V(W) \cap \varphi^{-1}C = \emptyset$ on a $V(\varphi W) \cap C = \emptyset$, et comme, φ étant une contraction faible, φW est connexe, il contient donc une $b\varphi x$ -chaîne $W' \in \mathfrak{B}_{bC^-}$. Par suite $\varphi x \in V(Y_{bC^-})$ ce qui prouve l'assertion puisque Y_{bC^-} est une restriction de Y .

(ii) On a donc $X_{a\varphi^{-1}C^-} \subset \Phi Y_{bC^-}$. Montrons qu'on a l'égalité. Comme ce sont des restrictions de X , il suffit de le prouver pour leurs ensembles de sommets.

Supposons qu'on ait l'inclusion stricte et soit $x \in V(\Phi Y_{bC^-}) - V(X_{a\varphi^{-1}C^-})$. Il existe alors une ax -chaîne $W \subset \Phi Y_{bC^-} \subset \varphi^{-1}Y_{bC^-}$, et $W \notin \mathfrak{B}_{a\varphi^{-1}C^-}$ ce qui implique que $V(W) \cap \varphi^{-1}C \neq \emptyset$ i.e. $V(\varphi W) \cap C \neq \emptyset$ contrairement au fait que $\varphi W \subset Y_{bC^-}$.

3.8.2 *Démonstration* (du théorème 3.8). Soit $C \in P(Y, B)$. On a

$$\begin{aligned} P(\varphi)C &= \gamma_A(\tilde{R}(\varphi)(\gamma_B^{-1}C)) = \gamma_A(\tilde{R}(\varphi)Y_{bC^-}) \\ &= \gamma_A X_{a\varphi^{-1}C^-} \quad (\text{d'après le lemme 3.8.1}) \\ &= \mathfrak{C}X_{a\varphi^{-1}C^-} = \pi_A(\varphi^{-1}C) \quad (\text{d'après 1.6}). \end{aligned}$$

3.9 THEOREME. Soit $\varphi: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ une contraction faible injective. Si, pour tout cycle C de \tilde{X}_A et tout $x \in V(C)$, toute $\tilde{B}\varphi x$ - chaîne de la restriction de \tilde{Y}_B à $\tilde{\varphi}\tilde{X}_A$ est l'image par $\tilde{\varphi}$ d'une $\tilde{A}x$ - chaîne de \tilde{X}_A , alors $P(\varphi)$ est une rétraction de $P(Y, B)$ sur $P(X, A)$.

Démonstration. Prouvons plutôt que $\tilde{R}(\varphi)$ est une rétraction de $\tilde{R}(Y, B)$ sur $\tilde{R}(X, A)$.

(i) Appelons ψ l'application de $\tilde{R}(X, A)$ dans $\tilde{R}(Y, B)$ qui à tout $Z \in \tilde{R}(X, A)$ fait correspondre la restriction de \tilde{Y}_B à $V(\tilde{\varphi}Z)$. φ étant injectif il en est de même de ψ . ψ préserve évidemment les supréma, montrons qu'il en est de même des infima.

Soit $(Z_i)_{i \in I}$ une famille de $\tilde{R}(X, A)$. On a les inclusions évidentes $\psi(\bigwedge_{i \in I} Z_i) \subset \bigwedge_{i \in I} \psi Z_i \subset \bigcap_{i \in I} \psi Z_i = \psi \bigcap_{i \in I} Z_i$. Prouvons par l'absurde que la première inclusion est une égalité, et soit x tel que $x \in V(\bigwedge_{i \in I} \psi Z_i - \psi \bigwedge_{i \in I} Z_i)$. On a $x \in V(\bigcap_{i \in I} Z_i - \bigwedge_{i \in I} Z_i)$. Il existe donc $i, j \in I$ avec $i \neq j$, et deux $\tilde{A}x$ - chaînes distinctes $W_i \subset Z_i - Z_j$ et $W_j \subset Z_j - Z_i$. $W_i \cup W_j$ contient donc un cycle C passant par x . D'autre part $\varphi x \in V(\bigwedge \psi Z_i)$, il existe donc une $\tilde{B}\varphi x$ - chaîne $W \subset \bigcap_{i \in I} \psi Z_i = \psi \bigcap_{i \in I} Z_i$. Par suite, d'après l'hypothèse du théorème, il existe une $\tilde{A}x$ - chaîne W' telle que $\tilde{\varphi}W' = W$, et qui, d'après ce qui précède, est contenue dans $\bigcap_{i \in I} Z_i$, et par suite dans $\bigwedge Z_i$, contrairement à la définition de x .

(ii) ψ est un inverse à droite de $\tilde{R}(\varphi)$. En effet, soit $Z \in \tilde{R}(X, A)$, on a :

$$\tilde{R}(\varphi)(\psi Z) = (\varphi^{-1} \psi Z)^{\bar{A}} = (\varphi^{-1} \varphi Z)^{\bar{A}} = Z$$

car φ est injectif.

D'où le résultat.

On obtient trivialement la conséquence suivante:

3.10 COROLLAIRE. *Si $\varphi: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ est une contraction faible injective, alors $P(\varphi)$ est une rétraction de $P(Y, B)$ sur $P(X, A)$ si l'on a l'une ou l'autre des conditions suivantes:*

- (i) φ est pleine (i.e. $\varphi X \leq Y$);
- (ii) \tilde{X}_A est acyclique.

L'inverse à droite de $P(\varphi)$ est évidemment l'application $\tilde{\gamma}_B \circ \psi \circ \tilde{\gamma}_A^{-1}$ où ψ est l'application définie précédemment. On peut préciser cet inverse dans le cas de la condition (i). En effet si l'on pose $F = C(\tilde{\varphi}\tilde{X})$, on a, pour tout $D \subset V(X)$, $\tilde{\varphi}\tilde{X}_{\bar{A}D}^- = \tilde{Y}_{\tilde{B},(\varphi D) \cup F}^-$. Ce qui fait que $\tilde{\gamma}_B \circ \psi \circ \tilde{\gamma}_A^{-1}$ est l'application $D \mapsto (\varphi D) \wedge F$.

4. π -ÉQUIVALENCE. Nous allons, dans ce paragraphe, étudier la classe des objets de \mathbf{G}_{ct} admettant le même treillis de séparation.

4.1 Définition. Soient $(X, A) \in \text{Ob } \mathbf{G}_{ct}$ et $x, y \in V(X)$. L'arête $[x, y]$ est dite *A-inessentielle* si et seulement si $\pi_a V(x; \tilde{X}) = \pi_a V(y; \tilde{X})$ (i.e. si et seulement si $V(x; \tilde{X}) \cap V(y; \tilde{X}) \leq_a \{x, y\}$). Dans le cas contraire $[x, y]$ est dite *A-essentielle*.

On remarque que les arêtes de la restriction de X à A sont toutes *A-inessentielles*.

D'autre part, si $x, y \notin A$ alors, d'après 1.6.4 $[x, y]$ est *A-inessentielle* si et seulement si $\pi_A V(x; X) = \pi_A V(y; X)$.

