Canad. J. Math. Vol. **68** (6), 2016 pp. 1382–1435
http://dx.doi.org/10.4153/CJM-2015-054-9

La Variante infinitésimale de la formule des traces de Jacquet–Rallis pour les groupes unitaires

Michał Zydor

Résumé. Nous établissons une variante infinitésimale de la formule des traces de Jacquet–Rallis pour les groupes unitaires. Notre formule s'obtient par intégration d'un noyau tronqué à la Arthur. Elle possède un côté géométrique qui est une somme de distributions $J_{\mathfrak{o}}$ indexée par les classes d'éléments de l'algèbre de Lie de $U(n+1)$ stables par $U(n)$-conjugaison ainsi qu'un "côté spectral" formé des transformées de Fourier des distributions précédentes. On démontre que les distributions $J_{\mathfrak{o}}$ sont invariantes et ne dépendent que du choix de la mesure de Haar sur $U(n)(\mathbb{A})$. Pour des classes $\mathfrak{o}$ semi-simples régulières, $J_{\mathfrak{o}}$ est une intégrale orbitale relative de Jacquet–Rallis. Pour les classes $\mathfrak{o}$ dites relativement semi-simples régulières, on exprime $J_{\mathfrak{o}}$ en terme des intégrales orbitales relatives régularisées à l'aide des fonctions zêta.

1 Introduction

1.1 Contexte

Jacquet et Rallis [11] ont proposé une approche à la conjecture globale de Gan, Gross, et Prasad pour les groupes unitaires via une formule des traces relatives [6]. Soient E/F une extension quadratique de corps globaux, $\sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)$ non-trivial, $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de F, et $\eta\colon F^*\backslash\mathbb{A}^* \to \mathbb{C}^*$ le caractère quadratique associé à l'extension E/F par la théorie du corps de classes. Fixons V et W des E-espaces hermitiens non-dégénérés, de dimensions n et $n+1$, respectivement, munis de l'inclusion $V \hookrightarrow W$ et notons $U = U(V)$ et $\widetilde{U} = U(W)$, les groupes unitaires associés. L'inclusion $V \hookrightarrow W$ réalise U comme un sous-groupe de $\widetilde{U}$. Les formules des traces qu'ils suggèrent les mènent à postuler l'égalité entre les intégrales formelles suivantes :

(1.1)
$$\int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} \sum_{\gamma\in\widetilde{U}(F)} f(x^{-1}\gamma x)\,dx = \int_{GL_n(F)\backslash GL_n(\mathbb{A})} \sum_{\gamma'\in S_{n+1}(F)} g(x^{-1}\gamma' x)\eta(\det x)\,dx$$

où $S_{n+1}(F) = \{x \in GL_{n+1}(E) : x\sigma(x) = 1\}$, f et g sont des fonctions lisses à support compact sur $U(\mathbb{A})$ et $S_{n+1}(\mathbb{A})$, respectivement, qui vérifient certaines conditions de compatibilité des intégrales orbitales locales.

Ces formules des traces sont liées à la conjecture de Gan, Gross, et Prasad de la façon suivante. Chacune des deux intégrales peut être vue comme une période d'un

Reçu par la rédaction le 2 mars 2015; revu le 16 septembre 2015.
Publié electronique au 30 août 2016.
Ce travail a été partiellement soutenu par le projet Ferplay ANR-13-BS01-0012.
Classification (AMS) par sujet: **11F70**, 11F72.
Mots clés: formule des traces relative.

noyau automorphe. Au moins formellement, chacune admet deux développements : l'un, qui exploite la décomposition spectrale du noyau automorphe, est la somme des périodes des représentations du spectre automorphe, l'autre, qui utilise l'action de U sur $\widetilde{U}$ et de GL_n sur S_{n+1}, est une somme des intégrales orbitales relatives. Pour GL_n, les périodes automorphes sont reliés à des valeurs spéciales de fonctions L par la théorie de Rankin–Selberg. L'égalité (1.1) relie les périodes des groupes unitaires à celles de GL_n et donc aux valeurs spéciales de fonctions L. Cette égalité devrait résulter de l'égalité des décompositions géométriques.

Zhang [18, proposition 2.11], établit l'égalité (1.1) pour des fonctions vérifiant certaines contraintes locales. Il s'en est servi pour démontrer une partie substantielle de la conjecture de Gan–Gross–Prasad. Cette même formule des traces a ensuite permis à Zhang [19] d'obtenir certains cas du raffinement de la conjecture de Gan–Gross–Prasad dû à Ichino et Ikeda [8] pour les groupes orthogonaux et adapté aux groupes unitaires par Harris [7].

1.2 Nos résultats

Les deux intégrales dans (1.1) ne sont pas convergentes en général et elles nécessitent d'être tronquées. Dans cet article nous nous proposons de donner une version infinitésimale de la formule des traces relative de Jacquet–Rallis dans le cas des groupes unitaires par un processus de troncature d'après Arthur. Le cas des groupes linéaires est traité dans [20].

Plus précisément, la formule qu'on tronque est

$$\int_{U(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A})} \sum_{\xi\in\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathrm{F})} f(x^{-1}\xi x)\,dx = \int_{U(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A})} k_f(x)\,dx, \quad f\in\mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A})) \tag{1.2}$$

où $\widetilde{\mathfrak{u}}$ est l'algèbre de Lie du groupe unitaire $\widetilde{U}$ et $\mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}))$ est l'espace des fonction de classe Bruhat–Schwartz sur $\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A})$ (voir § 2.6).

Décrivons notre troncature brièvement. Fixons P_0 un F-sous-groupe parabolique minimal de U ainsi qu'une décomposition de Levi $P_0 = M_0N_0$ avec M_0 une partie de Levi de P_0 et N_0 son radical unipotent. Tout sous-groupe parabolique standard P, *i.e.*, $P\supseteq P_0$, admet alors une décomposition unique de Levi $P = M_PN_P$ où $M_0\subseteq M_P$. Tout sous-groupe parabolique standard de U est défini comme le stabilisateur d'un drapeau isotrope dans V. On associe à tout sous-groupe parabolique standard P le sous-groupe parabolique $\widetilde{P}$ de $\widetilde{U}$ défini comme le stabilisateur du même drapeau que P mais vu dans l'espace hermitien W. On a alors une décomposition unique de Levi $M_{\widetilde{P}}N_{\widetilde{P}}$ de $\widetilde{P}$ telle que $M_{\widetilde{P}}\supseteq M_P$. Dans §2.3 on décrit une décomposition de $\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathrm{F})$ en classes stables par $U(\mathrm{F})$-conjugaison ; on note $\mathcal{O}$ l'ensemble de ces classes.

Pour un sous-groupe parabolique standard P, $\mathfrak{o}\in\mathcal{O}$, et $f\in\mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}))$ on pose

$$k_{f,P,\mathfrak{o}}(x) = \sum_{\xi\in\mathrm{Lie}(M_{\widetilde{P}})(\mathrm{F})\cap\mathfrak{o}} \int_{\mathrm{Lie}(N_{\widetilde{P}})(\mathbb{A})} f(x^{-1}(\xi+U)x)\,dU,\ x\in M_P(\mathrm{F})N_P(\mathbb{A})\backslash U(\mathbb{A}).$$

Le noyau tronqué est défini alors comme

$$k^T_{f,\mathfrak{o}}(x) = \sum_{P\supseteq P_0}(-1)^{d_P}\sum_{\delta\in P(\mathrm{F})\backslash U(\mathrm{F})}\hat{\tau}_P(H_P(\delta x)-T)k_{f,P,\mathfrak{o}}(\delta x),\ x\in U(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A})$$

où, si l'on pose $\mathfrak{a}_P := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{F}}(M_P, \mathbb{G}_m), \mathbb{R})$, alors $H_P\colon U(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_P$ est l'application de Harish–Chandra qui dépend du choix d'un sous-groupe compact maximal dans $U(\mathbb{A})$, $\hat{\tau}_P$ est la fonction caractéristique d'un cône obtus dans $\mathfrak{a}_P$, $d_P = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}_P$ et T est un paramètre dans $\mathfrak{a}_0 := \mathfrak{a}_{P_0}$ (voir §2.1). Remarquons que Ichino et Yamana [9], en s'inspirant de [10], définissent des périodes régularisés qui apparaissent dans le contexte de la conjecture globale de Gan–Gross–Prasad pour les groupes unitaires et leur opérateur de troncature Λ_m^T utilise les mêmes ensembles des sous-groupes paraboliques de U et $\widetilde{U}$ que nous. Notre premier résultat, démontré dans §3, est alors le suivant.

Théorème 1.1 (*cf.* Théorème 3.1) *Pour tout $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ on a*

$$\sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}} \int_{U(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A})} |k_{f,\mathfrak{o}}^T(x)|\, dx < \infty.$$

Ici $\mathfrak{a}_0^+$ c'est le cône aigu engendré par les combinaisons linéaires à coefficients positifs de copoids dans $\mathfrak{a}_0$ et $T_+ \in \mathfrak{a}_0^+$ est précisé dans §2.1.

Ensuite, on s'intéresse au comportement de l'application

$$T \mapsto \int_{U(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A})} k_{f,\mathfrak{o}}^T(x)\, dx.$$

Dans §4.3 on obtient le suivant.

Théorème 1.2 (*cf.* Théorème 4.5) *La fonction $T \mapsto J_{\mathfrak{o}}^T(f) := \int_{U(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A})} k_{f,\mathfrak{o}}^T(x)\, dx$ où T parcourt $T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ est un polynôme-exponentielle (voir §4.2) dont la partie purement polynomiale est constante.*

En fait, si l'on remplace l'intégrale dans (1.2) par $\int_{U(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A})} F^U(x,T) k_f(x)\, dx$ où la fonction F^U est à support compact (voir §2.1), alors on obtient une expression convergente. D'après les résultats de [13], cette expression est asymptotiquement un polynôme-exponentielle en T. Notre distribution $J_{\mathfrak{o}}^T$ égale alors ce polynôme-exponentielle (*cf.* Corollaire 3.3).

On note $J_{\mathfrak{o}}(f)$ la partie constante du polynôme-exponentielle $J_{\mathfrak{o}}^T(f)$. Il s'avère que la distribution $J_{\mathfrak{o}}$ a des propriétés remarquables. On obtient

- la distribution $J_{\mathfrak{o}}$ est invariante par conjugaison par $U(\mathbb{A})$ (*cf.* Théorème 4.7),
- la distribution $J_{\mathfrak{o}}$ ne dépend que du choix de la mesure de Haar sur $U(\mathbb{A})$ (*cf.* §4.5).

Dans §4.6, on constate que les distributions $J_{\mathfrak{o}}^T$ pour les classes semi-simples régulières, c'est-à-dire les classes composées d'une seule $U(\mathrm{F})$-orbite de stabilisateur trivial, ne dépendent pas du paramètre T, donc $J_{\mathfrak{o}}^T = J_{\mathfrak{o}}$, et qu'elles s'expriment comme des intégrales orbitales relatives qui apparaissaient déjà dans [11].

Dans§5 on obtient la formule des traces de Jacquet–Rallis infinitésimale pour les groupes unitaires.

Théorème 1.3 (*cf.* Théorème 5.1) *Pour tout $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}))$ on a*

$$\sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}} J_{\mathfrak{o}}(f) = \sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}} J_{\mathfrak{o}}(\hat{f}).$$

Ici $\hat{f}$ c'est une transformée de Fourier (on en considère plusieurs) de f.

La section 6 est consacrée à donner une expression plus explicite des distributions $J_{\mathfrak{o}}$ pour des $\mathfrak{o}$ dites relativement semi-simples régulières. Ces classes sont des réunions finies d'orbites et ses éléments admettent des tores pour centralisateurs. Soient $\mathfrak{o}$ une telle classe et P un sous-groupe parabolique standard de U tel que l'unique orbite fermée dans $\mathfrak{o}$ intersecte $\mathrm{Lie}(M_{\widetilde{P}})(\mathrm{F})$ non-trivialement, minimal pour cette propriété. On choisit des représentants $X_{\mathcal{I}}$ des orbites de dimension maximale dans $\mathfrak{o}$ de façon qu'ils aient le même centralisateur, noté T_0, qui vérifie $T_0 \subseteq M_P$. Le F-tore T_0 est alors anisotrope et le quotient $T_0(\mathrm{F})\backslash T_0(\mathbb{A})$ est compact. Pour $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}))$ et $X_{\mathcal{I}}$ l'intégrale

$$\zeta_{\mathcal{I}}(f)(\lambda) = \mathrm{vol}(T_0(\mathrm{F})\backslash T_0(\mathbb{A})) \int_{T_0(\mathbb{A})\backslash U(\mathbb{A})} f(\mathrm{Ad}(x^{-1})X_{\mathcal{I}}) e^{\lambda(H_P(x))}\, dx,$$

pour tout $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_P, \mathbb{C})$, converge sur un ouvert de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_P, \mathbb{C})$ qui dépend de $X_{\mathcal{I}}$, et admet un prolongement méromorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_P, \mathbb{C})$ noté aussi $\zeta_{\mathcal{I}}(f)$. La fonction $\zeta_{\mathcal{I}}(f)$ peut avoir un pôle en $\lambda = 0$ mais la somme de $\zeta_{\mathcal{I}}(f)$ sur toutes les orbites de dimension maximale dans $\mathfrak{o}$ n'en a pas. En fait, la valeur en $\lambda = 0$ de cette somme est liée à notre distribution de la façon suivante.

Théorème 1.4 (*cf.* Théorème 6.12) *On a* $J_{\mathfrak{o}}(f) = (\sum_{X_{\mathcal{I}}} \zeta_{\mathcal{I}}(f))(0)$ *où la somme porte sur toutes les orbites de dimension maximale dans* $\mathfrak{o}$.

Dans [20] on définit aussi la notion d'une classe relativement semi-simple régulière dans le contexte du groupe linéaire et on obtient une formule complètement analogue.

La troncature que nous proposons et ses propriétés se transposent bien dans le cas des groupes et donnent le développement géométrique de la formule des traces de Jacquet–Rallis pour les groupes unitaires. Ceci sera établi dans [21] où on donnera les formules des traces relatives de Jacquet–Rallis grossières. Par ailleurs, notre formule a un intérêt propre. Elle peut être un outil puissant pour des questions d'analyse harmonique locale. Par exemple dans le cas de l'endoscopie classique, un analogue simple pour les algèbres de Lie de la formule des traces d'Arthur joue un rôle central dans la preuve du transfert par Waldspurger [17]. Notons aussi que Zhang [18] a passé par les algèbres de Lie pour démontrer le transfert dans la formule des traces simple qu'il utilise.

2 Prolégomènes

2.1 Préliminaires pour la formule des traces

Soient F un corps de nombres et U un F-groupe algébrique réductif. Pour tout F-sous-groupe de Levi M de U (c'est-à-dire un facteur de Levi d'un F-sous-groupe parabolique de U) soit $\mathcal{F}(M)$ l'ensemble des F-sous-groupes paraboliques de U contenant M et $\mathcal{P}(M)$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}(M)$ composé des sous-groupes paraboliques admettant M comme facteur de Levi. On fixe un sous-groupe de Levi minimal M_0 de U. Fixons aussi un $P_0 \in \mathcal{P}(M_0)$. On appelle les éléments de $\mathcal{F}(M_0)$ les sous-groupes paraboliques semi-standards et les éléments de $\mathcal{F}(M_0)$ contenant P_0 les sous-groupes paraboliques standards. Tout F-sous-groupe parabolique de U est $U(\mathrm{F})$-conjugué à un

https://doi.org/10.4153/CJM-2015-054-9 Published online by Cambridge University Press

unique sous-groupe parabolique standard. On utilisera toujours le symbole P, éventuellement avec des indices, pour noter un sous-groupe parabolique semi-standard. Pour tout $P \in \mathcal{F}(M_0)$ soit N_P le radical unipotent de P et M_P le facteur de Levi de P contenant M_0. On a alors $P = M_P N_P$. On note A_P le tore central de M_P déployé sur F et maximal pour cette propriété. Les objets associés au sous-groupe P_0 seront noté avec l'indice 0 ; on écrit donc N_0, A_0 au lieu de N_{P_0}, A_{P_0}, etc. De même, quand il n'y aura pas d'ambiguïté on écrit N_1 au lieu de N_{P_1}, etc. pour un $P_1 \in \mathcal{F}(M_0)$.

Soit $P \in \mathcal{F}(M_0)$. On définit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel

$$\mathfrak{a}_P := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{F}}(M_P, \mathbb{G}_m), \mathbb{R}),$$

isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{F}}(A_P, \mathbb{G}_m), \mathbb{R})$ grâce à l'inclusion $A_P \hookrightarrow M_P$, ainsi que son espace dual $\mathfrak{a}_P^* = \mathrm{Hom}_{\mathrm{F}}(M_P, \mathbb{G}_m) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et on pose

$$d_P = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}_P, \quad d_Q^P = d_Q - d_P,\ Q \subseteq P. \tag{2.1}$$

Si $P_1 \subseteq P_2$, on a un homomorphisme injectif canonique $\mathfrak{a}_2^* \hookrightarrow \mathfrak{a}_1^*$ qui donne la projection $\mathfrak{a}_1 \twoheadrightarrow \mathfrak{a}_2$, dont on note $\mathfrak{a}_1^2 = \mathfrak{a}_{P_1}^{P_2}$ le noyau. On a aussi l'inclusion $\mathfrak{a}_2 \hookrightarrow \mathfrak{a}_1$, qui est une section de $\mathfrak{a}_1 \twoheadrightarrow \mathfrak{a}_2$, grâce à la restriction des caractères de A_1 à A_2. Il s'ensuit que si $P_1 \subseteq P_2$, alors

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1^2 \oplus \mathfrak{a}_2. \tag{2.2}$$

Conformément à cette décomposition, on pose aussi

$$(\mathfrak{a}_1^2)^* = \{\lambda \in \mathfrak{a}_1^* \mid \lambda(H) = 0\ \forall H \in \mathfrak{a}_2\}.$$

Grâce à la décomposition (2.2), on considère les espaces $\mathfrak{a}_1^*$ et $(\mathfrak{a}_1^2)^*$ comme des sous-espaces de $\mathfrak{a}_0^*$.

Notons $\Delta_P^U = \Delta_P$, l'ensemble de racines simples pour l'action de A_P sur N_P. Il y a une correspondance bijective entre les sous-groupes paraboliques P_2 contenant P_1 et les sous-ensembles $\Delta_1^2 = \Delta_{P_1}^{P_2}$ de $\Delta_1 = \Delta_{P_1}$. En fait, Δ_1^2 est l'ensemble de racines simples pour l'action de A_1 sur $N_1 \cap M_2$ et l'on a $\mathfrak{a}_2 = \{H \in \mathfrak{a}_1 \mid \alpha(H) = 0, \forall \alpha \in \Delta_1^2\}$. En plus, Δ_1^2 (les restrictions de ses éléments à $\mathfrak{a}_1^2$) est une base de $(\mathfrak{a}_1^2)^*$.

Fixons $P_1 \subseteq P_2$ et soit $B \in \mathcal{P}(M_0)$ contenu dans P_1. On a alors l'ensemble $\Delta_B^\vee = \{\alpha^\vee \in \mathfrak{a}_0 \mid \alpha \in \Delta_B\}$ de coracines simples associées aux racines simples Δ_B. A une racine $\alpha \in \Delta_1^2$ on associe de manière univoque une coracine $\alpha^\vee \in \mathfrak{a}_1^2$ de façon suivante : α est une restriction d'une unique $\alpha_0 \in \Delta_B^2 \smallsetminus \Delta_B^1$ à $\mathfrak{a}_1^2$ et on définit $\alpha^\vee$ comme la projection de $\alpha_0^\vee$ à $\mathfrak{a}_1^2$. Cela ne dépend pas du choix de B. Notons également $\widehat{\Delta}_1^2$ et $(\widehat{\Delta}_1^2)^\vee$ les bases de $(\mathfrak{a}_1^2)^*$ et $\mathfrak{a}_1^2$ duales à $(\Delta_1^2)^\vee$ et Δ_1^2, respectivement. Si $P_2 = U$, on note simplement $\Delta_1, \Delta_1^\vee$, etc.

Soient $P, P_1, P_2 \in \mathcal{F}(M_0)$. On note $\mathfrak{a}_P^+ = \{H \in \mathfrak{a}_P \mid \alpha(H) > 0\ \forall \alpha \in \Delta_P\}$ et si $P_1 \subseteq P_2$, notons $\tau_1^2, \hat{\tau}_1^2$ les fonction caractéristiques de

$$\{H \in \mathfrak{a}_1 \mid \alpha(H) > 0\ \forall \alpha \in \Delta_1^2\}, \quad \{H \in \mathfrak{a}_1 \mid \varpi(H) > 0\ \forall \varpi \in \widehat{\Delta}_1^2\},$$

respectivement. On note τ_P pour τ_P^U et $\hat{\tau}_P$ pour $\hat{\tau}_P^U$.

Soit $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\mathrm{F}}$ l'anneau des adèles de F et soit $|\cdot|_{\mathbb{A}}$ la valeur absolue standard sur le groupe des idèles $\mathbb{A}^*$. Pour tout $P \in \mathcal{F}(M_0)$, posons $H_P \colon M_P(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_P$ défini comme

$$\langle H_P(m), \chi\rangle = \log(|\chi(m)|_{\mathbb{A}}), \quad \chi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{F}}(M_P, \mathbb{G}_m),\ m \in M_P(\mathbb{A}). \tag{2.3}$$

C'est un homomorphisme continu et surjectif, donc si l'on note $M_P(\mathbb{A})^1$ son noyau, on obtient la suite exacte suivante $1 \to M_P(\mathbb{A})^1 \to M_P(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_P \to 0$. Soit A_P^∞ la composante neutre du groupe des $\mathbb{R}$-points du tore déployé et défini sur $\mathbb{Q}$ maximal pour cette propriété dans le $\mathbb{Q}$-tore $\mathrm{Res}_{\mathrm{F}/\mathbb{Q}} A_P$. Alors, comme $\mathrm{F} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ s'injecte dans $\mathbb{A}$, on a naturellement $A_P^\infty \hookrightarrow A_P(\mathbb{A}) \hookrightarrow M_P(\mathbb{A})$. En plus, la restriction de H_P à A_P^∞ est un isomorphisme, donc $M_P(\mathbb{A})$ est un produit direct de $M_P(\mathbb{A})^1$ et A_P^∞.

Fixons K un sous-groupe compact maximal admissible de $U(\mathbb{A})$ par rapport à M_0. La notion d'admissibilité par rapport à un sous-groupe de Levi minimal est définie dans [1, §1]. On a donc que pour tout sous-groupe parabolique semi-standard P, $K \cap M_P(\mathbb{A})$ est admissible dans $M_P(\mathbb{A})$ et on obtient aussi la décomposition d'Iwasawa $U(\mathbb{A}) = P(\mathbb{A})K = N_P(\mathbb{A})M_P(\mathbb{A})K$ ce qui nous permet d'étendre H_P à $U(\mathbb{A})$ en posant $H_P(x) = H_P(m)$ où $x = nmk$ avec $m \in M_P(\mathbb{A}), n \in N_P(\mathbb{A}), k \in K$. Dans ce cas $H_P(x)$ ne dépend pas du choix de m.

On fixe un $T_1 \in -\mathfrak{a}_0^+$ et un compact $\omega \subseteq N_0(\mathbb{A})M_0(\mathbb{A})^1$ pour qu'on puisse définir $F^P(x, T)$ pour tout $T \in T_1 + \mathfrak{a}_0^+$ comme l'a fait Arthur [2, §6]. Pour tous sous-groupes paraboliques $P_1 \subseteq P_2$ et $T \in T_1 + \mathfrak{a}_0^+$ soit

(2.4) $A_{1,2}^\infty(T)$

$$= \left\{ a \in A_1^\infty \cap M_2(\mathbb{A})^1 \mid \alpha(H_1(a) - T_1) > 0, \varpi(H_1(a) - T) < 0 \ \forall \alpha \in \Delta_1^2, \varpi \in \widehat{\Delta}_1^2 \right\}.$$

Pour un $T \in T_1 + \mathfrak{a}_0^+$ on définit la fonction $F^P(x, T)$ où $x \in U(\mathbb{A})$ comme la fonction caractéristique de la projection de $\omega A_{0,P}^\infty(T)K$ sur $A_P^\infty N_P(\mathbb{A})M_P(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A})$. On a alors la propriété que si $x = nmak$ où $n \in N_P(\mathbb{A})$, $m \in M_P(\mathbb{A})^1$, $a \in A_P^\infty$, et $k \in K$, alors $F^P(x, T) = F^P(m, T)$. Fixons aussi un $T_+ \in \mathfrak{a}_0^+$ tel que pour tout $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ et pour tout sous-groupe parabolique P, les fonctions $F^P(\cdot, T)$ sont définies et vérifient le lemme 6.4 de [2]. En particulier, on peut choisir le compact ω, et on le fait de façon que la fonction F^P restreint à $M_P(\mathbb{A})$ soit égale à F^{M_P} relativement aux compacts $\omega \cap M_P(\mathbb{A})$ et $K \cap M_P(\mathbb{A})$.

On note Ω le groupe de Weyl de (U, A_0). Celui-ci opère naturellement sur les espaces $\mathfrak{a}_0$ et $\mathfrak{a}_0^*$. Pour tout $s \in \Omega$, on choisit un représentant w_s dans l'intersection de $U(\mathrm{F})$ avec le normalisateur de A_0.

Pour tous $P, Q \in \mathcal{F}(M_0)$ notons $\Omega(\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_Q)$ l'ensemble des isomorphismes distincts de $\mathfrak{a}_P$ sur $\mathfrak{a}_Q$ obtenus par restriction d'un élément de Ω à $\mathfrak{a}_P$. Pour tout $s_0 \in \Omega(\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_Q)$ il existe un unique $s \in \Omega$ tel que la restriction de s à $\mathfrak{a}_P$ soit s_0 et $s^{-1}\alpha$ est une combinaison linéaire à coefficients positifs d'éléments de Δ_0 pour tout $\alpha \in \Delta_0^Q$. Ainsi, on peut voir $\Omega(\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_Q)$ comme un sous-ensemble de Ω.

