Canad. Math. Bull. Vol. **32** (3), 1989

UNE NOTE SUR LES COEFFICIENTS BINOMIAUX DE GAUSS

BY

ARMEL MERCIER

ABSTRACT. Nous obtenons différentes identités de l'analyse combinatoire contenant des coefficients binomiaux de Gauss.

1. **Introduction.** Le coefficient binomial de Gauss $[{n \atop r}]$ est défini (voir [2, p. 218]) par

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \begin{cases} \frac{q^n-1}{q-1}\frac{q^{n-1}-1}{q^2-1}\cdots\frac{q^{n+1-r}-1}{q^r-1}, & \text{si } 0 < r \leqq n; \\ 1, & \text{si } r = 0; \\ 0, & \text{si } r < 0 \text{ ou } r > n, \end{cases}$$

où q est une variable. On peut montrer que le coefficient binomial de Gauss désigne le nombre de variétés (projectives) dans un espace projectif [3, p. 103] et de plus que le coefficient de q^i dans $[{n \atop r}]$ désigne le nombre de chemins partant de l'origine jusqu'au point $(n-r, r)$ sous-tendant une surface de i unités (voir [2]). Récemment ([5], [6]) nous avons obtenu quelques identités contenant les coefficients binomiaux de Gauss.

En utilisant la notation habituelle pour les q-séries:

$$(a;q)_j = (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{j-1}),\ j \geqq 1$$

et $(a;q)_0 = 1$, le coefficient de Gauss peut s'écrire, pour $0 \leq j \leq n$, sous la forme:

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = (-1)^j \frac{(q^{-n};q)_j}{(q;q)_j} \frac{q^{nj}}{q^{\frac{j(j+1)}{2}}} q^j. \tag{0}$$

Le but de la présente note est de continuer notre étude sur de nouvelles identités de l'analyse combinatoire tout en utilisant la notation des q-séries. Mentionnons que certains de ces nouveaux résultats généralisent quelques identités obtenues antérieurement (voir [4]).

Comme premier résultat, nous avons

Reçu par la rédaction le 24 novembre 1987 et, sous une forme revisée, le 10 novembre 1988.

Travail fait dans le cadre de la subvention CRSNG A-3508.

AMS 1980 Subject classification. Primary 05A19, secondary 05A10.

Keywords and phrases. Gaussian coefficient, q-series, combinatorial identities, binomial coefficient.

THÉORÈME 1. *Soit $n \geqq 0$ un entier et soit $f(x)$ un polynôme dont le degré est plus petit ou égal à $n+1$. Soit i un entier vérifiant $0 \leq i \leq n$, alors*

$$\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{(q^{-n};q)_j q^j f\left(\frac{q^j-1}{q-1}\right)}{(q;q)_j\left(\frac{q^i-q^j}{q-1}\right)} = -\frac{(q;q)_n f^{(n+1)}(0)}{(q-1)^n(n+1)!} + \frac{(q^{-n};q)_i q^i}{(q;q)_i}\left\{f'\left(\frac{q^i-1}{q-1}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{(q-1)f\left(\frac{q^i-1}{q-1}\right)}{q^i}\left(\sum_{j=1}^{n-i}\frac{1}{q^j-1} - \sum_{j=1}^{i}\frac{q^j}{q^j-1}\right)\right\}.$$

Dans le cas où les sommes de droite sont vides, elles sont interprétées comme étant égales à zéro.

Ce type de résultat est lié de près aux séries de transformations pour les fonctions de la forme

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{(q^{-n};q)_j(a_1;q)_j\cdots(a_k;q)_j q^j}{(q;q)_j(b_1;q)_j\cdots(b_k;q)_j}.$$

Par exemple, nous pouvons retrouver notre résultat pour $i=0$ à partir de l'équation (obtenu en laissant tendre c vers 0 dans [1, §8.4, (1)])

$$(1a) \qquad \sum_{j=0}^{n} \frac{(q^{-n};q)_j(a;q)_j q^j}{(q;q)_j(b;q)_j} = a^n\frac{(b/a;q)_n}{(b;q)_n}.$$

