Canad. Math. Bull. Vol. **22** (1), 1979

SOMMES DE FONCTIONS ADDITIVES RESTREINTES À UNE CLASS DE CONGRUENCE

PAR
ARMEL MERCIER

1. **Introduction.** Une fonction arithmétique f est une fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On dit qu'une telle fonction f est additive si $f(mn)=f(m)+f(n)$ si $(m,n)=1$ et par ailleurs qu'elle est multiplicative si $f(mn)=f(m)f(n)$ si $(m,n)=1$. Les sommes de la forme $\sum_{n\le x} f(n)$ ont été largement étudiées. Dans [6], nous avons obtenu des estimés pour les expressions de la forme $\sum_{\substack{n\le x\\ n=0(p_0)}} f(n)$, où p_0 est un nombre premier arbitraire et f appartient à une certaine classe de fonctions additives ou multiplicatives. Nous nous proposons ici d'étudier essentiellement deux sortes de sommes. En effet, dans un premier temps, nous évaluerons $\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv \ell(k)}} f(n)$ pour différentes fonctions f et pour $k, \ell\varepsilon \mathbb{N}$, $(k,\ell)=1$ ou k. En deuxième lieu, nous obtiendrons des estimés pour $\sum_{\substack{n\le x\\ (n,k)=1}} {}^1/f(n)$ et $\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv\ell(k)}} {}^1/f(n)$, où $k, \ell\in\mathbb{N}$, $(k,\ell)=1$ ou k tandis que f appartient à une grande classe de fonctions additives (il est entendu que les résultats restent valides pour $\ell\in\mathbb{Z}$). Notons enfin que, pour une série de Dirichlet donnée, nous désignerons par σ_a son abscisse de convergence absolue, lorsqu'elle existe.

Nous démontrerons auparavant deux théorèmes fondamentaux sur la représentation de certaines séries de Dirichlet.

2. **Résultats préléminaires.**

THÉORÈME A. *Soit f une fonction multiplicative telle que $\sum_{n=1}^{\infty}(f(n))/n^s$ converge absolument pour $\sigma>\sigma_a$. Alors pour chaque $k\in\mathbb{N}$, on a, pour $\sigma>\sigma_a$.*

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\equiv 0(k)}}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}=\prod_{p\mid k}\left(1+\frac{f(p)}{p^s}+\frac{f(p^2)}{p^{2s}}+\cdots\right)^{-1} \tag{1}$$
$$\times\prod_{p^a\parallel k}\left(\frac{f(p^a)}{p^{as}}+\frac{f(p^{a+1})}{p^{(a+1)s}}+\cdots\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s},$$

Reçu par les réducteurs le 28 février 1978.

Ce travail est une partie de la thèse de doctorat de l'auteur et celi-ci désire exprimer sa profonde gratitude au Dr Jean-Marie De Koninck pour ses nombreux conseils et son encouragement.

https://doi.org/10.4153/CMB-1979-009-8 Published online by Cambridge University Press

où $p^a \| k$ signifie $p^a \mid k$ et $p^{a+1} \nmid k$. De plus, si $|f(n)| < n^c$, c étant un nombre réel plus petit ou égal à σ_a, et si $\sum_{n=1}^{\infty} (f(n))/n^s$ converge pour $\sigma \geq c$, alors l'équation (1) *est valide pour $\sigma \geq c$.*

Preuve. La preuve se fait par induction sur le nombre d'éléments dans la décomposition de k en facteurs premiers. Soit $k = p_1^{a_1}$, alors pour toute fonction multiplicative f nous avons, pour $\sigma > \sigma_a$,

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n\equiv 0(p_1^{a_1})}}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \sum_{\substack{n=1 \\ (n,p_1)=1}}^{\infty} \frac{f(np_1^{a_1})}{(np_1^{a_1})^s} + \sum_{\substack{n=1 \\ (n,p_1)=1}}^{\infty} \frac{f(np_1^{a_1+1})}{(np_1^{a_1+1})^s} + \cdots$$
$$= \left(\frac{f(p_1^{a_1})}{p_1^{a_1 s}} + \frac{f(p_1^{a_1+1})}{p_1^{(a_1+1)s}} + \cdots \right) \sum_{\substack{n=1 \\ (n,p_1)=1}}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s},$$

ce qui vérifie l'équation (1) lorsque $k = p_1^{a_1}$. Supposons maintenant que l'équation (1) est vraie pour toute fonction multiplicative lorsque k contient $r-1$ facteurs permiers. Soit $k = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$, alors

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n\equiv 0(k)}}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \left(\frac{f(p_r^{a_r})}{p_r^{a_r s}} + \frac{f(p_r^{a_r+1})}{p_r^{(a_r+1)s}} + \cdots \right) \sum_{\substack{n=1 \\ n\equiv 0(p_1^{a_1} \cdots p_{r-1}^{a_{r-1}}) \\ (n, p_r^{a_r})=1}}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \tag{2}$$

Utilisant l'hypothèse d'induction avec la fonction multiplicative $\mathscr{X}f$ où

$$\mathscr{X}(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } (n, p_r^{a_r}) = 1 \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$$

on a

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n\equiv 0(p_1^{a_1} \cdots p_{r-1}^{a_{r-1}}) \\ (n, p_r^{a_r})=1}}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \sum_{\substack{n=1 \\ n\equiv 0(p_1^{a_1} \cdots p_{r-1}^{a_{r-1}})}}^{\infty} \frac{\mathscr{X}(n) f(n)}{n^s}$$
$$= \prod_{p^a \| p_1^{a_1} \cdots p_{r-1}^{a_{r-1}}} \left(\frac{f(p^a)}{p^{as}} + \frac{f(p^{a+1})}{p^{(a+1)s}} + \cdots \right) \sum_{\substack{n=1 \\ (n, p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r})=1}}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

Remplaçant cette dernière équation dans (2), on obtient le résultat escompté. Si $|f(n)| < n^c$, $c \leq \sigma_a$, alors pour $\sigma \geq c$,

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{f(p^{a+r})}{p^{(a+r)s}}$$

est une série de Dirichlet absolument convergente. Donc

$$\prod_{p \mid k} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^{rs}} \right)^{-1} \prod_{p^a \| k} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{f(p^{a+r})}{p^{(a+r)s}} \right)$$

est une série de Dirichlet qui converge absolument pour $\sigma \geq c$. Or, si

$\sum_{n=1}^{\infty} (f(n))/n^s$ converge pour $\sigma \geq c$, alors (1) est aussi valide pour $\sigma \geq c$, car $\sum_{\substack{n=1 \\ n\equiv 0(k)}}^{\infty} (f(n))/n^s$ est le produit d'une série de Dirichlet absolument convergente et d'une série de Dirichlet convergente (Voir [9], 185).