Fixons maintenant un sous-groupe parabolique standard P_1. Pour un sous-groupe parabolique standard P notons $\Omega(\mathfrak{a}_1, P)$ l'ensemble de $s \in \bigcup_{Q \supseteq P_0} \Omega(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_Q)$ tels que $\mathfrak{a}_P \subseteq s\mathfrak{a}_1$ et $s^{-1}\alpha$ est une combinaison linéaire à coefficients positifs d'éléments de Δ_1 pour tout $\alpha \in \Delta_Q^P$. Si l'on pose alors

$$\mathcal{F}(M_1, P) = \{Q \in \mathcal{F}(M_1) | \exists \gamma \in U(\mathrm{F}) | \gamma Q \gamma^{-1} = P\},$$

on a la décomposition en parties disjointes $\mathcal{F}(M_1) = \coprod_{P \supseteq P_0} \mathcal{F}(M_1, P)$ ainsi que la bijection entre $\Omega(\mathfrak{a}_1, P)$ et $\mathcal{F}(M_1, P)$ donnée par

$$\Omega(\mathfrak{a}_1, P) \ni s \mapsto s^{-1}P \in \mathcal{F}(M_1, P) \tag{2.5}$$

où l'on note $s^{-1}P := w_s^{-1}Pw_s$.

Pour tous $P \in \mathcal{F}(M_0)$, $s \in \Omega$, $T \in \mathfrak{a}_0$, et $x \in U(\mathbb{A})$ notons la formule

$$\hat{\tau}_P(H_P(w_s x) - T) = \hat{\tau}_{s^{-1}P}(H_{s^{-1}P}(x) - s^{-1}T - H_{s^{-1}P}(w_s^{-1})). \tag{2.6}$$

Notons finalement, que parfois, pour économiser l'espace, on utilisera la notation $[G]$ pour noter $G(\mathrm{F})\backslash G(\mathbb{A})$.

2.2 Généralités sur le groupe unitaire

Soit E une extension quadratique de F avec σ le générateur du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathrm{E}/\mathrm{F})$. Soit W un E-espace vectoriel de dimension finie $n+1$, où $n \in \mathbb{N}$, muni d'une forme hermitienne non-dégénérée $\widetilde{\Phi}$, et notons $\widetilde{U} = U(W, \widetilde{\Phi})$ le groupe unitaire associé. Choisissons $e_0 \in W$ tel que $v_0 := \widetilde{\Phi}(e_0, e_0) \neq 0$. Notons D_0 la droite engendrée par e_0 et soit V le sous-espace de W orthogonal à D_0. La restriction de $\widetilde{\Phi}$ à V, notée Φ, est alors non-dégénérée et l'on pose $U = U(V, \Phi)$. Les groupes $\widetilde{U}$ et U sont des F-groupes algébriques et l'on voit U comme un sous-groupe de $\widetilde{U}$ grâce à l'inclusion $V \hookrightarrow W$.

Un sous-espace $V' \subseteq V$ est appelé *isotrope* si pour tous $v_1, v_2 \in V'$ on a $\Phi(v_1, v_2) = 0$. Soit d_0 l'indice de Witt de Φ, c'est-à-dire le maximum des dimensions de sous-espaces isotropes de V. Fixons donc V_{d_0} et $V_{d_0}^\sharp$ deux sous-espaces isotropes de V de dimension d_0 qui sont en dualité grâce à Φ et choisissons d droites $D_1, \ldots, D_{d_0}$ (resp. $D_1^\sharp, \ldots, D_{d_0}^\sharp$) engendrant V_{d_0} (resp. $V_{d_0}^\sharp$) de façon que $\Phi(D_i, D_j^\sharp) \neq \{0\}$ si et seulement si $i = j$ pour tous $1 \le i, j \le d_0$. Pour $i = 0, \ldots, d_0$ posons $V_i = \bigoplus_{k=1}^i D_i$, $V_i^\sharp = \bigoplus_{k=1}^i D_i^\sharp$ et Z_i le complément orthogonal de $V_i \oplus V_i^\sharp$ dans V. Notons $Z = Z_{d_0}$ et remarquons que la restriction de Φ à Z est anisotrope. On a alors

$$Z_i = Z \bigodot_{k=i+1}^{d_0} (D_k \oplus D_k^\sharp), \quad V = V_i^\perp \oplus V_i^\sharp = V_i \oplus Z_i \oplus V_i^\sharp, \quad i = 0, 1, \ldots d_0.$$

Par *drapeau isotrope* dans V, on entend une suite $V_0', \ldots, V_j'$ de sous-espaces isotropes de V telle que $V_0' = \{0\}$ et $V_{i-1}' \subsetneq V_i'$ pour $i = 1, \ldots, j$. Les stabilisateurs des drapeaux isotropes dans U sont précisément les sous-groupes paraboliques de U définis sur F. Soit M_0 le sous-groupe de U défini par le fait qu'il fixe les droites $D_i, D_j^\sharp$ pour tous $1 \le i, j \le d_0$ et $M_0|_Z = U(\Phi_{|Z})$. Alors M_0 est un sous-groupe de Levi minimal de U. Les éléments de $\mathcal{F}(M_0)$ sont en bijection avec des drapeaux isotropes de type

$$\{0\} = V_0' \subsetneq V_1' \subsetneq \cdots \subsetneq V_j' \tag{2.7}$$

où V_i' est engendré par certaines des droites $D_1, \ldots, D_{d_0}, D_1^\sharp, \ldots, D_{d_0}^\sharp$ pour $i = 0, \ldots, j$ (de façon que V_i' soit isotrope). Si $P \in \mathcal{F}(M_0)$ stabilise le drapeau comme (2.7), on pose

$$V_P := V_j', \quad Z_P = Z \bigodot_{\substack{1 \le i \le d_0 \\ (D_i \oplus D_i^\sharp) \cap V_P = \{0\}}} (D_i \oplus D_i^\sharp), \quad V_P^\sharp = \bigoplus_{\substack{1 \le i \le d_0 \\ D_i \subseteq V_P}} D_i^\sharp \oplus \bigoplus_{\substack{1 \le i \le d_0 \\ D_i^\sharp \subseteq V_P}} D_i.$$

On a alors $V = V_P \oplus Z_P \oplus V_P^\sharp$.

Pour se placer dans le cadre du paragraphe 2.1 on choisit le sous-groupe parabolique minimal $P_0 \in \mathcal{F}(M_0)$ défini comme le stabilisateur du drapeau isotrope

$$\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{d_0-1} \subsetneq V_{d_0}.$$

Alors, les sous-groupes paraboliques standards de U correspondent aux $l+1$-uplets $(i_0, i_1, \ldots, i_l)$ où $0 \le l \le d_0$ et $0 = i_0 < i_1 \cdots < i_l \le d_0$. Le l-uplet $(i_0, i_1, \ldots, i_l)$ correspond au sous-groupe de U fixant le drapeau

$$\{0\} = V_{i_0} \subseteq \cdots \subseteq V_{i_l}. \tag{2.8}$$

Pour un sous-groupe parabolique semi-standard P dans U défini par un drapeau comme dans (2.7), notons $\widetilde{P}$ le sous-groupe parabolique de $\widetilde{U}$ fixant le même drapeau sauf que l'on regarde les sous-espaces V_i' comme des sous-espaces de l'espace hermitien W.

Soit $M_{\widetilde{0}} = M_{\widetilde{P}_0}$ le facteur de Levi de $\widetilde{P}_0$ qui stabilise les droites $D_i, D_j^\sharp$ pour $1 \le i, j \le d_0$. Pour $P \in \mathcal{F}(M_0)$ notons $M_{\widetilde{P}}$ le facteur de Levi de $\widetilde{P}$ contenant $M_{\widetilde{0}}$. L'application $P \mapsto \widetilde{P}$ est une bijection entre $\mathcal{F}(M_0)$ et $\mathcal{F}(M_{\widetilde{0}})$. En plus, sa restriction à $\mathcal{P}(M_Q)$, où $Q \in \mathcal{F}(M_0)$ est fixé, est une bijection entre $\mathcal{P}(M_Q)$ et $\mathcal{P}(M_{\widetilde{Q}})$.

Remarque 2.1 En général, le F-sous-groupe parabolique $\widetilde{P}_0 \subseteq \widetilde{U}$ n'est pas minimal. Il l'est si et seulement s'il n'y a pas de $\nu \in Z$ tel que $\Phi(\nu, \nu) = -\nu_0$.

Posons $\widetilde{\mathfrak{u}} = \mathrm{Lie}(\widetilde{U})$ et $\mathfrak{u} = \mathrm{Lie}(U) \hookrightarrow \widetilde{\mathfrak{u}}$. On définit la forme bilinéaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur $\widetilde{\mathfrak{u}}$ invariante par adjonction donnée par

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \widetilde{\mathfrak{u}} \times \widetilde{\mathfrak{u}} \to \mathbb{G}_a, \quad \langle X, Y\rangle = \mathrm{Tr}(XY). \tag{2.9}$$

Soit $P \in \mathcal{F}(M_0)$. Notons $\mathfrak{m}_P = \mathrm{Lie}(M_P)$, $\mathfrak{m}_{\widetilde{P}} = \mathrm{Lie}(M_{\widetilde{P}})$, $\mathfrak{n}_P = \mathrm{Lie}(N_P)$, et $\mathfrak{n}_{\widetilde{P}} = \mathrm{Lie}(N_{\widetilde{P}})$. Il existe un unique $\overline{P} \in \mathcal{P}(M_P)$, appelé le sous-groupe parabolique opposé à P, tel que $\overline{P} \cap P = M_P$. Notons alors $\overline{\mathfrak{n}}_P := \mathfrak{n}_{\overline{P}}$ et $\overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{P}} := \mathfrak{n}_{\widetilde{\overline{P}}}$. La restriction de la forme $\langle\cdot,\cdot\rangle$ à $\overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{P}} \times \mathfrak{n}_{\widetilde{P}}$ (resp. $\overline{\mathfrak{n}}_P \times \mathfrak{n}_P$) est non-dégénérée, donc l'espace $\overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{P}}$ (resp. $\overline{\mathfrak{n}}_P$) s'identifie à l'espace dual à $\mathfrak{n}_{\widetilde{P}}$ (resp. $\mathfrak{n}_P$) grâce à cette forme.

Pour des sous-groupes paraboliques semi-standards $P_1 \subseteq P_2$ on définit aussi $N_{P_1}^{P_2} := M_{P_2} \cap N_{P_1}$, $\mathfrak{n}_{P_1}^{P_2} := \mathrm{Lie} N_{P_1}^{P_2}$, $\mathfrak{n}_{\widetilde{P}_1}^{\widetilde{P}_2} := \mathrm{Lie}(M_{\widetilde{P}_2} \cap N_{\widetilde{P}_1})$, $\overline{\mathfrak{n}}_{P_1}^{P_2} := \mathfrak{m}_{P_2} \cap \overline{\mathfrak{n}}_{P_1}$, et $\overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{P}_1}^{\widetilde{P}_2} := \mathfrak{m}_{\widetilde{P}_2} \cap \overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{P}_1}$. On a alors $\mathfrak{m}_{P_2} = \overline{\mathfrak{n}}_{P_1}^{P_2} \oplus \mathfrak{m}_{P_1} \oplus \mathfrak{n}_{P_1}^{P_2}$, etc.

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté on écrira les objets associés à $\widetilde{U}$ avec le tilde : donc par exemple, on notera $\mathfrak{m}_{\widetilde{1}}$ au lieu de $\mathfrak{m}_{\widetilde{P}_1}$, $\mathfrak{n}_{\widetilde{1}}^{\widetilde{2}}$ au lieu de $\mathfrak{n}_{\widetilde{P}_1}^{\widetilde{P}_2}$ etc. En particulier les objets associé au groupe $\widetilde{P}_0$ seront noté avec l'indice $\widetilde{0}$.

2.3 Les invariants

Pour un E-espace vectoriel $\mathcal{V}$ soit $\mathfrak{gl}_{E/F}(\mathcal{V})$ le F-groupe algébrique $\mathrm{Res}_{E/F}(\mathrm{End}_E(\mathcal{V}))$. La décomposition $W = V \oplus D_0$ induit l'inclusion $\mathrm{GL}(V) \hookrightarrow \mathrm{GL}(W)$. Soit $X \in$

https://doi.org/10.4153/CJM-2015-054-9 Published online by Cambridge University Press

$\mathfrak{gl}_{\mathrm{E/F}}(W)$. On a

$$X = \begin{pmatrix} B & u \\ v & d \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

où $B \in \mathfrak{gl}_{\mathrm{E/F}}(V)$, $u \in \mathrm{Res}_{\mathrm{E/F}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{E}}(D_0, V))$, $v \in \mathrm{Res}_{\mathrm{E/F}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{E}}(V, D_0))$, et $d \in \mathfrak{gl}_{\mathrm{E/F}}(D_0)$. On identifie u avec $u(e_0) \in \mathrm{Res}_{\mathrm{E/F}}(V)$ et v avec l'élément de $\mathrm{Res}_{\mathrm{E/F}}(V^*)$ défini par $x \mapsto \Phi(e_0, v(x))$. Notons $\mathfrak{u}_1$ l'algèbre de Lie du groupe unitaire $U(D_0, \widetilde{\Phi}|_{D_0})$. On a

$$U(D_0, \widetilde{\Phi}|_{D_0}) \hookrightarrow \mathrm{Res}_{\mathrm{E/F}}(\mathrm{GL}(D_0)), \quad U \hookrightarrow \mathrm{Res}_{\mathrm{E/F}}(\mathrm{GL}(V)), \quad \widetilde{U} \hookrightarrow \mathrm{Res}_{\mathrm{E/F}}(\mathrm{GL}(W))$$

d'où $\mathfrak{u}_1 \hookrightarrow \mathfrak{gl}_{\mathrm{E/F}}(D_0)$, $\mathfrak{u} \hookrightarrow \mathfrak{gl}_{\mathrm{E/F}}(V)$ et $\widetilde{\mathfrak{u}} \hookrightarrow \mathfrak{gl}_{\mathrm{E/F}}(W)$. Donc, on a que $X \in \mathfrak{gl}_{\mathrm{E/F}}(W)$, décomposé comme (2.10), est dans $\widetilde{\mathfrak{u}}$ si et seulement si

$$B \in \mathfrak{u}, \qquad v = u^\sharp := -\Phi(u, \cdot), \qquad d \in \mathfrak{u}_1. \tag{2.11}$$

Le groupe $\mathrm{Res}_{\mathrm{E/F}}\mathrm{GL}(V)$ agit sur $\mathfrak{gl}_{\mathrm{E/F}}(W)$ par conjugaison. On introduit alors les invariants suivants de cette action. Soit $X \in \mathfrak{gl}_{\mathrm{E/F}}(W)$ décomposé comme dans (2.10). On pose $A_0(X) = \Phi(e_0, d(e_0))$ et $A_i(X) = vB^{i-1}u$ pour $i = 1, 2, \dots, n$. Notons aussi $B_i(X)$ les coefficients de polynôme caractéristique de B :

$$\det(T - B) = T^n - B_1(X)T^{n-1} + \cdots + (-1)^n B_n(X).$$

On a alors un F-morphisme $\mathrm{Res}_{\mathrm{E/F}}(\mathrm{GL}(V))$-invariant

$$Q \colon \mathfrak{gl}_{\mathrm{E/F}}(W) \to \mathrm{Res}_{\mathrm{E/F}}(\mathbb{A}_{\mathrm{E}}^{2n+1}),$$

où $\mathbb{A}_{\mathrm{E}}$ c'est la E-droite affine, donné par

$$Q(X) = (A_0(X), A_1(X), \dots, A_n(X), B_1(X), \dots, B_n(X)).$$

On dit que $X \in \mathfrak{gl}_{\mathrm{E/F}}(W)$ est *semi-simple régulier* s'il vérifie les conditions de la proposition suivante, due à [15, théorème 6.1 et proposition 6.3].

Proposition 2.2 *Soit* $X = \left(\begin{smallmatrix} B & u \\ v & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{gl}_{\mathrm{E/F}}(W)$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) $\det(a_{ij}) \neq 0$ *où* $a_{ij} = vB^{i+j}u$, $0 \le i, j \le n-1$.
(ii) *Le stabilisateur de* X *dans* $\mathrm{Res}_{\mathrm{E/F}}(\mathrm{GL}(V))$ *est trivial ; l'orbite de* X *dans* $\mathfrak{gl}_{\mathrm{E/F}}(W)$ *pour l'action de* $\mathrm{Res}_{\mathrm{E/F}}(\mathrm{GL}(V))$ *est fermée pour la topologie de Zariski.*

Par restriction, on a l'application U-invariante $Q \colon \widetilde{\mathfrak{u}} \to \mathrm{Res}_{\mathrm{E/F}}(\mathbb{A}_{\mathrm{E}}^{2n+1})$. On dit qu'un élément de $\widetilde{\mathfrak{u}}$ est semi-simple régulier s'il l'est comme un élément de $\mathfrak{gl}_{\mathrm{E/F}}(W)$. En vertu de la proposition 2.2, l'ensemble des éléments semi-simples réguliers dans $\widetilde{\mathfrak{u}}$ est un ouvert pour la topologie de Zariski. La proposition suivante, démontrée dans [15, proposition 17.2], accentue le rôle privilégié des éléments semi-simples réguliers.

Proposition 2.3 *Soient* X *et* Y *deux éléments semi-simples réguliers de* $\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathrm{F})$. *Alors* $Q(X) = Q(Y)$ *si et seulement s'ils sont conjugués par* $U(\mathrm{F})$.

On introduit une relation d'équivalence sur $\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathrm{F})$:

$$X_1 = \begin{pmatrix} B_1 & u_1 \\ u_1^\sharp & d_1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} B_2 & u_2 \\ u_2^\sharp & d_2 \end{pmatrix} \in \widetilde{\mathfrak{u}}(\mathrm{F})$$

sont équivalents si et seulement s'ils sont dans la même fibre de Q et si les parties semi-simples de B_1 et B_2 sont conjugués sous $U(\mathrm{F})$. Notons $\mathcal{O}$ l'ensemble de classes d'équivalence pour cette relation. Grâce à la proposition 2.3, si $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ est telle qu'il existe un $X \in \mathfrak{o}$ semi-simple régulier, alors tous les éléments de $\mathfrak{o}$ le sont et $\mathfrak{o}$ est une $U(\mathrm{F})$-classe de conjugaison dans $\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathrm{F})$.

On étudiera maintenant les intersection des classes $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ avec les algèbres de Lie de sous-groupes paraboliques relativement standards.

Lemme 2.4 *Soient*

$$X = \begin{pmatrix} B & u \\ u^\sharp & d \end{pmatrix} \in \widetilde{\mathfrak{u}}(\mathrm{F})$$

et $P \in \mathcal{F}(M_0)$. Alors

(i) $X \in \mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F})$ *si et seulement si* $B \in \mathfrak{m}_P(\mathrm{F})$ *et* $u \in Z_P$,

(ii) $X \in \mathfrak{n}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F})$ *si et seulement si* $B \in \mathfrak{n}_P(\mathrm{F})$ *et* $u \in V_P$.

Démonstration (i) Supposons $X \in \mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F})$. Si l'on note $\widetilde{V}_P^\perp$ l'espace orthogonal à V_P dans W, on a $\widetilde{V}_P^\perp = V_P^\perp \oplus D_0$. Donc $Xe_0 = u + de_0 \in Z_P \oplus D_0$ d'où $u \in Z_P$. On voit alors que la restriction de X à V_P et à $V_P^\sharp$ égale B, d'où $B \in \mathfrak{m}_P(\mathrm{F})$. La réciproque est évidente. L'analyse analogue démontre (ii). ∎

Proposition 2.5 *Soit $P \in \mathcal{F}(M_0)$. Alors pour tous $X \in \mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F})$ et $N \in \mathfrak{n}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F})$ on a*

$$Q(X) = Q(X+N).$$

Démonstration Soient alors

$$X = \begin{pmatrix} B & u \\ u^\sharp & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F}) \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} B_N & u_N \\ u_N^\sharp & d_N \end{pmatrix} \in \mathfrak{n}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F}).$$

D'après le lemme 2.4 on a $B \in \mathfrak{m}_P(\mathrm{F})$, $B_N \in \mathfrak{n}_P(\mathrm{F})$, $u \in Z_P$, $u_N \in V_P$. Soit $V_P^\perp = V_P \oplus Z_P$ l'espace orthogonal à V_P dans V. En utilisant le fait que $[B, B_N] = BB_N - B_N B \in \mathfrak{n}_P(\mathrm{F})$ on voit qu'on a $((B+B_N)^i - B^i)V_P^\perp \subseteq V_P$, $\forall\ i \geq 0$. En utilisant cela, le fait que $u + u_N \in V_P^\perp$ ainsi que la relation (2.11), on obtient

$$\begin{aligned} A_{i+1}(X+N) &= \Phi(u+u_N, (B+B_N)^i(u+u_N)) \\ &= \Phi(u+u_N, ((B+B_N)^i - B^i)(u+u_N)) + \Phi(u+u_N, B^i(u+u_N)) \\ &= 0 + \Phi(u_N, B^i u_N) + \Phi(u, B^i u_N) + \Phi(u_N, B^i u) + \Phi(u, B^i u) \\ &= \Phi(u, B^i u) = A_{i+1}(X) \end{aligned}$$

pour $i \geq 0$. L'égalité $A_0(X+N) = A_0(X)$ est claire.

Quant aux invariants B_i , l'identité $B_i(X+N) = B_i(X)$ est un résultat classique de l'algèbre linéaire. ∎

https://doi.org/10.4153/CJM-2015-054-9 Published online by Cambridge University Press

Corollaire 2.6 *Soient $P \in \mathcal{F}(M_0)$ et $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$. Pour tous $R \subseteq \mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F})$ et $S \subseteq \mathfrak{n}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F})$ on a $\mathfrak{o} \cap (R \oplus S) = (\mathfrak{o} \cap R) \oplus S$.*

2.4 Racines simples

Pour tout choix de vecteurs non nuls dans D_i, $D_j^\sharp$, et pour toute base de Z, l'ensemble des F-points de $A_0 = A_{P_0}$ égale

$$\left\{ \operatorname{diag}(x_1,\ldots,x_{d_0}) := \begin{pmatrix} x_1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && x_{d_0} &&&& \\ &&& \mathrm{Id}_Z &&& \\ &&&& x_{d_0}^{-1} && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& x_1^{-1} \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1,\ldots,x_n \in \mathrm{F}^* \right\}.$$

Soit $P \in \mathcal{F}(M_0)$. Remarquons que $A_P = A_{\widetilde{P}}$ (on voit toujours U comme un sous-groupe de $\widetilde{U}$). On va alors écrire A_P tout court pour dénoter l'un d'eux.

Soient $P_1, P_2 \in \mathcal{F}(M_0)$ standards. On s'intéresse à la relation entre Δ_1^2 et $\Delta_{\widetilde{1}}^{\widetilde{2}}$. Supposons donc d'abord que $P_1 = P_0$ et $P_2 = U$. On voit alors que Δ_0 égale $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{d_0}\}$ où $\alpha_i(\operatorname{diag}(x_1,\ldots,x_{d_0})) = x_i/x_{i+1}$ pour $1 \le i < d_0$ et

$$\alpha_d(\operatorname{diag}(x_1,\ldots,x_{d_0})) = \begin{cases} x_{d_0}^2 & \text{si } 2d_0 = \dim V, \\ x_{d_0} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par définition de l'inclusion $U \hookrightarrow \widetilde{U}$ on voit que $\Delta_{\widetilde{0}} = \{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_{d_0}\}$ où $\widetilde{\alpha}_i = \alpha_i$ pour $1 \le i < d_0$ et $\widetilde{\alpha}_{d_0} = \frac{\alpha_{d_0}}{2}$ si $2d_0 = \dim V$ et $\widetilde{\alpha}_{d_0} = \alpha_{d_0}$ sinon. On obtient donc le lemme suivant.

Lemme 2.7 *Pour tous sous-groupes paraboliques standards $P_1 \subseteq P_2$, les éléments de $\Delta_{\widetilde{1}}^{\widetilde{2}}$ sont égaux aux éléments de Δ_1^2 à la multiplication par $1/2$ près.*

Démonstration Cela découle du fait que pour un sous-groupe parabolique P, les éléments de Δ_P (resp. $\widetilde{\Delta}_P$) sont des restrictions de $\Delta_0 \setminus \Delta_0^P$ (resp. $\Delta_{\widetilde{0}} \setminus \Delta_{\widetilde{0}}^{\widetilde{P}}$) à A_P. ■

2.5 Les mesures de Haar

Fixons dx une mesure de Haar sur $U(\mathbb{A})$. Soit $P = M_P N_P$ un sous-groupe parabolique semi-standard de U. On fixe alors pour tout sous-groupe connexe V de N_P (resp. toute sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{n}_{\widetilde{P}}$) l'unique mesure de Haar sur $V(\mathbb{A})$ (resp. $\mathfrak{h}(\mathbb{A})$) pour laquelle le volume de $V(\mathrm{F})\backslash V(\mathbb{A})$ (resp. $\mathfrak{h}(\mathrm{F})\backslash\mathfrak{h}(\mathbb{A})$) soit 1. Choisissons la mesure de Haar sur K normalisé de la même façon. On fixe aussi une norme euclidienne $\|\cdot\|$ Ω-invariante sur $\mathfrak{a}_0$ et des mesures de Haar sur tous les sous-espaces de $\mathfrak{a}_0$ compatibles avec cette norme. On en déduit la mesure de Haar sur A_P^∞ grâce à l'isomorphisme H_P.