Dans l'exemple de la Figure 6, les arêtes $[x, y]$ et $[x', y']$ sont *a-inessentielles*.

4.2 Définition. Deux couples (X, A) et (Y, B) sont dits *π -équivalents*, et on écrit $(X, A) \sim_\pi (Y, B)$, si et seulement si $V(X) = V(Y)$, $A = B$ et X et Y ont le même ensemble d'arêtes *A-essentielles*.

Cette relation est évidemment une équivalence, d'où le nom.

4.3. La classe d'équivalence $[X, A]$ d'un couple (X, A) ordonnée par la relation " $(X_1, A) \leq (X_2, A)$ si et seulement si $(X_1 \subset X_2)$ " est évidemment un treillis complet. Nous poserons

$$({}_A X, A) = \sup [X, A] \quad \text{et} \quad ({}^A X, A) = \inf [X, A]$$

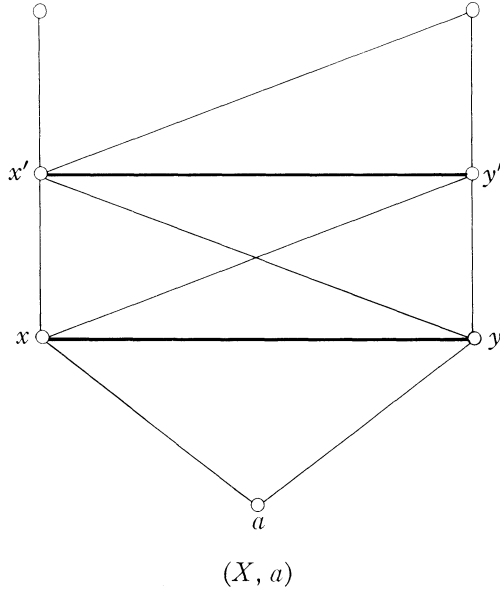


FIGURE 6

et nous dirons que X est A -discret (resp. A -complet) si et seulement si $X = {}^A X$ (resp. $X = {}_A X$), c'est-à-dire si et seulement si X ne possède aucune arête A -inessentielle (resp. X possède toutes les arêtes A -inessentielles possibles, i.e. pour tout $e \in E(-X)$, e est une arête A -essentielle de $X \cup (e)$).

4.4 On a évidemment le résultat suivant:

PROPOSITION. $(X, A) \sim_\pi (Y, B)$ si et seulement si ${}^A X = {}^B X$ et $A = B$.

4.5 Nous allons énoncer maintenant le principal théorème de ce paragraphe, dont la démonstration nécessite de nombreux résultats.

THEOREME. $(X, A) \sim_\pi (Y, B)$ si et seulement si $P(X, A) = P(X, B)$.

4.6 La nécessité est une conséquence triviale de 4.4 et du lemme suivant:

LEMME. Etant donné (X, A) on a $P({}^A X, A) = P(X, A)$.

Démonstration. (i) Soit $B \in \mathfrak{F}_{AX} = \mathfrak{F}_X$. On a $E({}^A X) \subset E(X)$ donc ${}^A \mathfrak{W}_{AB} \subset \mathfrak{W}_{AB}$, et ${}^A X_{AB} \subset X_{AB}$ et par conséquent $V({}^A X_{AB}) \subset V(X_{AB})$.

Montrons qu'on a l'égalité. Soit $x \in V(X_{AB})$. Il existe une Ax -chaîne $W = (x_0, \dots, x_n) \in \mathfrak{W}_{AB}$. Si $W \notin {}^A \mathfrak{W}_{AB}$ c'est que $W \not\subset {}^A X$. i.e. il existe des arêtes de W n'appartenant pas à $E({}^A X)$. On peut supposer que $V(W) \cap A = \{x_0\}$.

Pour tout $i \leq n$ on construit une Ax_i -chaîne $W_i \in {}^A \mathfrak{W}_{AB}$ de la manière

suivante. Supposons W_{i-1} construite, alors:

- (1) si $[x_{i-1}, x_i] \in E({}^A X)$ on pose $W_i = W_{i-1} \cup ([x_{i-1}, x_i])$;
- (2) si $[x_{i-1}, x_i] \notin E({}^A X)$ et si $W_{i-1} = (y_0, \dots, y_p)$ alors, d'après 4.1, il existe $j < p$ tel que $y_j \in V(x_{i-1}; {}^A X) \cap V(x_i; {}^A X)$, on pose alors $W_i = (y_0, \dots, y_j, x_i)$.

Comme $V(W_i) \subset V(W)$ et $E(W_i) \subset E({}^A X)$ on a bien $W_i = {}^A \mathfrak{B}_{AB}$. Donc W_n est une Ax -chaîne de ${}^A \mathfrak{B}_{AB}$, et par suite $x \in V({}^A X_{AB})$. Finalement on a bien l'égalité $V({}^A X_{AB}) = V(X_{AB})$.

(ii) On a alors d'après la définition des ensembles A -primitifs: $B \in P(X, A)$ si et seulement si $B \subset V(X_{AB}) = V({}^A X_{AB})$ si et seulement si $B \in P({}^A X, A)$.

La figure 7 nous montre la classe de (X, a) modulo la π -équivalence, ainsi que leur treillis de séparation commun.

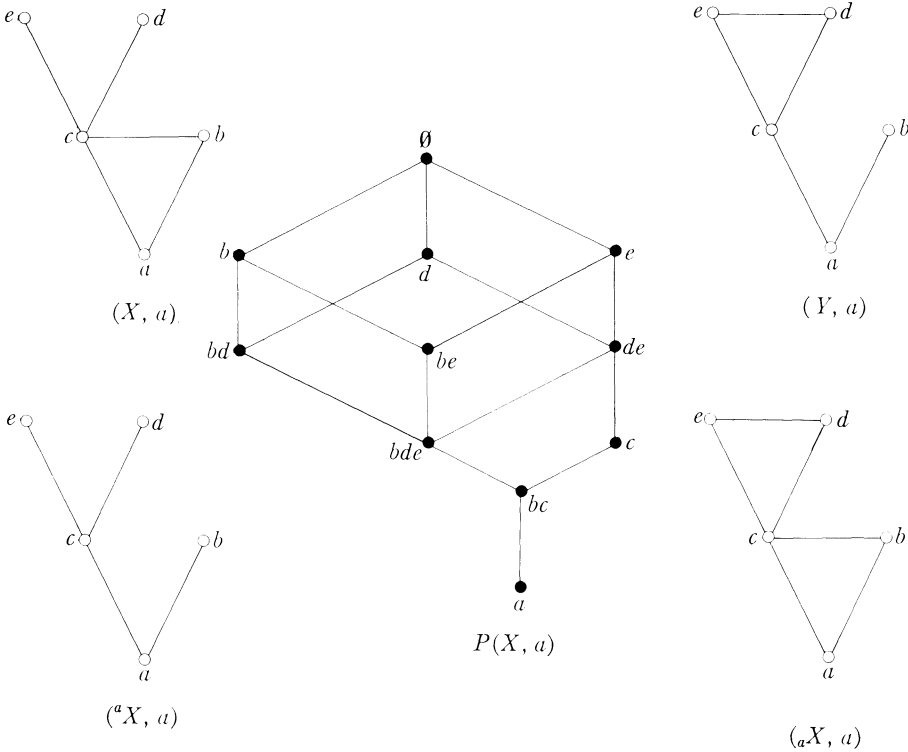


FIGURE 7

4.7. Dans cette partie nous allons caractériser le couple (X, A) à l'aide de son treillis de séparation $P(X, A)$, et nous en profiterons pour déterminer certaines propriétés de ces treillis.

