Canad. Math. Bull. Vol. **26** (4), 1983

MAJORATIONS EXPLICITES POUR LE NOMBRE DE DIVISEURS DE N

BY

J. L. NICOLAS ET G. ROBIN

ABSTRACT. Let

$$d(n)=\sum_{d|n}1 \quad \text{and} \quad f(n)=\frac{\log d(n)\log\log n}{\log 2\log n} \quad (n\geq 2).$$

It is proved that the function f reaches its maximum for $n=$ 6 983 776 800, and that $\max_{n\geq 2} f(n)=1.5379$. The proof deals with superior highly composite numbers introduced by Ramanujan.

1. Introduction. Soit

$$d(n)=\sum_{d|n}1, \quad \text{et pour } n\geq 2, \text{ soit} \quad f(n)=\frac{\log d(n)\log\log n}{\log 2\log n}.$$

Dans plusieurs livres de théorie analytique des nombres, on trouve la formule, due à Wigert: (cf. [Wig] et [Har], ch. 18).

$$\limsup f(n)=1 \tag{1}$$

Cette relation implique que f est majorée. Nous nous proposons de calculer le maximum de f:

THEOREME 1. *Le maximum de $f(n)$ est atteint en $n=$ $2^5\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11.13.17.19=6\,983\,776\,800$, et l'on a: $\max_{n\geq 2} f(n)=1{,}5379$.*

La démonstration du théorème 1 ne nécessite pas le théorème des nombres premiers. Soit $\pi(x)=\sum_{p\leq x}1$; $\theta(x)=\sum_{p\leq x}\log p$.
Nous utiliserons les résultats élémentaires:

$$\forall x>0; \qquad \theta(x)\leq x\log 3 \quad \text{[Han]} \tag{2}$$

$$\forall x\geq 8; \qquad \pi(x)\leq\frac{x}{2} \tag{3}$$

La méthode de démonstration est la suivante: On montre que le maximum de f est atteint en un nombre hautement composé supérieur (Lemme 7), qui n'est pas trop grand (Lemme 8). Il suffira alors de calculer $f(n)$ pour les nombres de la table placée en appendice.

Reçu par la réduction le 19 octobre 1982 et, sous une forme revisée, le 2 février 1983.
AMS Subject Classification (1980): 10H25

https://doi.org/10.4153/CMB-1983-078-5 Published online by Cambridge University Press

Le paragraphe 2 rapelle quelques propriétés des nombres hautement composés supérieurs, introduits par Ramanujan, et qui jouent un grand rôle dans l'étude des grandes valeurs de la fonction $d(n)$. Une étude analogue peut se faire avec d'autres fonctions multiplicatives ou additives: Dans [Rob 1], G. Robin donne diverses majorations explicites pour la fonction $\omega(n)=\sum_{p|x} 1$.

2. Nombres hautement composés supérieurs. Afin de préciser le résultat de Wigert (1), Ramanujan (cf. [Ram]) a défini les nombres hautement composés:

Definition. On dit que N est hautement composé, si pour tout $m<N$, on a $d(m)<d(N)$.

Soit $Q(X)$ le nombre de nombres hautement composés $\leq X$. Ramanujan a démontré que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{Q(X)}{\log X}=+\infty;$$

P. Erdös ([Erd 1]) a démontré que $Q(X)\gg(\log X)^{1+c}$, $c>0$; J. L. Nicolas ([Nic 1]) a montré que $Q(X)\ll(\log X)^{c'}$ et conjecturé que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log Q(X)}{\log\log X}=\frac{\log 30}{\log 16}=1{,}227.$$

A l'aide de résultats récents de M. Waldschmidt sur les formes linéaires de logarithmes de nombres algébriques, on peut prendre $c'=3{,}65$.

Ramanujan a introduit ensuite les nombres hautement composés supérieurs:

Definition. On dit que N est hautement composé supérieur s'il existe $\varepsilon>0$, tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, *on ait*:

$$\frac{d(n)}{n^{\varepsilon}}\leq\frac{d(N)}{N^{\varepsilon}}.$$

Un tel nombre est évidemment hautement composé:

$$m<N\Rightarrow d(m)\leq\left(\frac{m}{N}\right)^{\varepsilon}d(N)<d(N).$$

Remarque. On peut interpréter ε comme le multiplicateur de Lagrange du problème d'optimisation avec contrainte:

$$\begin{cases}\log n\leq\log n_0\\ \max\log d(n)\end{cases}$$

cf. [Nic 2]. Dans cette optique, G. Robin a utilisé des méthodes de recherche opérationnelle pour construire une table des nombres hautement composés de Ramanujan (cf [Rob 2]).