Soient $(k, \ell)=1$ et $\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2, \ldots, \mathscr{X}_{\phi(k)}$ les caractères mod $k, \mathscr{X}_1$ étant le caractère principal, alors pour $\sigma > \sigma_a$ on a

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n\equiv \ell(k)}}^{\infty} f(n)n^{-s} = \frac{1}{\phi(k)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{f(n)}{n^s} \sum_{\mathscr{X}} \frac{\mathscr{X}(n)}{\mathscr{X}(\ell)} \right)$$

$$= \frac{1}{\phi(k)} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)\mathscr{X}_1(n)}{n^s} + \sum_{\substack{\mathscr{X} \\ \mathscr{X}\neq \mathscr{X}_1}} \left(\frac{1}{\mathscr{X}(\ell)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)\mathscr{X}(n)}{n^s} \right) \right].$$

Or

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)\mathscr{X}_1(n)}{n^s} = \prod_{p\mid k} \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \cdots \right)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s},$$

d'où

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n\equiv \ell(k)}}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \frac{1}{\phi(k)} \left\{ \prod_{p\mid k} \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \cdots \right)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} + \sum_{\substack{\mathscr{X} \\ \mathscr{X}\neq \mathscr{X}_1}} \left(\frac{1}{\mathscr{X}(\ell)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)\mathscr{X}(n)}{n^s} \right) \right\}. \tag{3}$$

Le prochain résultat vérifie à la fois l'équation (1) et l'équation (3).

Théorème B. *Soit f une fonction multiplicative telle que $\sum_{n=1}^{\infty} (f(n))/n^s$ converge absolument pour $\sigma > \sigma_a$ et $(k, \ell)=1$ ou k alors on a, pour $\sigma > \sigma_a$,*

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n\equiv \ell(k)}}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p\mid d} \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \cdots \right)^{-1} \prod_{p^a \| d} \left(\frac{f(p^a)}{p^{as}} + \frac{f(p^{(a+1)})}{p^{(a+1)s}} + \cdots \right)$$

$$\frac{1}{\phi(k')} \left[\prod_{p\mid k'} \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \cdots \right)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} + \sum_{\substack{\mathscr{X} \\ \mathscr{X}\neq \mathscr{X}_1}} \left(\frac{1}{\mathscr{X}(\ell')} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)\mathscr{X}(n)}{n^s} \right) \right],$$

où $d=(\ell, k)$, $k'=k/d$, $\ell'=\ell/d$ et $\mathscr{X}$ désigne les caractères mod k'.

Preuve. Si $(k, \ell)=1$, alors l'équation (3) est vérifiée. Si $(k, \ell)=k$ alors $n\equiv \ell(k)$ signifie que $n\equiv 0(k)$ d'où l'équation (1) est obtenue.

Remarque. Si f est complètement multiplicative, alors utilisant le fait que

https://doi.org/10.4153/CMB-1979-009-8 Published online by Cambridge University Press

(Voir [1])

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)\mu(n)}{n^s}\right)=1,\quad \sigma>\sigma_a,$$

nous obtenons pour $(k,\ell)=1$ ou k et $\sigma>\sigma_a$,

$$\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\equiv\ell(k)}}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\equiv\ell(k)}}^{\infty}\frac{f(n)\mu(n)}{n^s}\right)=\mu(d)\left(\frac{f(d)}{d^s\phi(k')}\sum_{\mathscr{X}}\frac{1}{\mathscr{X}(\ell')}\right)^2\prod_{p\mid d}\left(1-\frac{f(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

où $d=(\ell,k)$, $k'=k/d$, $\ell'=\ell/d$. En particulier, pour $k\in\mathbb{N}$ et $\sigma>\sigma_a$, on a

$$\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\equiv0(k)}}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\equiv0(k)}}^{\infty}\frac{f(n)\mu(n)}{n^s}\right)=\frac{\mu(k)f^2(k)}{k^{2s}}\prod_{p\mid k}\left(1-\frac{f(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

3. **Sommes de fonctions additives restreintes à une classe de congruence.** Le prochain résultat concerne l'ordre de grandeur de $\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv\ell(k)}} f(n)$ où f est une fonction additive telle que $f(p^r)$ ne dépend pas de p. Posons d'abord $B_1=\gamma+\sum_p\{\log(1-(1/p))+(1/p)\}$, γ étant la constante d'Euler.

THÉOREME 1. *Soit f une fonction additive et soit a une constante positive telle que $\sum_p(f(p)-a)/p$ converge absolument et $f(p^r)=0(2^{r/2})$, $r\ge2$. Alors pour tout $k,\ell\in\mathbb{N}$, on a*

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv\ell(k)}} f(n)=\frac{a}{k}x\log\log x+Ax+o(x),$$

où

$$A=\frac{1}{k}\left(aB_1+\sum_{\substack{p\\ r\ge2}}\frac{f(p^r)-f(p^{r-1})}{p^r}+f(d)+\sum_{\substack{p^\beta\| d\\ p\nmid\frac{k}{d}\\ r\ge1}}\frac{f(p^{r+\beta})-f(p^{r+\beta-1})}{p^r}\right.$$

$$\left.+\sum_{\substack{p\mid d\\ p\mid\frac{k}{d}\\ r\ge1}}\frac{f(p^r)-f(p^{r-1})}{p^r}-\sum_{\substack{p\mid d\\ r\ge1}}\frac{f(p^r)-f(p^{r-1})}{p^r}-\sum_{\substack{p\mid\frac{k}{d}\\ r\ge1}}\frac{f(p^r)-f(p^{r-1})}{p^r}+\sum_p\frac{f(p)-a}{p}\right),$$

où $d=(k,\ell)$.