Soient donc $(X, A) \in \text{Ob } \mathbf{G}_{\text{ct}}$ et $P(X, A)$ son treillis de séparation.

4.7.1 PROPOSITION. On a $a \wedge P(X, A) = A$, et $a \vee P(X, A) = \emptyset$.

Résultat évident.

4.7.2 LEMME. Soit $B \subset V(X)$. On a $\pi_A B = \bigwedge_{x \in B} \{x\}$.

Démonstration. On a d'après 1.6.5: $\bigwedge_{x \in B} \{x\} = \pi_A \bigcup_{x \in B} \{x\} = \pi_A B$.

On en déduit immédiatement les trois résultats suivants:

4.7.3 COROLLAIRE. $B \in P(X, A)$ si et seulement si $B = \bigwedge_{x \in B} \{x\}$.

4.7.4 COROLLAIRE. L'ensemble $\{\{x\} | x \in V(X)\} \cup \{\emptyset\}$ est l'ensemble des éléments complètement irréductibles pour l'infimum de $P(X, A)$.

4.7.5 THEOREME. Le treillis complet $P(X, A)$ est complètement engendré de manière unique par ses éléments complètement irréductibles pour l'infimum, i.e. tout élément de $P(X, A)$ admet une décomposition irréductible non redondante unique en infimum.

Par la suite pour $B \subset V(X)$ on posera $B^\# = \{\{x\} | x \in \bar{B}\} \cup \{\emptyset\}$. On a évidemment $\pi_A B = \bigwedge B^\#$.

4.7.6 Convention. Etant donné un ensemble partiellement ordonné (A, \leq) et deux éléments $x, y \in A$, nous dirons que y couvre x , et nous noterons $x < \cdot y$, si et seulement si $x < y$ et s'il n'existe aucun élément $z \in A$ avec $x < z < y$.

De plus, étant donné un élément $x \in A$, nous appellerons voisinage supérieur de x l'ensemble noté $U_x = \{y \in A | x < \cdot y\}$.

4.7.7 PROPOSITION. Pour tout $B \in P(X, A)$ on a

$$U_B = \{V(x; X) - V(X_{AB})\} \cup (B - \{x\}) | x \in B\}.$$

Démonstration. C'est évident car pour tout $x \in B$ on a $(V(x; X) - V(X_{AB})) \cup (B - \{x\}) = \mathfrak{C}(X_{aB^-} \vee (x))$ et $X_{aB^-} < \cdot X_{aB^-} \vee (x)$.

4.7.8 COROLLAIRE. Pour tout $B \in P(X, A)$ on a $|B| = |U_B|$.

Evident.

4.7.9 COROLLAIRE. Pour tout $B \in P(X, A)$ on a

$$U_B = \{\bigwedge (B^\# - \{\{x\}\}) | x \in B\}$$

et de plus pour tout $x \in B$, $(\bigwedge (B^\# - \{\{x\}\}))^\# = B^\# - \{\{x\}\}$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la démonstration de 4.7.7 et de la définition de la fermeture \bar{B} de B qui fait que pour tout $x \in B$:

$$(\mathfrak{C}(X_{aB^-} \vee (x)))^\# = (\mathfrak{C} X_{aB^-})^\# - \{\{x\}\}.$$

Ce résultat nous sera utile ultérieurement.

4.7.10 PROPOSITION. $[x_0, x_1] \in E(A X)$ si et seulement s'il existe $B_0, B_1 \in P(X, A)$ avec $B_i < \cdot_A B_{1-i}$ et $x_i \in B_i - B_{1-i}$ pour $i \in \{0, 1\}$.

Démonstration. (i) La suffisance est une conséquence de 4.7.7. En effet si $B_0 < \cdot_A B_1$ et si $x_0 \in B_0 - B_1$ alors c'est que $B_1 = (V(x_0; X) - V(X_{AB_0})) \cup (B_0 - \{x_0\})$, d'où si $x_1 \in B_1 - B_0$ on a obligatoirement $x_1 \in V(x_0; X)$. De

plus $[x_0, x_1]$ est A -essentielle, sinon, comme $x_1 \in B_1$ et $B_0 < \cdot_A B_1$, on aurait $B_0 \supset \pi_a V(x_1; \bar{X}) = \pi_a V(x_0; \bar{X})$ et par suite $x_0 \notin B_0$ puisque B_0 est A -primitif; ce qui contredirait l'hypothèse.

(ii) Réciproquement soit $[x_0, x_1] \in E(^A X)$. Cette arête est A -essentielle, il existe donc $i \in \{0, 1\}$ tel que $x_i \in \pi_a V(x_{1-i}; X)$. Supposons par exemple $i = 0$, et posons $B_0 = \pi_a V(x_1; X)$. Soit alors $B_1 = (V(x_0; X) - V(X_{AB_0})) \cup (B_0 - \{x_0\})$, on a $B_0 < \cdot_A B_1$, $x_0 \notin B_1$ et $x_1 \in B_1$.

4.8 *Démonstration* (du théorème 4.5). Il nous reste à prouver la suffisance.

Soient (X, A) et $((Y, B))$ tels que $P(X, A) = P(Y, B)$. D'après 4.7.4 on a $V(X) = V(Y)$ et d'après 4.7.1 on a $A = B$. De plus d'après 4.7.10 on a $E(^A X) = E(^B Y)$. D'où finalement d'après 4.4: $(X, A) \sim_\pi (Y, B)$.

4.9. COROLLAIRE. Soient (X, A) et (Y, B) deux objets de \mathbf{G}_{cf} . $P(X, A)$ est isomorphe à $P(Y, B)$ si et seulement si l existe une contraction faible bijective de $(^A X, A)$ sur $(^B Y, B)$.

C'est une conséquence immédiate du théorème 4.5 et du fait que les contractions faibles bijectives sont les isomorphismes de la catégorie \mathbf{G}_{cf} .

5. Propriétés caractéristiques des treillis de séparation. Par treillis de séparation nous entendons tout treillis T isomorphe à un treillis de la forme $P(X, A)$ où $(X, A) \in \text{Ob } \mathbf{G}_{cf}$.

5.1. Soit (T, \leq) un treillis vérifiant les propriétés suivantes:

TS1. T est complet.

TS2. T est engendré de manière unique par ses éléments complètement irréductibles pour l'infimum, i.e. si on note T_0 l'ensemble des éléments de T complètement irréductibles pour l'infimum, alors pour tout $x \in T$ si $[x] = \{F \subset T_0 \mid \wedge F = x\}$ on a $[x] \neq \emptyset$ et $([x], \cap, \cup)$ est un treillis complet, en particulier $\cap[x]$ est l'unique décomposition non redondante complètement irréductible de x .