Géométriquement, la droite de pente ε passant par le point $\log n$, $\log d(n)$ a pour ordonnée à l'origine $\log d(n)-\varepsilon\log n$. L'enveloppe convexe des points log n, log $d(n)$ est une ligne brisée concave, dont les sommets ont pour abscisse log N, où N est hautement composé supérieur.

Les nombres hautement composés supérieurs sont très faciles à calculer, grâce au lemme suivant:

LEMME 1. *Soit* $g(n)$ *une fonction multiplicative, c'est-à-dire* $(m, n)=1 \Rightarrow g(mn)=g(m)g(n)$. *On suppose que* $\lim_{p^k\to\infty} g(p^k)=0$. *alors,* g *est bornée, et*

$$\max g(n)=\prod_{p \text{ premier}} \max_{k\geq 0} g(p^k)$$

où le produit est en fait un produit fini, car pour p *assez grand le maximum de* $g(p^k)$ *est atteint en* $k=0$.

Démonstration. Immédiate, en décomposant n en facteurs premiers.

LEMME 2. *Etant donné* $\varepsilon>0$, *on désigne par* N_ε, *et on appelle nombre hautement composé supérieur associé à* ε, *l'un des nombres qui maximisent la fonction* $n \mapsto d(n)/n^\varepsilon$. *On a*:

$$N_\varepsilon=\prod_{p\leq 2^{1/\varepsilon}} p^{k(p,\varepsilon)} \tag{4}$$

avec, en désignant par $[t]$ *la partie entière de* t:

$$k(p,\varepsilon)=\begin{cases} \left[\dfrac{1}{p^\varepsilon-1}\right] si \dfrac{1}{p^\varepsilon-1}\notin\mathbb{N} \\ \left[\dfrac{1}{p^\varepsilon-1}\right] ou \left[\dfrac{1}{p^\varepsilon-1}-1\right] si \dfrac{1}{p^\varepsilon-1}\in\mathbb{N}\end{cases}$$

Démonstration. (cf. [Ram], §32). On applique le lemme 1 à la fonction $d(n)/n^\varepsilon$.

REMARQUE. Pour ε fixé, par un théorème de transcendance de Lang, il y a au plus deux nombres premiers p tels que $1/(p^\varepsilon-1)$ soit entier (cf. [Erd 2]), ce qui entraîne qu'il y a au plus 4 nombres N_ε hautement composés supérieurs associés à ε. On remarque enfin, que si $\varepsilon_1<\varepsilon_2$, N_{ε_2} divise N_{ε_1}.

LEMME 3. (Majoration des nombres hautement composés supérieurs). *Soit* N_ε *donné par la formule* (4), *on pose* $x=2^{1/\varepsilon}$. *Soit* $\varepsilon<0{,}193$ (*ce qui entraîne* $x>36$), *alors on a*:

$$\log N_\varepsilon \leq 1{,}69x=(1{,}69)2^{1/\varepsilon}.$$

Démonstration. On déduit de la formule donnant $k(p,\varepsilon)$ dans le lemme 2, que

$$k(p,\varepsilon)\leq\frac{1}{p^\varepsilon-1}\leq\frac{1}{\varepsilon\log p} \quad \text{puisque} \quad e^u-1\geq u.$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1983-078-5 Published online by Cambridge University Press

et d'autre part que, si l'on pose $x_2 = x^\theta = 2^{\theta/\varepsilon}$ avec $\theta = \log 3/2/\log 2$, on a, pour $p > x_2$, $p^\varepsilon - 1 > \frac{1}{2}$ et donc $k(p, \varepsilon) \le 1$. On a de plus, pour $x > 36$, $x_2 > 8$ et d'après (3), $\pi(x_2) \le x_2/2$.

