Canad. Math. Bull. Vol. **29** (4), 1986

SUR UNE REPRESENTATION EXPLICITE DES SOLUTIONS OPTIMALES D'UN PROGRAMME LINEAIRE

PAR

MARTIN BILODEAU

ABSTRACT. This paper gives a sharper explicit representation of the set of optimal solutions for a class of linear programs than those obtained by A. Ben-Israel, A. Charnes and S. Zlobec since 1968. The representation is used to determine bounds on the coefficients of the objective function that produce the same set of optimal solutions (sensitivity analysis).

1. **Introduction**. La représentation explicite des solutions optimales d'un programme linéaire à intervalle, max c^Tx *où* $a \leq Ax \leq b$, fut obtenue par Ben-Israel et Charnes [1] dans le cas particulier d'une matrice de liaison A de rang-ligne complet. Zlobec et Ben-Israel, dans [6] et [7], ont ensuite obtenu des résultats semblables dans le cas où la matrice de liaison A est de rang arbitraire.

Plus récemment, Zlobec [5, section 5] utilisa la représentation explicite des solutions optimales pour résoudre le problème suivant. Il permet aux vecteurs a et b de varier dans des intervalles de tolérance donnés, par exemple $a^L \leq a \leq a^U$ et $b^L \leq b \leq b^U$, et il trouve les vecteurs a et b qui donnent la plus grande valeur du maximum.

Dans cet article, on obtient, pour une matrice de liaison de rang arbitraire, une représentation explicite plus précise des solutions optimales que celles obtenues par Zlobec et Ben-Israel. Cette représentation est ensuite utilisée pour obtenir des bornes sur les coefficients de la fonction objective qui produisent les mêmes solutions optimales (analyse de sensibilité).

2. **Notation**.

R^n — l'espace réel à n dimensions.
$R^{m\times n}$ — l'espace des matrices réelles de dimensions $m \times n$.

Soit $A \in R^{m\times n}$:
$N(A)$ — le noyau de A, c'est-à-dire $\{x \in R^n: Ax = 0\}$
$R(A)$ — l'image de A, c'est-à-dire $\{Ax: x \in R^n\}$

Reçu par la rédaction le 1 octobre 1984 et sous une forme revisée le 27 décembre 1985.
AMS Subject Classification (1980): 90C05

https://doi.org/10.4153/CMB-1986-066-0 Published online by Cambridge University Press

A^T — la transposée de A
$r(A)$ — le rang de A.

Soit $a, b \in R^m$:
$a \leq b$ — signifie que $a_i \leq b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.
$R_r^{m \times n} = \{X \in R^{m \times n}: r(X) = r\}$.
e — matrice colonne dont les composantes égalent l'unité.

Le système de Moore-Penrose étant le système formé des quatre équations

matricielles $\begin{cases} (1)\ AXA = A \\ (2)\ XAX = X \\ (3)\ (AX)^T = AX \\ (4)\ (XA)^T = XA \end{cases}$, on notera $A\{i, j, \ldots, 1\}$ l'ensemble des matrices vérifiant les équations $i, j, \ldots, 1$ du système de Moore-Penrose.

A^+ — l'inverse de Moore-Penrose de A, c'est-à-dire l'unique matrice de $A\{1, 2, 3, 4\}$.

3. Préliminaires

Un programme linéaire à intervalle (P.L.I.) est un problème du type:

$$\text{(1)} \qquad \text{MAXIMISER} \quad c^T x \quad \text{où} \quad a \leq Ax \leq b$$

tandis qu'un programme linéaire 'standard' (P.L.) prend la forme

$$\text{(2)} \qquad \text{MAXIMISER} \quad c^T x \quad \text{où} \quad Ax \leq b \quad \text{et} \quad x \geq 0.$$

Considérons le problème (1). Un vecteur $x \in R^n$ satisfaisant $a \leq Ax \leq b$ est dit un programme. Un P.L.I. possédant un programme est dit réalisable. Si le P.L.I. est réalisable et que $\sup\{c^T x : a \leq Ax \leq b\} < \infty$, alors le P.L.I. est dit borné. Un P.L. borné peut être mis sous la forme d'un P.L.I.

MAX $c^T x$ où $\begin{pmatrix} -Me \\ 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b \\ Me \end{pmatrix}$ avec M suffisamment grand. De plus, en remplaçant le complément orthogonal de $N(A)$ par $R(A^T)$ [2, p. 64], il a été démontré dans [2, p. 91] que le P.L.I. (1) est borné si et seulement si $c \in R(A^T)$.