Soient dp la mesure de Haar sur $P(\mathbb{A})$ invariante à gauche normalisé de façon que $dx = dp\,dk$ (grâce à la décomposition d'Iwasawa). Notons ρ_P (resp. $\rho_{\widetilde{P}}$) l'élément de $\mathfrak{a}_P^*$ tel que $d(\operatorname{Ad}(m)n) = e^{2\rho_P(H_P(m))}dn$ pour $m \in M_P(\mathbb{A})$ et $n \in N_P(\mathbb{A})$ (resp.

$d(\mathrm{Ad}(m)U_{\widetilde{P}}) = e^{2\rho_{\widetilde{P}}(H_P(m))}dU_{\widetilde{P}}$ pour $m \in M_P(\mathbb{A})$ et $U_{\widetilde{P}} \in \mathfrak{n}_{\widetilde{P}}(\mathbb{A})$) Il s'ensuit qu'il existe une unique mesure de Haar dm sur $M_P(\mathbb{A})$ telle que si l'on écrit $p = nm$ où $p \in P(\mathbb{A})$, $n \in N_P(A)$, et $m \in M_P(\mathbb{A})$, alors $dp = e^{-2\rho_P(H_P(m))}dndm$. On pose aussi

$$\underline{\rho}_P := 2(\rho_{\widetilde{P}} - \rho_P).$$

Puisque ρ_P (resp. $\rho_{\widetilde{P}}$) est la demi-somme des poids (avec multiplicités) pour l'action de A_P sur $\mathfrak{n}_P$ (resp. $\mathfrak{n}_{\widetilde{P}}$), on a, grâce au lemme 2.4 (ii), que $\underline{\rho}_P$ c'est juste la somme de poids (avec multiplicités) pour l'action du tore A_P sur V_P.

2.6 Fonctions de Bruhat–Schwartz

On note $\mathbb{A}^\infty$ l'anneau des adèles finis de F et $\mathbb{A}_\infty$ le produit de complétions de F aux places infinies, de façon qu'on a $\mathbb{A} = \mathbb{A}_\infty \times \mathbb{A}^\infty$. On fixe une norme $\|\cdot\|$ sur $\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}_\infty)$. Si $X \in \widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A})$, par $\|X\|$ on entend $\|\cdot\|$ appliqué à la projection de X sur sa partie infinie grâce à la décomposition canonique $\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}) = \widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}_\infty) \times \widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}^\infty)$.

Soient $\mathcal{V}_i(\mathrm{F}) \subseteq \widetilde{\mathfrak{u}}(\mathrm{F})$ des sous-F-espaces en somme directe et notons $\mathcal{V}_i(\mathbb{A}) = \mathcal{V}_i(\mathrm{F}) \otimes_{\mathrm{F}} \mathbb{A}$ pour $1 \le i \le k$. Notons $\mathcal{V}(\mathrm{F}) = \bigoplus_{1\le i\le k} V_i(\mathrm{F})$ et $\mathcal{V}(\mathbb{A}) = \mathcal{V}(\mathrm{F}) \otimes_{\mathrm{F}} \mathbb{A}$. Donc $\mathcal{V}(\mathbb{A})$ et les $\mathcal{V}_i(\mathbb{A})$ sont naturellement des sous-$\mathbb{A}$-modules de $\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A})$. Pour $X \in \mathcal{V}(\mathbb{A})$ notons X_i sa projection sur $\mathcal{V}_i(\mathbb{A})$. On a alors le lemme suivant qui se démontre en utilisant l'équivalence des normes sur $\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}_\infty)$.

Lemme 2.8 *Il existe un réel positif $c_{\mathcal{V}}$ tel que pour tout $X \in \mathcal{V}(\mathbb{A})$ on a*

$$\|X\| \ge c_{\mathcal{V}} \|X_1\|^{\frac{1}{k}} \cdots \|X_k\|^{\frac{1}{k}}.$$

Notons $\mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}))$ l'ensemble des fonctions de Bruhat–Schwartz sur $\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A})$ *i.e.*, l'espace de fonctions sur $\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A})$ engendré par des fonctions du type $f_\infty \otimes \chi^\infty$ où f_∞ est une fonction de la classe de Schwartz sur $\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}_\infty)$ et χ^∞ est une fonction caractéristique d'un compact ouvert de $\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}^\infty)$. Un opérateur différentiel ∂ sur $\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}_\infty)$ s'étend sur $\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A})$ en posant $\partial(f_\infty \otimes \chi^\infty) = \partial f_\infty \otimes \chi^\infty$. On a donc que pour tout $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}))$, tout opérateur différentiel ∂ sur $\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}_\infty)$, et tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une constante $C_{f,\partial,n}$ telle que $\sup_{X\in\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A})} \|X\|^n |\partial f(X)| \le C_{f,\partial,n}$.

3 Convergence du noyau

À partir de cette section, jusqu'à la section 6, par un sous-groupe parabolique de U on entend un sous-groupe parabolique standard.

Soit $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}))$. Pour un sous-groupe parabolique P de U et une classe $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ notons pour $x \in M_P(\mathrm{F})N_P(\mathbb{A})\backslash U(\mathbb{A})$

$$k_{P,\mathfrak{o}}(x) = k_{f,P,\mathfrak{o}}(x) = \sum_{\xi\in\mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F})\cap\mathfrak{o}} \int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{P}}(\mathbb{A})} f(x^{-1}(\xi + U_P)x)\, dU_P \tag{3.1}$$

et pour $x \in U(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A})$

$$k^T_{\mathfrak{o}}(x) = k^T_{f,\mathfrak{o}}(x) = \sum_{P\supseteq P_0} (-1)^{d_P} \sum_{\delta\in P(\mathrm{F})\backslash U(\mathrm{F})} \hat{\tau}_P(H_P(\delta x) - T) k_{P,\mathfrak{o}}(\delta x)$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2015-054-9 Published online by Cambridge University Press

où d_P est défini par (2.1). N.B. la somme sur δ dans $P(\mathrm{F})\backslash U(\mathrm{F})$ est finie en vertu de [2, lemme 5.1].

Le but de ce chapitre est de démontrer le résultat suivant.

Théorème 3.1 *Soit $T_+ \in \mathfrak{a}_0^+$ introduit dans le paragraphe 2.1. Alors, pour tout $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ on a $\sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} \int_{U(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A})} |k_{\mathfrak{o}}^T(x)|\,dx < \infty$.*

Suivant Arthur [2, §6], pour $P_1 \subseteq P_2$ on définie la fonction σ_1^2 par

$$\sigma_1^2(H) = \sigma_{P_1}^{P_2}(H) = (-1)^{d_2} \sum_{Q\supseteq P_2} (-1)^{d_Q} \tau_{P_1}^Q(H)\hat{\tau}_Q(H), H \in \mathfrak{a}_1.$$

C'est la fonction caractéristique d'un sous-ensemble de $\mathfrak{a}_1$. On pose aussi

$$\begin{aligned} \chi_{P_1,P_2}^T(x) = \chi_{1,2}^T(x) &= F^1(x,T)\sigma_1^2(H_1(x)-T), && x \in P_1(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A}), \\ k_{P_1,P_2,\mathfrak{o}}(x) = k_{1,2,\mathfrak{o}}(x) &= \sum_{P_1\subseteq P\subseteq P_2} (-1)^{d_P} k_{P,\mathfrak{o}}(x), && x \in P_1(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A}). \end{aligned}$$

Alors en utilisant [2, lemme 6.4] et l'invariance de $k_{P,\mathfrak{o}}$ et H_P par rapport à $P(\mathrm{F})$, on s'aperçoit qu'on a l'identité

$$k_{\mathfrak{o}}^T(x) = \sum_{P_1\subseteq P_2} \sum_{\delta\in P_1(\mathrm{F})\backslash U(\mathrm{F})} \chi_{1,2}^T(\delta x) k_{1,2,\mathfrak{o}}(\delta x). \tag{3.2}$$

On a donc

$$\sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} \int_{U(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A})} |k_{\mathfrak{o}}^T(x)| dx \leq \sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} \sum_{P_1\subseteq P_2} \int_{P_1(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A})} \chi_{1,2}^T(x) |k_{1,2,\mathfrak{o}}(x)|\,dx.$$

Il suffit donc de montrer que pour tous sous-groupes paraboliques $P_1 \subseteq P_2$

$$\sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} \int_{P_1(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A})} \chi_{1,2}^T(x) |k_{1,2,\mathfrak{o}}(x)| dx < \infty. \tag{3.3}$$

Il résulte de [2, lemme 6.1] que si $P_1 = P_2 \neq U$ on a $\sigma_1^2 \equiv 0$ donc l'intégrale (3.3) vaut 0 dans ce cas. D'autre part, quand $P_1 = P_2 = U$, on a que F^U est la fonction caractéristique d'un compact dans $U(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A})$ donc l'intégrale est bien finie. On peut supposer alors que $P_1 \neq P_2$. Dans ce cas on montrera quelque chose de plus fort que (3.3).

Théorème 3.2 *Soient $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}))$ et P_1, P_2 deux sous-groupes paraboliques tels que $P_1 \subsetneq P_2$. Alors pour tout réel $\varepsilon_0 > 0$ et tout $N \in \mathbb{N}$, il existe une constante C qui ne dépend que de N, f, et ε_0 telle que*

$$\sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} \int_{P_1(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A})} \chi_{1,2}^T(x) |k_{1,2,\mathfrak{o}}(x)|\,dx < Ce^{-N\|T\|}$$

pour tout $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ tel que $\alpha(T) > \varepsilon_0\|T\|$ pour tout $\alpha \in \Delta_0$.

Notons au passage le corollaire immédiat de ce théorème.

Corollaire 3.3 *Soit $k(x) = \sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} k_{U,\mathfrak{o}}(x)$ et $k^T(x) = \sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} k_{\mathfrak{o}}^T(x)$. Pour tout réel $\varepsilon_0 > 0$ et tout $N \in \mathbb{N}$, il existe une constante C qui ne dépend que de N, f, et ε_0 telle que*

$$\int_{U(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A})} |F^U(x,T)k(x) - k^T(x)|\,dx < Ce^{-N\|T\|}$$

pour tout $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ *tel que* $\alpha(T) > \varepsilon_0 \|T\|$ *pour tout* $\alpha \in \Delta_0$.

On introduit d'abord quelques notations. Pour tous sous-groupes paraboliques $Q \subseteq S$ posons $(\overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{S}})' = \overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{S}} \smallsetminus \bigcup_{Q \subseteq R \subsetneq S} \overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{R}}$. Alors $(\overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{S}})'$ est ouvert dans $\overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{S}}$ et on a une décomposition en parties localement fermées

$$\overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{S}} = \coprod_{Q \subseteq R \subseteq S} (\overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{R}})'. \tag{3.4}$$

En supposant toujours que $Q \subseteq S$, notons aussi

$$\mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{Q}} = \mathfrak{m}_{\widetilde{S}} \smallsetminus \bigcup_{Q \subseteq R \subsetneq S} \mathrm{Lie}(\widetilde{R}) = (\overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{S}})' \oplus \mathfrak{m}_{\widetilde{Q}} \oplus \mathfrak{n}_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{S}}.$$

Fixons les sous-groupes paraboliques $P_1 \subsetneq P_2$. Soit P un sous-groupe parabolique tel que $P_1 \subseteq P \subseteq P_2$. On a donc $\mathfrak{m}_{\widetilde{P}} = \coprod_{P_1 \subseteq S \subseteq P} (\mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}} \oplus \mathfrak{n}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{P}})$ et, en utilisant le corollaire 2.6, on obtient, pour tout $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$

$$\mathfrak{o} \cap \mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F}) = \coprod_{P_1 \subseteq S \subseteq P} \mathfrak{o} \cap (\mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}} \oplus \mathfrak{n}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{P}})(\mathrm{F}) = \coprod_{P_1 \subseteq S \subseteq P} (\mathfrak{o} \cap \mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}}(\mathrm{F})) \oplus \mathfrak{n}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{P}}(\mathrm{F}).$$

Grâce à cela, on peut réécrire $k_{P,\mathfrak{o}}(x)$ comme

$$\sum_{P_1 \subseteq S \subseteq P} \sum_{\eta \in \mathfrak{n}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{P}}(\mathrm{F})} \sum_{\zeta \in \mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}} \int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{P}}(\mathbb{A})} f(x^{-1}(\eta + \zeta + U_P)x)\, dU_P.$$

Fixons un caractère additif non-trivial ψ sur $\mathrm{F}\backslash\mathbb{A}$. En appliquant la formule sommatoire de Poisson pour la somme portant sur $\eta \in \mathfrak{n}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{P}}(\mathrm{F})$ de la fonction

$$\mathfrak{n}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{P}}(\mathbb{A}) \ni Y \longmapsto \int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{P}}(\mathbb{A})} f(x^{-1}(Y + \zeta + U_P)x)\, dU_P,$$

pour tout $\zeta \in \mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}$, on obtient

$$k_{P,\mathfrak{o}}(x) = \sum_{P_1 \subseteq S \subseteq P} \sum_{\eta \in \overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{P}}(\mathrm{F})} \sum_{\zeta \in \mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}} \Phi_S(x, \zeta, \eta),$$

où $\Phi_S(x, X, Y) = \int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{S}(\mathbb{A})}} f(x^{-1}(X + U_S)x)\psi(\langle U_S, Y\rangle)\, dU_S$, pour $x \in U(\mathbb{A})$, $X \in \mathfrak{m}_{\widetilde{S}}(\mathbb{A})$, et $Y \in \overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{2}}(\mathbb{A})$. En utilisant l'égalité (3.4) on peut écrire $k_{P,\mathfrak{o}}(x)$ aussi comme

$$\sum_{P_1 \subseteq S \subseteq R \subseteq P} \sum_{\zeta \in \mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}} \sum_{\eta \in (\overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{R}})'(\mathrm{F})} \Phi_S(x, \zeta, \eta).$$

Grâce à cette formule, on a pour tout $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$

$$\begin{aligned} k_{1,2,\mathfrak{o}}(x) &= \sum_{P_1 \subseteq P \subseteq P_2} (-1)^{d_P} k_{P,\mathfrak{o}}(x) \\ &= \sum_{P_1 \subseteq S \subseteq R \subseteq P \subseteq P_2} (-1)^{d_P} \sum_{\zeta \in \mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}} \sum_{\eta \in (\overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{R}})'(\mathrm{F})} \Phi_S(x, \zeta, \eta) \\ &= \sum_{P_1 \subseteq S \subseteq R \subseteq P_2} \sum_{\zeta \in \mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}} \sum_{\eta \in (\overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{R}})'(\mathrm{F})} \Phi_S(x, \zeta, \eta) \sum_{R \subseteq P \subseteq P_2} (-1)^{d_P}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

On invoque maintenant l'identité due à Arthur [2, proposition 1.1],

$$\sum_{\{P|R\subseteq P\subseteq P_2\}} (-1)^{d_P-d_2} = \begin{cases} 0 & \text{si } R \neq P_2, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.6}$$

On en déduit que la somme (3.5) décrivant $k_{1,2,\mathfrak{o}}(x)$ se réduit à

$$(-1)^{d_2} \sum_{P_1\subseteq S\subseteq P_2} \sum_{\eta\in(\overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{2}})'(\mathrm{F})} \sum_{\zeta\in\mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}}(\mathrm{F})\cap\mathfrak{o}} \Phi_S(x,\zeta,\eta).$$

Remarquons que pour un S entre P_1 et P_2 fixé, le terme correspondant dans la somme ci-dessus est $P_1(\mathrm{F})$-invariant. Ainsi, pour démontrer le théorème 3.2 il suffit de majorer

$$\int_{P_1(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A})} \chi_{1,2}^T(x) \sum_{\eta\in(\overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{2}})'(\mathrm{F})} \sum_{\zeta\in\mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}}(\mathrm{F})} |\Phi_S(x,\zeta,\eta)|\, dx \tag{3.7}$$

où $P_1 \subseteq S \subseteq P_2$ sont fixés. La double somme sur $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ et $\zeta \in \mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}$ s'est réduite à la somme sur tout $\zeta \in \mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}}(\mathrm{F})$.

On a la décomposition

$$P_1(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A}) = N_1(\mathrm{F})\backslash N_1(\mathbb{A}) \times A_1^\infty \times M_1(\mathrm{F})\backslash M_1(\mathbb{A})^1 \times K.$$

Suivant cette décomposition $x = n_1a_1m_1k$ et $dx = e^{-2\rho_1(H_0(a_1))}dn_1da_1dm_1dk$. Remarquons quand même que pour qu'on puisse intégrer sur les quotients $N_1(\mathrm{F})\backslash N_1(\mathbb{A})$ et $M_1(\mathrm{F})\backslash M_1(\mathbb{A})^1$, il faut d'abord intégrer sur $N_1(\mathrm{F})\backslash N_1(\mathbb{A})$ et puis sur $M_1(\mathrm{F})\backslash M_1(\mathbb{A})^1$. On va remplacer maintenant les intégrales sur $M_1(\mathrm{F})\backslash M_1(\mathbb{A})^1$, $N_1(\mathrm{F})\backslash N_1(\mathbb{A})$, et K par un supremum sur un ensemble convenable. Puisque on suppose que $F^{P_1}(x,T) = F^1(m_1,T) = 1$, on peut restreindre l'intégrale sur $M_1(\mathrm{F})\backslash M_1(\mathbb{A})^1$ aux éléments m_1 ayant un représentant dans $\omega_1 A_{0,1}^\infty(T)(K\cap M_1(\mathbb{A})^1)$, où $\omega_1 := \omega \cap M_1(\mathbb{A})^1$, où le compact $\omega \subseteq N_0(\mathbb{A})M_0(\mathbb{A})^1$ est défini dans le paragraphe 2.1 et $A_{0,1}^\infty(T)$ est défini par (2.4) dans le même paragraphe. En utilisant les faits que A_1 commute avec M_1 et que le volume de $M_1(\mathrm{F})\backslash M_1(\mathbb{A})^1$ est fini, on a pour tout $a_1 \in A_1^\infty$

(3.8)

$$\int_K \int_{M_1(\mathrm{F})\backslash M_1(\mathbb{A})^1} \int_{[N_1]} F^1(m_1,T) \sum_{\eta\in(\overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{2}})'(\mathrm{F})} \sum_{\zeta\in\mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}}(\mathrm{F})} |\Phi_S(n_1a_1m_1k,\zeta,\eta)|\, dn_1dm_1dk$$
$$\leq \sup_{\substack{k_0\in\omega_1,\, a_0^1\in A_{0,1}^\infty(T),\\ k\in K}} \int_{[N_1]} \sum_{\eta\in(\overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{2}})'(\mathrm{F})} \sum_{\zeta\in\mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}}(\mathrm{F})} |\Phi_S(n_1k_0a_0^1a_1k,\zeta,\eta)|\, dn_1$$

à une constante multiplicative indépendante de T près.

Remarquons que la fonction $|\Phi_S(x,\cdot,\cdot)|$ est invariante à gauche par $N_2(\mathbb{A})$. En effet, soient $n_2 \in N_2(\mathbb{A})$, $X \in \mathfrak{m}_{\widetilde{S}}(\mathbb{A})$, et $Y \in \overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{2}}(\mathbb{A})$. Il existe un $U_2 \in \mathfrak{n}_{\widetilde{2}}(\mathbb{A})$ tel que

$n_2^{-1}Xn_2 = X + U_2$ et on a

$$
\begin{aligned}
&|\Phi_S(n_2x, X, Y)|\\
&\quad = \Big| \int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{S}}(\mathbb{A})} f(x^{-1}(X + n_2^{-1}U_S n_2 + U_2)x)\psi(\langle U_S, Y\rangle)\, dU_S \Big|\\
&\quad = \Big| \int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{S}}(\mathbb{A})} f(x^{-1}(X + n_2^{-1}U_S n_2 + U_2)x)\psi(\langle n_2^{-1}U_S n_2 + U_2, Y\rangle)\, dU_S \Big|, \; x \in U(\mathbb{A}).
\end{aligned}
$$

Dans la dernière égalité on utilise le fait que la forme bilinéaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est invariante par conjugaison, que $n_2^{-1}Yn_2 - Y \in \mathfrak{n}_{\overline{2}}(\mathbb{A})$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est triviale sur $\mathfrak{n}_{\widetilde{S}} \times \mathfrak{n}_{\overline{2}}$ et que $|\psi| \equiv 1$. Finalement, le changement de variable $n_2^{-1}U_S n_2 + U_2 \mapsto U_S$ ne change pas la mesure de Haar sur $\mathfrak{n}_{\widetilde{S}}(\mathbb{A})$ ce qui démontre que $|\Phi_S(n_2x, X, Y)| = |\Phi_S(x, X, Y)|$.

Fixons alors un compact K_1' de $N_1^2(\mathbb{A})$ qui se surjecte sur $N_1^2(\mathrm{F})\backslash N_1^2(\mathbb{A})$ et posons $K_1 = K_1'\omega_1$. C'est un compact de $N_0^2(\mathbb{A})M_0(\mathbb{A})^1$ et on a

$$
\begin{aligned}
(3.9)\qquad &\int_{[N_1]} \sum_{\eta\in(\overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{2}})'(\mathrm{F})} \sum_{\zeta\in\mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}}(\mathrm{F})} |\Phi_S(n_1k_0a_0^1a_1k, \zeta, \eta)|\, dn_1\\
&\qquad = \int_{[N_1^2]} \sum_{\eta\in(\overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{2}})'(\mathrm{F})} \sum_{\zeta\in\mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}}(\mathrm{F})} |\Phi_S(n_1^2k_0a_0^1a_1k, \zeta, \eta)|\, dn_1^2\\
&\qquad \le \sup_{k_1\in K_1} \sum_{\eta\in(\overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{2}})'(\mathrm{F})} \sum_{\zeta\in\mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}}(\mathrm{F})} |\Phi_S(k_1a_0^1a_1k, \zeta, \eta)|.
\end{aligned}
$$

Ensuite on a $\Phi_S(k_1a_0^1a_1k, \zeta, \eta) = \Phi_S(a_0^1a_1(a_0^1a_1)^{-1}k_1(a_0^1a_1)k, \zeta, \eta)$. On prétend que, tout comme k_1, l'expression $(a_0^1a_1)^{-1}k_1(a_0^1a_1)$ reste dans un compact fixé de $N_0^2(\mathbb{A})M_0(\mathbb{A})^1$ pour tout $a_1 \in A_1^\infty$ tel que $\sigma_1^2(H_1(a_1) - T) = 1$ et tout $a_0^1 \in A_{0,1}^\infty(T)$. On aura besoin du lemme suivant.

Lemme 3.4 *Pour tout $a_0^1 \in A_{0,1}^\infty(T)$ et tout $a_1 \in A_1^\infty$ tel que $\sigma_1^2(H_1(a_1) - T) = 1$ on a $\tau_0^2(H_0(a_0^1a_1) - T_1) = 1$.*

Démonstration La preuve se trouve dans [4, §4]. ■

Donc, comme Δ_0^2 c'est l'ensemble de racines simples pour l'action du tore A_0^∞ sur $N_0^2(\mathbb{A})$, on obtient bien que pour tout $a \in A_0^\infty$ tel que $\tau_0^2(H_0(a) - T_1) = 1$ l'ensemble $a^{-1}K_1aK$ est contenu dans un compact de $U(\mathbb{A})$ indépendant de T et a qu'on va noter Γ.