En effet, posant $b=aq$ dans $(1a)$, et en soustrayant 1, on obtient

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{(q^{-n};q)_j(a;q)_j q^j}{(q;q)_j(aq;q)_j} = \frac{a^n(q;q)_n-(aq;q)_n}{(aq;q)_n}.$$

En divisant par $1-a$ et en laissant tendre a vers 1, on obtient

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{(q^{-n};q)_j q^j}{(q;q)_j(1-q^j)} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{q^j-1},$$

équation qui nous permet d'obtenir ce qu'on avait signalé précédemment.

D'autres résultats semblables à celui du théorème 1 peuvent être obtenus. Ainsi par exemple,

THÉORÈME 2. *Soit $n \geqq 0$ un entier et soit f(x) un polynôme dont le degré est plus petit ou égal à $n+1$. Alors on a*

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(q^{-n};q)_i q^{(1-n)i}}{(q;q)_i(-q;q)_i(-q;q)_{n-1}} \frac{f\left(\frac{q^{2i+1}-1}{q-1}\right)}{\left(\frac{q^{2i+1}-1}{q-1}\right)^2}$$
$$= \frac{q^n(-q;q)_n(q;q)_n(q;q)_n}{(q^2;q)_{2n}}\left\{f'(0)+f(0)\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{\frac{q^{2i+1}-1}{q-1}}\right\}.$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1989-049-6 Published online by Cambridge University Press

2. Démonstration du théorème 1. Supposons que $f(x) = a_{n+1}x^{n+1} + a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$, alors

$$\frac{f(x)}{x(x-1)\cdots\left(x-\frac{q^n-1}{q-1}\right)} = a_{n+1} + \frac{h(x)}{x(x-1)\cdots\left(x-\frac{q^n-1}{q-1}\right)}, \tag{1}$$

où le degré du polynôme $h(x)$ est $\leqq n$. Or pour $0 \leqq i \leqq n$, on a

$$\lim_{x\to(q^i-1)/(q-1)} \frac{(-1)^n(q^n-1)\cdots(q-1)h(x)\left(x-\frac{q^i-1}{q-1}\right)}{x(x-1)\cdots\left(x-\frac{q^n-1}{q-1}\right)} = \frac{(-1)^i \left[\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix}\right](q-1)^n q^{\frac{i(i+1)}{2}} h\left(\frac{q^i-1}{q-1}\right)}{q^{in}}$$

d'où on peut écrire

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i \left[\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix}\right] q^{\frac{i(i+1)}{2}}(q-1)^n h\left(\frac{q^i-1}{q-1}\right)}{q^{in}\left(x-\frac{q^i-1}{q-1}\right)} = \frac{(-1)^n(q^n-1)\cdots(q-1)h(x)}{x(x-1)\cdots\left(x-\frac{q^n-1}{q-1}\right)}$$

et ainsi (1) devient

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i \left[\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix}\right] q^{\frac{i(i+1)}{2}}(q-1)^n h\left(\frac{q^i-1}{q-1}\right)}{q^{in}\left(x-\frac{q^i-1}{q-1}\right)} = \frac{(-1)^n(q^n-1)\cdots(q-1)f(x)}{x(x-1)\cdots\left(x-\frac{q^n-1}{q-1}\right)} - \frac{(-1)^n(q^n-1)\cdots(q-1)f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}. \tag{2}$$

Mais d'après (1), on peut écrire $f(\frac{q^i-1}{q-1}) = h(\frac{q^i-1}{q-1})$ pour $0 \leqq i \leqq n$ et alors (2) devient

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i \left[\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix}\right] q^{\frac{i(i+1)}{2}} f\left(\frac{q^i-1}{q-1}\right)}{q^{in}\left(x-\frac{q^i-1}{q-1}\right)} = \frac{(-1)^n(q^n-1)\cdots(q-1)f(x)}{x(x-1)\cdots\left(x-\frac{q^n-1}{q-1}\right)(q-1)^n} + \frac{(-1)^{n+1}(q^n-1)\cdots(q-1)f^{(n+1)}(0)}{(q-1)^n(n+1)!}. \tag{3}$$