5.2 Considérons l'application

$$T \rightarrow \hat{T}, \quad x \mapsto \hat{x} = \cap [x] - \{\vee T\} = \begin{cases} \cap [x] & \text{si } x \neq \vee T \\ \emptyset & \text{si } x = \vee T \end{cases}$$

et ordonnons \hat{T} en posant $\hat{x} \leq \hat{y}$ si et seulement si $x \leq y$. Alors l'application $x \mapsto \hat{x}$ est un isomorphisme du treillis (\hat{T}, \leq) sur le treillis (T, \leq) .

Par la suite on notera par des lettres majuscules (resp. minuscules) les éléments de \hat{T} (resp. de $T_0 - \{\vee T\}$). De plus si $B \in \hat{T}$ on posera $B^\# = \{C \in \hat{T}_0 \mid B \leq C\}$ et $\bar{B} = \cup B^\#$, et si $\mathfrak{B} \subset \hat{T}$, $\mathfrak{B}^\# = \{B^\# \mid B \in \mathfrak{B}\}$.

5.3. A T on associe un objet (X, A) de \mathbf{G}_{cf} de la manière suivante:

$A = \wedge \hat{T}$ et X est le graphe tel que:

(i) $V(X) = T_0 - \{\vee T\}$

(ii) $[x_0, x_1] \in E(X)$ si et seulement s'il existe $B_0, B_1 \in \hat{T}$ avec $B_i < \cdot B_{1-i}$ et $x_i \in B_i - B_{1-i}$ pour tout $i \in \{0, 1\}$.

On pose alors $(X, A) = G(T)$.

5.4. On a évidemment le résultat suivant:

PROPOSITION. T est un treillis de séparation si et seulement si $\hat{T} = P(G(T))$.

Nous allons donc établir les propriétés que doit vérifier \hat{T} et par suite T , pour qu'il en soit ainsi.

Etudions d'abord certaines propriétés générales de \hat{T} .

5.5 PROPOSITION. Pour tout $\mathfrak{B} \subset \hat{T}$ on a

- (i) $(\vee \mathfrak{B})^\# = \bigcap \mathfrak{B}^\#$
- (ii) $\bigcup \mathfrak{B}^\# \subset (\bigwedge \mathfrak{B}^\#)$.

Démonstration. (i) $C \in \bigcap \mathfrak{B}^\# \Leftrightarrow C \in B^\#$ pour tout $B \in \mathfrak{B}$
 $\Leftrightarrow C \geq \vee \mathfrak{B}$
 $\Leftrightarrow C \in (\vee \mathfrak{B})^\#$.

- (ii) $C \in \bigcup \mathfrak{B}^\# \Rightarrow B \leq C$ pour un certain $B \in \mathfrak{B}$
 $\Rightarrow \bigwedge \mathfrak{B} \leq C$
 $\Rightarrow C \in (\bigwedge \mathfrak{B}^\#)$.

5.6 COROLLAIRE. $B \leq C$ si et seulement si $B^\# \supset C^\#$.

Démonstration. $B \leq C \Leftrightarrow C = B \vee C$
 $\Leftrightarrow C^\# = (B \vee C)^\# = B^\# \cap C^\#$ (d'après 5.5 (i))
 $\Leftrightarrow C^\# \subset B^\#$.

5.7 PROPOSITION. Si $B \in \hat{T}$ et $C \subset B$ alors $C \in \hat{T}$ et $B \leq C$.

C'est trivial d'après l'unicité de la décomposition de B .

5.8 PROPOSITION. Pour tout $B \in \hat{T}$ on a

$$U_B = \{ \bigwedge (B^\# - \{\{x\}\}) \mid x \in B \}$$

et de plus pour tout $x \in B$:

$$(\bigwedge (B^\# - \{\{x\}\}))^\# = B^\# - \{\{x\}\}.$$

Démonstration. La première partie est une conséquence immédiate de l'axiome TS2 et du Corollaire 5.6.

Quant à la deuxième partie on a évidemment

$$B^\# - \{\{x\}\} \subset (\bigwedge (B^\# - \{\{x\}\}))^\#.$$

Prouvons la réciproque. Soit $\{y\} \in (\bigwedge (B^\# - \{\{x\}\}))^\#$. On a $y \neq x$ d'après TS2, et de plus:

$$\begin{aligned} B \wedge \{y\} &= \bigwedge B^\# \wedge \{y\} \\ &= \bigwedge (B^\# - \{\{x\}\}) \wedge \{x\} \wedge \{y\} \\ &= \bigwedge (B^\# - \{\{x\}\}) \wedge \{x\} \\ &= B. \end{aligned}$$

Donc $\{y\} \in B^\# - \{\{x\}\}$.

5.9 *Définition.* On dira qu'un treillis T vérifie la propriété de la chaîne maximale si et seulement si pour tous $x, y \in T$ avec $x < y$, il existe une xy -chaîne maximale (pour l'inclusion) i.e. il existe (x_0, \dots, x_α) avec $x_0 = x, x_\alpha = y$ et $x_i < \cdot x_{i+1}$ pour tout $i \in \alpha$.

C'est équivalent à dire que, pour tous $x < y$, il existe z tel que $x < \cdot z \leq y$.

5.10. PROPOSITION. \dot{T} vérifie la propriété de la chaîne maximale.

Démonstration. Soit $B < C$, alors d'après 5.6 $C^\# \subset B^\#$, et de plus $B \subset \bar{C}$ sinon on aurait $C \leq B$. Soit $x \in B - \bar{C}$, on a $C^\# \subset B^\# - \{\{x\}\}$, et par suite $B < \cdot \wedge (B^\# - \{\{x\}\}) \leq C$.

5.11 PROPOSITION. Soient $B \leq C \leq \{x\}$, alors $\wedge (B^\# - \{\{x\}\}) \leq \wedge (C^\# - \{\{x\}\})$.

Démonstration. $B \leq C \leq \{x\} \Rightarrow \{x\} \in C^\# \subset B^\# \Rightarrow C^\# - \{\{x\}\} \subset B^\# - \{\{x\}\} \Rightarrow \wedge (C^\# - \{\{x\}\}) \geq \wedge (B^\# - \{\{x\}\})$.

5.12. COROLLAIRE. Soient $B \leq C \leq \{x\}$ alors $x \in B$ implique $x \in C$.

Démonstration. Supposons que $x \notin C$, alors $\wedge (B^\# - \{\{x\}\}) \leq \wedge (C^\# - \{\{x\}\}) \leq \{x\}$ contrairement à 5.8.

5.13. COROLLAIRE. Si $B \leq C$ alors pour tout $x \in B - C$ on a $C \not\leq \{x\}$.

C'est trivial d'après 5.12.

5.14. COROLLAIRE. Soient $B \leq C \leq \{y\}$, $x \in B \cap C$ et $y \notin B \cup C$. Alors $y \in \wedge (B^\# - \{\{x\}\})$ implique $y \in \wedge (C^\# - \{\{x\}\})$.