Il vient alors:

$$\log N_\varepsilon = \sum_{p \le x} k(p, \varepsilon) \log p \le \theta(x) + \sum_{p \le x_2} \left(\frac{1}{\varepsilon \log p}\right) \log p$$

$$\log N_\varepsilon \le \theta(x) + \frac{1}{\varepsilon} \pi(x_2) \le \theta(x) + \frac{x_2}{2\varepsilon}$$

En utilisant (2), on obtient:

$$\log N_\varepsilon \le x \log 3 \left(1 + \frac{\log x}{2(\log 2)(\log 3) \times x^{(1-\theta)}}\right).$$

Or la fonction $x \mapsto (\log x) x^{\theta - 1}$ étant décroissante pour $x \ge 36$, on obtient:

$$\log N_\varepsilon \le x \log 3 \left(1 + \frac{\log 36}{2(\log 2)(\log 3)(36)^{1-\theta}}\right) \le 1{,}69 x$$

Remarque. La majoration du Lemme 3 est très grossière. On pourrait obtenir un meilleur coefficient avec des calculs plus longs.

Lemme 4. *Soit N_0 un nombre hautement composé supérieur associé à ε_0. Soit $N_1 > N_0$ et $\varepsilon_1 > 0$. On suppose que*

$$\forall n \ge N_0, \frac{d(n)}{n^{\varepsilon_1}} \le \frac{d(N_1)}{N_1^{\varepsilon_1}} \tag{5}$$

alors:

(i) *on a* $\varepsilon_1 \le \varepsilon_0$

(ii) N_1 *est hautement composé supérieur associé à* ε_1.

Démonstration. Comme N_0 est hautement composé supérieur, on a:

$$\frac{d(N_1)}{N_1^{\varepsilon_0}} \le \frac{d(N_0)}{N_0^{\varepsilon_0}}$$

Ecrivons la relation (5) avec $n = N_0$:

$$\frac{d(N_0)}{N_0^{\varepsilon_1}} \le \frac{d(N_1)}{N_1^{\varepsilon_1}} \tag{6}$$

On en déduit:

$$\left(\frac{N_1}{N_0}\right)^{\varepsilon_1} \le \frac{d(N_1)}{d(N_0)} \le \left(\frac{N_1}{N_0}\right)^{\varepsilon_0}$$

ce qui montre $\varepsilon_1 \le \varepsilon_0$, c'est-à-dire (i).

Pour démontrer (ii), il suffit de montrer que

$$n < N_0 \Rightarrow \frac{d(n)}{n^{\varepsilon_1}} \le \frac{d(N_1)}{N_1^{\varepsilon_1}}.$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1983-078-5 Published online by Cambridge University Press

Soit $n < N_0$, on a:
$$\frac{d(n)}{n^{\varepsilon_0}} \le \frac{d(N_0)}{N_0^{\varepsilon_0}}$$
et, à l'aide de (6):
$$\frac{d(n)}{n^{\varepsilon_1}} \le \left(\frac{n}{N_0}\right)^{\varepsilon_0-\varepsilon_1} \frac{d(N_1)}{N_1^{\varepsilon_1}} \le \frac{d(N_1)}{N_1^{\varepsilon_1}}$$

3. Demonstration du Théorème 1

LEMME 5. *On a, pour* $2 \le n \le 5040$, $f(n) \le f(5040)$.

Démonstration. On peut le vérifier sur une machine à calculer. Autre méthode: 5040 est hautement composé supérieur, associé à $\varepsilon = 0.3$. On a donc pour tout n:
$$\frac{d(n)}{n^{0,3}} \le \frac{60}{(5040)^{0,3}}$$
c'est-à-dire:
$$\log d(n) \le 0.3(\log n + a) \text{ avec } a = \frac{\log 60 - 0{,}3 \log 5040}{0{,}3} = 5{,}12$$
Il vient ensuite, pour $n \ge 3$:
$$f(n) = \frac{\log d(n)}{\log 2 \log n} \log\log n \le \frac{0{,}3}{\log 2}\left(\log\log n + a\frac{\log\log n}{\log n}\right).$$
Or la fonction $t \mapsto t + a\ t\ e^{-t}$, lorsque $a < e^2$, est croissante sur $\mathbb{R}$; on a donc, pour $3 \le n \le 5040$,
$$f(n) \le \frac{0{,}3}{\log 2}\left(\log\log 5040 + a\frac{\log\log 5040}{\log 5040}\right) = f(5040).$$

LEMME 6. *Soit* $b \in \mathbb{R}$, $b > 2$. *Soit*
$$F_b(t) = \frac{e^t}{t} - \frac{b-1}{b^2} e^t$$
alors, pour $t \ge 2$, *on a*: $F_b(t) \le F_b(b)$.