Preuve. On a pour chaque $k,\ell\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv\ell(k)}} f(n)=\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv\ell(k)}}\sum_{\substack{p^r\mid n\\ r\ge1}}(f(p^r)-f(p^{r-1})).$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1979-009-8 Published online by Cambridge University Press

Il s'agit maintentant de trouver le nombre d'entiers $n \leq x$ tel que $n \equiv \ell(k)$ et $p^r \mid n$, p étant un nombre premier fixe mais arbitraire.

Soit $d=(k, \ell)$, alors $n \equiv 0(d)$ et $n \equiv 0(p^r)$ entraîne $n \equiv 0([d, p^r])$ ($[d, p^r]$ désigne le plus petit commun multiple de k et p^r) i.e. $n = n_1[d, p^r]$. Posons $(d, p^r) = p^\beta$, $0 \leq \beta \leq r$, alors $n \equiv \ell(k)$ implique

$$n_1 d p^{r-\beta} \equiv \ell(k)$$

i.e.

$$n_1 p^{r-\beta} \equiv \ell_1(k_1)$$

où $k_1 = k/d$, $\ell_1 = \ell/d$. Soit $(p^{r-\beta}, k_1) = d_1$, si $d_1 > 1$ alors la congruence

$$n_1 p^{r-\beta} \equiv \ell_1(k_1)$$

ne possède pas de solution tandis que si $d = 1$, la congruence ci-dessus possède exactement une solution. Or $1 \leq n = n_1\, dp^{r-\beta} \leq x$ i.e. $0 \leq n_1 \leq x/dp^{r-\beta}$, et alors le nombre de solutions est

$$\frac{x}{kp^{r-\beta}} + b_x, \quad -1 \leq b_x \leq 2 \quad \text{(Voir [10])}.$$

Donc

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv \ell(k)}} f(n) = \sum_{\substack{p^r \leq x \\ r \geq 1 \\ p \nmid k_1 \\ p \mid d}} (f(p^r) - f(p^{r-1}))\left(\frac{x}{kp^r} + b_x\right)$$
$$+ \sum_{\substack{p^r \leq x \\ r \geq 2 \\ p \nmid k_1 \\ p^\beta \| d \\ 1 \leq \beta \leq r-1}} (f(p^r) - f(p^{r-1}))\left(\frac{x}{kp^{r-\beta}} + b_x\right)$$
$$+ \sum_{\substack{p^r \leq x \\ r > 1 \\ p \nmid k_1 \\ (p^r, d) = p^r}} (f(p^r) - f(p^{r-1}))\left(\frac{x}{k} + b_x\right).$$

Effectuant des calculs analogues à ceux de S. L. Segal [12], on obtient

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv \ell(k)}} f(n) = \frac{x}{k}\left\{\sum_{\substack{p^r \leq x \\ r \geq 1}} \frac{f(p^r) - f(p^{r-1})}{p^r} - \sum_{\substack{p \mid k_1 \\ r \geq 1}} \frac{f(p^r) - f(p^{r-1})}{p^r} - \sum_{\substack{p \mid d \\ r \geq 1}} \frac{f(p^r) - f(p^{r-1})}{p^r}\right.$$
$$\left. + \sum_{\substack{p \mid k_1 \\ p \mid d \\ r \geq 1}} \frac{f(p^r) - f(p^{r-1})}{p^r} + \sum_{\substack{p^\beta \| d \\ p \nmid k_1 \\ 1 \leq \beta \leq r-1}} \frac{f(p^r) - f(p^{r-1})}{p^{r-\beta}} + \sum_{p^r \| d} f(p^r)\right\} + 0\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

et alors le résultat désiré.

https://doi.org/10.4153/CMB-1979-009-8 Published online by Cambridge University Press

Corollaire 1.1. *Soient $k, \ell \in \mathbb{N}$, alors on a* $\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv \ell(k)}} \omega(n) = ((x \log\log x)/k) + Ax + o(x)$, *où*

$$A = \frac{1}{k}\left(B_1 + \omega(d) + \sum_{\substack{p\mid d\\ p\mid \frac{k}{d}}} \frac{1}{p} - \sum_{p\mid d} \frac{1}{p} - \sum_{p\mid \frac{k}{d}} \frac{1}{p}\right),$$

$d = (k, \ell)$ *et* $\omega(n) = \sum_{p\mid n} 1$.

Corollaire 1.2. *Soient $k, \ell \in \mathbb{N}$, alors on a*

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv \ell(k)}} \log d(n) = \frac{\log 2}{k} x \log\log x + Ax + o(x)$$

où $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs de n,

$$A = \frac{1}{k}\left(B_1 \log 2 + \sum_{\substack{p\\ r\ge 2}} \frac{\log(1+1/r)}{p^r} + \log d(k,\ell) + \sum_{\substack{p^\beta \| (k,\ell)\\ p \nmid \frac{k}{(k,\ell)}\\ r\ge 1}} \frac{\log\left(1+\frac{1}{r+\beta}\right)}{p^r}\right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{p\mid (k,\ell)\\ p \mid \frac{k}{(k,\ell)}\\ r\ge 1}} \frac{\log(1+1/r)}{p^r} - \sum_{\substack{p\mid (k,\ell)\\ r\ge 1}} \frac{\log(1+1/r)}{p^r} - \sum_{\substack{p \mid \frac{k}{(k,\ell)}\\ r\ge 1}} \frac{\log(1+1/r)}{p^r}\right),$$

et $d(k, \ell)$ désigne la fonction d évaluée au p.g.c.d de k et ℓ.