4. Sur la solution explicite d'un P.L.I.

Voici d'abord quelques explications sur une fonction introduite par A. Ben-Israel et S. Zlobec. $\eta : R^m \times R^m \times R^m \to R^m$ est une fonction définie pour $a, b, c \in R^m$ par $\eta(a, b; c) = [\eta_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ avec

$$\eta_i = \begin{cases} a_i & \text{si} \quad c_i < 0 \\ b_i & \text{si} \quad c_i > 0 \\ (1 - \beta_i)a_i + \beta_i b_i & \text{où} \quad \beta_i \in [0, 1] \quad \text{si} \quad c_i = 0. \end{cases}$$

Quel que soit $A^- \in A\{1\}$, on sait de [2, p. 59] que AA^- représente une projection (pas nécessairement orthogonale) sur $R(A)$. Cette dernière remarque permet de citer sous une forme légèrement différente un théorème obtenu par A. Ben-Israel et S. Zlobec.

THÉORÈME 1. [6] Soit donné un P.L.I. (1) borné et $x = A^-AA^-\eta(a, b; (A^-AA^-)^Tc) + N(A)$ où A^- est un élément arbitraire de $A\{1\}$.

CONCLUSION: x est la solution optimale si et seulement si x est un programme.

Pour que x soit un programme, on cherchera une forme particulière de A^-. Cela est justifié par le fait que, étant donné un P.L.I. dont on connaît la solution optimale, les lignes essentielles de A seront les $r(r = r(A))$ lignes de A qui correspondent aux hyperplans passant par la solution optimale et déterminant un côté du domaine des programmes. Pour cette raison on introduit la notion de matrice aérée.

MATRICE AÉRÉE. Soit $A \in R_r^{m \times n}$ et $\tilde{A}$ une matrice obtenue de A en remplaçant des lignes et/ou des colonnes de A par des lignes et colonnes nulles sans changer le rang. $\tilde{A}$ est dite une matrice aérée de A.

LEMME. *Soit $A \in R_r^{m \times n}$ et $\tilde{A}$ une matrice aérée de A. On démontre que:*

(i) $\tilde{A}^+ \in A\{1, 2\}$
(ii) *si on agit uniquement sur les lignes, alors* $\tilde{A}^+ \in A\{1, 2, 4\}$
(iii) *si on agit uniquement sur les colonnes, alors* $\tilde{A}^+ \in A\{1, 2, 3\}$.

La preuve du lemme est omise puisqu'elle ne fait appel qu'à des propriétés déjà bien connues des compléments de Schur, voir par exemple [3, p. 59] ou [4].

THÉORÈME 2. Soit donné un P.L.I. (1) borné avec $A \in R_r^{m \times n}$. Supposons que $D \in R_r^{r \times n}$, $N \in R^{(m-r) \times n}$ et que P est une matrice de permutation telle que $\begin{pmatrix} D \\ N \end{pmatrix} = PA$.

De plus, soit $Pa = \begin{pmatrix} a_D \\ a_N \end{pmatrix}$ et $Pb = \begin{pmatrix} b_D \\ b_N \end{pmatrix}$, où $a_D, b_D \in R^r$.

CONCLUSION: $x = D^+\eta(a_D, b_D; D^{+^T}c) + N(A)$ est la solution optimale si et seulement si $a_N \leq Nx \leq b_N$.

DÉMONSTRATION: *D'après la partie (ii) du lemme, si* $\tilde{A} = P^T\begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}$ *alors* $\tilde{A}^+ = (D^+ \ 0)P$ *est un élément de* $A\{1, 2, 4\}$. *On applique le théorème 1 avec* $A^- = \tilde{A}^+$. *On obtient:* $x = \tilde{A}^+\eta(a, b{:}\ \tilde{A}^{+^T}c) + N(A)$ *est la solution optimale si et seulement si x est un programme. Transformons l'expression* $\tilde{A}^+\eta(a, b; \tilde{A}^{+^T}c)$.

$$\begin{aligned}\tilde{A}^{+}\eta(a, b; \tilde{A}^{+T}c) &= (D^{+}\ \ 0)P\eta\left(a, b; P^{T}\begin{pmatrix} D^{+T} \\ 0 \end{pmatrix}c\right) \\ &= (D^{+}\ \ 0)\eta\left(Pa, Pb; PP^{T}\begin{pmatrix} D^{+T} \\ 0 \end{pmatrix}c\right) \\ &= (D^{+}\ \ 0)\eta\left(\begin{pmatrix} a_D \\ a_N \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_D \\ b_N \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} D^{+T}c \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= D^{+}\eta(a_D, b_D; D^{+T}c).\end{aligned}$$