Démonstration. On a:
$$F_b'(t) = \frac{e^t}{b^2 t^2}(b-1)(b-t)\left(t - \frac{b}{b-1}\right)$$
et comme
$$b > 2, \qquad \frac{b}{b-1} < 2.$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1983-078-5 Published online by Cambridge University Press

La fonction $t \mapsto F_b(t)$ est donc croissante sur l'intervalle $[2, b]$ et décroissante sur $[b, +\infty[$.

LEMME 7. *Soit $\lambda = \max f(n)$ et soit N un entier où f atteint son maximum. (On a donc $\lambda = f(N)$). Alors N est un nombre hautement composé supérieur associé à:*

$$\varepsilon = \lambda \log 2 \frac{\log\log N - 1}{(\log\log N)^2}.$$

Démonstration. D'après le lemme 5, on a $N \geq 5040$. D'après le lemme 4, avec $N_0 = 2520$, il suffit de démontrer que:

$$n \geq 2520 \Rightarrow \log d(n) - \varepsilon \log n \leq \log d(N) - \varepsilon \log N.$$

Supposons $n \geq 2520$, cela entraîne $\log\log n > 2$. Il vient:

$$\log d(n) - \varepsilon \log n = \left(\log d(n) - \lambda \log 2 \frac{\log n}{\log\log n}\right) + \left(\lambda \log 2 \frac{\log n}{\log\log n} - \varepsilon \log n\right)$$

la première parenthèse est ≤ 0. La 2^e parenthèse vaut $\lambda \log 2\ F_b\ (\log\log n)$ avec les notations du lemme 6, et $b = \log\log N$. On a donc, puisque $\lambda = f(N)$,

$$\log d(n) - \varepsilon \log n \leq \lambda \log 2 \frac{\log N}{\log\log N} - \varepsilon \log N = \log d(N) - \varepsilon \log N.$$

LEMME 8. *Soit $\varepsilon < 0{,}193$ et N_ε un nombre hautement composé supérieur associé à ε; on a:*

$$\frac{\varepsilon}{\log 2} \frac{(\log\log N_\varepsilon)^2}{\log\log N_\varepsilon - 1} \leq 1{,}52.$$

Démonstration. Posant, $x = 2^{1/\varepsilon}$, on a par le Lemme 3:

$$\log\log N_\varepsilon \leq \log x + \alpha \quad \text{avec} \quad \alpha = \log(1{,}69)$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{t^2}{t-1}$ est croissante pour $t \geq 2$ et $\varepsilon < 0{,}193$ entraîne $N_\varepsilon > e^{e^2}$.

On a donc:
$$\frac{\varepsilon}{\log 2} \frac{(\log\log N_\varepsilon)^2}{\log\log N_\varepsilon - 1} \leq \frac{(\log x + \alpha)^2}{(\log x)(\log x + \alpha - 1)} = G(\log x)$$

Lorsque $0 < \alpha < 1$, la fonction

$$G(t) = \frac{(t+\alpha)^2}{t(t+\alpha-1)} = \left(1 + \frac{\alpha}{t}\right)\left(1 + \frac{1}{t+\alpha-1}\right)$$

est décroissante pour $t > 1 - \alpha$, on a donc, pour $x > 36$:

$$G(\log x) \leq G(\log 36) \leq 1{,}5153.$$

La démonstration du théorème 1 s'achève de la façon suivante: D'après les lemmes 5 et 7, le maximum de f est atteint en un nombre hautement composé

Table des nombres hautement composes superieurs (d'après Ramanujan, cf. [Ram], p. 116)