Théoreme 2. *Soit f une fonction multiplicative à valeurs positives telle que $f(n)n^{-\alpha} = 1 + b(n)n^\beta$ pour certain $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\beta \in \mathbb{R}_-$ et $|b(n)| < 2^{-\beta}$. Alors, pour $(k, \ell) = 1$ ou k, on a*

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv \ell(k)}} \log f(n) = \begin{cases} \dfrac{\alpha x \log x}{k} + Ax + 0(\log^2 x) & \text{si} \quad \beta = -1 \\[2ex] \dfrac{\alpha x \log x}{k} + Ax + 0(x^{1+\beta} \log x) & \text{si} \quad \beta \ne -1 \end{cases}$$

où $A = G'(1, k, 0) - \alpha G(1, k, 0)$, avec

$$G(1, k, t) = \frac{1}{\phi(k')} \prod_{p\mid d} \left(1 + \frac{\left(\frac{f(p)}{p^\alpha}\right)^t}{p} + \frac{\left(\frac{f(p^2)}{p^{2\alpha}}\right)^t}{p^2} + \cdots\right)^{-1} \prod_{p\mid k'} \left(1 + \frac{\left(\frac{f(p)}{p^\alpha}\right)^t}{p} + \cdots\right)^{-1}$$

$$\times \prod_{p^a \| d} \left(\frac{\left(\frac{f(p^a)}{p^{a\alpha}}\right)^t}{p^a} + \frac{\left(\frac{f(p^{a+1})}{p^{(a+1)\alpha}}\right)^t}{p^{a+1}} + \cdots\right) \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_p \left(1 + \frac{\left(\frac{f(p)}{p^\alpha}\right)^t}{p} + \cdots\right)$$

et $d = (k, \ell)$, $k = k'\, d$.

https://doi.org/10.4153/CMB-1979-009-8 Published online by Cambridge University Press

Preuve. Pour $(k, \ell)=1$ ou k, on a, en utilisant le théorème B, pour $\sigma>\sigma_a$.

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\equiv \ell(k)}}^{\infty} \frac{\left(\frac{f(n)}{n^\alpha}\right)^t}{n^s} - \frac{1}{\phi(k')}\prod_{p\mid d}\left(1+\frac{\left(\frac{f(p)}{p^\alpha}\right)^t}{p^s}+\frac{\left(\frac{f(p^2)}{p^{2\alpha}}\right)^t}{p^{2s}}+\cdots\right)^{-1}$$

$$\times \prod_{p^a\| d}\left(\frac{\left(\frac{f(p^a)}{p^{a\alpha}}\right)^t}{p^{as}}+\frac{\left(\frac{f(p^{a+1})}{p^{(a+1)\alpha}}\right)^t}{p^{(a+1)s}}+\cdots\right)$$

$$\times \sum_{\substack{\mathscr{X}\\ \mathscr{X}\neq\mathscr{X}_1}}\left(\frac{1}{\mathscr{X}(\ell')}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{f(n)}{n^\alpha}\right)^t\mathscr{X}(n)}{n^s}\right)=F(k,s,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{f(n)}{n^\alpha}\right)^t}{n^s}$$

où

$$F(k,s,t)=\frac{1}{\phi(k')}\prod_{p\mid d}\left(1+\frac{\left(\frac{f(p)}{p^\alpha}\right)^t}{p^s}+\frac{\left(\frac{f(p^2)}{p^{2\alpha}}\right)^t}{p^{2s}}+\cdots\right)^{-1}$$

$$\times\prod_{p\mid k'}\left(1+\frac{\left(\frac{f(p)}{p^\alpha}\right)^t}{p^s}+\cdots\right)^{-1}\prod_{p^a\| d}\left(\frac{\left(\frac{f(p^a)}{p^{a\alpha}}\right)^t}{p^{as}}+\frac{\left(\frac{f(p^{a+1})}{p^{(a+1)\alpha}}\right)^t}{p^{(a+1)s}}+\cdots\right)$$

et $t\in\mathbb{C}$, Re $t>-1/\alpha$.

Alors

$$F(k,s,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{f(n)}{n^\alpha}\right)^t}{n^s}=\zeta(s)F(k,s,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h'(n,t)}{n^s}$$

$$=\zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h(n,t)}{n^s}=\zeta(s)G(s,k,t)$$

où

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h'(n,t)}{n^s}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\prod_p\left(1+\frac{\left(\frac{f(p)}{p^\alpha}\right)^t}{p^s}+\frac{\left(\frac{f(p^2)}{p^{2\alpha}}\right)^t}{p^{2s}}+\cdots\right).$$

Pour Re $t>-1/\alpha$, $G(1,k,t)$ converge absolument, alors par la formule (1.10.3) de la page 42 de [11], nous avons, en utilisant le fait que

$$\frac{1}{\phi(k')}\prod_{p\mid d}\left(1+\frac{\left(\frac{f(p)}{p^{\alpha}}\right)^{t}}{p}+\cdots\right)^{-1}\prod_{p^{a}\| d}\left(\frac{\left(\frac{f(p^{a})}{p^{a\alpha}}\right)^{t}}{p^{a}}+\cdots\right).$$

$$\times\sum_{\substack{\mathscr{X}\\ \mathscr{X}\neq\mathscr{X}_1}}\left(\frac{1}{\mathscr{X}(\ell')}\sum_{n\leq x}\left(\frac{f(n)}{n^{\alpha}}\right)^{t}\mathscr{X}(n)\right)=0(1),$$

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ n\equiv\ell(k)}}\left(\frac{f(n)}{n^{\alpha}}\right)^{t}=x\sum_{n\leq x}\frac{h(n,t)}{n}+0\left(\sum_{n\leq x}|h(n,t)|\right) \tag{4}$$

Nous allons maintenant montrer que l'on peut écrire l'équation (4) sous la forme

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ n\equiv\ell(k)}}\frac{f^{t}(n)}{n^{\alpha t}}=\begin{cases}xG(1,k,t)+0(\log x) & \text{si } \beta=-1\\ xG(1,k,t)+0(x^{1+\beta}) & \text{si } \beta\neq-1\end{cases} \tag{5}$$

uniformément pour Re $t>-1/\alpha$.