On voit donc que pour tous $a_0^1 \in A_{0,1}^\infty(T)$, $a_1 \in A_1^\infty$, $k \in K$, et $k_1 \in K_1$ on a

$$
\sum_{\substack{\eta\in(\overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{2}})'(\mathrm{F})\\ \zeta\in\mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}}(\mathrm{F})}} |\Phi_S(a_0^1a_1(a_0^1a_1)^{-1}k_1(a_0^1a_1)k, \zeta, \eta)| \le \sup_{y\in\Gamma} \sum_{\substack{\eta\in(\overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{2}})'(\mathrm{F})\\ \zeta\in\mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}}(\mathrm{F})}} |\Phi_S(a_0^1a_1y, \zeta, \eta)|.
$$

Ensuite, en faisant le changement de variable $(a_0^1a_1)^{-1}U_S(a_0^1a_1) \mapsto U_S$ dans la définition de la fonction Φ_S, on obtient

$$
\Phi_S(a_0^1a_1y, \zeta, \eta) = e^{2\rho_{\widetilde{S}}(H_0(a_0^1a_1))}\Phi_S(y, \mathrm{Ad}(a_0^1a_1)^{-1}\zeta, \mathrm{Ad}(a_0^1a_1)^{-1}\eta).
$$

En prenant compte de ceci ainsi que des majorations (3.8) et (3.9), on obtient que l'expression (3.7) est majorée par

$$(3.10)\quad \int_{A_1^\infty} \sup_{\substack{a_0^1 \in A_{0,1}^\infty(T) \\ y\in\Gamma}} e^{2(\rho_{\widetilde{S}}-\rho_1)(H_0(a_1 a_0^1))}\sigma_1^2(H_1(a_1)-T) \\ \times \sum_{\eta\in(\overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{2}})'(\mathrm{F})} \sum_{\zeta\in\mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}}(\mathrm{F})} |\Phi_S(y,\mathrm{Ad}((a_0^1 a_1)^{-1})\zeta,\mathrm{Ad}((a_0^1 a_1)^{-1})\eta)|\,da_1.$$

Fixons une $\mathbb{Q}$-base $\{e_i\}$ de $\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathrm{F})$ composée de vecteurs propres pour l'action de A_0 sur $\widetilde{\mathfrak{u}}$. Les éléments de l'espace $\mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}))$ sont, par définition, les sommes finies des fonctions de type $f_\infty\otimes\chi^\infty$ où f_∞ est une fonction de la classe de Schwartz sur $\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}_\infty)$ et χ^∞ est une fonction caractéristique d'un compact ouvert dans $\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}^\infty)$. Alors comme Γ est compact, il existe un compact $\widetilde{\mathfrak{t}}\subseteq\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}^\infty)$ tel que $\widetilde{\mathfrak{t}}=\prod_v\widetilde{\mathfrak{t}}_v$ où $\widetilde{\mathfrak{t}}_v$ est un compact ouvert dans $\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathrm{F}_v)$ où F_v est la complétion de F par rapport à une place finie v, tel que pour tous $y\in\Gamma$ et $X\in\mathfrak{m}_{\widetilde{S}}(\mathbb{A})$ (resp. $Y\in\overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{2}}(\mathbb{A})$) on a $\Phi_S(y,X,\cdot)=0$ (resp. $\Phi_S(y,\cdot,Y)=0$) si la projection de X sur $\mathfrak{m}_{\widetilde{S}}(\mathbb{A}^\infty)$ (resp. de Y sur $\overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{2}}(\mathbb{A}^\infty)$) n'est pas dans $\widetilde{\mathfrak{t}}$. Or les éléments de A_0^∞ n'agissent que sur la partie infinie d'un $\zeta\in\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathrm{F})$ dans la formule $\mathrm{Ad}(a_0)\zeta$ où $a_0\in A_0^\infty$. Alors si l'on décompose $\zeta=\sum b_i e_i$ avec $b_i\in\mathbb{Q}$, on a que la composante correspondante à une place finie v de $\mathrm{Ad}(a_0)\zeta$ c'est juste $\sum b_i e_i$. Donc, pour que cela soit dans un compact $\widetilde{\mathfrak{t}}_v$, il faut que les valuations p-adiques des coefficients b_i soient bornées où $v|p$. Cela démontre que, quitte à changer la base $\{e_i\}$ par une autre de type $\{c_i e_i\}$ où $c_i\in\mathbb{Q}^*$, on peut supposer que les sommes dans (3.10) portent en effet sur des éléments du $\mathbb{Z}$-réseau engendré par les $\{e_i\}$ que l'on note $\mathcal{R}$, qui appartiennent également à $(\overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{P}_2})'(\mathrm{F})$ et $\mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}}(\mathrm{F})$. On pose

$$\mathcal{R}_1=\mathcal{R}\cap(\overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{2}})'(\mathrm{F}),\quad \mathcal{R}_2=\mathcal{R}\cap((\overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{1}}^{\widetilde{S}})'\oplus\overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{0}}^{\widetilde{1}}\oplus\mathfrak{m}_{\widetilde{0}})(\mathrm{F}),\quad \mathcal{R}_3=\mathcal{R}\cap\mathfrak{n}_{\widetilde{0}}^{\widetilde{S}}(\mathrm{F}).$$

On majorera alors l'intégrale sur $a_1\in A_1^\infty$ du supremum sur $a_0^1\in A_{0,1}^\infty(T)$ et $y\in\Gamma$ de

$$(3.11)\quad e^{2(\rho_{\widetilde{S}}-\rho_1)(H_0(a_1 a_0^1))}\sigma_1^2(H_1(a_1)-T) \\ \times\sum_{\substack{\eta\in\mathcal{R}_1,\\ \zeta\in\mathcal{R}_2,\ \xi\in\mathcal{R}_3}}\left|\Phi_S(y,\mathrm{Ad}((a_0^1 a_1)^{-1})(\zeta+\xi),\mathrm{Ad}((a_0^1 a_1)^{-1})\eta)\right|.$$

Soit $n_0\in\mathbb{N}$ tel que l'on a $\sum_{\xi\in\mathcal{R}\smallsetminus\{0\}}\|\xi\|^{-n}<\infty$, pour tout $n\geq n_0$. Soient $n,n_1\in\mathbb{N}$ tels que $n>n_1\geq n_0$. On suppose n pair et on le laissera varier. L'entier n_1 va être fixé plus tard. On utilisera la notation suivante pour $A,B\in\mathbb{R}$, $A\leq_{n,f}B$ pour signifier qu'il existe une constante positive c qui dépend, éventuellement, seulement de n et de f telle que $A\leq cB$.

En faisant des intégrations par partie on a pour tous $X\in\mathfrak{m}_{\widetilde{S}}(\mathbb{A})$ et $Y\in\mathfrak{n}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{2}}(\mathbb{A})\smallsetminus\{0\}$ que $\Phi_S(y,X,Y)$ s'exprime comme une somme finie d'expressions de type

$$c_2(y)\|Y\|^{-n}\Phi_S^{(n)}(y,X,Y)$$

où $c_2(y)$ dépend continument de y et

$$\Phi_S^{(n)}(y,X,Y)=\int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{S}}(\mathbb{A})}\partial_n f(y^{-1}(X+U)y)\psi(\langle Y,U\rangle)\,dU$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2015-054-9 Published online by Cambridge University Press

pour un opérateur différentiel ∂_n convenable sur les fonctions de classe C^∞ sur $\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}_\infty)$. On a donc

$$|c_2(y)\Phi_S^{(n)}(y,X,Y)| \le \int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{S}}(\mathbb{A})} \sup_{y\in\Gamma} |c_2(y)\partial_n f(y^{-1}(X+U_S)y)|\, dU_S =: \Psi_{S,n}(X).$$

La fonction $\Psi_{S,n}$ est à décroissance rapide sur $\mathfrak{m}_{\widetilde{S}}(\mathbb{A})$, donc pour tous $\zeta \in \mathcal{R}_2$ et $\xi \in \mathcal{R}_3 \smallsetminus \{0\}$ on a

$$\begin{aligned}\Psi_{S,n}(\mathrm{Ad}((a_0^1 a_1)^{-1})(\zeta+\xi)) &\le_{n,f} \|\mathrm{Ad}((a_0^1 a_1)^{-1})\zeta\|^{-n} \|\mathrm{Ad}((a_0^1 a_1)^{-1})\xi\|^{-n_1},\\ \Psi_{S,n}(\mathrm{Ad}((a_0^1 a_1)^{-1})\zeta) &\le_{n,f} \|\mathrm{Ad}((a_0^1 a_1)^{-1})\zeta\|^{-n}.\end{aligned}$$

On obtient alors

(3.12)
$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\eta\in\mathcal{R}_1,\\ \zeta\in\mathcal{R}_2,\,\xi\in\mathcal{R}_3}} &|\Phi_S(y, \mathrm{Ad}((a_0^1 a_1)^{-1})(\zeta+\xi), \mathrm{Ad}((a_0^1 a_1)^{-1})\eta)|\\ &\le_{n,f} \sum_{\substack{\eta\in\mathcal{R}_1,\\ \zeta\in\mathcal{R}_2,\,\xi\in\mathcal{R}_3}} \|\mathrm{Ad}((a_0^1 a_1)^{-1})\eta\|^{-n} \Psi_{S,n}(\mathrm{Ad}((a_0^1 a_1)^{-1})(\zeta+\xi))\\ &\le_{n,f} \Big(\sum_{\eta\in\mathcal{R}_1} \|\mathrm{Ad}((a_0^1 a_1)^{-1})\eta\|^{-n}\Big)\Big(\sum_{\zeta\in\mathcal{R}_2} \|\mathrm{Ad}((a_0^1 a_1)^{-1})\zeta\|^{-n}\Big)\\ &\qquad \times \Big(1+\sum_{\xi\in\mathcal{R}_3\smallsetminus\{0\}} \|\mathrm{Ad}((a_0^1 a_1)^{-1})\xi\|^{-n_1}\Big)\end{aligned}$$

On introduit un peu de notations. Soit $\Sigma_{\widetilde{U}}$ l'ensemble de racines pour l'action du tore A_0 sur l'algèbre de Lie $\widetilde{\mathfrak{u}}$. Pour $\mu \in \Sigma_{\widetilde{U}}$ et $X \in \widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A})$ soit X_μ la projection de X sur le sous-espace de $\widetilde{\mathfrak{u}}$ de valeur propre μ. Notons dans ce cas $\Sigma(X) = \{\mu \in \Sigma_{\widetilde{U}} \mid X_\mu \ne 0\}$.

Fixons $\Sigma \subseteq \Sigma_{\widetilde{U}}$. En utilisant l'équivalence de normes sur $\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}_\infty)$, on peut fixer une constante $c_\Sigma > 0$ telle que pour tout $X \in \widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A})$ tel que $\Sigma(X) = \Sigma$ on a

(3.13)
$$\|X\| \ge c_\Sigma \prod_{\mu\in\Sigma=\Sigma(X)} \|X_\mu\|^{\frac{1}{|\Sigma|}}.$$

On fixe maintenant $n_1 := n_0|\Sigma_{\widetilde{U}}|$.

En utilisant le lemme 2.7, on fixe des constantes $k_{\Sigma,\alpha} \in \mathbb{R}$ pour tout $\alpha \in \Delta_0$, telles que $\sum_{\mu\in\Sigma} \frac{1}{|\Sigma|}\mu = \sum_{\alpha\in\Delta_0} k_{\Sigma,\alpha}\alpha$. Pour tout $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ soit $\Sigma(\mathcal{S}) = \{\Sigma(\xi) \mid \xi \in \mathcal{S}\}$. On a alors le lemme suivant.

Lemme 3.5 *Pour tous $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} \smallsetminus \{0\}$, $a \in A_0^\infty$, et $n \ge n_1$ on a*

$$\sum_{\xi\in\mathcal{S}} \|\mathrm{Ad}(a^{-1})\xi\|^{-n} \le_{n,f} \sum_{\Sigma\in\Sigma(\mathcal{S})} e^{n\sum_{\alpha\in\Delta_0} k_{\Sigma,\alpha}\alpha(H_0(a))}.$$

Démonstration En utilisant l'inégalité (3.13), on a

$$\begin{aligned}\sum_{\xi\in\mathcal{S}}\|\operatorname{Ad}(a^{-1})\xi\|^{-n} &= \sum_{\Sigma\in\Sigma(\mathcal{S})}\sum_{\substack{\xi\in\mathcal{S}\\ \Sigma(\xi)=\Sigma}}\|\operatorname{Ad}(a^{-1})\xi\|^{-n}\\
&\leq \sum_{\Sigma\in\Sigma(\mathcal{S})} c_\Sigma\Big(\prod_{\mu\in\Sigma}\Big(\sum_{\substack{\xi\in\mathcal{R}\smallsetminus\{0\}\\ \Sigma(\xi)=\{\mu\}}}\|\operatorname{Ad}(a^{-1})\xi\|^{-nn_{\Sigma,\mu}}\Big)\Big)\\
&= \sum_{\Sigma\in\Sigma(\mathcal{S})} c_\Sigma\Big(\prod_{\mu\in\Sigma} e^{nn_{\Sigma,\mu}\mu(H_0(a_0))}\Big(\sum_{\substack{\xi\in\mathcal{R}\smallsetminus\{0\}\\ \Sigma(\xi)=\{\mu\}}}\|\xi\|^{-nn_{\Sigma,\mu}}\Big)\Big)\\
&\leq_{n,f} \sum_{\Sigma\in\Sigma(\mathcal{S})} e^{n\sum_{\alpha\in\Delta_0}k_{\Sigma,\alpha}\alpha(H_0(a))}.\end{aligned}$$

■

On pose

$$k_1 = n_1\max\{k_{\Sigma,\alpha}\mid \Sigma\subseteq\Sigma_{\widetilde{U}},\alpha\in\Delta_0\},$$
$$k_2 = \min\{k_{\Sigma,\alpha}\mid \Sigma\subseteq\Sigma_{\widetilde{U}},\alpha\in\Delta_0, k_{\Sigma,\alpha}>0\}.$$

Puisque on suppose $P_1\subsetneq P_2$, on a en particulier $P_0\neq U$ et donc $k_1,k_2>0$.

Corollaire 3.6 *Pour tout $a\in A_0^\infty$ tel que $\tau_0^2(H_0(a)-T_1)=1$ on a*

$$\Big(\sum_{\eta\in\mathcal{R}_1}\|\operatorname{Ad}(a^{-1})\eta\|^{-n}\Big)\Big(\sum_{\zeta\in\mathcal{R}_2}\|\operatorname{Ad}(a^{-1})\zeta\|^{-n}\Big)\leq_{n,f} e^{-nk_2\sum_{\alpha\in\Delta_0^2\smallsetminus\Delta_0^1}\alpha(H_0(a))}.$$

Démonstration Soit $a\in A_0^\infty$ comme dans l'énoncé. En utilisant le lemme 3.5 pour $\mathcal{S}=\mathcal{R}_1$ et pour $\mathcal{S}=\mathcal{R}_2$, on voit qu'il suffit de vérifier pour tout $\Sigma_1\in\Sigma(\mathcal{R}_1)$ et tout $\Sigma_2\in\Sigma(\mathcal{R}_2)$ qu'on a

$$e^{n\sum_{\alpha\in\Delta_0}k_{\Sigma_1,\alpha}\alpha(H_0(a))}\leq_{n,f} e^{-nk_2\sum_{\alpha\in\Delta_0^2\smallsetminus\Delta_0^S}\alpha(H_0(a))},$$
$$e^{n\sum_{\alpha\in\Delta_0}k_{\Sigma_2,\alpha}\alpha(H_0(a))}\leq_{n,f} e^{-nk_2\sum_{\alpha\in\Delta_0^S\smallsetminus\Delta_0^1}\alpha(H_0(a))}.$$

En effet, posons $\Theta_1=\Delta_0^2\smallsetminus\Delta_0^S$ et $\Theta_2=\Delta_0^S\smallsetminus\Delta_0^1$. Alors pour $i=1,2$, on a $k_{\Sigma_i,\alpha}=0$ pour tout $\alpha\in\Delta_0\smallsetminus\Delta_0^2$ et $k_{\Sigma_i,\alpha}\leq 0$ pour tout $\alpha\in\Delta_0^2$. De plus, il résulte de la définition de $(\overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{2}})'$ (resp. $\mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}}$) que $k_{\Sigma_1,\alpha}\leq -k_2$ (resp. $k_{\Sigma_2,\alpha}\leq -k_2$) pour tout $\alpha\in\Theta_1$ (resp. $\alpha\in\Theta_2$). Il existe une constante C_{T_1} telle que $\alpha(H_0(a))>C_{T_1}$ pour tout $\alpha\in\Delta_0^2$. Donc, pour tout $\alpha_i\in\Delta_0\smallsetminus\Theta_i$ et tout $\alpha_i'\in\Theta_i$ on a

$$e^{nk_{\Sigma_i,\alpha_i}\alpha_i(H_0(a))}\leq_{n,f} 1,\quad e^{nk_{\Sigma_i,\alpha_i'}\alpha_i'(H_0(a))}\leq_{n,f} e^{-nk_2\alpha_i'(H_0(a))},\quad i=1,2.$$ ■

Corollaire 3.7 *Pour tout $a\in A_0^\infty$ tel que $\tau_0^2(H_0(a)-T_1)=1$ on a*

$$1+\sum_{\eta\in\mathcal{R}_3\smallsetminus\{0\}}\|\operatorname{Ad}(a)^{-1}\xi\|^{-n_1}\leq_{n,f} e^{k_1\sum_{\alpha\in\Delta_0^S}\alpha(H_0(a))}.$$

Démonstration Soit $a\in A_0^\infty$ comme dans l'énoncé. Il est clair qu'on a

$$1\leq_{n,f} e^{k_1\sum_{\alpha\in\Delta_0^S}\alpha(H_0(a))}.$$

En utilisant le lemme 3.5 pour $\mathcal{S} = \mathcal{R}_3 \setminus \{0\}$ et $n = n_1$, on voit qu'il suffit de vérifier pour tout $\Sigma \in \Sigma(\mathcal{R}_3 \setminus \{0\})$ qu'on a

$$e^{n_1 \sum_{\alpha \in \Delta_0} k_{\Sigma,\alpha} \alpha(H_0(a))} \leq_{n,f} e^{k_1 \sum_{\alpha \in \Delta_0^S} \alpha(H_0(a))}. \tag{3.14}$$

Or on a $k_{\Sigma,\alpha} = 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_0 \setminus \Delta_0^S$ et $n_1 k_{\Sigma,\alpha} \leq k_1$ pour tout $\alpha \in \Delta_0^S$ par définition de k_1. D'autre part, il existe une constante C_{T_1} telle que $\alpha(H_0(a)) > C_{T_1}$ pour tout $\alpha \in \Delta_0^2$, ce qui démontre (3.14) et le corollaire. ∎

En regardant (3.11) et (3.12), et en utilisant les corollaires 3.6 et 3.7 on se ramène a majorer le supremum sur $a_0^1 \in A_{0,1}^\infty(T)$ de

$$\int_{A_1^\infty} \sigma_1^2(H_1(a_1) - T) e^{(\lambda - nk_2 \sum_{\alpha \in \Delta_0^2 \setminus \Delta_0^1})\alpha(H_0(a_0^1 a_1))}\, da_1 = e^{(\lambda - nk_2 \sum_{\alpha \in \Delta_0^2 \setminus \Delta_0^1} \alpha)(H_0(a_0^1))}$$
$$\times \int_{\mathfrak{a}_1^2} e^{-nk_2 \sum_{\alpha \in \Delta_1^2} \alpha(H_1^2)} \int_{\mathfrak{a}_2} \sigma_1^2(H_1^2 + H_2 - T) e^{\lambda(H_1^2 + H_2)}\, dH_2 dH_1^2$$

où $\lambda = 2(\rho_{\widetilde{S}} - \rho_1) + k_1 \sum_{\alpha \in \Delta_0^S} \alpha \in \mathfrak{a}_S^*$.

Il est clair qu'il existe une constante $c_1 > 0$ qui ne dépend pas de n telle que

$$\sup_{a_0^1 \in A_{0,1}^\infty(T)} e^{(\lambda - nk_2 \sum_{\alpha \in \Delta_0^2 \setminus \Delta_0^1} \alpha)(H_0(a_0^1))} \leq_{n,f} e^{c_1 \|T\|}.$$

On a aussi le lemme suivant.

Lemme 3.8 *Il existe une constante $c_2 > 0$ telle que pour tout $H_1^2 \in \mathfrak{a}_1^2$ on a*

$$\int_{\mathfrak{a}_2} \sigma_1^2(H_2 + H_1^2 - T) e^{\lambda(H_2)} dH_2 \leq c_2 \tau_1^2(H_1^2 - T) e^{c_2 \|T\|} e^{c_2 \sum_{\alpha \in \Delta_1^2} \alpha(H_1^2)}.$$

Démonstration En vertu de [2, lemme 6.1, corollaire 6.2] il existe une constante $c' > 0$ telle que $\sigma_1^2(H_2 + H_1^2 - T) = 1$ implique

$$\tau_1^2(H_1^2 - T) = 1 \quad \text{et} \quad \|H_2\| \leq c'(1 + \|H_1^2\| + \|T\|).$$

En utilisant cela, il existe une constante $c'' > 0$ telle que $\lambda(H_2) \leq c''(\|H_1^2\| + \|T\|)$. On a donc que l'intégrale dans l'énoncé est bornée par

$$\tau_1^2(H_1^2 - T) e^{c''(\|H_1^2\| + \|T\|)} \int_{H_2 \in \mathfrak{a}_2 |\, \|H_2\| \leq c'(1 + \|H_1^2\| + \|T\|)} dH_2$$
$$\leq c''' \tau_1^2(H_1^2 - T) e^{c'''(\|H_1^2\| + \|T\|)}$$

pour une constante $c''' > 0$. On obtient le résultat en utilisant l'équivalence de normes sur $\mathfrak{a}_1^2$. En remarquant que Δ_1^2 est une base de $(\mathfrak{a}_1^2)^*$ et que si $\tau_1^2(H_1^2 - T) = 1$, alors $|\alpha(H_1^2)| = \alpha(H_1^2)$ pour tout $\alpha \in \Delta_1^2$. ∎

Grâce au lemme 3.8, il nous reste a majorer

$$\int \mathfrak{a}_1^2 \tau_1^2(H_1^2 - T) e^{-(nk_2 - c_2) \sum_{\alpha \in \Delta_1^2} \alpha(H_1^2)}\, dH_1^2$$

où c_2 ne dépend pas de n. En prenant n suffisamment grand, ceci est majoré par $e^{-(nk_2 - c_2) \sum_{\alpha \in \Delta_0^2 \setminus \Delta_0^1} \alpha(T)}$. On rappelle qu'on a un $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\alpha(T) > \varepsilon_0 \|T\|$ pour tout $\alpha \in \Delta_0$. Il est clair donc que pour tout $N > 0$ il existe un $n \in \mathbb{N}$ qui dépend de ε_0 tel que

$$e^{(c_1+c_2)(\|T\|)} e^{-(nk_2-c_2)\sum_{\alpha\in\Delta_0^2\smallsetminus\Delta_0^1}\alpha(T)} \leq e^{\|T\|(c_1+c_2-(nk_2-c_2)d_1^2\varepsilon_0)} \leq e^{-N\|T\|}.$$

Ce qui conclut la preuve des théorèmes 3.1 et 3.2. ∎

4 Les propriétés qualitatives

Pour une fonction $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}))$ et $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ on note

$$k^T(x) = k_f^T(x) = \sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} k_{f,\mathfrak{o}}^T(x), \quad x \in U(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A}).$$

Grâce au théorème 3.1, les distributions suivantes

$$J_{\mathfrak{o}}^T(f) = \int_{U(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A})} k_{f,\mathfrak{o}}^T(x)\,dx, \quad \mathfrak{o} \in \mathcal{O}, T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+,$$
$$J^T(f) = \int_{U(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A})} k_f^T(x)\,dx$$

sont bien définies.

Dans le paragraphe 4.3 on démontrera que la fonction $T \mapsto J_{\mathfrak{o}}^T(f)$ est un polynôme-exponentielle dont le terme purement polynomial, noté $J_{\mathfrak{o}}(f)$, ne dépend pas de T. Pour bien énoncer ce résultat on introduit d'abord dans le paragraphe 4.1 les distributions $J_{\mathfrak{o}}^{M_Q,T}$ pour tout sous-groupe parabolique standard Q et dans le paragraphe 4.2 on étudie les fonctions de type polynôme-exponentielle. La suite de ce chapitre est consacrée aux propriétés des distributions $J_{\mathfrak{o}}$.

4.1 Une généralisation du théorème 3.1

Soit $G = \prod_{i=1}^k \mathrm{Res}_{\mathrm{E}/\mathrm{F}}\mathrm{GL}_{n_i}$ où $k \in \mathbb{N}$ et $n_i \in \mathbb{N}^*$ pour $i = 1,\dots,k$. Soient aussi $U' = U(V',\Phi')$ et $\widetilde{U}' = U(W',\widetilde{\Phi}')$ un couple de groupes unitaires munis de l'inclusion $U' \hookrightarrow \widetilde{U}'$ comme dans le paragraphe 2.2. On va généraliser le théorème 3.1 au cas de l'inclusion $G \times U' \hookrightarrow G \times \widetilde{U}'$.

Notons $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, $\mathfrak{u}' = \mathrm{Lie}(U')$, et $\widetilde{\mathfrak{u}}' = \mathrm{Lie}(\widetilde{U}')$. Pour $X \in (\mathfrak{g} \times \widetilde{\mathfrak{u}}')(\mathrm{F})$ soient $X_1 \in \mathfrak{g}(\mathrm{F})$ et $X_2 \in \widetilde{\mathfrak{u}}'(\mathrm{F})$ tels que $X = X_1 + X_2$. Soit $\mathcal{O}^{G\times U'}$ la relation d'équivalence sur $(\mathfrak{g} \times \widetilde{\mathfrak{u}}')(\mathrm{F})$ définie de la façon suivante. On a $X = X_1 + X_2 \sim Y = Y_1 + Y_2$ si et seulement si les polynômes caractéristiques de X_1 et Y_1 coïncident et si X_2 et Y_2 sont dans la même classe pour la relation d'équivalence dans $\widetilde{\mathfrak{u}}'(\mathrm{F})$ décrite dans le paragraphe 2.3 par rapport à l'inclusion $U' \hookrightarrow \widetilde{U}'$.

Fixons P_0 un sous-F-groupe parabolique minimal de $G \times U'$ et fixons aussi M_0 une partie de Levi de P_0. Soit P un sous-groupe parabolique standard de $G \times U'$. On a $P = P_G \times P_{U'}$ où P_G (resp. $P_{U'}$) est un sous-groupe parabolique standard de G (resp. U') par rapport au sous-groupe parabolique minimal $P_0 \cap G$ (resp. $P_0 \cap U'$). On pose alors $\widetilde{P} = P_G \times \widetilde{P}_{U'}$ où $\widetilde{P}_{U'}$ c'est le sous-groupe parabolique de $\widetilde{U}'$ associé à $P_{U'}$ par la procédure décrite dans le paragraphe 2.2. On note $\mathfrak{m}_{\widetilde{P}}$ l'algèbre de Lie de la partie de Levi de $\widetilde{P}$ contenant M_0.

https://doi.org/10.4153/CJM-2015-054-9 Published online by Cambridge University Press

Pour une fonction $f \in \mathcal{S}((\mathfrak{g} \times \widetilde{\mathfrak{u}}')(\mathbb{A}))$, un sous-groupe parabolique standard P de $G \times U'$, et une classe $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}^{G \times U'}$ on pose

$$k_{f,P,\mathfrak{o}}(x) = \sum_{\xi \in \mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}} \int_{\mathrm{Lie}(N_{\widetilde{P}})(\mathbb{A})} f(x^{-1}(\xi + U_P)x)\, dU_P, \quad x \in (G \times U')(\mathbb{A}).$$

Pour un $T \in (\mathfrak{a}_{P_0}^{G \times U'})^+$ on pose donc

$$k_{f,\mathfrak{o}}^T(x) = \sum_{P \supseteq P_0} (-1)^{d_P^{G \times U'}} \sum_{\delta \in P(\mathrm{F}) \backslash (G \times U')(\mathrm{F})} \hat{\tau}_P^{G \times U'}(H_P(\delta x) - T) k_{f,P,\mathfrak{o}}(\delta x).$$

Théorème 4.1 *Soit $f \in \mathcal{S}((\mathfrak{g} \times \widetilde{\mathfrak{u}}')(\mathbb{A}))$, alors pour tout $T \in T_+ + (\mathfrak{a}_{P_0}^{G \times U'})^+$ on a*

$$\sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}^{G \times U'}} \int_{(G \times U')(\mathrm{F}) \backslash (G \times U')(\mathbb{A})^1} |k_{f,\mathfrak{o}}^T(x)|\, dx < \infty.$$

Démonstration Le résultat découle de théorème 3.1 et de [4, théorème 3.1]. ■

Notons alors que $J_{\mathfrak{o}}^{G \times U', T}(f) = \int_{(G \times U')(\mathrm{F}) \backslash (G \times U')(\mathbb{A})^1} k_{f,\mathfrak{o}}^T(x)\, dx$.