Démonstration. Posons $B' = \wedge (B^\# - \{\{x\}\})$ et $C' = \wedge (C^\# - \{\{x\}\})$. D'après 5.11, comme $B \leq C$ on a $B' \leq C'$. Supposons que $y \in B'$. On a $C \leq \{y\}$ donc $\{y\} \in C^\#$, or comme d'après 5.8, $C'^\# = C^\# - \{\{x\}\}$, on a aussi $\{y\} \in C'^\#$ puisque $y \neq x$, ce qui implique que $C' \leq \{y\}$. Par suite, d'après le corollaire 5.12 et l'hypothèse précédente on a bien $y \in C'$.

5.15. Nous allons pouvoir maintenant caractériser les treillis de séparation par un théorème, dans l'énoncé et la preuve duquel nous utiliserons la notation suivante:

Si $G(T) = (X, A)$ alors pour tout $x \in T_0$, on pose $V_x = V(x; X)$ et $V_x^* = \{y \in V_x \mid \forall B \in \dot{T}, y \in B \text{ et } B < \cdot \{x\} \Rightarrow x \in B\}$ c'est-à-dire $y \in V_x^*$ si et seulement si $y \in V_x$ et il n'existe pas $B_0 < \cdot B_1$ avec $y \in B_0 - B_1$ et $x \in B_1 - B_0$.

THEOREME. Soit T un treillis vérifiant TS1 et TS2. Si de plus \dot{T} vérifie les propriétés suivantes:

TS3. $\forall \mathfrak{B} \subset \cup \mathfrak{B}$ pour tout $\mathfrak{B} \subset \dot{T}$; et

TS4. pour tout $B \in \dot{T}$ et tout $x \in T_0 - B$, si $B < \{x\}$ alors $B \leq \{y\}$ pour tout $y \in V_x^*$; alors on a $\dot{T} = P(G(T))$.

Si $G(T) = (X, A)$ nous avons donc à prouver que:

- (i) $\dot{T}_0 \subset P(X, A)$ i.e. X est A -connexe (5.20);
- (ii) pour tous $B, C \in \dot{T}$ on a $B \leq C$ si et seulement si $B \leq_A C$, i.e. la restriction à \dot{T} du préordre \leq_A induit par A sur \mathfrak{B}_X est égale à l'ordre de \dot{T} (5.21);
- (iii) finalement $\dot{T} = P(X, A)$ (5.22).

Pour prouver (i) et (ii) et par suite (iii) puisque cette partie est une conséquence assez évidente de (ii), nous allons être obligés de montrer à l'aide des propriétés du treillis \dot{T} l'existence de chaînes de X reliant certains sommets de celui-ci, puisque aussi bien la connexité que le préordre \leq_A se définissent à l'aide de ce concept. D'où le besoin de montrer l'existence de chaînes maximales finies de \dot{T} , à partir desquelles se déduisent certaines chaînes de X (5.19).

5.16 LEMME. Soient $B \leq C \leq \{y\}$, $x \in B \cap C$ et $y \notin B \cup C$. Alors $y \in C' \Rightarrow y \in B'$ où $B' = \wedge (B^\# - \{\{x\}\})$ et $C' = \wedge (C^\# - \{\{x\}\})$.

C'est la réciproque du Corollaire 5.14.

Démonstration. D'après 5.11, comme $B \leq C$ on a $B' \leq C'$. D'autre part, comme $B' \not\leq C$ et $C < \cdot C'$ on a $C' = B' \vee C$. Or d'après TS3, $B' \vee C \subset B' \cup C$, et puisque par hypothèse $y \in C' - C$ on a forcément $y \in B'$.

5.17 LEMME. Si $B < \{x\}$ et $x \notin B$ alors $B \leq \{y\}$ pour tout $y \in V_x$.

Démonstration. C'est l'axiome TS4 si $y \in V_x^*$. Supposons donc que $y \in V_x - V_x^*$. Il existe donc $C_1 < \cdot C_2$ avec $y \in C_1 - C_2$ et $x \in C_2 - C_1$.

Supposons $B \not\leq \{y\}$. On a alors $y \notin B \vee C_1$ et de plus $B \vee C_1 \leq \{x\}$. Soit, d'après 5.10, (D_0, \dots, D_α) une chaîne maximale telle que $D_0 = C_1$ et $D_\alpha = B \vee C_1$. D'après 5.5 (i) il existe $\xi \in \alpha$ avec $y \in D_\xi - D_{\xi+1}$, donc d'après 5.16, comme $D_\xi < \{x\}$, si $x \notin D_\xi$ on a $x \in D_{\xi+1}$. et par suite $x \in B \vee C_1$. donc $x \in B \cup C_1$, d'après TS3, contrairement aux hypothèses.

5.18 Notation. Par la suite nous poserons, pour $B \in \dot{T}$ et $x \in T_0$, $B^x = \vee \{C \mid C \subset B \text{ et } C < \{x\}\}$. C'est-à-dire, comme $B^x \subset B$ d'après TS3, B^x est tout simplement la plus petite partie de B inférieure à $\{x\}$.

5.19 LEMME. Si $B < \{x\}$ et $x \notin B$ alors pour tout $y \in B^x$ il existe une chaîne maximale finie (B_0, \dots, B_n) avec $B_0 = B^x$ et $B_n \supset (B^x - \{y\}) \cup \{x\}$.

Démonstration. Soit $y \in B^x$. Posons $B_0 = B^x$ et $B_1 = \wedge (B_0^\# - \{\{y\}\})$. Puisque $B_0 < \{x\}$ on a évidemment $B_1 < \{x\}$. Il existe donc, d'après 5.10, une chaîne maximale $(C_\xi)_{\xi \in \alpha+1}$ telle que $C_0 = B_1$, et $x \in C_\xi$ si et seulement si $\xi = \alpha$. Choisissons cette chaîne de longueur minimale, et supposons qu'elle soit infinie.

Remarquons tout d'abord que α n'est pas limite, sinon on aurait $C_\alpha = \vee_{\xi \in \alpha} C_\xi \subset \cup_{\xi \in \alpha} C_\xi$ d'après TS3, et par suite $x \notin C_\alpha$.

Soit donc β le plus grand ordinal limite $< \alpha$. Posons $\alpha = \beta + n$ où $n \in \omega$ et soit (x_0, \dots, x_n) la suite définie de la manière suivante:

- (i) $x_n = x$ et $x_0 \in C_\beta$,
- (ii) pour tout $i < n$, $x_i \in C_{\beta+i} - C_{\beta+i+1}$ (i.e. $C_{\beta+i+1} = \bigwedge (C_{\beta+i} - \{\{x_i\}\})$).

Cette suite est de longueur n en raison de la minimalité de la longueur de $(C_\xi)_{\xi \in \alpha+1}$.