Puisque $h'(p,t)=(1+b(p^{j})p^{j\beta})^{t}-(1+b(p^{j-1})p^{(j-1)\beta})^{t}$, en utilisant le binôme généralisé, nous obtenons

$$|h'(p^{j},t)|=0(p^{(j-1)\beta})\quad\text{pour}\quad j\geq 2$$

et

$$|h'(p,t)|=0(p^{\beta}).$$

Or, $h'(n,t)$ est une fonction multiplicative, d'où

$$h'(n,t)=0\left(p^{\beta}\prod_{\substack{p^{j}\| n\\ j\geq 2}}p^{(j-1)\beta}\right)=0(n^{\beta}).$$

Puisque $h(n,t)=0(h'(n,t))$, alors

$$\sum_{n\leq x}|h(n,t)|=0\left(\sum_{n\leq x}n^{\beta}\right)=\begin{cases}0(x^{1+\beta}) & \text{si } \beta=-1\\ 0(\log x) & \text{si } \beta\neq-1\end{cases}$$

et

$$\left|\sum_{n>x}\frac{h(n,t)}{n}\right|\leq\sum_{n>x}\frac{|h(n,t)|}{n}=0\left(\sum_{n>x}\frac{1}{n^{1-\beta}}\right)=0(x^{\beta})$$

et par le fait même ceci montre la validité de l'équation (5). Utilisant le lemme d'Abel (Voir [3]), nous obtenons

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ n\equiv\ell(k)}}f^{t}(n)=\begin{cases}\dfrac{G(1,k,t)}{\alpha t+1}x^{\alpha t+1}+\dfrac{\alpha tG(1,k,t)}{\alpha t+1}+0(x^{\alpha t}\log x) & \text{si } \beta=-1\\[2ex] \dfrac{G(1,k,t)}{\alpha t+1}x^{\alpha t+1}+\dfrac{\alpha tG(1,k,t)}{\alpha t+1}+0(x^{1+\beta+\alpha t}) & \text{si } \beta\neq-1\end{cases} \tag{6}$$

Dérivant par rapport à t cette dernière équation tout en utilisant l'inégalité de Cauchy pour estimer les termes d'erreur impliqués en dérivant (6) et posant $t=0$, on obtient le résultat désiré.

Comme conséquence de ce théorème nous obtenons les trois résultats suivants.

COROLLAIRE 2.1. *Pour* $(k, \ell)=1$ *ou* k, *on a*

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ n\equiv \ell(k)}} \log \sigma(n)=\frac{x\log x}{k}+A_1x+0(\log^2 x)$$

où

$$\begin{aligned}A_1=\frac{1}{k}\Bigg\{&-\sum_{p\mid d}\left(\frac{\log(1+1/p)}{p}+\frac{\log(1+1/p+1/p^2)}{p^2}+\cdots\right)(1-1/p)\\&-\sum_{p\mid k'}\left(\frac{\log(1+1/p)}{p}+\frac{\log(1+1/p+1/p^2)}{p^2}+\cdots\right)(1-1/p)\\&+\sum_{p}\left(\frac{\log(1+1/p)}{p}+\frac{\log(1+1/p+1/p^2)}{p^2}+\cdots\right)(1-1/p)\\&+\sum_{p^a\|d}\left(\log(1+1/p+\cdots+1/p^a)+\frac{\log(1+1/p+\cdots+1/p^{a+1})}{p}+\cdots\right)\\&\times\left(1-\frac{1}{p}\right)-1\Bigg\}\end{aligned}$$

et $d=(\ell, k)$, $k'=k/d$.

COROLLAIRE 2.2. *Pour* $(k, \ell)=1$ *ou* k, *on a*

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ n\equiv \ell(k)}} \log \phi(n)=\frac{x\log x}{k}+A_2x+0(\log^2 x)$$

où

$$A_2=\frac{1}{k}\left\{-\sum_{p\mid d}\frac{\log(1-1/p)}{p}-\sum_{p\mid k'}\frac{\log(1-1/p)}{p}+\sum_{p}\frac{\log(1-1/p)}{p}+\sum_{p\mid d}\log(1-1/p)-1\right\}$$

et $d=(k, \ell)$, $k'=k/d$.

COROLLAIRE 2.3. *Soit* $(k, \ell)=1$ *ou* k *et dénotant par* J_α *la fonction de Jordan définie par* $J_\alpha(n)=n^\alpha\prod_{p\mid n}(1-(1/p^\alpha))$, *on a*

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ n\equiv \ell(k)}} \log J_\alpha(n)=\frac{\alpha x\log x}{k}+A_3x+0(\log^2 x)$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1979-009-8 Published online by Cambridge University Press

où

$$A_3 = \frac{1}{k}\left\{-\sum_{p\mid d}\frac{\log(1-1/p^\alpha)}{p} - \sum_{p\mid k'}\frac{\log(1-1/p^\alpha)}{p} + \sum_{p}\frac{\log(1-1/p^\alpha)}{p} + \sum_{p\mid d}\log\left(1-\frac{1}{p^\alpha}\right) - \alpha\right\}.$$

et $d=(k,\ell)$, $k'=k/d$.

De l'équation (6) nous obtenons, à titre d'exemple le résultat suivant:

COROLLAIRE 2.4. *Soit* $(k,\ell)=1$ *ou* k, *alors on a*

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv \ell(k)}} \sigma(n) = Ax^2 + 0(x\log x)$$

où

$$A = \frac{\pi^2/12}{\phi(k')}\prod_{p\mid d}\left(1+\frac{\sigma(p)}{p^2}+\frac{\sigma(p^2)}{p^4}+\cdots\right)^{-1} \times \prod_{p\mid k'}\left(1+\frac{\sigma(p)}{p^2}+\frac{\sigma(p^2)}{p^4}+\cdots\right)^{-1}\prod_{p^a\| d}\left(\frac{\sigma(p^a)}{p^{2a}}+\frac{\sigma(p^{a+1})}{p^{2(a+1)}}+\cdots\right)$$

et $d=(k,\ell)$, $k=k'd$.