Revenons au groupe U. Soit Q le sous-groupe parabolique standard de U défini par le $l+1$-uplet $(i_0, i_1, \dots, i_l)$, de façon que Q soit le stabilisateur du drapeaux isotrope (2.8). Les choix qu'on a fait dans le paragraphe 2.2 nous permettent d'écrire $V_{i_l} = V_Q$ et $V = V_Q \oplus Z_Q \oplus V_Q^\sharp$. La restriction de Φ à Z_Q est une forme hermitienne non-dégénérée. On a donc

$$M_Q \cong \prod_{j=0}^{l-1} \mathrm{Res}_{\mathrm{E}/\mathrm{F}} \mathrm{GL}_{i_{j+1}-i_j} \times U(Z_Q, \Phi_{|Z_Q}).$$

En particulier M_Q est de type considéré au début de ce paragraphe.

Soit $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$. Il existe $\mathfrak{o}_{Q,1}, \dots, \mathfrak{o}_{Q,m} \in \mathcal{O}^{M_Q}$, où $0 \le m < \infty$, tels que

$$\mathfrak{m}_{\widetilde{Q}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o} = \coprod_{i=1}^{m} \mathfrak{o}_{Q,i}.$$

On définit alors les distributions $J_{\mathfrak{o}}^{M_Q,T}$ et $J^{M_Q,T}$ sur $\mathcal{S}(\mathfrak{m}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A}))$ par

$$J_{\mathfrak{o}}^{M_Q,T}(f) = \sum_{i=1}^{m} J_{\mathfrak{o}_{Q,i}}^{M_Q,T}(f), \quad J^{M_Q,T}(f) = \sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}} J_{\mathfrak{o}}^{M_Q,T}(f), \tag{4.1}$$

où pour $\mathfrak{o}_Q \in \mathcal{O}^{M_Q}$, $J_{\mathfrak{o}_Q}^{M_Q,T}$ c'est la distribution décrite ci-dessus par rapport au sous-groupe parabolique minimal $P_0 \cap M_Q$, le sous-groupe de Levi M_0, et le sous-groupe compact maximal $K \cap M_Q(\mathbb{A})$ de $M_Q(\mathbb{A})$ admissible par rapport à M_0.

Pour $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}))$ on pose

$$f_Q(X) = \int_K \int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})} f(k^{-1}(X + U_Q)k) dU_Q\, dk, \quad X \in \mathfrak{m}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A}); \tag{4.2}$$

alors $f_Q \in \mathcal{S}(\mathfrak{m}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A}))$. Notons que l'application $Q \supseteq P \mapsto M_Q \cap P$ définit une bijection entre les sous-groupes paraboliques de U contenus dans Q et les sous-groupes

https://doi.org/10.4153/CJM-2015-054-9 Published online by Cambridge University Press

paraboliques de M_Q contenant $P_0 \cap M_Q$. On s'aperçoit alors qu'on a

$$
\begin{aligned}
(4.3)\quad J_{\mathfrak{o}}^{M_Q,T}(f_Q) &= \int_{M_Q(\mathrm{F})\backslash M_Q(\mathbb{A})^1} \sum_{i=1}^{m} k^T_{f_Q,\mathfrak{o}_{Q,i}}(m)dm \\
&= \int_{M_Q(\mathrm{F})\backslash M_Q(\mathbb{A})^1} \sum_{P\subseteq Q} (-1)^{d_P^Q} \sum_{\eta\in(P\cap M_Q)(\mathrm{F})\backslash M_Q(\mathrm{F})} \hat{\tau}_P^Q(H_P(\eta m)-T) \\
&\quad \times \Big(\sum_{\xi\in\mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F})\cap\mathfrak{o}} \int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})} f_Q(\mathrm{Ad}((\eta m)^{-1})(\xi+U_P^Q))dU_P^Q \Big)\, dm.
\end{aligned}
$$

4.2 Polynômes-exponentielles

Soit $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Par un polynôme-exponentielle sur $\mathcal{V}$ on entend une fonction sur $\mathcal{V}$ de la forme $f(v) = \sum_{\lambda\in\mathcal{V}^*} e^{\lambda(v)}P_\lambda(v)$, pour $v \in \mathcal{V}$ où P_λ est un polynôme sur $\mathcal{V}$ à coefficients complexes, nul pour presque tout $\lambda \in \mathcal{V}^*$. On appelle $\lambda \in \mathcal{V}^*$ tels que $P_\lambda \neq 0$ les exposants de f et on appelle le polynôme correspondant à $\lambda = 0$ le terme purement polynomial de f. On a alors le résultat d'unicité suivant : si f est comme ci-dessus et $g = \sum_{\lambda\in\mathcal{V}^*} e^\lambda Q_\lambda$ est un polynôme-exponentielle sur $\mathcal{V}$ tel que $g(v) = f(v)$ pour tout $v \in \mathcal{V}$, alors pour tout $\lambda \in \mathcal{V}^*$ on a $P_\lambda = Q_\lambda$.

On rappelle qu'à la fin du paragraphe 2.5 on a défini un $\underline{\rho}_Q \in \mathfrak{a}_Q^*$ pour tout sous-groupe parabolique standard Q. On aura besoin du lemme suivant.

Lemme 4.2 *Soit Q un sous-groupe parabolique standard de U. Alors pour tout $\varpi^\vee \in \widehat{\Delta}_Q^\vee$ on a $\underline{\rho}_Q(\varpi^\vee) > 0$.*

Démonstration Soit $\mathcal{S} \subseteq \mathfrak{a}_Q^*$ l'ensemble des poids pour l'action du tore A_Q sur V_Q. Alors $\mathcal{S}$ est une base de $\mathfrak{a}_Q^*$ et on note $\mathcal{S}^\vee \subseteq \mathfrak{a}_Q$ sa base duale. Comme on a déjà remarqué à la fin du paragraphe 2.5, on a $\underline{\rho}_Q = \sum_{e^*\in\mathcal{S}} n_{e^*}e^*$ avec $n_{e^*} \in \mathbb{N}^*$. D'autre part, tout $\varpi^\vee \in \widehat{\Delta}_Q^\vee$ est une combinaison linéaire à coefficients positifs des vecteurs dans $\mathcal{S}^\vee$, d'où le résultat. ∎

Donc pour tout Q et tout $R \supseteq Q$ différents de U, on a que $\underline{\rho}_R$, vu comme un élément de $\mathfrak{a}_Q^*$ grâce à la décomposition (2.2), est non-nul.

Soient $Q \subseteq R$ deux sous-groupes paraboliques standards. Notons v_Q^R (resp. v'_R) le volume dans $\mathfrak{a}_Q^R$ (resp. $\mathfrak{a}_R$) du parallélotope engendré par $(\widehat{\Delta}_Q^R)^\vee$ (resp. $\Delta_R^\vee$). Suivant [1, §2], posons

(4.4)
$$
\hat{\theta}_Q^R(\mu) = (v_Q^R)^{-1} \prod_{\varpi\in(\widehat{\Delta}_Q^R)^\vee} \mu(\varpi^\vee), \quad \theta_R(\mu) = (v'_R)^{-1} \prod_{\alpha\in\Delta_R} \mu(\alpha^\vee), \quad \mu \in \mathfrak{a}_0^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.
$$

Quand $R = U$ on écrira $\hat{\theta}_Q = \hat{\theta}_Q^U$.

Toujours supposant $R \supseteq Q$, pour $X \in \mathfrak{a}_Q$, on note X_R sa projection à $\mathfrak{a}_R$ selon la décomposition (2.2). Suivant [1, §2], posons

$$
(4.5)\qquad \Gamma'_Q(H,X) = \sum_{R\supseteq Q} (-1)^{d_Q^R} \hat{\tau}_R(H_R - X_R)\tau_Q^R(H), \quad H, X \in \mathfrak{a}_Q.
$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2015-054-9 Published online by Cambridge University Press

On démontrera le lemme suivant.

Lemme 4.3 *Soit Q un sous-groupe parabolique standard de U. Alors pour tout $R \supseteq Q$ il existe un polynôme $p_{Q,R}$ de degré au plus d_Q sur $\mathfrak{a}_R$ tel que la fonction*

$$p_Q(X) := \int_{\mathfrak{a}_Q} e^{\underline{\rho}_Q(H)} \Gamma'_Q(H,X)\, dH, \quad X \in \mathfrak{a}_Q$$

égale $\sum_{R\supseteq Q} e^{\underline{\rho}_R(X_R)} p_{Q,R}(X_R)$ où $p_{Q,U}(X_U) = (-1)^{d_Q} \hat{\theta}_Q(\underline{\rho}_Q)^{-1}$. En particulier, la fonction p_Q est un polynôme-exponentielle dont le terme purement polynomial est constant et égale $(-1)^{d_Q} \hat{\theta}_Q(\underline{\rho}_Q)^{-1}$.

Remarque On ne prétend pas que les polynômes $p_{Q,R}$ sont uniquement déterminés pour tout $R \supseteq Q$. En effet, il arrive que $\underline{\rho}_R = \underline{\rho}_{R'}$ pour $R \neq R'$. Cependant, U est le seul sous-groupe parabolique $R \supseteq Q$ tel que $\underline{\rho}_R = 0$ d'où l'unicité du terme $p_{Q,U}$.

Démonstration Etudions l'intégrale

$$\int_{\mathfrak{a}_Q} e^{\mu(H)} \Gamma'_Q(H,X)\, dH, \quad \mu \in \mathfrak{a}_Q^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}. \tag{4.6}$$

Il résulte de [1, lemme 2.1] que pour un X fixé, la fonction $H \mapsto \Gamma'_Q(H,X)$ est à support compact dans $\mathfrak{a}_Q$. L'intégrale ci-dessus est donc bien définie et aussi la fonction p_Q est bien définie sur $\mathfrak{a}_Q$.

D'après [1, lemme 2.2] on obtient que l'intégrale (4.6) est une fonction entière de la variable μ et sa valeur est donnée par

$$\sum_{R\supseteq Q} (-1)^{d_Q^R} e^{\mu(X_R)} \hat{\theta}_Q^R(\mu)^{-1} \theta_R(\mu)^{-1} \tag{4.7}$$

pour tout $\mu \in \mathfrak{a}_Q^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ pour lesquelles cela a un sens.

On n'a pas le droit d'utiliser cette formule pour $\underline{\rho}_Q$ car certains $\hat{\theta}_Q^R(\underline{\rho}_Q)$ et $\theta_R(\underline{\rho}_Q)$ vont s'annuler. On procède alors comme suit. On fixe un $\varepsilon \in \mathfrak{a}_Q^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ tel que $\hat{\theta}_Q^R(\varepsilon) \neq 0$, $\theta_R(\varepsilon) \neq 0$ pour tout $R \supseteq Q$. Alors il en est de même pour $\underline{\rho}_Q + t\varepsilon$ où $t \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ suffisamment petit. Pour calculer $p_Q(X)$ on met $\mu = \underline{\rho}_Q + t\varepsilon$ dans (4.7) et on considère la fonction

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \sum_{R\supseteq Q} (-1)^{d_Q^R} e^{(\underline{\rho}_Q + t\varepsilon)(X_R)} \hat{\theta}_Q^R(\underline{\rho}_Q + t\varepsilon)^{-1} \theta_R(\underline{\rho}_Q + t\varepsilon)^{-1}.$$

C'est une fonction analytique et sa valeur en $t = 0$ égale $p_Q(X)$. Pour calculer $p_Q(X)$ il suffit alors de développer cette fonction en $t = 0$ et de prendre le terme constant.

Fixons $R \supseteq Q$ et regardons $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{t\varepsilon(X_R)} \hat{\theta}_Q^R(\underline{\rho}_Q + t\varepsilon)^{-1} \theta_R(\underline{\rho}_Q + t\varepsilon)^{-1}$. Notons $p_{Q,R,\varepsilon}(X_R)$ son terme constant dans son développement en $t = 0$. Il est clair que $p_{Q,R,\varepsilon}$ est un polynôme en la variable $X_R \in \mathfrak{a}_R$ de degré au plus d_Q.

On obtient donc $p_Q(X) = \sum_{R\supseteq Q} (-1)^{d_Q^R} e^{\underline{\rho}_R(X_R)} p_{Q,R,\varepsilon}(X_R)$, où on utilise le fait que la restriction de $\underline{\rho}_Q$ à $\mathfrak{a}_R$ c'est $\underline{\rho}_R$ pour $R \supseteq Q$.

Regardons le terme $p_{Q,U,\varepsilon}(X_U)$. On a

$$\lim_{t\to 0} e^{t\varepsilon(X_U)} \hat{\theta}_Q^U(\underline{\rho}_Q + t\varepsilon)^{-1} \theta_U(\underline{\rho}_Q + t\varepsilon)^{-1} = \hat{\theta}_Q(\underline{\rho}_Q)^{-1}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2015-054-9 Published online by Cambridge University Press

en vertu du lemme 4.2, d'où le résultat. ■

4.3 Le comportement asymptotique en T

On démontre la proposition suivante.

Proposition 4.4 *Soient $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}))$, $T' \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$, $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$, et $T \in T' + \mathfrak{a}_0^+$. Alors*

$$J_{\mathfrak{o}}^T(f) = \sum_{Q \supseteq P_0} p_Q(T_Q - T'_Q) e^{\underline{\rho}_Q(T'_Q)} J_{\mathfrak{o}}^{M_Q,T'}(f_Q),$$

où pour un sous-groupe parabolique $Q \supseteq P_0$, la fonction p_Q est définie dans le lemme 4.3, $\underline{\rho}_Q \in \mathfrak{a}_Q^*$ est défini à la fin du paragraphe 2.5, la distribution $J_{\mathfrak{o}}^{M_Q,T'}$ est définie dans le paragraphe 4.1, et $f_Q \in \mathcal{S}(\mathfrak{m}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A}))$ est définie par (4.2) dans le même paragraphe.

Démonstration Il est démontré [1, paragraphe 2] que les fonctions Γ'_Q, définies par (4.5), vérifient la relation suivante : pour tout sous-groupe parabolique P de U, on a

$$\hat{\tau}_P(H - X) = \sum_{Q \supseteq P} (-1)^{d_Q} \hat{\tau}_P^Q(H) \Gamma'_Q(H, X), \quad H, X \in \mathfrak{a}_P. \tag{4.8}$$

Fixons un $T' \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ et soit $T \in T' + \mathfrak{a}_0^+$. En utilisant l'égalité ci-dessus avec $H = H_P(\delta x) - T'$ et $X = T - T'$ on a

$$\begin{aligned} J_{\mathfrak{o}}^T(f) &= \int_{U(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A})} \sum_{P \supseteq P_0} (-1)^{d_P} \sum_{\delta \in P(\mathrm{F})\backslash U(\mathrm{F})} \sum_{Q \supseteq P} (-1)^{d_Q} \Psi_{P,Q,\mathfrak{o}}^{T,T'}(\delta x)\, dx \\ &= \sum_{Q \supseteq P_0} \int_{Q(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A})} \sum_{P \subseteq Q} (-1)^{d_P^Q} \sum_{\eta \in (P \cap M_Q)(\mathrm{F})\backslash M_Q(\mathrm{F})} \Psi_{P,Q,\mathfrak{o}}^{T,T'}(\eta x)\, dx \end{aligned} \tag{4.9}$$

où $\Psi_{P,Q,\mathfrak{o}}^{T,T'}(x) = k_{P,\mathfrak{o}}(x) \hat{\tau}_P^Q(H_P(x) - T') \Gamma'_Q(H_Q(x) - T', T - T')$. Posons $x = namk$ où $n \in N_Q(\mathrm{F})\backslash N_Q(\mathbb{A})$, $m \in M_Q(\mathrm{F})\backslash M_Q(\mathbb{A})^1$, $a \in A_Q^\infty$, et $k \in K$. Donc

$$dx = e^{-2\rho_Q(H_Q(a))} dndadmdk.$$

On peut donc changer l'intégrale sur $Q(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A})$ en l'intégrale

$$\int_{A_Q^\infty} \int_{M_Q(\mathrm{F})\backslash M_Q(\mathbb{A})^1} \int_K \int_{N_Q(\mathrm{F})\backslash N_Q(\mathbb{A})} e^{-2\rho_Q(H_Q(a))}.$$

On a

$$\int_{N_Q(\mathrm{F})\backslash N_Q(\mathbb{A})} \Psi_{P,Q,\mathfrak{o}}^{T,T'}(\eta namk)\, dn = \int_{N_Q(\mathrm{F})\backslash N_Q(\mathbb{A})} \Psi_{P,Q,\mathfrak{o}}^{T,T'}(na\eta mk)\, dn$$

car $\eta \in M_Q(\mathrm{F})$ normalise $N_Q(\mathbb{A})$ sans changer sa mesure et il commute avec A_Q^∞. Les facteurs de $\Psi_{P,Q,\mathfrak{o}}^{T,T'}(na\eta mk)$ ($\eta \in (P(\mathrm{F}) \cap M_Q(\mathrm{F}))\backslash M_Q(\mathrm{F})$) deviennent

$$\begin{aligned} \Gamma'_Q(H_Q(na\eta mk) - T', T - T') &= \Gamma'_Q(H_Q(a) - T', T - T'), \\ \hat{\tau}_P^Q(H_P(na\eta mk) - T') &= \hat{\tau}_P^Q(H_P(\eta m) - T'). \end{aligned}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2015-054-9 Published online by Cambridge University Press

Quant à $k_{P,\mathfrak{o}}$, en utilisant sa définition (3.1) et en faisant les changements de variables $(a^{-1}n^{-1}(U+\xi)na-\xi)\mapsto U$ et $m^{-1}\eta^{-1}U_Q\eta m\mapsto U_Q$, on obtient

$$
\begin{aligned}
(4.10)\quad e^{-2\rho_{\widetilde{Q}}(H_Q(a))}\int_K\int_{[N_Q]}k_{P,\mathfrak{o}}(na\eta mk)\,dndk\\
&=\int_K\int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{P}}(\mathbb{A})}\sum_{\xi\in\mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F})\cap\mathfrak{o}}f(k^{-1}m^{-1}\eta^{-1}(\xi+U_P)\eta mk)\,dU_Pdk\\
&=\int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})}\sum_{\xi\in\mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F})\cap\mathfrak{o}}\int_K\int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{P}}(\mathbb{A})}e^{2\rho_{\widetilde{Q}}(H_Q(m))}\\
&\quad\times f(k^{-1}(m^{-1}\eta^{-1}(\xi+U_P^Q)\eta m+U_Q)k)\,dU_QdkdU_P^Q\\
&=\int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})}\sum_{\xi\in\mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F})\cap\mathfrak{o}}f_Q(m^{-1}\eta^{-1}(\xi+U_P^Q)\eta m)\,dU_P^Q
\end{aligned}
$$

où $f_Q\in\mathcal{S}(\mathfrak{m}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A}))$ est définie par (4.2) et on a utilisé le fait que $\rho_{\widetilde{Q}}(H_Q(m))=0$ car $m\in M_Q(\mathbb{A})^1\subseteq M_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})^1$.

En regardant la relation (4.3), on s'aperçoit qu'avec la notation de l'équation (4.9) on a

$$
\int_{Q(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A})}\sum_{P\subseteq Q}(-1)^{d_P^Q}\sum_{\eta\in P(\mathrm{F})\cap M_Q(\mathrm{F})\backslash M_Q(\mathrm{F})}\Psi_{P,Q,\mathfrak{o}}^{T,T'}(\eta x)\,dx=J_{\mathfrak{o}}^{M_Q,T'}(f_Q)p_Q(T,T')
$$

où $p_Q(T,T')$ égale

$$
\begin{aligned}
\int_{A_Q^\infty}e^{2\rho_{\widetilde{Q}}(H_Q(a))-2\rho_Q(H_Q(a))}\Gamma_Q'(H_Q(a)-T',T-T')\,da\\
&=\int_{\mathfrak{a}_Q}e^{\underline{\rho}_Q(H)}\Gamma_Q'(H-T_Q',T_Q-T_Q')\,dH.
\end{aligned}
$$

Par un changement de variable on obtient $p_Q(T,T')=e^{\underline{\rho}_Q(T_Q')}p_Q(T_Q-T_Q')$ où p_Q c'est la fonction étudiée dans le lemme 4.3, d'où le résultat. ■

En utilisant la proposition 4.4 démontrée ci-dessus et le lemme 4.3 qui décrit les fonctions p_Q explicitement, on obtient le comportement en T des distributions $J_{\mathfrak{o}}^T$ et J^T.

Théorème 4.5 *Soit $f\in\mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}))$. Les fonctions $T\mapsto J_{\mathfrak{o}}^T(f)$ et $T\mapsto J^T(f)$ où $\mathfrak{o}\in\mathcal{O}$ et T parcourt $T_++\mathfrak{a}_0^+$ sont des polynômes-exponentielles dont les parties purement polynomiales sont constantes et données respectivement par*

$$
J_{\mathfrak{o}}(f):=\sum_Q(-1)^{d_Q}\hat{\theta}_Q(\underline{\rho}_Q)^{-1}e^{\underline{\rho}_Q(T_Q')}J_{\mathfrak{o}}^{M_Q,T'}(f_Q),
$$

$$
J(f):=\sum_Q(-1)^{d_Q}\hat{\theta}_Q(\underline{\rho}_Q)^{-1}e^{\underline{\rho}_Q(T_Q')}J^{M_Q,T'}(f_Q),
$$

pour tout $T'\in T_++\mathfrak{a}_0^+$. En particulier, les distributions $J_{\mathfrak{o}}$ et J ne dépendent pas de T'.

Remarque 4.6 Soit Q un sous-groupe parabolique standard de U. Il résulte de la proposition 4.4 et de [4, théorème 4.2] que les distributions $J_{\mathfrak{o}}^{M_Q,T}$ et $J^{M_Q,T}$, définies dans le paragraphe 4.1, sont des polynômes-exponentielles avec des exposants $\underline{\rho}_R-\underline{\rho}_Q$

où R parcourt les sous-groupes paraboliques contenus dans Q. Cependant, si $Q \neq U$ le terme purement polynomial n'est pas constant.

4.4 Invariance

Dans ce paragraphe on démontrera l'invariance par conjugaison des distributions $J_{\mathfrak{o}}$ et J.

Soient $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}))$ et $y \in U(\mathbb{A})$. Notons $f^y \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}))$ la fonction définie par $f^y(X) = f(\mathrm{Ad}(y)X)$. On voit donc qu'on a

$$J_{\mathfrak{o}}^T(f^y) = \int_{U(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A})} \sum_P (-1)^{d_P} \sum_{\delta \in P(\mathrm{F})\backslash U(\mathrm{F})} k_{P,\mathfrak{o}}(\delta x)\hat{\tau}_P(H_P(\delta x y) - T_P)\, dx.$$

Pour $x \in U(\mathbb{A})$ soit $k_P(x)$ un élément de K tel que $x k_P(x)^{-1} \in P(\mathbb{A})$. Alors en utilisant l'égalité (4.8), on a

$$\hat{\tau}_P(H_P(\delta x y) - T_P) = \sum_{Q \supseteq P} (-1)^{d_Q} \hat{\tau}_P^Q(H_P(\delta x) - T_P)\Gamma'_Q(H_P(\delta x) - T_Q, -H_P(k_P(\delta x)y)),$$

d'où

$$J_{\mathfrak{o}}^T(f^y) = \sum_Q \int_{Q(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A})} \sum_{P \subseteq Q} (-1)^{d_P - d_Q} \sum_{\eta \in P(\mathrm{F}) \cap M_Q(\mathrm{F})\backslash M_Q(\mathrm{F})} \Psi_{P,Q,\mathfrak{o}}^{T,y}(\eta x)\, dx$$

où

$$\Psi_{P,Q,\mathfrak{o}}^{T,y}(x) = k_{P,\mathfrak{o}}(x)\hat{\tau}_P^Q(H_P(x) - T_P)\Gamma'_Q(H_P(x) - T_Q, -H_P(k_P(x)y)).$$

Soit $x = namk$ où $n \in N_Q(\mathrm{F})\backslash N_Q(\mathbb{A})$, $m \in M_Q(\mathrm{F})\backslash M_Q(\mathbb{A})^1$, $a \in A_Q^\infty$, et $k \in K$. Donc $dx = e^{-2\rho_Q(H_Q(a))} dndadmdk$. On a pour $\eta \in M_Q(\mathrm{F})$

$$\Gamma'_Q(H_P(\eta namk) - T_Q, -H_P(k_P(\eta namk)y)) = \Gamma'_Q(H_Q(a) - T_Q, -H_Q(ky)).$$

Ensuite, en faisant les mêmes opérations comme dans (4.10), on s'aperçoit qu'on a pour $P \subseteq Q$, $m \in M_Q(\mathrm{F})\backslash M_Q(\mathbb{A})^1$, et $\eta \in M_Q(\mathrm{F})$,

$$\begin{aligned}
&\int_{A_Q^\infty} \int_K \int [N_Q] e^{-2\rho_Q(H_Q(a))} k_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(\eta n m a k) \\
&\qquad \times \Gamma'_Q\big(H_P(\eta namk) - T_Q, -H_P(k_P(\eta namk)y)\big)\, dndkda \\
&= e^{\underline{\rho}_Q(T_Q)} \int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})} \sum_{\xi \in \mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}} \int_K \int_{\mathfrak{a}_Q} \int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})} e^{\underline{\rho}_Q(H)} \\
&\qquad \times f(k^{-1}(m^{-1}\eta^{-1}(\xi + U_P^Q)\eta m + U_Q)k)\Gamma'_Q(H, -H_Q(ky))dU_Q dH dk dU_P^Q \\
&= e^{\underline{\rho}_Q(T_Q)} \int \mathfrak{n}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}(\mathbb{A}) \sum_{\xi \in \mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}} f_{Q,y}(m^{-1}\eta^{-1}(\xi + U_P^Q)m\eta) dU_P^Q,
\end{aligned}$$

où l'on pose

$$f_{Q,y}(X) = \int_K \int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})} f(k^{-1}(X + U_Q)k) u'_Q(k,y)\, dU_Q dk, \quad X \in \mathfrak{m}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})$$

où $u'_Q(k,y) = \int_{\mathfrak{a}_Q} e^{\underline{\rho}_Q(H)} \Gamma'_Q(H, -H_Q(ky))\, dH$. La fonction $k \mapsto u'_Q(k,y)$ étant continue, on a bien $f_{Q,y} \in \mathcal{S}(\mathfrak{m}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A}))$. On obtient le théorème suivant.