On en déduit: x est un programme si et seulement si $a \leq P^{T}\begin{pmatrix} D \\ N \end{pmatrix}D^{+}\eta(a_D, b_D; D^{+T}c) \leq b$. Puisque les lignes de D sont linéairement indépendantes $DD^{+} = I_r$. Substituant $DD^{+} = I_r$, et prémultipliant par P (ce qui préserve l'inégalité), on trouve: x est un programme si et seulement si

$$\begin{pmatrix} a_D \\ a_N \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \eta(a_D, b_D; D^{+T}c) \\ Nx \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b_D \\ b_N \end{pmatrix}.$$

$a_D \leq \eta(a_D, b_D; D^{+T}c) \leq b_D$ étant évidemment satisfaite, cela termine la démonstration. □

Aucune méthode pour déterminer D n'est proposée ici, on fait un choix arbitraire de D jusqu'à ce que la condition d'optimalité $a_N \leq Nx \leq b_N$ soit satisfaite.

EXEMPLE 1.

$$\text{MAX} \quad -6x_1 + 8x_2 - 2x_3 + 4x_4 \quad \text{où} \quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 2 \\ x_3 + 2x_4 &\leq 2 \\ -x_1 + x_2 \qquad - x_4 &\leq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &\leq 4 \\ x_4 \text{ est libre et } x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

On applique le théorème 2, mais d'abord écrivons ce problème sous la forme

$$\text{(1)} \qquad \text{MAX} \quad c^T x \quad \text{où } a \leq Ax \leq b,$$

$$c = \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad a = \begin{bmatrix} 2 \\ -M \\ -M \\ -M \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ M \\ M \\ M \end{bmatrix}$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1986-066-0 Published online by Cambridge University Press

$r(A) = 4$ et $R(A^T) = R^4$. On forme un bloc D de 4 lignes linéairement indépendantes. Puisque $r(A) = 4 = n$, D^{-1} existe et $D^+ = D^{-1}$ [2, p. 2].

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 \\ -1 & -1 & 3 & -4 \\ 6 & -2 & -2 & -8 \\ -3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad D^{-1^T}c = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$a_D = \begin{pmatrix} 2 \\ -M \\ -M \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_D = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ M \end{pmatrix} \quad \eta(a_D, b_D; D^{-1^T}c) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x = D^{-1}\eta(a_D, b_D; D^{-1^T}c) = (0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 1)^T.$$

D'après le théorème 2, x est une solution optimale si $a_N \leq Nx \leq b_N$.

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad a_N = \begin{pmatrix} -M \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_N = \begin{pmatrix} 1 \\ M \\ M \end{pmatrix} \quad Nx = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{satisfait}$$

$$a_N \leq Nx \leq b_N, \qquad \text{donc} \quad x_{\text{opt}} = (0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 1)^T.$$

5. Sensibilité

Dans l'étude de sensibilité, la question soulevée est la suivante: comment peuvent varier les coefficients de la fonction objective (séparément ou simultanément) de façon qu'une solution optimale particulière demeure une solution optimale du problème fluctué ? La réponse à cette question est contenue dans le théorème suivant. On n'impose pas que toutes les solutions optimales demeurent des solutions optimales, mais plutôt qu'une solution optimale particulière demeure une solution optimale. Pour cette raison on introduit la notation $\eta^*(a, b; c)$ pour désigner un élément de l'ensemble de vecteurs $\eta(a, b; c)$.

THÉORÈME 3. Soit les deux P.L.I. réalisables (i) MAX c^Tx où $a \leq Ax \leq b$

(ii) MAX d^Tx où $a \leq Ax \leq b$

avec $c, d \in R(A^T)$ et $A \in R_r^{m \times n}$. Soit $D \in R_r^{r \times n}$, $N \in R^{(m-r) \times n}$ et P une matrice de permutation telle que $PA = \begin{pmatrix} D \\ N \end{pmatrix}$. Soit $Pa = \begin{pmatrix} a_D \\ a_N \end{pmatrix}$ et $Pb = \begin{pmatrix} b_D \\ b_N \end{pmatrix}$, où $a_D, b_D \in R^r$. Enfin, supposons que $x = D^+\eta^*(a_D, b_D; D^{+^T}c)$ est une solution optimale de (i) et $\eta^*(a_D, b_D; D^{+^T}c) = \eta^+(a_D, b_D; D^{+^T}d)$.