En particulier,

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv 0(p_0)}} \sigma(n) = \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{1}{p_0}+\frac{1}{p_0^2}-\frac{1}{p_0^3}\right)x^2 + 0(x\log x)$$

où p_0 *est un nombre premier fixe mais arbitraire*

THÉORÈME 3. *Soit* f *une fonction multiplicative à valeurs positives telle que* $f(n)n^{-\alpha} = 1 + b(n)n^\beta$ *pour un certain* $\alpha\in\mathbb{R}_+$, $\beta\in\mathbb{R}_-$ *et* $b(n)|<2^{-\beta}$. *Alors pour* $k\in\mathbb{N}$ *on a,*

$$\sum_{\substack{n\le x\\ (n,k)=1}} \log f(n) = \begin{cases} \dfrac{\phi(k)\alpha x\log x}{k} + Ax + 0(\log^2 x) & \text{si}\quad \beta=-1\\[2ex] \dfrac{\phi(k)\alpha x\log x}{k} + Ax + 0(x^{1+\beta}\log x) & \text{si}\quad \beta\ne -1\end{cases}$$

où $A=\phi(k)(G'(1,k,0)-G(1,k,0))$

et

$$G(1,k,t) = \frac{1}{\phi(k)}\prod_{p\mid k}\left(1+\frac{\left(\frac{f(p)}{p^\alpha}\right)^t}{p}+\frac{\left(\frac{f(p^2)}{p^{2\alpha}}\right)^t}{p^2}+\cdots\right)^{-1}\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right) \times\left(1+\frac{\left(\frac{f(p)}{p^\alpha}\right)^t}{p}+\cdots\right).$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1979-009-8 Published online by Cambridge University Press

Preuve. Soient $k, \ell \in \mathbb{N}$, $(\ell, k)=1$, on a, en utilisant un procédé analogue à celui que nous avons utilisé dans le théorème 2,

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv \ell(k)}} \frac{f^t(n)}{n^{\alpha t}} - \frac{1}{\phi(k)} \sum_{\substack{\mathscr{X}\\ \mathscr{X}\neq\mathscr{X}_1}} \left(\frac{1}{\mathscr{X}(\ell)} \sum_{n\le x} \frac{f^t(n)}{n^{\alpha t}} \mathscr{X}(n)\right) = \begin{cases} xG(1,k,t)+0(\log x) & \text{si} \quad \beta=-1 \\ xG(1,k,t)+0(x^{1+\beta}) & \text{si} \quad \beta\neq-1 \end{cases}, \tag{7}$$

où $G(1, k, t)$ est la fonction définie dans l'énoncé et $t\in\mathbb{C}$ est tel que Re $t>-1/\alpha$.

Or,

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv \ell(k)}} \frac{f^t(n)}{n^{\alpha t}} - \frac{1}{\phi(k)} \sum_{\substack{\mathscr{X}\\ \mathscr{X}\neq\mathscr{X}_1}} \left(\frac{1}{\mathscr{X}(\ell)} \sum_{n\le x} \frac{f^t(n)}{n^{\alpha t}} \mathscr{X}(n)\right) = \sum_{\substack{n\le x\\ (n,k)=1}} \frac{f^t(n)}{n^{\alpha t}},$$

d'où nous obtenons, en utilisant le lemme d'Abel (Voir [3]),

$$\sum_{\substack{n\le x\\ (n,k)=1}} f^t(n) = \begin{cases} \dfrac{\phi(k)G(1,k,t)}{\alpha t+1} x^{\alpha t+1} + \dfrac{\phi(k)\alpha t G(1,k,t)}{\alpha t+1} + 0(x^{\alpha t}\log x) & \text{si} \quad \beta=-1 \\ \dfrac{\phi(k)G(1,k,t)}{\alpha t+1} x^{\alpha t+1} + \dfrac{\phi(k)\alpha t G(1,k,t)}{\alpha t+1} + 0(x^{1+\beta+\alpha t}) & \text{is} \quad \beta\neq-1, \end{cases} \tag{8}$$

uniformément pour Re $t>-1/\alpha$.

Décrivant cette dernière équation par rapport à t tout en utilisant l'inégalité de Cauchy pour estimer les termes d'erreur impliqués en dérivant (8), et posant $t=0$, on obtient le résultat escompté.

De ce théorème, on déduit le résultat suivant:

Corollaire 3.1. *Pour chaque* $k\in\mathbb{N}$, *on a*

$$\sum_{\substack{n\le x\\ (n,k)=1}} \log\sigma(n) = \frac{\phi(k)}{k} x\log x + A_4 x + 0(\log^2 x)$$

où

$$A_4 = \frac{\phi(k)}{k}\left\{-\sum_{p\mid k}\left(\frac{\log(1+1/p)}{p}+\frac{\log(1+1/p+1/p^2)}{p^2}+\cdots\right)\left(1-\frac{1}{p}\right) + \sum_{p}\left(\frac{\log(1+1/p)}{p}+\frac{\log(1+1/p+1/p^2)}{p^2}+\cdots\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)-1\right\}.$$

A partir de l'équation (8), il est facile de déduire le résultat suivant:

Corollaire 3.2. *Soit* $k\in\mathbb{N}$, *alors on a*

$$\sum_{\substack{n\le x\\ (n,k)=1}} \sigma(n) = \frac{\pi^2}{12}\prod_{p\mid k}\left(1+\frac{\sigma(p)}{p^2}+\frac{\sigma(p^2)}{p^4}+\cdots\right)^{-1} x^2 + 0(x\log x).$$

4. **Somme de réciproques de fonctions additives restreintes à une classe de congruence.** Nous conclurons par deux résultats, l'un concernant l'ordre de grandeur de