Théorème 4.7 *Soient $y \in U(\mathbb{A})$ et $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}))$. Les distributions $J_{\mathfrak{o}}^T$ vérifient*

$$J_{\mathfrak{o}}^T(f^y) - J_{\mathfrak{o}}^T(f) = \sum_{P_0 \subseteq Q \subsetneq U} e^{\underline{\rho}_Q(T_Q)} J_{\mathfrak{o}}^{M_Q,T}(f_{Q,y}),$$

où les distributions $J_{\mathfrak{o}}^{M_Q,T}$ sur $\mathcal{S}(\mathfrak{m}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A}))$ sont définies par (4.1). En particulier, on a $J_{\mathfrak{o}}(f^y) = J_{\mathfrak{o}}(f)$, $J(f^y) = J(f)$.

Démonstration La formule pour la différence $J_{\mathfrak{o}}^T(f^y) - J_{\mathfrak{o}}^T(f)$ est claire après les calculs qu'on a faits. Cette formule-ci démontre aussi l'invariance, car si $Q \subsetneq U$, d'après la remarque 4.6, le terme $J_{\mathfrak{o}}^{M_Q,T}(f_{Q,y})$ est un polynôme-exponentielle d'exposants $\underline{\rho}_R - \underline{\rho}_Q$ où $R \subseteq Q$. Il en découle que $e^{\underline{\rho}_Q(T_Q)} J_{\mathfrak{o}}^{M_Q,T}(f_{Q,y})$ n'a pas de terme constant dans ce cas et par conséquent les termes constants de $J_{\mathfrak{o}}^T(f^y)$ et $J_{\mathfrak{o}}^T(f)$ coïncident. ∎

4.5 Indépendance des choix

Dans ce paragraphe on démontrera que la distribution $J_{\mathfrak{o}}$ ne dépend d'aucun choix, sauf le choix d'une mesure de Haar sur $U(\mathbb{A})$ et les choix des mesures sur les sous-espaces $\mathcal{V}$ de $\mathfrak{n}_{\widetilde{0}}$, notre choix étant que $\mathcal{V}(\mathrm{F})\backslash\mathcal{V}(\mathbb{A})$ soit de volume 1.

Démontrons d'abord que $J_{\mathfrak{o}}$ ne dépend pas du choix du sous-groupe parabolique minimal contenant M_0. Soient $P_0' \in \mathcal{P}(M_0)$ et $s \in \Omega$ tel que $P_0' = w_s^{-1} P_0 w_s$. Notons $J_{P_0',\mathfrak{o}}^T$ et $J_{P_0',\mathfrak{o}}$ les distributions construites par rapport à P_0'. C'est une conséquence simple de la relation (2.6) qu'on a pour

$$T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+, J_{\mathfrak{o}}^T = J_{P_0',\mathfrak{o}}^{s^{-1}T + H_{P_0}(w_s^{-1})}.$$

En vertu du théorème 4.5 on voit donc que les termes constants de

$$T \mapsto J_{\mathfrak{o}}^T \quad \text{et} \quad T \mapsto J_{P_0',\mathfrak{o}}^{s^{-1}T + H_{P_0}(w_s^{-1})}$$

coïncident, d'où $J_{\mathfrak{o}} = J_{P_0',\mathfrak{o}}$.

On va démontrer maintenant que $J_{\mathfrak{o}}$ ne dépend pas du choix du sous-groupe compact maximal admissible par rapport à M_0. Soit K^* un autre tel sous-groupe. Pour tout sous-groupe parabolique standard P notons H_P^* le prolongement à $U(\mathbb{A})$ par rapport à K^* de la fonction H_P définie sur $P(\mathbb{A})$ par (2.3). Comme avant, pour tout $x \in U(\mathbb{A})$, on note $k_P(x)$ un élément de K tel que $x k_P(x)^{-1} \in P(\mathbb{A})$. On a alors $H_P^*(x) = H_P^*(x k_P(x)^{-1}) + H_P^*(k_P(x))$ et ni $H_P^*(k_P(x))$ ni $H_P^*(x k_P(x)^{-1})$ ne dépendent du choix de $k_P(x)$. De surcroît $H_P^*(x k_P(x)^{-1}) = H_P(x)$. Alors, en utilisant l'égalité (4.8) on a

$$\hat{\tau}_P(H_P^*(x) - T) = \sum_{Q \supseteq P} (-1)^{d_Q} \hat{\tau}_P^Q(H_P(x) - T) \Gamma_Q'(H_Q(x) - T, -H_Q^*(k_P(x))). \tag{4.11}$$

Pour un sous-groupe parabolique standard Q on pose

$$f_Q^*(X) = \int_K \int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})} f(k^{-1}(X + U_Q)k) u_Q^*(k)\, dU_Q dk, \quad X \in \mathfrak{m}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A}),$$

où $u_Q^*(k) = \int_{\mathfrak{a}_Q} e^{\underline{\rho}_Q(H)} \Gamma_Q'(H, -H_Q^*(k))\, dH$. Donc $f_Q^* \in \mathcal{S}(\mathfrak{m}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A}))$.

https://doi.org/10.4153/CJM-2015-054-9 Published online by Cambridge University Press

On note $J^T_{K^*,\mathfrak{o}}$ et $J_{K^*,\mathfrak{o}}$, les distributions construites par rapport à K^*. En partant alors de l'égalité (4.11) et en effectuant les mêmes opérations que dans le paragraphe 4.4, on trouve $J^T_{K^*,\mathfrak{o}}(f) - J^T_{\mathfrak{o}}(f) = \sum_{P_0 \subseteq Q \subsetneq U} e^{\underline{\rho_Q}(T)} J^{M_Q,T}_{\mathfrak{o}}(f^*_Q)$. De nouveau, en vertu du théorème 4.5 et de la remarque 4.6, par égalité des termes constants, on a $J_{\mathfrak{o}} = J_{K^*,\mathfrak{o}}$.

Par définition de $J_{\mathfrak{o}}$, il est clair qu'elle est indépendante des choix des mesures de Haar qu'on a fait dans le paragraphe 2.5, sauf pour la mesure de Haar sur $U(\mathbb{A})$ et les mesures sur les sous-espaces de $\mathfrak{n}_{\widetilde{0}}$.

Il nous reste à démontrer l'indépendance du choix de sous-groupe de Levi minimal. Soit M_0' un sous-groupe de Levi défini sur F minimal de U. Il existe alors un $y \in U(\mathrm{F})$ tel que $M_0' = y^{-1}M_0 y$. On note alors $J_{M_0',\mathfrak{o}}$ le terme constant de la distribution $J^T_{M_0',\mathfrak{o}}$ définie par rapport au sous-groupe parabolique minimal $y^{-1}P_0 y$ et le compact maximal $y^{-1}Ky$. On trouve alors $J_{\mathfrak{o}}(f) = J_{M_0',\mathfrak{o}}(f^y)$ et le résultat découle du théorème 4.7.

4.6 Orbites semi-simples régulières

Soit $\mathcal{O}_{\mathrm{reg}} \subseteq \mathcal{O}$ l'ensemble des orbites semi-simples régulières, c'est-à-dire des orbites composées d'éléments semi-simples réguliers. Le but de ce paragraphe est de démontrer que, sous la condition que $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}_{reg}$, la distribution $J_{\mathfrak{o}}(f)$ s'exprime comme une intégrale orbitale de f.

Lemme 4.8 *Soient $X \in \widetilde{\mathfrak{u}}(\mathrm{F})$ un élément régulier semi-simple et P un sous-groupe parabolique de U différent de U. Alors $X \notin \mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F})$.*

Démonstration Soit P comme dans l'énoncé. Le tore A_P est non-trivial et centralise $\mathfrak{m}_{\widetilde{P}}$. Donc X ne peut pas être dans $\mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F})$ en vertu de la proposition 2.2 (ii). ■

Soient $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}))$ et $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}_{reg}$. D'après le lemme 4.8 on a $k_{f,P,\mathfrak{o}} \equiv 0$ pour tout sous-groupe parabolique standard différent de U. En utilisant alors la proposition 2.2 (ii) ainsi que la proposition 2.3, on trouve

$$k^T_{U,\mathfrak{o}}(x) = k_{U,\mathfrak{o}}(x) = \sum_{\xi \in \widetilde{\mathfrak{u}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}} f(x^{-1}\xi x) = \sum_{\delta \in U(\mathrm{F})} f(x^{-1}\delta^{-1}X_1\delta x),$$

où $X_1 \in \mathfrak{o}$ quelconque. On obtient donc la proposition suivante.

Proposition 4.9 *Pour tous $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}))$, $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$, $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}_{reg}$, et $X_1 \in \mathfrak{o}$ on a*

$$J^T_{\mathfrak{o}}(f) = J_{\mathfrak{o}}(f) = \int_{U(\mathbb{A})} f(x^{-1}X_1 x)\,dx$$

où l'intégrale est absolument convergente.

5 Formule des traces infinitésimale

Il résulte de l'analyse faite dans le paragraphe 2.3 qu'on a la décomposition de $\widetilde{\mathfrak{u}}$ en sous-F-espaces stables sous l'action de U suivante :

$$\widetilde{\mathfrak{u}} = \mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2 \oplus \mathfrak{t}_3, \tag{5.1}$$

où $\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{u}$, $\mathfrak{t}_2 \cong \mathrm{Res}_{E/F}(V)$, et $\mathfrak{t}_3 = \mathrm{Lie}(U(D_0, \widetilde{\Phi}|_{D_0}))$. Soit $\mathfrak{t} \subseteq \widetilde{\mathfrak{u}}$ un F-sous-espace défini comme une somme directe de certains d'entre les $\mathfrak{t}_i$, $i = 1, 2, 3$. Il y a donc huit possibilités pour $\mathfrak{t}$. Puisque chaque $\mathfrak{t}_i$ est $U(\mathrm{F})$-stable et la restriction de la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, définie par (2.9), à $\mathfrak{t}_i$ est non-dégénérée, il en est de même pour $\mathfrak{t}$. Pour $X \in \widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A})$ soit $X_{\mathfrak{t}}$ la projection de X à $\mathfrak{t}(\mathbb{A})$ selon la décomposition (5.1).

Fixons ψ un caractère non-trivial de $\mathrm{F}\backslash\mathbb{A}$. Pour $\mathfrak{t}$ comme ci-dessus, notons $\mathcal{F}_{\mathfrak{t}}$ l'opérateur sur $\mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}))$ suivant

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{t}}(f)(X) = \int_{\mathfrak{t}(\mathbb{A})} f(X - X_{\mathfrak{t}} + Y_{\mathfrak{t}})\psi(\langle X_{\mathfrak{t}}, Y_{\mathfrak{t}}\rangle)\, dY_{\mathfrak{t}}, \quad f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A})), X \in \widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}),$$

où $dY_{\mathfrak{t}}$ c'est la mesure de Haar sur $\mathfrak{t}(\mathbb{A})$ pour laquelle le volume de $\mathfrak{t}(\mathrm{F})\backslash\mathfrak{t}(\mathbb{A})$ vaut 1.

Théorème 5.1 *Pour tout $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}))$ on a $\sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} J_{\mathfrak{o}}(f) = \sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} J_{\mathfrak{o}}(\mathcal{F}_{\mathfrak{t}}(f))$.*

Démonstration Soit $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$. En utilisant (3.2), on a que $J^T(f) - J^T(\mathcal{F}_{\mathfrak{t}}(f))$ vaut

$$\int_{[U]} F^U(x, T)\big(k_{U,U}(x, f) - k_{U,U}(x, \mathcal{F}_{\mathfrak{t}}(f))\big) \\ + \sum_{P_1 \subsetneq P_2} \sum_{\delta \in P_1(\mathrm{F})\backslash U(\mathrm{F})} \chi^T_{P_1,P_2}(\delta x)(k_{P_1,P_2}\big(\delta x, f) - k_{P_1,P_2}(\delta x, \mathcal{F}_{\mathfrak{t}}(f))\big)\, dx,$$

où pour $P_1 \subseteq P_2$ et $\phi \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}))$ on pose

$$k_{P_1,P_2}(x, \phi) = \sum_{P_1 \subseteq P \subseteq P_2} (-1)^{d_P} k_{P,\phi}(x), x \in P_1(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A}).$$

On a alors pour tout $x \in U(\mathbb{A})$

$$k_{U,U}(x, f) = \sum_{\xi \in \widetilde{\mathfrak{u}}(\mathrm{F})} f(x^{-1}\xi x) = \sum_{\xi \in \widetilde{\mathfrak{u}}(\mathrm{F})} \mathcal{F}_{\mathfrak{t}}(f)(x^{-1}\xi x) = k_{U,U}(x, \mathcal{F}_{\mathfrak{t}}(f))$$

grâce à la formule sommatoire de Poisson. Fixons $\varepsilon_0 > 0$. En utilisant le théorème 3.2 pour f et $\mathcal{F}_{\mathfrak{t}}(f)$, on a pour tout $N > 0$ $|J^T(f) - J^T(\mathcal{F}_{\mathfrak{t}}(f))| = O(e^{-N\|T\|})$ si $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ est tel que $\forall \alpha \in \Delta_0$, $\alpha(T) > \varepsilon_0\|T\|$. D'après la proposition 4.4, la différence $J^T(f) - J^T(\mathcal{F}_{\mathfrak{t}}(f))$ égale une constante plus une somme de polynômes-exponentielles en T qui, en vertu du lemme 4.2, tendent vers ∞ quand la norme de $T \in \mathfrak{a}_0^+$ tend vers ∞. L'égalité ci-dessus implique alors $J^T(f) = J^T(\mathcal{F}_{\mathfrak{t}}(f))$. Donc en particulier $J(f) = J(\mathcal{F}_{\mathfrak{t}}(f))$ ce qu'il fallait démontrer. ∎

6 Orbites relativement semi-simples régulières

Soit $\mathcal{O}_{rs} \subseteq \mathcal{O}$ l'ensemble des classes contenant un élément

$$\begin{pmatrix} B & u \\ u^\sharp & d \end{pmatrix}$$

tel que le polynôme caractéristique de B est séparable, *i.e.*, B est semi-simple régulier dans $\mathfrak{u}(\mathrm{F})$. On appelle de telles classes *relativement semi-simples régulières*. Si $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}_{rs}$, alors tout élément

$$\begin{pmatrix} B_0 & u_0 \\ u_0^\sharp & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{o}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2015-054-9 Published online by Cambridge University Press

a la propriété que B_0 soit semi-simple régulier.

Soit $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}_{rs}$. Le but de cette section est de donner une expression explicite pour $J_{\mathfrak{o}}$, ce qu'on achève par le théorème 6.12. Voici le plan de la section : après avoir introduit quelques notations dans le paragraphe 6.1, on décrit la décomposition de $\mathfrak{o}$ en $U(\mathrm{F})$-orbites dans le paragraphe 6.2. On introduit encore un peu plus de notation dans 6.3. Dans le paragraphe 6.4 on définit une expression $j_{\mathfrak{o}}(x)$ pour laquelle on a

$$J_{\mathfrak{o}}(f) = \int_{U(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A})} j_{\mathfrak{o}}(x)\, dx. \tag{6.1}$$

En supposant cela, on donne la preuve du théorème 6.12 omettant les preuves des énoncés techniques. Dans la section 6.5 on introduit un nouveau noyau tronqué $j^T_{f,\mathfrak{o}}(x)$ tel que $\int_{[U]} j^T_{f,\mathfrak{o}}(x)\, dx = J^T_{\mathfrak{o}}(f)$. Ce résultat nous permet de démontrer (6.1) dans le paragraphe 6.6. Dans le paragraphe 6.7 on démontre les résultats de convergence nécessaires et on finit la preuve dans le paragraphe 6.8 où on étudie certaines fonctions zêtas.

6.1 Notations

On utilisera les lettres I, J, avec de possibles indices, pour noter des sous-ensembles finis de $\mathbb{N}^*$. Soit $I \subseteq \mathbb{N}^*$ fini. On pose $-I = \bigcup_{i\in I}\{-i\}$. On dit que $\mathcal{I}$ est un ϵ-sous-ensemble de I, si $\mathcal{I} \subseteq I \cup -I$ et si pour tout $i \in \mathcal{I}$ on a $-i \notin \mathcal{I}$. Dans ce cas on écrit $\mathcal{I} \subseteq_\epsilon I$. La notation est un peu abusive car $\mathcal{I}$ n'est pas forcément un sous-ensemble de I. On définit aussi $|\mathcal{I}| = \{|i| \mid i \in \mathcal{I}\} \subseteq \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{I}^\sharp \subseteq_\epsilon I$ comme $I^\sharp = -\mathcal{I}$. On réserve les lettres $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$, et $\mathcal{K}$ et seulement ces trois lettres avec de possibles indices, pour des ϵ-sous-ensembles.

On utilisera aussi la notation abrégée suivante : soit $I' \subseteq \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subseteq_\epsilon I'$. On écrira $\mathcal{J} \cup \mathcal{I} \subseteq_\epsilon I'$ pour signifier que la réunion ensembliste $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ est aussi un ϵ-sous-ensemble (ce qui n'est pas toujours vrai). On utilise le symbole $\sqcup$ pour noter la réunion disjointe, donc $I \sqcup J = I'$ implique $I \cap J = \varnothing$. On écrira aussi, pour $\mathcal{I} \subseteq_\epsilon I'$ fixés

$$\sum_{|\mathcal{J}|=I'} := \sum_{\substack{\mathcal{J}\subseteq_\epsilon I' \\ |\mathcal{J}|=I'}}, \qquad \sum_{\mathcal{K}\sqcup\mathcal{J}\subseteq\mathcal{I}} := \sum_{\substack{\mathcal{K},\mathcal{J}\subseteq\mathcal{I} \\ \mathcal{K}\cap\mathcal{J}=\varnothing}}, \qquad \sum_{|\mathcal{K}|\sqcup|\mathcal{J}|=I'} := \sum_{\substack{\mathcal{K},\mathcal{J}\subseteq_\epsilon I' \\ |\mathcal{K}|\sqcup|\mathcal{J}|=I'}}.$$

6.2 Orbites dans une classe relativement semi-simple régulière

Dans ce paragraphe on décrit la décomposition en orbites d'une classe relativement semi-simple régulière. D'abord, on rappelle la description des $U(\mathrm{F})$-orbites semi-simples régulières dans $\mathfrak{u}(\mathrm{F})$.

- Un ensemble fini $I = \{1, \ldots, m\} \subseteq \mathbb{N}$.
- Pour tout $i \in I$ une extension finie F_i de F et on note E_i, la E-algèbre étale $\mathrm{F}_i \otimes_{\mathrm{F}} \mathrm{E}$.
- Pour $i \in I$, on note σ_i l'automorphisme de E_i défini comme $\mathrm{Id}_{\mathrm{F}_i} \otimes \sigma$. On se donne alors des éléments $b_i \in \mathrm{E}_i$ et $c_i \in \mathrm{F}_i^*$ tels que $\sigma_i(b_i) = -b_i$.
- On note $\mathrm{E}_I := \bigoplus_{i\in I} \mathrm{E}_i$ et $b_I = (b_i)_{i\in I} \in \mathrm{E}_I$. Alors on suppose que b_I engendre la E-algèbre étale E_I.
- $\dim_{\mathrm{E}} V = \sum_{i\in I} [\mathrm{E}_i : \mathrm{E}]$.

- Pour tout $i \in I$ on définit une forme hermitienne non-dégénérée sur le E-espace E_i relativement à l'extension E/F par $\Phi_i(x_i, y_i) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{E}_i/\mathrm{E}}(\sigma_i(x_i)y_i c_i)$, $x_i, y_i \in \mathrm{E}_i$. Cela induit la forme $\Phi_I = \sum_{i\in I} \Phi_i$ sur E_I.
- Pour $w \in \mathrm{E}_I$ et $i \in I$ on note w_i la projection orthogonale de w à E_i. On définit $B_I \in \mathrm{Lie}(U(\mathrm{E}_I, \Phi_I))$ par $B_I(w) = \sum_{i\in I} b_i w_i = b_I w$. On voit alors que B_I est semi-simple régulier et on a $\mathrm{E}_I \cong \mathrm{E}[X]/P_{B_I}(X)$ où $P_{B_I} \in \mathrm{E}[X]$ c'est le polynôme caractéristique de B_I.

Supposons qu'on a un isomorphisme $\iota\colon \mathrm{E}_I \xrightarrow{\sim} V$ de E-espaces hermitiens. Il induit naturellement des isomorphismes, qu'on note aussi ι, de groupes et d'algèbres de Lie correspondants. Dans ce cas, la $U(\mathrm{F})$-classe de conjugaison de $\iota(B_I) \in \mathfrak{u}(\mathrm{F})$ ne dépend pas de l'isomorphisme choisi. Toute $U(\mathrm{F})$-orbite semi-simple régulière dans $\mathfrak{u}(\mathrm{F})$ est obtenue par une telle construction. On note alors simplement $B = \iota(B_I)$.

On considère ι fixé. Il nous donne l'action de $U(\mathrm{F})$ et $\mathfrak{u}(\mathrm{F})$ sur E_I. Explicitement, pour $g \in U(\mathrm{F})$ et $v \in \mathrm{E}_I$ on écrira simplement gv pour $\iota^{-1}(g)v$, de même pour les éléments de $\mathfrak{u}(\mathrm{F})$. En particulier, on écrit Bv pour désigner $B_I v$.

Soit $I_1 \subseteq I$ l'ensemble des $i \in I$ tels que E_i n'est pas un corps. Pour $i \in I_1$ on a alors que F_i est une extension de E. On se donne une inclusion $\iota_i\colon \mathrm{E} \hookrightarrow \mathrm{F}_i$. Soit F_{-i} la E-algèbre dont le groupe multiplicatif et additif égale celui de F_i et où l'action de E est donné par l'inclusion $\mathrm{E} \ni e \mapsto \iota_i(\sigma(e)) \in \mathrm{F}_{-i}$. On a alors une E-algèbre étale $\mathrm{F}_{-i} \oplus \mathrm{F}_i$ munie de l'action de Gal(E/F) donnée par $\sigma((a,b)) = (b,a)$ et l'on a une forme hermitienne

$$\Phi_{\mathrm{F}_{-i}\oplus\mathrm{F}_i}(x_{-i} + x_i, x'_{-i} + x'_i) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{F}_i/\mathrm{E}}(c_i x_{-i} x'_i) + \mathrm{Tr}_{\mathrm{F}_{-i}/\mathrm{E}}(c_i x'_{-i} x_i)$$

où $x_{-i}, x'_{-i} \in \mathrm{F}_{-i}$ et $x_i, x'_i \in \mathrm{F}_i$. Dans ce cas, on a l'isomorphisme de E-algèbres $\mathrm{E}_i = \mathrm{F}_i \otimes_{\mathrm{F}} \mathrm{E} \cong \mathrm{F}_{-i} \oplus \mathrm{F}_i$ donné par $x \otimes e \mapsto (x\sigma(e), xe)$ préservant toutes les structures mentionnées. On fixe cet isomorphisme. Les E-sous-espaces F_{-i} et F_i de E_i sont des sous-espaces isotropes maximaux et ce sont les seuls sous-espaces non-triviaux stables par b_i et donc par B.

Quitte à conjuguer B on peut supposer que $B \in \mathfrak{m}_{P_{I_1}}(\mathrm{F})$ pour un sous-groupe parabolique standard, noté P_{I_1}, et qu'aucun $M_{P_{I_1}}(\mathrm{F})$-conjugué de B n'appartienne à $\mathfrak{m}_R(\mathrm{F})$ pour un sous-groupe parabolique $R \subsetneq P_{I_1}$. Alors, si P_{I_1} est défini comme le stabilisateur du drapeau isotrope $\{0\} = V_{i_0} \subseteq \cdots \subseteq V_{i_l}$, on a $\#I_1 = l$ et donc, quitte à réindexer, on peut supposer que $I_1 = \{1, 2, \ldots, l\}$. Finalement, quitte à conjuguer ι par un élément de groupe de Weyl de U, on peut supposer que ι induit des isomorphismes $V_{i_j}/V_{i_{j-1}} \cong \mathrm{F}_{-j}$ et $V^\sharp_{i_j}/V^\sharp_{i_{j-1}} \cong \mathrm{F}_j$ pour $j \in I_1$ et $Z_{i_l} \cong \prod_{j\in I\smallsetminus I_1} \mathrm{E}_j$.