D'après TS3 on a $C_\beta = \bigvee_{\xi \in \beta} C_\xi \subset \bigcup_{\xi \in \beta} C_\xi$ donc il existe $\eta \in \beta$ tel que $x_0 \in C_\eta$. D'après le lemme 5.16 on peut construire une chaîne maximale finie (D_0, \dots, D_n) avec $D_0 = C_\eta$ et pour tout $i < n$ $D_{i+1} = \bigwedge (D_i^\# - \{\{x_i\}\})$.

Alors $(C_\xi)_{\xi \in \eta} \cup (D_\xi)_{\xi \in n+1}$ est une chaîne maximale avec $C_0 = B_1$ et $x \in D_n$ de longueur $\eta + n < \beta < \alpha$, contrairement à la minimalité de la longueur de $(C_\xi)_{\xi \in \alpha+1}$.

Par conséquent α est fini et la chaîne $(B_0, C_0, \dots, C_\alpha)$ vérifie la conclusion du lemme.

5.20. COROLLAIRE. Si $G(T) = (X, A)$ alors X est A -connexe.

Démonstration. Soit $x \in V(X) = T_0$. On a $A = \bigwedge T < \{x\}$. Donc d'après 5.19, pour tout $y \in A^x$ il existe une chaîne maximale finie (B_0, \dots, B_n) avec $B_0 = A^x$ et $B_n \supset (B^x - \{y\}) \cup \{x\}$. Supposons cette chaîne de longueur minimum et soit la suite (x_0, \dots, x_n) avec $x_0 = y$, $x_n = x$ et pour tout $i < n$, $x_i \in B_i - B_{i+1}$. D'après la définition de X , on a pour tout $i < n$, $x_i \in V(x_{i+1}; X)$, et par suite (x_0, \dots, x_n) est une Ax -chaîne de X .

5.21. LEMME. Si $G(T) = (X, A)$ alors pour tous $B, C \in \dot{T}$ on a $B \leqslant_A C$ si et seulement si $B \leqslant_A C$.

Démonstration. Il suffit de le prouver pour $C = \{x\}$, soit $B \leqslant \{x\}$ si et seulement si $B \leqslant_A \{x\}$.

(i) Soit $B \leqslant \{x\}$ et soit, d'après 5.20, $W = (x_0, \dots, x_n)$ une Ax -chaîne de X . D'après le lemme 5.17, pour tout $i \leqslant n$ tel que $x_i \notin B$ on a $B \leqslant \{x_i\}$ implique $B \leqslant \{x_{i-1}\}$ car $x_{i-1} \in V_{x_i}$. Donc si $x_i \notin B$ pour tout $i \leqslant n$ alors on prouve aisément par récurrence, puisque $B \leqslant \{x_n\}$, que $B \leqslant \{x_0\}$, ce qui est une contradiction d'après le Corollaire 5.13, puisque $A \leqslant B$ et $x_0 \in A - B$ comme on l'a supposé.

Par suite $V(W) \cap B \neq \emptyset$ et $B \leqslant_A \{x\}$.

(ii) Soit $B \leqslant_A \{x\}$. Si $x \in B$ on a évidemment $B \leqslant \{x\}$. Supposons donc que $x \notin B$. La preuve très longue nécessite plusieurs étapes.

(I) Soit $C < \{x\}$ avec $x \notin C$. On appellera (C, x) -chaîne toute chaîne maximale $\sigma = (C_\xi)_{\xi \in \alpha}$ définie de la manière suivante:

- a) $C_0 = C^x$ et posons $C^x - B = \{x_\xi | \xi \in \alpha\}$
- b) $C_{\xi+1} = (\bigwedge (C_\xi^\# - \{\{x_\xi\}\}))^x$;
- c) si ξ est limite: $C_\xi = (\bigvee_{\eta \in \xi} C_\eta)^x$.

Remarque 1. Si $x_\xi \notin V_x$ pour tout $\xi \in \alpha$, alors $C_\xi < \{x\}$ et $x \notin C_\xi$ quel que soit $\xi \in \alpha$.

Remarque 2. D'après 5.5 (i), pour tout $\xi \in \alpha$ on a $x_\xi \notin \bigvee_{\eta \in \alpha} C_\eta$.

(2) On définit une suite $(\sigma_n)_{n \in \omega}$ de manière que, pour tout $n \in \omega$, $\sigma_n = (C_\xi^n)_{\xi \in \alpha_n}$ soit une (C_0^n, x) -chaîne avec $C_0^0 = A^x$ et $C_0^{n+1} = \bigvee_{\xi \in \alpha_n} C_\xi^n$ pour tout $n > 0$. Posons alors

$$D = \bigvee \{ C_{\xi_n}^n \mid \xi_n \in \alpha_n \text{ et } n \in \omega \}.$$

(3) On a $D \subset B$. En effet supposons $D \not\subset B$ et soit $y \in D - B$. D'après TS3, $D \subset \bigcup \{ C_{\xi_n}^n \mid \xi_n \in \alpha_n \text{ et } n \in \omega \}$, donc il existe un entier n et $\xi \in \alpha_n$ tels que $y \in C_\xi^n$, or d'après la construction de la chaîne σ_{n+1} , si $y \notin B$ on a $y \notin \bar{E}$ où $E = \bigvee_{\eta \in \alpha_{n+1}} C_\eta^{n+1}$, d'où $y \notin \bar{D}$ contrairement à $y \in D$.

(4) On a $D < \{x\}$. En effet, soient $n \in \omega$ et $\xi_n \in \alpha_n$, et soit la suite $(x_{\xi_0}, \dots, x_{\xi_n})$ telle que pour $1 \leq i \leq n$, $x_{\xi_i} \in (\bigwedge (C_{\xi_i}^{i\#} - \{\{x_{\xi_{i-1}}\}\}))^x$.

D'après le lemme 5.19 il existe une chaîne maximale finie (D_0, \dots, D_p) avec $D_0 = (C_{\xi_n}^n)^x$ et $D_p \supset (D_0 - \{x_{\xi_n}\}) \cup \{x\}$. On peut considérer, sans restreindre la généralité, que la longueur de cette chaîne est minimum. Notons alors (y_0, \dots, y_p) la suite telle que $y_0 = x_{\xi_n}$, $y_p = x$ et pour $i < n$, $y_i \in D_i - D_{i+1}$.

Posons

$$z_i = \begin{cases} x_{\xi_i} & \text{si } i \leq n \\ y_j & \text{si } i = n + j \end{cases}$$

alors la suite (z_0, \dots, z_{n+p}) est telle que $z_0 \in A$, $z_{n+p} = x$ et $z_i \in V_{z_{i-1}}$ pour $1 \leq i \leq n + p$. C'est donc une Ax -chaîne du graphe X , et comme $B <_A \{x\}$ et $x \notin B$, il existe $i < n + p$ tel que $z_i \in B$. Mais d'après la définition de la chaîne σ_n , pour tout $n \in \omega$, $x_{\xi_n} \notin B$ et par suite $x_{\xi_n} \notin V_x$, d'où d'après la remarque 1 de (1) on prouve aisément par récurrence que $C_{\xi_n}^n < \{x\}$ avec $x \notin C_{\xi_n}^n$. En conséquence $D < \{x\}$ et $x \notin D$.