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv \ell(k)}} \frac{1}{f(n)},$$

où $(k, \ell)=1$ ou k et f est une fonction additive, et l'autre concernant l'ordre de grandeur de

$$\sum_{\substack{n\le x\\ (n,k)=1}} \frac{1}{f(n)},$$

où $k\in\mathbb{N}$ et f est une fonction additive. Rappelons que l'étude des sommes de réciproque de fonctions additives fut entreprise par R. L. Duncan [7] qui prouva que

$$\sum_{2\le n\le x} \frac{1}{\omega(n)} = 0\left(\frac{x}{\log\log x}\right),$$

et poursuivie par J. M. De Koninck lequel obtenait une formule asymptotique pour

$$\sum_{n\le x} \frac{1}{f(n)},$$

où f appartient à une grande classe de fonctions additives (Voir [4]). La méthode de J. M. De Koninck nécessite l'usage d'un théorème dû à A. Selberg [13]. Utilisant ce même théorème, nous avons obtenu pour la même classe de fonctions additives l'ordre de grandeur de

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv 0(p_0)}} \frac{1}{f(n)},$$

p_0 étant un nombre premier fixe mais arbitraire (Voir [6]). Par ailleurs, J. M. De Koninck et J. Galambos [5] ont trouvé l'ordre de grandeur de

$$\sum_{2\le n\le x} \frac{1}{\log \sigma(n)}.$$

Récemment E. Brinitzer [2] obtint une formule asymptotique pour

$$\sum_{n\le x} \frac{1}{f(n)},$$

où f appartient à une certaine classe de fonctions additives. Ce dernier résultat généralisait le résultat principal de [5]. Le résultat que nous démontrerons maintenant ici généralise d'une certaine facon celui obtenu par E. Brinitzer.

https://doi.org/10.4153/CMB-1979-009-8 Published online by Cambridge University Press

THÉORÈME 4. *Soit f une fonction multiplicative à valeurs positives telle que $f(n)n^{-\alpha}=1+b(n)n^{\beta}$ pour un certain $\alpha\in\mathbb{R}_+$, $\beta\in\mathbb{R}_-$, et $|b(n)|<2^{-\beta}$. Pour un entier positif arbitraire r et pour $(k,\ell)=1$ ou k, on a*

$$\sum_{\substack{2\le n\le x\\ n\equiv\ell(k)}}\frac{1}{\log f(n)}=x\sum_{k=1}^{r}\frac{a_j}{(\alpha\log x)^j}+0\left(\frac{x}{(\log x)^{r+1}}\right),$$

où $a_1=1/k$ et, en général

$$a_j=(-1)^{j-1}E^{(j-1)}(0),\ \text{avec}$$

$E(t)=G(1,k,t)/\alpha t+1$, $G(1,k,t)$ étant défini dans l'énoncé du théorème 2.

Preuve. Soit $t\in(-(1/\alpha),0]$, *alors par l'équation* (6) *nous avons*

$$\text{(9)}\qquad \sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv\ell(k)}}f^t(n)=\begin{cases}\dfrac{G(1,k,t)}{\alpha t+1}x^{\alpha t+1}+\dfrac{\alpha tG(1,k,t)}{\alpha t+1}+0(x^{\alpha t}\log x) & \text{si}\quad \beta=-1\\[2ex] \dfrac{G(1,k,t)}{\alpha t+1}x^{\alpha t+1}+\dfrac{\alpha tG(1,k,t)}{\alpha t+1}+0(x^{1+\alpha t+\beta}) & \text{si}\quad \beta\ne-1\end{cases}$$

où $G(1,k,t)$ est défini dans l'énoncé du théorème 2.

Supposons $\beta=-1$, alors pour $c>\alpha$, on a

$$\text{(10)}\qquad \int_{-1/c}^{0}\sum_{\substack{2\le n\le x\\ n\equiv\ell(k)}}f^t(n)\,dt=\sum_{\substack{2\le n\le x\\ n\equiv\ell(k)}}\int_{-1/c}^{0}f^t(n)\,dt$$

$$=\sum_{\substack{2\le n\le x\\ n\equiv\ell(k)}}\frac{1}{\log f(n)}-\sum_{\substack{2\le n\le x\\ n\equiv\ell(k)}}\frac{1}{f^{1/c}(n)\log f(n)}$$

Soit N une constante suffisamment grande telle que $f(n)>n^{\alpha/2}$ pour $n>N$, alors par le lemme d'Abel [3], et l'équation (9), on a

$$\text{(11)}\qquad \sum_{\substack{2\le n\le x\\ n\equiv\ell(k)}}\frac{1}{f^{1/c}(n)\log f(n)}=\left(\sum_{\substack{2\le n\le N\\ n\equiv\ell(k)}}+\sum_{\substack{N\le n\le x\\ n\equiv\ell(k)}}\right)\frac{1}{f^{1/c}(n)\log f(n)}$$

$$=0(1)+0\left(\sum_{\substack{N\le n\le x\\ n\equiv\ell(k)}}\frac{1}{f^{1/c}(n)\log f(n)}\right)$$

$$=0\left(\frac{x^{1-\alpha/c}}{\log x}\right).$$

Ainsi en combinant (9), (10) et (11) nous obtenons

$$\sum_{\substack{2\le n\le x\\ n\equiv\ell(k)}}\frac{1}{\log f(n)}=\int_{-1/c}^{0}\left[\frac{G(1,k,t)}{\alpha t+1}x^{\alpha t+1}+\frac{\alpha tG(1,k,t)}{\alpha t+1}+0(x^{\alpha t}\log x)\right]dt+0\left(\frac{x^{1-\alpha/c}}{\log x}\right)$$

Soit $E(t)=G(1, k, t)/\alpha t+1$, alors

$$\sum_{\substack{2\le n\le x\\ n\equiv \ell(k)}} \frac{1}{\log f(n)}=\int_{-1/c}^{0} x^{\alpha t+1}E(t)+\int_{-1/c}^{0} \alpha tE(t)\,dt \tag{12}$$
$$+\int_{-1/c}^{0} 0(x^{\alpha t}\log x)\,dt+0\left(\frac{x^{1-\alpha/c}}{\log x}\right)$$