Pour tout $\mathcal{J} \subseteq_\epsilon I_1$ on note $\mathrm{F}_{\mathcal{J}} = \prod_{i\in\mathcal{J}} \mathrm{F}_i$ et $1_{\mathcal{J}}$ l'unité de $\mathrm{F}^*_{\mathcal{J}}$. Alors, quand $\mathcal{J}$ parcourt les ϵ-sous-ensembles de I_1, les $\mathrm{F}_{\mathcal{J}}$ parcourent tous les sous-espaces isotropes de E_I stables par B. On note aussi pour tout $I' \subseteq I$, $\mathrm{E}_{I'} = \prod_{i\in I'} \mathrm{E}_i$.

Fixons une fois pour toutes une classe $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}_{rs}$ telle qu'il existe un $X \in \mathfrak{o}$ de type

$$\begin{pmatrix} B & u \\ u^\sharp & d \end{pmatrix}.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2015-054-9 Published online by Cambridge University Press

Remarquons que d ne dépend que de $\mathfrak{o}$; on va le noter $d_{\mathfrak{o}}$. Tout élément de $\mathfrak{o}$ est donc $U(\mathrm{F})$-conjugué à un élément du type

$$\begin{pmatrix} B & u' \\ (u')^{\sharp} & d_{\mathfrak{o}} \end{pmatrix} \in \mathfrak{o}.$$

On se propose de décrire les classes de $U(\mathrm{F})$-conjugaison dans $\mathfrak{o}$.

Notons T_I le centralisateur de B dans U. C'est un sous-tore maximal de U. Pour tout $I' \subseteq I$ soit $T_{I'}$ le plus grand sous-tore de T_I qui agit trivialement sur $\mathrm{E}_{I \smallsetminus I'}$. On a donc que $T_{I'}(\mathrm{F})$ s'identifie aux éléments $u \in \mathrm{E}_{I'}^*$ tels que $u_i \sigma_i(u_i)$ c'est l'élément neutre de E_i^* pour tout $i \in \mathrm{I}'$. Si $I' = \{i\}$, on écrit simplement T_i. En particulier, si $i \in I_1$, on a $T_i(\mathrm{F}) = \{(t_{-i}, t_i) \in \mathrm{F}_{-i}^* \times \mathrm{F}_i^* | t_{-i} = t_i^{-1}\} \cong \mathrm{F}_i^*$.

On introduit l'ensemble $V_{\mathfrak{o}} = \{u \in \mathrm{E}_I \mid -\Phi_I(u, B^{i-1}u) = A_i(X) \forall 1 \leq i \leq n\}$ où $X \in \ \mathfrak{o}$ quelconque et les invariants $A_i(X)$ ont été définis dans le paragraphe 2.3. Comme $T_I(\mathrm{F})$ agit sur E_I, commute à B et laisse Φ invariant. Il agit aussi sur $V_{\mathfrak{o}}$. On voit que l'ensemble des orbites dans $V_{\mathfrak{o}}$ sous l'action de $T_I(\mathrm{F})$ est en bijection avec l'ensemble des classes de $U(\mathrm{F})$-conjugaison dans $\mathfrak{o}$, la bijection étant induite par l'application

$$V_{\mathfrak{o}} \ni u \mapsto \begin{pmatrix} B & u \\ u^{\sharp} & d_{\mathfrak{o}} \end{pmatrix}.$$

Lemme 6.1 *Il existe un $\alpha_I \in \mathrm{F}_I$ tel que pour tout $u \in \mathrm{E}_I$ on a que $u \in V_{\mathfrak{o}}$ implique $\sigma_i(u_i)u_i = \alpha_i \ \forall i \in I$.*

Démonstration Pour tous $u, u' \in V_{\mathfrak{o}}$, et $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\Phi(u, B^k u) = \sum_{i \in I} \mathrm{Tr}_{\mathrm{E}_i/\mathrm{E}}(\sigma_i(u_i)u_i b_i^k c_i) = \sum_{i \in I} \mathrm{Tr}_{\mathrm{E}_i/\mathrm{E}}(\sigma_i(u_i')u_i' b_i^k c_i) = \Phi(u', B^k u'),$$

d'où $\mathrm{Tr}_{\mathrm{E}_I/\mathrm{E}}(b_I^k(\sum_{i\in I} c_i(\sigma_i(u_i)u_i - \sigma_i(u_i')u_i'))) = 0, \ \forall k \in \mathbb{N}$. D'après [12, proposition 18.3], la forme $\mathrm{Tr}_{\mathrm{E}_I/\mathrm{E}}$ est non-dégénérée, et puisque les puissances de b_I engendrent E_I sur E, on obtient $\sigma_i(u_i)u_i = \sigma_i(u_i')u_i' \forall i \in I, \forall u, u' \in V_{\mathfrak{o}}$. On pose donc $\alpha_i = \sigma_i(u_i)u_i$ où $u \in V_{\mathfrak{o}}$ quelconque. Il reste à démontrer que si $u \in \mathrm{E}_I$ est tel que $\sigma_i(u_i)u_i = \alpha_i$ pour tout $i \in I$, alors $u_i \in V_{\mathfrak{o}}$. Pour cela il suffit de faire le même calcul dans le sens inverse. ∎

Soit $\alpha_I \in \mathrm{E}_I$ comme dans le lemme précédant. Notons $I_2 \subseteq I$ l'ensemble de $i \in I$ tels que $\alpha_i = 0$ et posons $I_0 = I_1 \cap I_2$.

Proposition 6.2 *Il existe une unique $T_I(\mathrm{F})$-orbite dans $V_{\mathfrak{o}}$ composée des $u \in V_{\mathfrak{o}}$ tels que $u_i = 0$ pour tout $i \in I_2$. On choisit $\xi_{\varnothing}$ un représentant de cette orbite. Alors les $T_I(\mathrm{F})$-orbites dans $V_{\mathfrak{o}}$ sont en bijection avec les ϵ-sous-ensembles de I_0, le représentant de l'orbite correspondant à $\mathcal{I} \subseteq_{\epsilon} I_0$ étant $\xi_{\mathcal{I}} := \xi_{\varnothing} + 1_{\mathcal{I}}$. Les orbites de dimension maximale correspondent aux $\mathcal{I} \subseteq_{\epsilon} I_0$ tels que $|\mathcal{I}| = I_0$.*

Démonstration On voit que u et u' sont $T_I(\mathrm{F})$-conjugués si et seulement si u_i et u_i' sont $T_i(\mathrm{F})$-conjugués pour tout $i \in I$.

Soient $u, u' \in V_{\mathfrak{o}}$ et $i \in I \smallsetminus I_0$. On prétend que u_i et u'_i sont $T_i(\mathrm{F})$-conjugués. En effet, si $i \in I_2 \smallsetminus I_0$, on a $u_i = u'_i = 0$ d'après le lemme 6.1. Sinon, en vertu de ce lemme-là, on a $u_i, u'_i \in \mathrm{E}_i^*$ et $t_i := u_i/u'_i$ appartient à $T_i(\mathrm{F})$ et vérifie $t_i u_i = u'_i$.

Soit $i \in I_0$ et $u \in V_{\mathfrak{o}}$. On écrira u_i^{-i} (resp. u_i^i) la projection de $u_i \in \mathrm{E}_i$ à F_{-i} (resp. F_i). On a alors $u_i\sigma(u_i) = (u_i^{-i}u_i^i, u_i^{-i}u_i^i) = 0$. On voit alors qu'au moins l'un de u_i^{-i}, u_i^i vaut zéro. Pour finir, il suffit de montrer que si $\mathcal{I} \subseteq_\epsilon I_0$ et $u, u' \in V_{\mathfrak{o}}$ sont tels que pour $i \in I_0 \cup -I_0$ on a $u^i_{|i|} \in \mathrm{F}_i^*$ si et seulement si $i \in \mathcal{I}$ (de même pour u'), alors u et u' sont $T_I(\mathrm{F})$ conjugués et ne le sont pas sinon. Cela est clair, car pour $i \in I_0$, $T_i(\mathrm{F})$ agit simplement transitivement sur $\{0\} \times \mathrm{F}_i^* \subseteq \mathrm{E}_i$ et sur $\mathrm{F}_{-i}^* \times \{0\} \subseteq \mathrm{E}_i$ et $0 \in \mathrm{E}_i$ est $T_i(\mathrm{F})$-conjugué à lui même seulement. ∎

6.3 Quelques définitions associées aux orbites

D'après la proposition 6.2 ci-dessus les

$$X_{\mathcal{I}} := \begin{pmatrix} B & \xi_\varnothing + 1_{\mathcal{I}} \\ (\xi_\varnothing + 1_{\mathcal{I}})^\sharp & d_{\mathfrak{o}}, \end{pmatrix}$$

où $\mathcal{I} \subseteq_\epsilon I_0$, sont des représentants des orbites pour l'action de $U(\mathrm{F})$ à $\mathfrak{o}$. On les considère fixés désormais.

Pour un F-sous-groupe H de U, $X \in \widetilde{\mathfrak{u}}(\mathrm{F})$, et une F-algèbre R, notons $H(R, X)$ le groupe des R-points du stabilisateur de X dans H. Alors pour tout $\mathcal{I} \subseteq_\epsilon I_0$ et toute F-algèbre R, on a

$$U(R, X_{\mathcal{I}}) = T_{I_2 \smallsetminus |\mathcal{I}|}(R). \tag{6.2}$$

Pour tout $I' \subseteq I_1$ soit $M_{I'}$ le sous-groupe de Levi de U défini comme le stabilisateur des espaces F_{-i} et F_i pour tout $i \in I'$. Donc en utilisant la notation du paragraphe 6.2, on a en particulier $M_{I_1} = M_{P_{I_1}}$. On pose $\mathfrak{a}_{I'} = \mathfrak{a}_{P_{I'}}$ et $\mathfrak{a}^*_{I',\mathbb{C}} = \mathfrak{a}^*_{I'} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ où $P_{I'} \in \mathcal{P}(M_{I'})$ quelconque. Donc on a $\mathfrak{a}_{I'} \subseteq \mathfrak{a}_{I_1}$. Soient $I'' \subseteq I'$, $Q \in \mathcal{P}(M_{I''})$, et $P \in \mathcal{P}(M_{I'})$ tels que $Q \supseteq P$. Alors $\mathfrak{a}_Q = \mathfrak{a}_{I''}$, $\mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}_{I'}$, et $\mathfrak{a}_P^Q = \mathfrak{a}_{I' \smallsetminus I''}$. Grâce à la décomposition (2.2), on obtient alors $\mathfrak{a}_{I'} = \mathfrak{a}_{I''} \oplus \mathfrak{a}_{I' \smallsetminus I''}$. Notons finalement $\lambda_{I'}$ la projection d'un $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{I_1,\mathbb{C}}$ à $\mathfrak{a}^*_{I',\mathbb{C}}$.

Soit A_{I_0} le sous-tore de T_{I_0}, déployé sur F et maximal pour cette propriété. Pour $i \in I_0 \cup -I_0$, soit $\rho_i \in \mathfrak{a}^*_{I_0}$ le caractère par lequel A_{I_0} agit sur F_i (l'inclusion $A_{I_0} \hookrightarrow M_{I_0}$ induit l'isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathrm{F}}(A_{I_0}, \mathbb{G}_m) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \mathfrak{a}^*_{I_0}$). On a donc $\rho_i = -\rho_{-i}$. Soit $\mathcal{I} \subseteq_\epsilon I_0$. On a que $\{\rho_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ est une base de $\mathfrak{a}^*_{|\mathcal{I}|}$. On pose $\rho_{\mathcal{I}} = \sum_{i \in \mathcal{I}} \rho_i$. Il est facile de voir que si $Q \in \mathcal{F}(M_{I_0})$ est tel que $V_Q = \mathrm{F}_{\mathcal{I}}$, alors $\underline{\rho}_Q \in \mathfrak{a}^*_{I_0}$, défini à la fin du paragraphe 2.5, égale $\rho_{\mathcal{I}}$.

Soient $\{e_i^\vee\}_{i \in I_0 \cup -I_0} \subseteq \mathfrak{a}_{I_0}$ les vecteurs tels que

$$\rho_j(e_i^\vee) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i, \\ -1 & \text{si } j = -i, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour $i, j \in I_0 \cup -I_0$. Il est clair que pour tous $\mathcal{I} \subseteq_\epsilon I_0$ et $I' \subseteq I_0$, la projection de $\sum_{i \in \mathcal{I}} a_i e_i^\vee$ à $\mathfrak{a}_{I'}$ égale $\sum_{i \in \mathcal{I},\, |i| \in I'} a_i e_i^\vee$.

On introduit aussi le cône ouvert $\mathfrak{a}_{\mathcal{J}}^*$ défini comme

$$\mathfrak{a}_{\mathcal{J}}^* = \Big\{ \sum_{i\in\mathcal{J}} a_i \rho_i \;\Big|\; a_i > 0 \Big\} \subseteq \mathfrak{a}_{|\mathcal{J}|}^* \subseteq \mathfrak{a}_{I_0}^*.$$

Donc pour qu'un $\lambda \in \mathfrak{a}_{|\mathcal{J}|,\mathbb{C}}^*$ vérifie $\mathrm{Re}(\lambda) \in \mathfrak{a}_{\mathcal{J}}^*$, il faut et suffit que $\mathrm{Re}(\lambda(e_i^\vee)) > 0$ pour tout $i \in \mathcal{J}$.

Pour $\mathcal{J} \subseteq_\epsilon I_0$ soit $\mathbb{1}_{\mathcal{J}}$ la fonction caractéristique de $H \in \mathfrak{a}_{I_0}$ tels que

$$\rho_i(H) \le 0,\ \forall i \in \mathcal{J} \cap I_0 \quad \text{et} \quad \rho_i(H) < 0,\ \forall\ i \in \mathcal{J} \cap -I_0.$$

On a alors pour tous $I' \subseteq I_0$ et $H \in \mathfrak{a}_{I_0}$

$$1 = \sum_{|\mathcal{J}|=I'} \mathbb{1}_{\mathcal{J}}(H). \tag{6.3}$$

Pour $\mathfrak{J}_1 \sqcup \mathfrak{J}_3 \subseteq_\epsilon I_0$ et $\mathfrak{J}_2 \subseteq \mathfrak{J}_3$ on utilisera la notation suivante

$$\mathfrak{J}_{13} := \mathfrak{J}_1 \cup \mathfrak{J}_3,\ \mathfrak{J}_{3\smallsetminus 2} := \mathfrak{J}_3 \smallsetminus \mathfrak{J}_2.$$

6.4 Le résultat principal

Dans ce paragraphe on énonce et on démontre le théorème 6.12. Cependant, certains résultats seront seulement énoncés avec les renvois vers leurs démonstrations dans les paragraphes suivants.

Il est clair que si l'orbite d'un $X_{\mathcal{J}}$ où $\mathcal{J} \subseteq_\epsilon I_0$ intersecte non-trivialement $\mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F})$ où P est un sous-groupe parabolique standard de U, alors celui-ci est conjugué à un élément de $\mathcal{F}(M_{I_1})$. Pour tout $Q \in \mathcal{F}(M_{I_1})$ soit $\mathcal{J}_Q \subseteq_\epsilon I_1$ l'unique ϵ-ensemble tel que $V_Q = \mathrm{F}_{\mathcal{J}_Q}$.

Lemme 6.3 *Soient $Q \in \mathcal{F}(M_{I_1})$ et $\mathcal{J} \subseteq_\epsilon I_0$. Alors $X_{\mathcal{J}} \in \mathfrak{m}_{\widetilde{Q}}(\mathrm{F})$ si et seulement si $\mathcal{J}_Q \subseteq_\epsilon I_0$ et $|\mathcal{J}| \cap |\mathcal{J}_Q| = \varnothing$.*

Démonstration En vertu du lemme 2.4 on a, en utilisant la notation du paragraphe 2.2, que $X_{\mathcal{J}} \in \mathfrak{m}_{\widetilde{Q}}(\mathrm{F})$ si et seulement si $\xi_\varnothing + 1_{\mathcal{J}} \in Z_Q$. Or $\xi_\varnothing + 1_{\mathcal{J}} \in Z_Q$ si et seulement si $\xi_\varnothing \in Z_Q$ et $|\mathcal{J}| \cap |\mathcal{J}_Q| = \varnothing$. En outre, la première condition est équivalente à dire que pour tout $i \in \mathcal{J}_Q$ la i-composante de $\xi_\varnothing$ vaut zéro. Donc $\mathcal{J}_Q \subseteq_\epsilon I_0$, d'où le résultat. ∎

On rappelle qu'avec la notation de la fin du paragraphe 2.1, si P_1, P sont des sous-groupes paraboliques standards, alors pour $s \in \Omega(\mathfrak{a}_1, P)$ on note $s^{-1}P$ le sous-groupe parabolique semi-standard $Q \in \mathcal{F}(M_1)$ égale $w_s^{-1} P w_s$.

Lemme 6.4 *Soient P un sous-groupe parabolique standard de U et $\mathcal{J} \subseteq_\epsilon I_0$. Alors l'intersection de la $U(\mathrm{F})$-orbite de $X_{\mathcal{J}}$ avec $\mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F})$ égale*

$$\coprod_{\substack{s\in\Omega(\mathfrak{a}_{I_0},P)\\ |\mathcal{J}|\cap|\mathcal{J}_{s^{-1}P}|=\varnothing}} \ \coprod_{\eta\in M_P(\mathrm{F},\mathrm{Ad}(w_s)X_{\mathcal{J}})\backslash M_P(\mathrm{F})} \{\mathrm{Ad}(\eta^{-1}w_s)X_{\mathcal{J}}\}.$$

Démonstration Supposons que $\mathrm{Ad}(\gamma^{-1})X_{\mathcal{J}} \in \mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F})$ pour un $\gamma \in U(\mathrm{F})$. En particulier donc grâce au lemme 2.4, on a $\mathrm{Ad}(\gamma^{-1})B \in \mathfrak{m}_P(\mathrm{F})$. En raisonnant comme [4, §5.2], on voit qu'il existe un unique $s \in \Omega(\mathfrak{a}_{I_1}, P)$ (voir §2.1) et un unique $\delta \in$

https://doi.org/10.4153/CJM-2015-054-9 Published online by Cambridge University Press

$M_P(\mathrm{F}, \mathrm{Ad}(w_s)X_{\mathcal{I}})\backslash M_P(\mathrm{F})$ tels que $\gamma^{-1} = \delta^{-1}w_s$. Soit $Q = s^{-1}P$. Alors $X_{\mathcal{I}} \in \mathfrak{m}_{\widetilde{Q}}(\mathrm{F})$. En vertu du lemme 6.3 ci-dessus on a $Q \in \mathcal{F}(M_{I_0}, P)$. Donc en utilisant la bijection (2.5) et l'unicité de s, on obtient $s \in \Omega(\mathfrak{a}_{I_0}, P)$ d'où le résultat. ■

Pour une fonction ϕ sur $\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A})$ et $x \in U(\mathbb{A})$ on définit $\phi_x(X) := \phi(\mathrm{Ad}(x^{-1})X)$.

Fixons $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}))$. Soit P un sous-groupe parabolique semi-standard de U. D'après le lemme 2.4 (ii) on a un isomorphisme N_P-équivariant

$$\mathfrak{n}_{\widetilde{P}} \cong \mathfrak{n}_P \oplus \mathrm{Res}_{\mathrm{E}/\mathrm{F}}(V_P). \tag{6.4}$$

On pose

$$f^P(X) = \int_{V_P(\mathbb{A})} f(X + Y_P)\, dY_P, \quad X \in \widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}). \tag{6.5}$$

Supposons en plus que P est standard et posons

$$I_{P,\mathfrak{o}}(x) = \sum_{\xi \in \mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}} \sum_{\eta \in N_P(\mathrm{F})} f^P_{\eta x}(\xi), \quad x \in P(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A}), \tag{6.6}$$

où $f^P_x = (f_x)^P$. En vertu du lemme 6.4 on a alors

$$I_{P,\mathfrak{o}}(x) = \sum_{s \in \Omega(\mathfrak{a}_{I_0}, P)} \sum_{\substack{\mathcal{I} \subseteq_\epsilon I_0 \\ |\mathcal{I}| \cap |\mathcal{I}_{s^{-1}P}| = \varnothing}} \sum_{\eta \in P(\mathrm{F}, \mathrm{Ad}\, w_s X_{\mathcal{I}})\backslash P(\mathrm{F})} f^P_{\eta x}(\mathrm{Ad}(w_s)X_{\mathcal{I}}).$$

En utilisant $U(\mathrm{F}, X)\backslash U(\mathrm{F}) \xrightarrow{\sim} U(\mathrm{F}, \mathrm{Ad}\, w_s X)\backslash U(\mathrm{F})$, grâce à $\eta_0 \mapsto w_s \eta_0$ on a

$$\sum_{\delta \in P(\mathrm{F})\backslash U(\mathrm{F})} I_{P,\mathfrak{o}}(\delta x) = \sum_{s \in \Omega(\mathfrak{a}_{I_0}, P)} \sum_{\substack{\mathcal{I} \subseteq_\epsilon I_0 \\ |\mathcal{I}| \cap |\mathcal{I}_{s^{-1}P}| = \varnothing}} \sum_{\delta \in U(\mathrm{F}, X_{\mathcal{I}})\backslash U(\mathrm{F})} f^{s^{-1}P}_{\delta x}(X_{\mathcal{I}}). \tag{6.7}$$

Fixons un caractère additif continu non-trivial ψ sur $\mathrm{F}\backslash\mathbb{A}$. Pour une fonction $\phi \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}))$ et $\mathcal{J} \subseteq_\epsilon I_0$ on définit la transformée de Fourier de ϕ par rapport à $\mathcal{J}$

$$\widehat{\phi}^{\mathcal{J}}(X) = \int_{\mathbb{A}_{\mathcal{J}}} \phi\begin{pmatrix} B' & u'(1 - 1_{\mathcal{J}^\sharp}) + u_{\mathcal{J}} \\ (u'(1 - 1_{\mathcal{J}^\sharp}) + u_{\mathcal{J}})^\sharp & d' \end{pmatrix} \psi(\langle u_{\mathcal{J}}, u' 1_{\mathcal{J}^\sharp}\rangle)\, du_{\mathcal{J}},$$

où

- $$X = \begin{pmatrix} B' & u' \\ (u')^\sharp & d' \end{pmatrix} \in \widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}),$$
- 1 c'est l'unité dans E_I^*,
- $du_{\mathcal{J}}$ c'est la mesure de Haar sur $\mathbb{A}_{\mathcal{J}} := \mathrm{F}_{\mathcal{J}} \otimes_{\mathrm{F}} \mathbb{A}$ pour laquelle $\mathrm{F}_{\mathcal{J}}\backslash\mathbb{A}_{\mathcal{J}}$ est de volume 1,
- $\langle\cdot,\cdot\rangle$ c'est l'accouplement défini par (2.9).

En fait, avec nos identifications, pour tout $u, u' \in V(\mathbb{A}) = \mathrm{E}_I \otimes_{\mathrm{F}} \mathbb{A}$ on a $\langle u, u'\rangle = -\Phi_I(u, u') - \Phi_I(u', u)$.

Soient alors $s \in \Omega(\mathfrak{a}_{I_0}, P)$ et $\mathcal{I} \subseteq_\epsilon I_0$ tel que $|\mathcal{I}| \cap |\mathcal{I}_{s^{-1}P}| = \varnothing$. On a $f^{s^{-1}P}_x(X_{\mathcal{I}}) = \widehat{(f_x)}^{\mathcal{I}_{s^{-1}P}}(X_{\mathcal{I}})$. On utilisera la notation abrégée $\hat{f}^{\mathcal{I}_{s^{-1}P}}_x := \widehat{(f_x)}^{\mathcal{I}_{s^{-1}P}}$ (à ne pas confondre avec $(\widehat{f}^{\mathcal{I}_{s^{-1}P}})_x$ qu'on n'utilisera pas). En utilisant (6.2), on voit donc qu'on peut réécrire (6.7) comme

$$\sum_{s \in \Omega(\mathfrak{a}_{I_0}, P)} \sum_{\substack{\mathcal{I} \subseteq_\epsilon I_0 \\ |\mathcal{I}| \cap |\mathcal{I}_{s^{-1}P}| = \varnothing}} \sum_{\delta \in T_{I_2 \setminus |\mathcal{I}|}(\mathrm{F})\backslash U(\mathrm{F})} \hat{f}^{\mathcal{I}_{s^{-1}P}}_{\delta x}(X_{\mathcal{I}}). \tag{6.8}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2015-054-9 Published online by Cambridge University Press

Les sommes (6.7) et (6.8) sont convergentes grâce au lemme suivant.

Lemme 6.5 (*cf.* lemme 6.24) *Soient $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subseteq_\epsilon I_0$ tels que $|\mathcal{I}| \cap |\mathcal{J}| = \varnothing$. Alors pour tout $x \in U(\mathbb{A})$, on a $\sum_{\delta \in U(X_{\mathcal{I}}, \mathrm{F}) \backslash U(\mathrm{F})} |\hat{f}^{\mathcal{J}}_{\delta x}(X_{\mathcal{I}})| < \infty$.*

On pose $j_{\mathfrak{o}}(x) = \sum_{P \supseteq P_0} (-1)^{d_P} \sum_{\delta \in P(\mathrm{F}) \backslash U(\mathrm{F})} I_{P,\mathfrak{o}}(\delta x), \quad x \in U(\mathrm{F}) \backslash U(\mathbb{A})$.