(5) Donc si $B \in \hat{T}$ on a $B \leq D < \{x\}$.

5.22 Démonstration (du théorème 5.15). Il suffit donc maintenant de prouver que $\hat{T} = P(X, A)$ où $(X, A) = G(T)$.

(i) $\hat{T} \subset P(X, A)$. En effet soit $B \in \hat{T}$. Supposons que $B \notin P(X, A)$ et soient $x \in B - \pi_A B$. On a $\pi_A B \subset B$ et $B \in \hat{T}$ donc $\pi_A B \in \hat{T}$. D'autre part $\pi_A B \leq_A \{x\}$, donc d'après le lemme 5.21 $\pi_A B \leq \{x\}$. Par suite $\pi_A B \wedge \{x\} = \pi_A B$ contrairement au fait que $x \in B - \pi_A B$ et à l'unicité de la décomposition de B .

(ii) $P(X, A) \subset \hat{T}$. En effet soit $B \in P(X, A)$ et supposons que $B \notin \hat{T}$. Si $B' = \bigwedge_{x \in B} \{x\}$, on a, pour tout $x \in B$, $B' \leq \{x\}$, donc, d'après le lemme 5.21, $B' \leq_A \{x\}$. Par suite on a $\pi_A B \subset B'$, or ce dernier ensemble est strictement contenu dans B d'après l'hypothèse, donc il en est de même de $\pi_A B$ contrairement au fait que $B \in P(X, A)$.

5.23 Remarque. On voit aisément que les axiomes TS3 et TS4 sont indépendants l'un de l'autre. En effet le treillis de la Figure 8 vérifie TS3 mais non

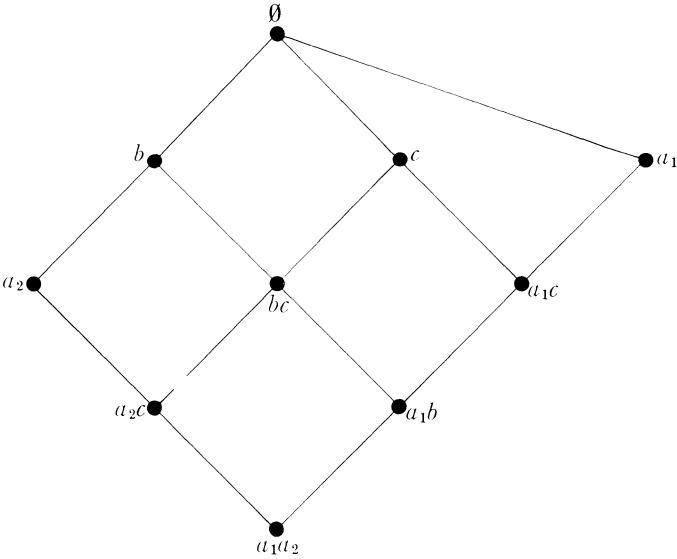


FIGURE 8

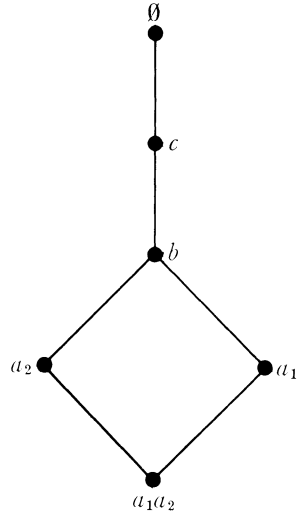


FIGURE 9

TS4, tandis que celui de la Figure 9 vérifie TS4 mais non TS3. Par ailleurs ces deux treillis vérifient TS1 et TS2.

6. Autres propriétés des treillis de séparation. Soient $(X, A) \in \text{Ob } \mathbf{G}_{ef}$ et $P(X, A)$ son treillis de séparation.

6.1 *Atomes.* D'après 4.7.7 $P(X, A)$ a $|A|$ atomes qui sont $V(x; X) \cup (A - \{x\})$ pour tout $x \in A$.

6.2 *Coatomes.*

6.2.1 *Définition.* Un sommet $x \in V(X) - A$ est une A -articulation si et seulement si $X - x$ n'est plus A -connexe, i.e. il existe $B \in \mathfrak{P}_X - \{\emptyset\}$ tel que $x <_A B$.

6.2.2 PROPOSITION. B est un coatome de $P(X, A)$ si et seulement s'il existe $x \in V(X)$ tel que $B = \{x\}$ et x n'est pas une A -articulation.

Démonstration. Si B est un coatome alors $U_B = \{\emptyset\}$, d'où $1 = |U_B| = |B|$ d'après 4.7.8, c'est-à-dire que $B = \{x\}$ pour un certain $x \in V(X)$; et d'autre part pour tout $C \subset V(X)$, $\{x\} <_A C$ implique $C = \emptyset$.

Réciproquement si x n'est pas une A -articulation alors $\{x\} <_A C$ implique $C = \emptyset$, i.e. $U_{\{x\}} = \{\emptyset\}$, donc x est un coatome.

6.2.3. Nous rappelons qu'un treillis complet T est dit *coatomique* si et seulement si pour chaque $x \in T$, $\wedge T < x < \vee T$, il existe une famille $\{y_i\}_{i \in I}$ de coatomes de T telle que $x = \wedge_{i \in I} y_i$.

6.2.4 THEOREME. $P(X, A)$ est coatomique si et seulement si X ne contient aucune A -articulation.

C'est une conséquence de 4.7.5 et 6.2.2.

6.2.5. On obtient aisément le résultat suivant:

COROLLAIRE. Un graphe X est 2-connexe si et seulement si pour tout $a \in V(X)$, $P(X, a)$ est coatomique.

6.3. Semimodularité.

6.3.1 PROPOSITION. $P(X, A)$ vérifie la condition de couverture inférieure, i.e. pour tous $B, C \in P(X, A)$ on a $B \wedge C < \cdot_A C$ implique $B < \cdot_A B \vee C$.

Démonstration. Supposons donc que $B \wedge C < \cdot_A C$ et posons pour simplifier l'écriture $(\tilde{X}_A, \tilde{A}) = (Y, a)$. On a alors $Y_{aB}^- \wedge Y_{aC}^- < \cdot Y_{aC}^-$, ce qui n'a lieu que si $Y_{aC}^- = (Y_{aB}^- \wedge Y_{aC}^-) \vee (x)$ pour un certain $x \in V(X)$. Et ceci, avec le fait que $Y_{aB}^- \wedge Y_{aC}^- \leq Y_{aB}^- \cap Y_{aC}^- \leq Y_{aC}^-$, implique que $Y_{aB}^- \wedge Y_{aC}^- = Y_{aB}^- \cap Y_{aC}^-$.

Par suite on a $Y_{aC}^- = (Y_{aB}^- \cap Y_{aC}^-) \vee (x)$, donc $Y_{aC}^- - Y_{aB}^- = (x)$ ou encore $Y_{aB}^- \vee (x) = Y_{aB}^- \vee Y_{aC}^-$, ce qui implique bien $Y_{aB}^- < \cdot Y_{aB}^- \vee Y_{aC}^-$, c'est-à-dire $B < \cdot_A B \vee C$.