Intégrant par parties r fois, on a

$$\int_{-1/c}^{0} x^{\alpha t+1}E(t)\,dt=x\frac{E(t)x^{\alpha t}}{\alpha\log x}\Big|_{-1/c}^{0}-x\frac{E'(t)x^{\alpha t}}{(\alpha\log x)^2}\Big|_{-1/c}^{0}$$
$$+x\frac{E''(t)x^{\alpha t}}{(\alpha\log x)^2}\Big|_{-1/c}^{0}+\cdots+x\frac{(-1)^rE^{(r-1)}(t)x^{\alpha t}}{(\alpha\log x)^r}\Big|_{-1/c}^{0}$$
$$+\frac{x(-1)^{r+1}}{(\alpha\log x)^{r+1}}\int_{-1/c}^{0} E^{(r)}(t)x^{\alpha t}\,dt.$$

Comme $E^{(r)}(t)x^{\alpha t}=0(1)$ pour $t\in[-1/c, 0]$, alors cette dernière intégrale est bornée et de plus, pour $0\le i\le r$, on a

$$\frac{xE^{(i)}(-1/c)x^{-\alpha/c}}{(\alpha\log x)^i}=0\left(\frac{x^{1-\alpha/c}}{(\log x)^i}\right).$$

Posons $a_j=(-1)^{j-1}E^{(j-1)}(0)$, alors

$$\int_{-1/c}^{0} x^{\alpha t+1}E(t)\,dt=x\sum_{j=1}^{r}\frac{a_j}{(\alpha\log x)^j}+0\left(\frac{x}{(\log x)^{r+1}}\right). \tag{13}$$

De plus,

$$\int_{-1/c}^{0} \alpha tE(t)\,dt=0(1), \tag{14}$$

et

$$\int_{-1/c}^{0} x^{\alpha t}\log x\,dt=\log x\int_{-1/c}^{0} x^{\alpha t}\,dt=0(1) \tag{15}$$

Remplaçant les équations (13), (14) et (15) dans (12) on obtient le résulta demandé. De même, pour $\beta\neq -1$.

Les deux applications suivantes découlent du théorème précédent.

Corollaire 4.1. *Pour $(k, \ell)=1$ ou k, on a*

$$\sum_{\substack{2\le n\le x\\ n\equiv \ell(k)}} \frac{1}{\log \sigma(n)}=x\sum_{j=1}^{r}\frac{a_j}{(\log x)^j}+0\left(\frac{x}{(\log x)^{r+1}}\right)$$

où $a_1=1/k$ et tous les autres a_j sont calculables.

COROLLAIRE 4.2. *Pour* $(k, \ell)=1$ *ou* k, *on a*

$$\sum_{\substack{2\le n\le x\\ n\equiv\ell(k)}} \frac{1}{\log \phi(n)} = x\sum_{j=1}^{r} \frac{a_j}{(\log x)^j} + 0\left(\frac{x}{(\log x)^{r+1}}\right)$$

où $a_1 = 1/k$ *et tous les autres* a_j *sont calculables.*

THÉOREME 5. *Soit* f *une fonction multiplicative à valeurs positives telle que* $f(n)n^{-\alpha} = 1 + b(n)n^{\beta}$ *pour un certain* $\alpha\in\mathbb{R}_+$, $\beta\in\mathbb{R}_-$ *et* $|b(n)|<2^{-\beta}$. *Pour un entier positif arbitraire* r *et pour tout* $k\in\mathbb{N}$, *on a*

$$\sum_{\substack{2\le n\le x\\ (n,k)=1}} \frac{1}{\log f(n)} = \phi(k)x\sum_{j=1}^{r} \frac{a_j}{(\alpha \log x)^j} + 0\left(\frac{x}{\log x^{r+1}}\right)$$

où $a_1 = 1/k$ *et, en général*

$$a_j = (-1)^{j-1}E^{(j-1)}(0), \quad avec$$

$E(t) = G(1, k, t)/\alpha t + 1$, *et* $G(1, k, t)$ *étant défini dans l'énoncé du théorème* 3.

Preuve. Il suffit de considérer l'équation (8) du théorème 3 et d'appliquer la méthode utilisée du théorème 4.

BIBLOGRAPHIE

1. T. M. Apostol, *Introduction to analytic number theory*, Springer Verlag, 1976.

2. E. Brinitzer, *Eine asymptotishe former für summen über die reziproken werte additiver funktionen*, Acta arith., **XXXII**, 1977, 387–391.

3. K. Chandrasekharan, *Introduction to analytic number theory*, Springer Verlag, 1968.

4. J. M. De Koninck, *On a class of arithmetical functions*, Duke Math. J. **(39)**, (1972), 807–818.

5. J. M. De Koninck et J. Galambos, *Sums of reciprocals of additive functions, Acta arith.* **XXV,** (1974), 159–164.

6. J. M. De Koninck et A. Mercier, *Remarque sur un article de T. M. Apostol*, Bull. Canad. de Math. Vol **20** (1), (1977), 77–88.

7. R. L. Duncan, *On the factorization of integers*, Proc. Amer. Math. Soc., **25,** (1970), 191–192.

8. G. H. Hardy et E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, fourth edition, Oxford University Press, London, 1968.

9. E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Zwerter Band, Teubner, Berlin 1909.

10. E. Landau, *Remarks on the paper of Mr. Kluyver on page* 305 *of Vol VI: Series derived from the series* $\sum \mu(m)/m$, Koningl. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. Sect. Sci. **7** (1905) 66–67.

11. A. Renyi, *Additive and multiplicative number theoretic functions*, Lectures notes, University of Michigan, Ann Arbor, 1965.

12. S. L. Segal, *On prime independent additive functions*, Archiv der mathematik, Vol **XVII** (1966), 329–332.

13. A. Selberg, *Note on a paper by L. G. Sathe*, J. Indian Math. Soc., **18** (1954), 83–87.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À CHICOUTIMI
930 EST, RUE JACQUES-CARTIER
CHICOUTIMI (QUÉ.) CANADA G7H 2B1

https://doi.org/10.4153/CMB-1979-009-8 Published online by Cambridge University Press