Canad. Math. Bull. Vol. 28 (2), 1985

SUR LE LEMME DE SCHWARZ

PAR
SHINJI YAMASHITA

RÉSUMÉ. Nous allons proposer un lemme de type de Schwarz pour fonctions holomorphes dans $|z| < 1$ en termes de leurs moyennes.

Le lemme célèbré de H. A. Schwarz cité dans le titre présent est:

LEMME S. *Soit f une fonction holomorphe et bornée,* $|f| < 1$, *dans le disque unité ouvert* $D = \{|z| < 1]$, *et soit* $f(0) = 0$. *Alors:*
$(S1)$ $|f(z)| \leqq |z|$ *pour tout* $z \in D$,
$(S2)$ $|f'(0)| \leqq 1$,
$(S3)$ *Pour qu'on ait l'égalité dans* $(S1)$ *pour un point* $z_0 \in D - \{0\}$ (*dans* $(S2)$, *respectivement*), *il faut et il suffit qu'on ait une constante c telle que* $|c| = 1$ *et* $f(z) \equiv cz$.

Soient f holomorphe dans D, $0 \leqq r < 1$, $0 \leqq p \leqq \infty$, et $\partial D = \{|w| = 1\}$ le cercle unité. Alors nous definissons les moyennes:

$$M_p(r,f) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} \log|f(rw)||dw|\right) \qquad \text{si } p = 0;$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} |f(rw)|^p|dw|\right)^{1/p} \qquad \text{si } 0 < p < \infty;$$

$$= \max_{|z|=r} |f(z)| \qquad \text{si } p = \infty.$$

Quant r est fixé, $M_p(r,f)$ est une fonction continue de p, et en particulier,

$$M_0(r,f) = \lim_{p \downarrow 0} M_p(r,f), \quad M_\infty(r,f) = \lim_{p \uparrow \infty} M_p(r,f);$$

d'autre part, quand p est fixé, $0 < p \leqq \infty$,
(i) $M_p(r,f)$ est une fonction non décroissante de r;
(ii) $\log M_p(r,f)$ est une fonction convexe de $\log r$, c'est-à-dire,

$$\log M_p(r_3,f) \leqq k \log M_p(r_1,f) + (1-k)\log M_p(r_2,f),$$

si

$$(*) \qquad \log r_3 = k \log r_1 + (1-k)\log r_2, \quad 0 < r_1 < r_2 < 1, \quad 0 < k < 1.$$

En faisant tendre p vers 0 nous obtenons (i) et (ii) dans le cas $p = 0$ aussi (voir [4],

Reçu par la rédaction le 10 mai 1984.
AMS Subject Classification (1980): Primary 30C80.

https://doi.org/10.4153/CMB-1985-028-4 Published online by Cambridge University Press

p. 208 ff., et [3], Theorem 1.5, p. 9). Nous posons $M_p(1,f) = \lim_{r\to 1} M_p(r,f)$, $0 \leqq p \leqq \infty$.

THÉORÈME 1. *Soit f une fonction holomorphe dans D telle que $f(0) = 0$ et $M_p(1,f) \leqq 1$ pour un p, $0 \leqq p \leqq \infty$. Alors:*
(1) *$M_p(r,f) \leqq r$ pour tout r, $0 \leqq r < 1$;*
(2) $|f'(0)| \leqq 1$.
(3) *Pour qu'on ait l'égalité dans* (1) *pour un r, $0 < r < 1$ (dans* (2), *respectivement), il faut et il suffit qu'on ait une constante $c \in \partial D$ telle que $f(z) = cz$.*

Maintenant, Lemme S est une conséquence du cas particulier $p = \infty$ de notre théorème.

PREUVE DE THÉORÈME 1. Il y a g holomorphe dans D telle que $f(z) \equiv zg(z)$. Alors, $g(0) = f'(0)$. L'inégalité (1) est une conséquence immédiate de

$$M_p(r,g) = M_p(r,f)/r \qquad (0 < r < 1)$$

et

$$M_p(r,g) \uparrow M_p(1,g) = M_p(1,f) \leqq 1 \text{ tandis que } r \uparrow 1.$$

Pour démontrer (2) dans le cas $0 < p < \infty$, nous notons que $|g|^p$ est une fonction sousharmonique dans D. Alors, $|g(0)|^p \leqq M_p(r,g)^p \leqq 1$, et donc,

$$|f'(0)| = |g(0)| \leqq 1.$$

Le cas $p = 0$ est établi semblablement car $\log |g|$ est sousharmonique. Évidemment, $|g(0)| \leqq M_\infty(r,g) \leqq 1$ dans le cas $p = \infty$.

Maintenant, si $f(z) \equiv cz$, alors, l'égalité dans (1) est vraie pour tout r, et celle dans (2) est vraie aussi. Pour observer la converse, nous supposons, tout d'abord, que l'égalité dans (1) est vraie pour r_3, $0 < r_3 < 1$. Par (i) appliqué à g nous obtenons $M_p(r,g) = 1$ pour chaque r, $r_3 \leqq r < 1$. Pour démontrer que $M_p(r_1,g) = 1$ pour chaque r_1, $0 < r_1 < r_3$, nous choissons k, $0 < k < (\log r_3)/(\log r_1) < 1$. En posant

$$r_2 = \exp\left(\frac{\log r_3 - k \log r_1}{1-k}\right), \qquad \text{ou } (*),$$

nous obtenons $r_3 < r_2 < 1$. Alors, par (ii) appliqué à g, nous obtenons:

$$\log M_p(r_3,g) \leqq k \log M_p(r_1,g) + (1-k) \log M_p(r_2,g),$$

d'où, $\log M_p(r_1,g) \geqq 0$ car $M_p(r_2,g) = M_p(r_3,g) = 1$. En conséquence, $1 \leqq M_p(r_1,g) \leqq 1$, d'où $M_p(r_1,g) = 1$. Finalement,

$$|g(0)| = \lim_{r_1 \downarrow 0} M_p(r_1,g) = 1 = M_p(r,g)$$

pour chaque $0 < r < 1$. Par la propriété que $\log |g|$ et $|g|^p$ $(0 < p < 1)$ sont sousharmoniques, il en résulte que g est une constante $c \in \partial D$ par $M_p(1,g) = 1$. Ensuite, supposons l'égalité dans (2). Alors,

$$1 = |g(0)| \leqq M_p(r, g) \leqq 1, \qquad 0 < r < 1.$$

Par l'argument cité ci-dessus nous obtenons encore, $g \equiv c$, $c \in \partial D$. C.Q.F.D.

Lemme S a une conséquence qui est dite le lemme de Schwarz et Pick, c'est-à-dire: *Soit f une fonction holomorphe et bornée, $|f| < 1$, dans D. Alors:*

$$(1 - |w|^2)|f'(w)|/(1 - |f(w)|^2) \leqq 1 \textit{ pour tout } w \in D.$$

L'égalité pour un $w \in D$ est vraie si et seulement si

$$(\ast_\ast) \qquad f(z) \equiv c(z - a)/(1 - \bar{a}z),$$

où $c \in \partial D$ et $a \in D$ sont constantes. Nous proposons

THÉORÈME 2. *Soit f une fonction holomorphe et bornée, $|f| < 1$, dans D et soit $0 \leqq p \leqq \infty$. Alors:*

$$(4) \qquad (1 - |w|^2)|f'(w)|/(1 - |f(w)|^2) \leqq r^{-1}M_p(r, f_w) \leqq 1$$

pour tout $w \in D$ et $0 < r < 1$, où

$$f_w(z) = \left[f\left(\frac{z + w}{1 + \bar{w}z}\right) - f(w)\right]\Big/\left[1 - \overline{f(w)}f\left(\frac{z + w}{1 + \bar{w}z}\right)\right], \qquad z \in D.$$

(5) *Si l'égalité $r^{-1}M_p(r, f_w) = 1$ est vraie pour la paire $w \in D$, $0 < r < 1$, alors, f est de la forme $(\ast_\ast)$.*

Le lemme de Schwarz et Pick est un corollaire de Théorème 2.

PREUVE. Il y a g holomorphe et $|g| \leqq 1$ dans D telle que $f_w(z) \equiv zg(z)$. Alors,

$$(1 - |w|^2)|f'(w)|/(1 - |f(w)|^2) = |f_w'(0)| = |g(0)| \leqq M_p(r, g)$$
$$= r^{-1}M_p(r, f_w) \leqq 1,$$

d'où (4). Pour démontrer (5), nous appliquons (3) à f_w. Alors, $f_w(z) \equiv c'z$, $c' \in \partial D$, d'où $(\ast_\ast)$. C.Q.F.D.

Enfin nous proposons un théorème que nous considerons un autre analogue de Lemme S.

THÉORÈME 3. *Soit f une fonction holomorphe dans D telle que $f(0) = 0$ et*

$$\int_0^1 M_p(r, f)\, \mathrm{d}r \leqq 1 \quad \textit{pour un} \quad p,\ 0 \leqq p \leqq \infty.$$

Alors:

$$(6) \qquad M_p(r, f) \leqq 2r \quad \textit{pour} \quad 0 \leqq r \leqq 1/2$$

et

$$(7) \qquad M_p(r, f) \leqq 1/\{2(1 - r)\} \quad \textit{pour}\ 1/2 < r < 1.$$

(8) *Pour qu'on ait l'égalité dans* (6) *pour un r, $0 < r \leqq 1/2$, il faut et il suffit qu'on*

https://doi.org/10.4153/CMB-1985-028-4 Published online by Cambridge University Press

ait une constante $c \in \partial D$ *telle que* $f(z) \equiv 2cz$.

PREUVE. Parce que $M_p(r,f)/r = M_p(r,g)$ est une fonction non décroissante dans $0 < r < 1$ il en résulte de ([5], Lemme I) que $M_p(r,f)$ est une fonction convexe dans $0 \leqq r < 1$; c'est une autre preuve du resultat ([2], Theorem, p. 118). En appliquant [1], Lemma 4, p. 159, à $M_p(r,f)$ nous obtenons Théorème 2 sans (8). La preuve de (8) n'est pas difficile en observant celle de Théorème 1. C.Q.F.D.

RÉFÉRENCES

1. E. F. Beckenbach, *A property of mean values of an analytic function*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **1** (1952), pp. 157–163.

2. E. F. Beckenbach, W. Gustin, and H. Shniad, *On the mean modulus of an analytic function*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), pp. 184–190.

3. P. L. Duren, *Theory of* H^p *spaces*, Academic Press, New York and London, 1970.

4. J. E. Littlewood, *Lectures on the theory of functions*, Oxford University Press, Oxford, 1944.

5. Z. Nehari, *Une propriété des valeurs moyennes d'une fonction analytique*, Compte Rend. Acad. Sci. Paris **208** (1939), pp. 1785–1787.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE
UNIVERSITÉ MÉTROPOLITAINE DE TOKYO
FUKASAWA, SETAGAYA
TOKYO 158, JAPON

https://doi.org/10.4153/CMB-1985-028-4 Published online by Cambridge University Press