CONCLUSION: *$D^+\eta^*(a_D, b_D; D^{+^T}c)$ est une solution optimale de (ii).*

https://doi.org/10.4153/CMB-1986-066-0 Published online by Cambridge University Press

DÉMONSTRATION: *Puisque $D^+\eta^*(a_D, b_D; D^{+^T}c)$ est une solution optimale de (i), alors le théorème 2 implique $a_N \leq ND^+\eta^*(a_D, b_D; D^{+^T}c) \leq b_N$. Mais $\eta^*(a_D, b_D; D^{+^T}c) = \eta^*(a_D, b_D; D^{+^T}d)$, donc $a_N \leq ND^+\eta^*(a_D, b_D; D^{+^T}d) \leq b_N$. D'après le théorème 2 appliqué au P.L.I. (ii), $D^+\eta^*(a_D, b_D; D^{+^T}d)$ est une solution optimale de (ii) et $D^+\eta^*(a_D, b_D; D^{+^T}d) = D^+\eta^*(a_D, b_D; D^{+^T}c)$.* □

Le théorème 3 peut être appliqué pour obtenir la sensibilité des coefficients d'un programme linéaire.

EXEMPLE 2. Etudions la sensibilité de c_2 du P.L. de l'exemple 1. On pose $d = \begin{pmatrix} -6 \\ c_2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, d'où $D^{-1^T}d = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -c_2 - 24 \\ -c_2 + 24 \\ 3c_2 + 8 \\ -4c_2 - 16 \end{pmatrix}$. Donc si $\begin{cases} (-c_2 + 24)/8 \geq 0 \\ (3c_2 + 8)/8 \geq 0 \\ (-4c_2 - 16)/8 \leq 0 \end{cases}$, il existe un $\eta^*(a_D, b_D; D^{-1^T}d)$ égal à $(2\ \ 2\ \ 4\ \ 0)^T$. La solution des trois dernières inégalités donne l'intervalle de sensibilité de c_2, $-8/3 \leq c_2 \leq 24$.

Si l'on désire l'intervalle de sensibilité de c_4, on pose $d = (-6\ \ 8\ \ -2\ \ c_4)^T$, d'où $D^{-1^T}d = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -3c_4 - 20 \\ 5c_4 - 4 \\ c_4 + 28 \\ 4c_4 - 64 \end{pmatrix}$. Donc si $\begin{cases} (5c_4 - 4)/8 \geq 0 \\ (c_4 + 28)/8 \geq 0 \\ (4c_4 - 64)/8 \leq 0 \end{cases}$, il existe un $\eta^*(a_D, b_D; D^{+^T}d)$ égal à $(2\ \ 2\ \ 4\ \ 0)^T$. La solution des trois dernières inégalités, $4/5 \leq c_4 \leq 16$, est l'intervalle de sensibilité de c_4.

REMERCIEMENTS

L'auteur désire remercier le Professeur Jean-Louis Lavoie du département de mathématiques de l'Université Laval pour les discussions enrichissantes que nous avons eues. Il désire également remercier le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada pour son support financier.

RÉFÉRENCES

1. A. Ben-Israel and A. Charnes, *An Explicit Solution of a Special Class of Linear Programming Problems*, Oper. Res. **16**, (No. 6, 1968), 1166–1175.

2. A. Ben-Israel and T. N. E. Greville, *Generalized Inverses: Theory and Applications*, Wiley, New York, 1974.

3. S. L. Cambell and C. D. Meyer, Jr., *Generalized Inverses of Linear Transformations*, Pitman, 1979.

4. G. P. H. Styan, *Schur Complements and Linear Statistical Models*, in Proceedings of the First International Tampere Seminar on Linear Statistical Models and their Applications (T. Pukkila and S. Puntanen, editors), University of Tampere, Finland, 1985, 37–75.

5. S. Zlobec, *Input Optimization: I Optimal Realizations of Mathematical Models*, Mathematical Programming, **31** (1985), 245–268.

6. S. Zlobec and A. Ben-Israel, *Explicit Solutions of Interval Linear Programming*, Oper. Res., **21** (1973), 390–393.

7. S. Zlobec and A. Ben-Israel, *On Explicit Solutions of Interval Linear Programming*, Israel J. Math., **8** (1970), 12–22.

DÉPARTEMENT DE STATISTIQUES
UNIVERSITY OF TORONTO