6.3.2 THEOREME. $P(X, A)$ est semi-modulaire (selon la définition de semi-modularité donnée par Szász [5]).

C'est une conséquence immédiate de la dernière proposition et du fait que, d'après 5.10, $P(X, A)$ vérifie la propriété de la chaîne maximale.

6.4 Distributivité. Modularité.

6.4.1 LEMME. Soit X un graphe a -discret où $a \in V(X)$. Si X n'est pas acyclique alors il possède un cycle $C = (c_1, \dots, c_n)$ avec $n > 3$ tel que $\pi_a V(X) = \{c_1\}$ et tel que pour tout i , avec $1 < i < n$, $[c_1, c_i] \in E(X)$ implique $[c_1, c_{i+1}] \notin E(X)$.

Démonstration. Soit Γ l'ensemble des cycles de X , $m = \inf \{d(a; V(C)) \mid C \in \Gamma\}$, et C un cycle tel que $d(a; V(C)) = m$.

Posons $W = (x_0, \dots, x_m)$ une chaîne avec $x_0 = a$ et $x_m \in V(C)$, et notons $C = (c_1, \dots, c_n)$ avec $c_1 = x_m$. D'après la définition de m , pour tout $k < m$ et tout i , avec $1 \leq i \leq n$, il n'existe aucune $x_k x_i$ -chaîne. On a donc $\pi_a V(C) = \{c_1\}$.

D'autre part, pour $1 < i < n$, si $[c_1, c_i] \in E(X)$ et $[c_1, c_{i+1}] \in E(X)$ alors $[c_i, c_{i+1}]$ est a -inessentielle contrairement au fait que X soit a -discret. Comme conséquence supplémentaire, on remarque que si C existe on doit avoir $n > 3$.

6.4.2 LEMME. Soit X un graphe a -discret avec $a \in V(X)$. Si pour tout $x \in V(X) - \{a\}$ on a $|\pi_a V(x; X)| = 1$ alors X est acyclique.

Démonstration. Supposons que X ne soit pas acyclique et soit $C = (x_1, \dots, x_n)$ un cycle de X tel que $x_1 \in \pi_a V(C)$. Puisque on a $|\pi_a V(x; X)| = 1$ pour tout sommet x de X , alors pour tout $i, 1 < i < n$, on a $x_1 \in V(x_i; X)$ et par suite $\pi_a \{x_i, x_{i+1}\} = \{x_1\}$, i.e. $[x_i, x_{i+1}]$ est a -inessentielle contrairement au fait que X soit a -discret.

6.4.3 THEOREME. Soit $(X, A) \in \text{Ob } \mathbf{G}_{cf}$. Les énoncés suivants sont équivalents:

- (i) ${}^a \tilde{X}$ est un arbre;
- (ii) $P(X, A)$ est complètement distributif;
- (iii) $P(X, A)$ est distributif;
- (iv) $P(X, A)$ est modulaire;
- (v) $|\pi_A V(x; X)| = 1$ pour tout $x \in V(X) - A$.

Démonstration. On posera $\tilde{X} = Y$. Il est évident que $P(Y, a)$ est distributif (resp. modulaire) si et seulement si $P(X, A)$ l'est.

(i) \Rightarrow (ii). ${}^a Y$ étant un arbre, il en est évidemment de même de tout élément Z de $R(Y, a)$. Par suite on a pour toute famille $(Z_i)_{i \in I}$ de $R(Y, a)$:

$$\bigvee_{i \in I} Z_i = \bigcup_{i \in I} Z_i \quad \text{et} \quad \bigwedge_{i \in I} Z_i = \bigcap_{i \in I} Z_i.$$

Donc $R(Y, a)$ est un anneau d'ensembles, donc complètement distributif, et il en est de même de $P(X, A)$.

(ii) \Rightarrow (iii) et (iii) \Rightarrow (iv) sont évidents.

(iv) \Rightarrow (i). Supposons que ${}^a Y$ ne soit pas acyclique. D'après le lemme 6.4.1, il existe un cycle $C = (c_1, \dots, c_n)$ avec $n > 3$, tel que $\pi_a V(C) = \{c_1\}$ et tel qu'il existe i , avec $2 < i < n$ et $[c_1, c_i] \notin E({}^a Y)$. Notons, comme dans le lemme, $W = (x_0, \dots, x_m)$ l'unique ac_1 -chaîne (pouvant être réduite au sommet a) de X , Fig. 10.

Posons:

$$\begin{aligned} Z_1 &= W \cup (c_1, \dots, c_{i-1})' \\ Z_2 &= W \cup (c_n, c_{n-1}, \dots, c_i)' \\ Z_3 &= W \cup (c_1, \dots, c_i)' \end{aligned}$$

où, pour $Z \subset Y$, Z' désigne la restriction de Y à $V(Z)$.

On a $Z_1 < Z_3$ et $Z_1 \wedge Z_2 = Z_3 \wedge Z_2 = Z_1 \cap Z_2 = W$ et $Z_1 \vee Z_2 = Z_3 \vee Z_2 = W \cup C'$. Or, $Z_1 \neq Z_3$ donc $R(Y, a)$ et par suite $P(X, A)$ n'est pas modulaire, contrairement à l'hypothèse.

(i) \Rightarrow (v) est trivial.

(v) \Rightarrow (i). Pour tout $x \in V(X)$ on a $|\pi_a V(x; {}^a Y)| = |\pi_a V(x; Y)| = 1$. Donc, d'après le lemme 6.4.2, ${}^a Y$ est un arbre.

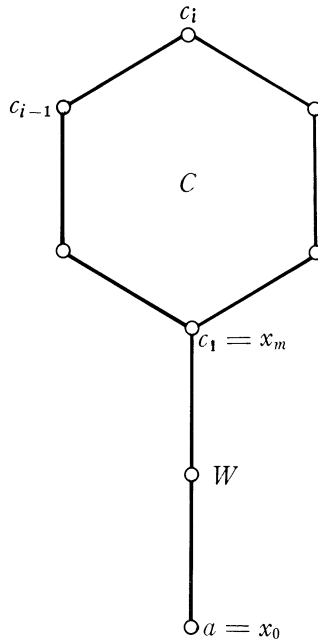


FIGURE 10

BIBLIOGRAPHIE

1. R. Halin, *Über trennende Eckenmengen in Graphen und den Mengerschen Satz*, Math. Ann. 157 (1964), 34–41.
2. J. S. Pym and H. Perfect, *Submodular functions and independence structures*, J. Math. Anal. Appl. 30 (1970), 1–31.
3. J. S. Pym, *A lattice of separating sets in a graph*, in Combinatorial Mathematics and its Applications (Academic Press), 245–247.
4. G. Sabidussi, *Weak separation lattices of graphs*, Can. J. Math. 28 (1976), 691–724.
5. G. Szasz, *Théorie des treillis* (Dunod, Paris).

*Université de Montréal et Collège Ahuntsic,
Montréal, Québec*