ε	N_ε	$d(N_\varepsilon)$	$f(N_\varepsilon)$
$\dfrac{\log 2}{\log 7} = 0{,}35621$	$2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	48	1,4677
$\dfrac{\log 5/4}{\log 2} = 0{,}32193$			
	$5040 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	60	1,4849
$\dfrac{\log 2}{\log 11} = 0{,}28906$			
	$55\,440 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	120	1,5118
$\dfrac{\log 2}{\log 13} = 0{,}27024$			
	$720\,720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	240	1,5252
$\dfrac{\log 6/5}{\log 2} = 0{,}26303$			
	$1\,441\,440 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	288	1,5278
$\dfrac{\log 4/3}{\log 3} = 0{,}26186$			
	$4\,324\,320 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	384	1,5319
$\dfrac{\log 3/2}{\log 5} = 0{,}25193$			
	$21\,621\,600 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	576	1,5347
$\dfrac{\log 2}{\log 17} = 0{,}24465$			
	$367\,567\,200 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$	1152	1,5376
$\dfrac{\log 2}{\log 19} = 0{,}23541$			
	$6\,983\,776\,800 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$	2304	1,5379
$\dfrac{\log 7/6}{\log 2} = 0{,}22239$			
	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$	2688	1,5367
$\dfrac{\log 2}{\log 23} = 0{,}22106$			
	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$	5376	1,5327
$\dfrac{\log 3/2}{\log 7} = 0{,}20837$			
	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$	8064	1,5276
$\dfrac{\log 2}{\log 29} = 0{,}20585$			
	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29$	16128	1,5203
$\dfrac{\log 5/4}{\log 3} = 0{,}20311$			
	$2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29$	20160	1,5181
$\dfrac{\log 2}{\log 31} = 0{,}20185$			
	$2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31$	40320	1,5126
$\dfrac{\log 8/7}{\log 2} = 0{,}19265$			

supérieur $N_\varepsilon \geq 5040$. D'après la table ci-jointe, on constate que pour $\varepsilon >$ 0,193, $f(N_\varepsilon)$ est maximum pour $N_{\max} = 6\,983\,776\,800$. Si le maximum de f était atteint en un nombre hautement composé supérieur N_ε avec $\varepsilon < 0{,}193$, on aurait d'après les lemmes 7 et 8

$$\lambda = \max f(n) = \frac{\varepsilon}{\log 2} \frac{(\log\log N_\varepsilon)^2}{\log\log N_\varepsilon - 1} \leq 1{,}52$$

ce n'est pas possible puisque $f(N_{\max}) > 1{,}53$.

Lecture de la table: Pour

$$\frac{\log 2}{\log 7} = 0{,}35621 > \varepsilon > \frac{\log 5/4}{\log 2} = 0{,}32193$$

le nombre hautement composé supérieur associé à ε est 2520. Il y a deux nombres hautement composés supérieurs associés à $\varepsilon = \dfrac{\log 5/4}{\log 2}$, qui sont 2520 et 5040.

Références

[Erd 1] P. Erdös *On highly composite numbers*, J. London Math. Soc., t. **19** (1944), 130–133.

[Erd 2] P. Erdös et J. L. Nicolas, *Répartition des nombres superabondants*, Bull. Soc. Math. France, t. **103** (1975), 65–90.

[Han] D. Hanson, On *the product of the primes*, Canad. Math. Bull., t. **15** (1972) 33–37.

[Har] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, 4th edition. Oxford, The Clarendon Press, 1960.

[Nic 1] J. L. Nicolas, *Répartition des nombres hautement composés de Ramanujan*, Canad. J. of Math., t. **23** (1971) 116–130.

[Nic 2] J. L. Nicolas.—*Algorithmes d'optimisation en nombres entiers*, Astérisque **38–39** (1976), 169–182.

[Ram] S. Ramanujan, *Highly composite numbers*, Proc. London Math. Soc., Série 2, t. **14** (1915) 347–400; and Collected papers. Cambridge, at the University Press, 1927, p. 78–128.

[Rob 1] G. Robin,—*Estimation de la fonction de Tchebychef θ sur le $k^{\text{ième}}$ nombre premier et grandes valeurs de la fonction $\omega(n)$, nombre de diviseurs premiers de n*, A paraître dans Acta Arithmetica, Vol. 42, n°4.

[Rob 2] G. Robin, *Methodes d'optimisation pour un problème de theorie des nombres* à paraître dans R.A.I.R.O. (Informatique théorique).

[Wig] S. Wigert, *Sur l'ordre de grandeur du nombre des diviseurs d'un entier*. Arkiv för matematik, astronomi och fysik, Bd 3, n° 18, 9S; 1906–1907.

Département de Mathématiques
Université de Limoges
123 Avenue Albert Thomas
87060 Limoges Cedex. (France).