Soit i_0 un entier tel que $0 \leqq i_0 \leqq n$, alors en écrivant (3) sous la forme

$$\sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i_0}}^{n} \frac{(-1)^j \left[\begin{smallmatrix} n \\ j \end{smallmatrix}\right] q^{j(j+1)/2} f\left(\frac{q^j-1}{q-1}\right)}{q^{jn}\left(x-\frac{q^j-1}{q-1}\right)} = \frac{(-1)^n(q^n-1)\cdots(q-1)f(x)}{x(x-1)\cdots\left(x-\frac{q^n-1}{q-1}\right)(q-1)^n} + \frac{(-1)^{n+1}(q^n-1)\cdots(q-1)f^{n+1}(0)}{(q-1)^n(n+1)!} - \frac{(-1)^{i_0} \left[\begin{smallmatrix} n \\ i_0 \end{smallmatrix}\right] q^{i_0(i_0+1)/2} f\left(\frac{q^{i_0}-1}{q-1}\right)}{q^{i_0 n}\left(x-\frac{q^{i_0}-1}{q-1}\right)},$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1989-049-6 Published online by Cambridge University Press

et en faisant tendre x vers $(q^{i_0}-1)/(q-1)$, on obtient, en utilisant la règle de L'Hôpital et l'équation (0), le résultat.

En spécifiant le polynôme $f(x)$ ou i dans l'énoncé du théorème 1, on peut établir de nombreux résultats. Par ailleurs, pour tout polynôme $f(x)$ de degré plus petit ou égal à n, l'équation (3) devient

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(q^{-n};q)_i q^i}{(q;q)_i \left(x - \frac{q^i-1}{q-1}\right)} f\left(\frac{q^i-1}{q-1}\right) = \frac{(q;q)_n f(x)}{(q-1)^n x(x-1)\cdots\left(x-\frac{q^n-1}{q-1}\right)}. \tag{4}$$

En posant $f(y) = h(1+(q-1)y)$ et $x = -1/(q-1)$, (4) devient

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(q^{-n};q)_i}{(q;q)_i} h(q^i) = h(0) \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{q^i}\right),$$

où $n \geqq 1$ et $h(x)$ est un polynôme de degré plus petit ou égal à n.

Cette dernière équation peut aussi s'obtenir à partir de [1,§8.2, (4)]

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{(q^{-n};q)_j x^j}{(q;q)_j} = (xq^{-n};q)_n.$$

Finalement en considérant le quotient

$$\frac{f(x)}{x\left(x-\frac{q-1}{q-1}\right)\left(x-\frac{q^3-1}{q-1}\right)\cdots\left(x-\frac{q^{2n+1}}{q-1}\right)},$$

où f est un polynôme dont le degré est plus petit ou égal à $n+1$, on démontre le théorème 2 en procédant de la même façon que pour la démonstration du théorème 1.

Remerciements. Nous désirons remercier l'arbitre pour nous avoir signalé quelques liens existant entre notre théorème 1 et certaines q-séries.

Bibliographie

1. W. N. Bailey, *Generalized Hypergeometric Series*, Cambridge University Press, 1935.
2. G. Berman, K. Fryer, *Introduction to combinatorics*, Academic Press 1972.
3. L. Comtet, "Analyse combinatoire 1", Presses Universitaire de France.
4. A. Mercier, "Quelques identités de l'analyse combinatoire", *Discrete Math.*, **49** (1984) 139–149.
5. ———, "Sommes contenant des coefficients binomiaux de Gauss", *Canad. Math. Bull.*, **29** (2), 1986, 227–237.
6. ———, "Identities containing Gaussian binomial coefficients", Discrete Math. (sous presse).

Université du Québec
Département de Mathématiques
555 Blv. de l'Université
Chicoutimi, (Québec)
Canada, G7H 2B1

https://doi.org/10.4153/CMB-1989-049-6 Published online by Cambridge University Press