Proposition 6.6 (*cf.* proposition 6.18) *On a*

$$\int_{U(\mathrm{F}) \backslash U(\mathbb{A})} |j_{\mathfrak{o}}(x)| \, dx < \infty \quad \textit{et} \quad \int_{U(\mathrm{F}) \backslash U(\mathbb{A})} j_{\mathfrak{o}}(x) \, dx = J_{\mathfrak{o}}(f).$$

En utilisant le résultat ci-dessus, on a $\int_{[U]} j_{\mathfrak{o}}(x) \, dx = J_{\mathfrak{o}}(f)$ où, grâce à la formule (6.8), on a

$$j_{\mathfrak{o}}(x) = \sum_{P} (-1)^{d_P} \sum_{s \in \Omega(\mathfrak{a}_{I_0}, P)} \sum_{\substack{\mathcal{I} \subseteq_\epsilon I_0 \\ |\mathcal{I}| \cap |\mathcal{I}_{s^{-1}P}| = \varnothing}} \sum_{\delta \in T_{I_2 \smallsetminus |\mathcal{I}|}(\mathrm{F}) \backslash U(\mathrm{F})} \hat{f}^{\mathcal{I}_{s^{-1}P}}_{\delta x}(X_{\mathcal{I}}).$$

En inversant l'ordre de sommation, on a aussi

$$j_{\mathfrak{o}}(x) = \sum_{\mathcal{I} \sqcup \mathcal{J} \subseteq_\epsilon I_0} \mu_{\mathcal{J}} \sum_{\delta \in T_{I_2 \smallsetminus |\mathcal{I}|}(\mathrm{F}) \backslash U(\mathrm{F})} \hat{f}^{\mathcal{J}}_{\delta x}(X_{\mathcal{I}})$$

où

$$\mu_{\mathcal{J}} = \sum_{P \supseteq P_0} (-1)^{d_P} \sum_{\substack{s \in \Omega(\mathfrak{a}_{I_0}, P) \\ \mathcal{I}_{s^{-1}P} = \mathcal{J}}} 1.$$

Lemme 6.7 *Soit $\mathcal{J} \subseteq_\epsilon I_0$. Alors $\mu_{\mathcal{J}} = (-1)^{\#\mathcal{J}}$.*

Démonstration Posons $m = \#\mathcal{J}$ et

$$a_k^m = \#\{(\mathcal{J}_0, \mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_k) | \varnothing = \mathcal{J}_0 \subsetneq \mathcal{J}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{J}_k = \mathcal{J}\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Il est clair que a_k^m ne dépend que de $m = \#\mathcal{J}$. On voit, en invoquant la bijection (2.5), qu'on a $\mu_{\mathcal{J}} = \sum_{k=0}^m (-1)^k a_k^m$. Il est facile de voir qu'on a la relation de récurrence suivante :

$$a_k^m = \sum_{1 \le j \le m} \binom{m}{j} a_{k-1}^{m-j}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

En utilisant cette relation, on vérifie $\mu_{\mathcal{J}} = (-1)^m$ par récurrence. ■

On vient d'obtenir alors

$$j_{\mathfrak{o}}(x) = \sum_{\mathcal{I} \sqcup \mathcal{J} \subseteq_\epsilon I_0} (-1)^{\#\mathcal{J}} \sum_{\delta \in T_{I_2 \smallsetminus |\mathcal{I}|}(\mathrm{F}) \backslash U(\mathrm{F})} \hat{f}^{\mathcal{J}}_{\delta x}(X_{\mathcal{I}}). \tag{6.9}$$

Lemme 6.8 (*cf.* lemme 6.27) *Soient $\mathcal{J}, \mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2 \subseteq_\epsilon I_0$ tels que $\mathcal{J}_1 \sqcup \mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{J}$ et $|\mathcal{J}| = I_0$. L'intégrale suivante*

$$\overline{\Lambda}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2}(f)(\lambda) = \int_{T_{I_2 \smallsetminus |\mathcal{J}_{12}|}(\mathrm{F}) \backslash U(\mathbb{A})} \mathbb{1}_{(\mathcal{J} \smallsetminus \mathcal{J}_2) \cup \mathcal{J}_2^\sharp}(H_0(x)) e^{\lambda(H_0(x))} \hat{f}_x^{\mathcal{J} \smallsetminus \mathcal{J}_1}(X_{\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2^\sharp}) \, dx,$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2015-054-9 Published online by Cambridge University Press

pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{I_0,\mathbb{C}}$*, converge absolument et uniformément sur tous les compacts d'un ouvert de* $\mathfrak{a}^*_{I_0,\mathbb{C}}$ *contenant* 0 *et admet un prolongement méromorphe à* $\mathfrak{a}^*_{I_0,\mathbb{C}}$*, noté aussi* $\overline{\Lambda}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2}(f)$.

Ici H_0 c'est juste H_{P_0}. Comme on l'a déjà remarqué (§6.3), on a que $\mathfrak{a}_{I_0}$ est contenu dans $\mathfrak{a}_{I_1} = \mathfrak{a}_{P_{I_1}}$ qui est contenu dans $\mathfrak{a}_0$ car P_{I_1} est un sous-groupe parabolique standard.

On aura besoin du lemme suivant.

Lemme 6.9 *Soient* $\phi \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}))$ *et* $\mathfrak{I} \subseteq_\epsilon I_0$*. Alors, pour tout* $x \in U(\mathbb{A})$ *on a :*

$$\sum_{\delta \in T_{|\mathfrak{I}|}(\mathrm{F})} \phi_{\delta x}(X_{\mathfrak{I}}) = \sum_{\mathfrak{I}_2 \subseteq \mathfrak{I}_1 \subseteq \mathfrak{I}} (-1)^{\#(\mathfrak{I} \smallsetminus \mathfrak{I}_1)} \sum_{\delta \in T_{|\mathfrak{I}_2|}(\mathrm{F})} \hat{\phi}^{\mathfrak{I}_1}_{\delta x}(X_{\mathfrak{I}_2^\sharp}), \tag{6.10}$$

$$\sum_{\delta \in T_{|\mathfrak{I}|}(\mathrm{F})} \hat{\phi}^{\mathfrak{I}}_{\delta x}(X_{\mathfrak{I}^\sharp}) = \sum_{\mathfrak{I}_2 \subseteq \mathfrak{I}_1 \subseteq \mathfrak{I}} (-1)^{\#(\mathfrak{I} \smallsetminus \mathfrak{I}_1)} \sum_{\delta \in T_{|\mathfrak{I}_2|}(\mathrm{F})} \hat{\phi}^{\mathfrak{I} \smallsetminus \mathfrak{I}_1}_{\delta x}(X_{\mathfrak{I}_2}), \tag{6.11}$$

où, comme toujours, $\hat{\phi}^{\mathfrak{I}'}_x = \widehat{(\phi_x)}^{\mathfrak{I}'}$ *pour* $\mathfrak{I}' \subseteq_\epsilon I_0$.

Démonstration Démontrons d'abord l'égalité (6.10). En utilisant le principe d'inclusion-exclusion, on a

$$\sum_{\delta \in T_{|\mathfrak{I}|}(\mathrm{F})} \phi_{\delta x}(X_{\mathfrak{I}}) = \sum_{\mathfrak{I}_1 \subseteq \mathfrak{I}} (-1)^{\#(\mathfrak{I} \smallsetminus \mathfrak{I}_1)} \sum_{\mathfrak{I}_2 \subseteq \mathfrak{I}_1} \sum_{\delta \in T_{|\mathfrak{I}_2|}(\mathrm{F})} \phi_{\delta x}(X_{\mathfrak{I}_2}).$$

D'autre part, pour tout $\mathfrak{I}_1 \subseteq \mathfrak{I}$, la formule sommatoire de Poisson nous donne

$$\sum_{\mathfrak{I}_2 \subseteq \mathfrak{I}_1} \sum_{\delta \in T_{|\mathfrak{I}_2|}(\mathrm{F})} \phi_{\delta x}(X_{\mathfrak{I}_2}) = \sum_{\mathfrak{I}_2 \subseteq \mathfrak{I}_1} \sum_{\delta \in T_{|\mathfrak{I}_2|}(\mathrm{F})} \hat{\phi}^{\mathfrak{I}_1}_{\delta x}(X_{\mathfrak{I}_2^\sharp})$$

d'où (6.10). L'égalité (6.11) se démontre de la même façon. ∎

Lemme 6.10 *On a*

$$J_{\mathfrak{o}}(f) = \sum_{|\mathcal{J}| = I_0} \sum_{\mathcal{J}_1 \sqcup \mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{J}} (-1)^{\#(\mathcal{J} \smallsetminus \mathcal{J}_{12})} \overline{\Lambda}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2}(f)(0).$$

Démonstration En utilisant l'égalité (6.11) du lemme 6.9 on a pour tout $x \in U(\mathbb{A})$

$$\begin{aligned} &\sum_{|\mathcal{J}| = I_0} \sum_{\mathcal{J}_1 \sqcup \mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{J}} (-1)^{\#(\mathcal{J} \smallsetminus \mathcal{J}_{12})} \sum_{\eta \in T_{|\mathcal{J}_{12}|}(\mathrm{F})} \hat{f}^{\mathcal{J} \smallsetminus \mathcal{J}_1}_{\eta x}(X_{\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2^\sharp}) \mathbb{1}_{(\mathcal{J} \smallsetminus \mathcal{J}_2) \cup \mathcal{J}_2^\sharp}(H_0(\eta x)) \\ &= \sum_{|\mathcal{J}| = I_0} \sum_{\mathcal{J}_1 \sqcup \mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{J}} \sum_{\mathcal{J}_4 \subseteq \mathcal{J}_3 \subseteq \mathcal{J}_2} (-1)^{\#(\mathcal{J} \smallsetminus \mathcal{J}_{13})} \sum_{\eta \in T_{|\mathcal{J}_{14}|}(\mathrm{F})} \hat{f}^{\mathcal{J} \smallsetminus \mathcal{J}_{13}}_{\eta x}(X_{\mathcal{J}_{14}}) \mathbb{1}_{(\mathcal{J} \smallsetminus \mathcal{J}_2) \cup \mathcal{J}_2^\sharp}(H_0(\eta x)). \end{aligned} \tag{6.12}$$

On change l'ordre de sommation en mettant $\mathcal{J}_0 := \mathcal{J} \smallsetminus \mathcal{J}_{13}$ et $\mathfrak{I}_0 = \mathcal{J}_{14}$. On obtient alors

$$\sum_{\mathfrak{I}_0 \sqcup \mathcal{J}_0 \subseteq_\epsilon I_0} (-1)^{\#\mathcal{J}_0} \sum_{\eta \in T_{|\mathfrak{I}_0|}(\mathrm{F})} \hat{f}^{\mathcal{J}_0}_{\eta x}(X_{\mathfrak{I}_0}) \Big(\sum_{\mathcal{K}} \mathbb{1}_{\mathcal{K}}(H_0(\eta x)) \Big),$$

où la somme porte sur les $\mathcal{K} \subseteq_\epsilon I_0$ tels que $\hat{f}^{\mathcal{J}_0}_{\eta x}(X_{\mathfrak{I}_0}) \mathbb{1}_{\mathcal{K}}(H_0(\eta x))$ apparaît dans la somme (6.12). On prétend que tout $|\mathcal{K}| = I_0$ est de cette forme exactement une fois pour $\mathcal{I}_0$ et $\mathcal{J}_0$ fixés. Fixons-les et soit $\mathcal{K} \subseteq_\epsilon I_0$ tel que $|\mathcal{K}| = I_0$. On vérifie alors que pour

$$\mathcal{J}_1 := \mathcal{K} \cap \mathcal{I}_0, \quad \mathcal{J}_2 := (\mathcal{K} \smallsetminus (\mathcal{J}_0 \cup \mathcal{I}_0))^\sharp, \quad \mathcal{J}_3 := (\mathcal{K} \smallsetminus (\mathcal{J}_0 \cup \mathcal{J}_0^\sharp \cup \mathcal{I}_0))^\sharp,$$
$$\mathcal{J}_4 := \mathcal{K}^\sharp \cap \mathcal{I}_0,\ \mathcal{J} := (\mathcal{K} \cap (\mathcal{J}_0 \cup \mathcal{I}_0)) \cup (\mathcal{K} \smallsetminus (\mathcal{J}_0 \cup \mathcal{I}_0))^\sharp$$

l'expression $\hat{f}_{\eta x}^{\mathcal{J}_0}(X_{\mathcal{I}_0})\mathbb{1}_{\mathcal{K}}(H_0(\eta x))$ apparaît dans la somme (6.12). Inversement, il apparaît une seule fois car $\mathcal{K}$ détermine les ensembles $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3, \mathcal{J}_4$, et $\mathcal{J}$ uniquement.

En utilisant l'identité (6.3), on voit qu'on a démontré

$$\sum_{|\mathcal{J}|=I_0} \sum_{\mathcal{J}_1 \sqcup \mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{J}} (-1)^{\#(\mathcal{J} \smallsetminus \mathcal{J}_{12})} \sum_{\eta \in T_{|\mathcal{J}_{12}|}(\mathrm{F})} \hat{f}_{\eta x}^{\mathcal{J} \smallsetminus \mathcal{J}_1}(X_{\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2^\sharp})\mathbb{1}_{(\mathcal{J} \smallsetminus \mathcal{J}_2) \cup \mathcal{J}_2^\sharp}(H_0(\eta x))$$
$$= \sum_{\mathcal{I} \sqcup \mathcal{J} \subseteq_\epsilon I_0} (-1)^{\#\mathcal{J}} \sum_{\eta \in T_{|\mathcal{I}|}(\mathrm{F})} \hat{f}_{\eta x}^{\mathcal{J}}(X_{\mathcal{I}}).$$

En regardant le côté droit de cette égalité et en utilisant la formule (6.9), on voit que, en vertu de la proposition 6.6, l'intégrale de cette expression sur $T_{I_2}(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A})$ égale $J_{\mathfrak{o}}(f)$. Or le lemme 6.8 dit que l'intégrale du côté gauche sur le même quotient donne le résultat cherché. ■

On introduit maintenant les fonctions zêta.

Proposition 6.11 (*cf.* Proposition 6.28) *Soit $\mathcal{J} \subseteq_\epsilon I_0$. Alors l'intégrale*

$$\mathrm{vol}(T_{I_2 \smallsetminus I_0}(\mathrm{F})\backslash T_{I_2 \smallsetminus I_0}(\mathbb{A})) \int_{U(\mathbb{A}, X_{\mathcal{J}})\backslash U(\mathbb{A})} f(x^{-1}X_{\mathcal{J}}x)e^{\lambda(H_0(x))}\,dx, \quad \lambda \in \mathfrak{a}^*_{|\mathcal{J}|,\mathbb{C}}$$

converge absolument et uniformément sur tous les compacts d'un ouvert non-vide de $\mathfrak{a}^*_{|\mathcal{J}|,\mathbb{C}}$ et admet un prolongement méromorphe à $\mathfrak{a}^*_{|\mathcal{J}|,\mathbb{C}}$, noté $\zeta_{\mathcal{J}}(f)$. Les fonctions $\zeta_{\mathcal{J}}(f)$ et $\overline{\Lambda}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2}(f)$ vérifient la relation suivante :

$$\sum_{|\mathcal{J}|=I_0} \sum_{\mathcal{J}_1 \sqcup \mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{J}} (-1)^{\#(\mathcal{J} \smallsetminus \mathcal{J}_{12})} \overline{\Lambda}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2}(f) = \sum_{|\mathcal{J}|=I_0} \zeta_{\mathcal{J}}(f).$$

Démonstration La première partie est démontré dans la proposition 6.28. La deuxième assertion c'est le lemme 6.29. ■

On est prêt à démontrer le résultat principal de cette section.

Théorème 6.12 *Pour tout $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}))$ la somme $\sum_{|\mathcal{J}|=I_0} \zeta_{\mathcal{J}}(f)$ est holomorphe en $\lambda = 0$ et l'on a $J_{\mathfrak{o}}(f) = \big(\sum_{|\mathcal{J}|=I_0} \zeta_{\mathcal{J}}(f)\big)(0)$.*

Démonstration Le théorème découle du résultat d'holomorphie donné dans le lemme 6.8 et de l'égalité démontrée dans le lemme 6.10 accouplée avec l'égalité de la proposition 6.11. ■

6.5 Deuxième formule pour le noyau tronqué

Lemme 6.13 *Soient P un sous-groupe parabolique de U, $X \in \mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}$ et $p\colon \mathfrak{n}_{\widetilde{P}} \to \mathfrak{n}_P$ la projection donnée par l'isomorphisme (6.4). L'application suivante,*

$$N_P(R) \ni \eta \mapsto p(\mathrm{Ad}(\eta^{-1})X - X) \in \mathfrak{n}_P(R),$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2015-054-9 Published online by Cambridge University Press

est une bijection entre $N_P(R)$ *et* $\mathfrak{n}_P(R)$ *pour toute* F*-algèbre* R.

Démonstration Soit

$$X = \begin{pmatrix} B & u \\ u^\sharp & d \end{pmatrix}$$

la décomposition de X comme dans (2.10). On voit alors que l'application décrite dans le lemme c'est juste $N_P(R) \ni \eta \mapsto \mathrm{Ad}(\eta^{-1})B - B \in \mathfrak{n}_P(R)$. Le fait que cette application est une bijection pour B régulier semi-simple c'est le contenu de [4, lemme 2.3]. ■

On considère $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}))$ fixée. Dans l' équation (6.5) on a introduit la fonction f^P, ainsi que $f_x(X) := f(\mathrm{Ad}(x^{-1})X)$. Par f_x^P on entend toujours $(f_x)^P$.

Le corollaire suivant découle directement du lemme 6.13.

Corollaire 6.14 *Soient* P *un sous-groupe parabolique standard de* U, $\xi \in \mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}$, *et* $x \in U(\mathbb{A})$. *Alors* $\sum_{\eta \in N_P(\mathrm{F})} f_{\eta x}^P(\xi) = \sum_{\zeta \in \mathfrak{n}_P(\mathrm{F})} f_x^P(\xi + \zeta)$.

Corollaire 6.15 *Soient* P *un sous-groupe parabolique standard de* U, $\xi \in \mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}$, *et* $x \in U(\mathbb{A})$. *Alors* $\int_{N_P(\mathbb{A})} f_{nx}^P(\xi)\, dn = \int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{P}}(\mathbb{A})} f_x(\xi + U_P)\, dU_P$.

Démonstration Le corollaire découle de [4, corollaire 2.5] et du fait que $N_P(\mathbb{A})$ normalise $V_P(\mathbb{A})$ sans changer la mesure de Haar. ■

Pour $T \in \mathfrak{a}_0^+$ posons

$$j_{\mathfrak{o}}^T(x) = j_{f,\mathfrak{o}}^T(x) = \sum_{P \supseteq P_0} (-1)^{d_P} \sum_{\delta \in P(\mathrm{F})\backslash U(\mathrm{F})} \hat{\tau}_P(H_P(\delta x) - T) I_{P,\mathfrak{o}}(\delta x),\ x \in U(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A}),$$

où $I_{P,\mathfrak{o}}$ est définie par (6.6). La fonction $j_{\mathfrak{o}}^T$ est une variante de $k_{\mathfrak{o}}^T$ définie au début de la section 3.

Théorème 6.16 *Pour tout* $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ *on a* $\int_{U(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A})} |j_{\mathfrak{o}}^T(x)|\, dx < \infty$.

Démonstration En procédant comme au début de la preuve du théorème 3.1 et en utilisant la notation du début de ce théorème, on montre que l'intégrale $\int_{[U]} |j_{\mathfrak{o}}^T(x)|\, dx$ est majorée par la somme sur les sous-groupes paraboliques standards $P_1 \subseteq S \subseteq P_2$ de U de

$$\int_{P_1(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A})} \chi_{1,2}^T(x) \sum_{\xi \in (\mathfrak{m}_{\widetilde{S},\widetilde{1}})'(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}} \Big| \sum_{S \subseteq P \subseteq P_2} (-1)^{d_P} \sum_{\zeta \in \mathfrak{n}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{P}}(\mathrm{F})} \sum_{\eta \in N_P(\mathrm{F})} f_{\eta x}^P(\xi + \zeta) \Big|\, dx.$$

En utilisant le corollaire 6.14 et ensuite la formule sommatoire de Poisson, on s'aperçoit que la somme entre la valeur absolue dans l'intégrale ci-dessus égale

$$\sum_{S \subseteq P \subseteq P_2} (-1)^{d_P} \sum_{\zeta_1 \in \overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{P}}(\mathrm{F})} \sum_{\zeta_2 \in \overline{\mathfrak{n}}_P(\mathrm{F})} \widetilde{\phi}_S(x, \xi, \zeta_1 + \zeta_2) \tag{6.13}$$

où $\widetilde{\phi}_S(x, X, Y) = \int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{S}}(\mathbb{A})} f_x(X + U_S)\psi(\langle U_S, Y\rangle)\, dU_S$, pour $x \in U(\mathbb{A})$, $X \in \mathfrak{m}_{\widetilde{S}}(\mathbb{A})$, $Y \in \overline{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}(\mathbb{A})$.

Soit P un sous-groupe parabolique contenu entre S et P_2. Pour $P \subseteq R \subseteq P_2$ notons

$$\overline{\mathfrak{n}}'_{R,2} = (\overline{\mathfrak{n}}^2_R \cap (\overline{\mathfrak{n}}^{\widetilde{2}}_{\widetilde{R}})') \oplus \overline{\mathfrak{n}}_2 = \overline{\mathfrak{n}}_R \smallsetminus \Big(\bigcup_{R \subseteq Q \subsetneq P_2} \overline{\mathfrak{n}}^Q_R \oplus \overline{\mathfrak{n}}_2 \Big).$$

On a donc la décomposition $\overline{\mathfrak{n}}_P = \coprod_{P \subseteq R \subseteq P_2} \overline{\mathfrak{n}}'_{R,2}$ et en utilisant la décomposition de $\overline{\mathfrak{n}}^{\widetilde{P}}_{\widetilde{S}}(\mathrm{F})$ donnée par (3.4), on voit que l'expression (6.13) égale

$$\begin{aligned}\sum_{S \subseteq Q \subseteq P \subseteq R \subseteq P_2} (-1)^{d_P} & \sum_{\zeta_1 \in (\overline{\mathfrak{n}}^{\widetilde{Q}}_{\widetilde{S}})'(\mathrm{F})} \sum_{\zeta_2 \in \overline{\mathfrak{n}}'_{R,2}(\mathrm{F})} \widetilde{\phi}_S(x, \xi, \zeta_1 + \zeta_2) \\ &= \sum_{S \subseteq Q \subseteq R \subseteq P_2} \sum_{\zeta_1 \in (\overline{\mathfrak{n}}^{\widetilde{Q}}_{\widetilde{S}})'(\mathrm{F})} \sum_{\zeta_2 \in \overline{\mathfrak{n}}'_{R,2}(\mathrm{F})} \widetilde{\phi}_S(x, \xi, \zeta_1 + \zeta_2) \Big(\sum_{Q \subseteq P \subseteq R} (-1)^{d_P} \Big) \\ &= \sum_{S \subseteq R \subseteq P_2} (-1)^{d_R} \sum_{\zeta_1 \in (\overline{\mathfrak{n}}^{\widetilde{R}}_{\widetilde{S}})'(\mathrm{F})} \sum_{\zeta_2 \in \overline{\mathfrak{n}}'_{R,2}(\mathrm{F})} \widetilde{\phi}_S(x, \xi, \zeta_1 + \zeta_2),\end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'identité (3.6) dans la dernière égalité.

Pour $P_1 \subseteq S \subseteq P_2$, posons

$$\Psi_S(x, X, Y) = \sum_{\zeta_2 \in \overline{\mathfrak{n}}_2(\mathrm{F})} \widetilde{\phi}_S(x, X, Y + \zeta_2), \qquad x \in U(\mathbb{A}), X \in \mathfrak{m}_{\widetilde{S}}(\mathbb{A}), Y \in \overline{\mathfrak{n}}^{\widetilde{2}}_{\widetilde{S}}(\mathbb{A}).$$

Alors $\Psi_S(x, X, Y) \in \mathcal{S}((\mathfrak{m}_{\widetilde{S}} \oplus \overline{\mathfrak{n}}^{\widetilde{2}}_{\widetilde{S}})(\mathbb{A}))$ pour un x fixé et on a pour $S \subseteq R \subseteq P_2$:

$$\sum_{\xi \in \mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}} \Big| \sum_{\zeta_1 \in (\overline{\mathfrak{n}}^{\widetilde{R}}_{\widetilde{S}})'(\mathrm{F})} \sum_{\zeta_2 \in \overline{\mathfrak{n}}'_{R,2}(\mathrm{F})} \widetilde{\phi}_S(x, \xi, \zeta_1 + \zeta_2) \Big| \le \sum_{\xi \in (\mathfrak{m}^{\widetilde{S}}_{\widetilde{1}})'(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}} \sum_{\zeta_1 \in (\overline{\mathfrak{n}}^{\widetilde{2}}_{\widetilde{S}})'(\mathrm{F})} |\Psi_S(x, \xi, \zeta_1)|$$

car $(\overline{\mathfrak{n}}^{\widetilde{R}}_{\widetilde{S}})' \oplus (\overline{\mathfrak{n}}^2_R \cap (\overline{\mathfrak{n}}^{\widetilde{2}}_{\widetilde{R}})') \subseteq (\overline{\mathfrak{n}}^{\widetilde{2}}_{\widetilde{S}})'$.

On se ramène alors à borner pour $P_1 \subseteq S \subseteq P_2$ fixés :

$$\int_{P_1(\mathbb{A}) \backslash U(\mathbb{A})} \chi^T_{P_1, P_2}(x) \sum_{\xi \in \mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}} \sum_{\zeta_1 \in (\overline{\mathfrak{n}}^{\widetilde{2}}_{\widetilde{S}})'(\mathrm{F})} |\Psi_S(x, \xi, \zeta_1)| \, dx.$$

Cette intégrale est identique à (3.7). Cela conclut la preuve. ∎

Au début de la section 4 nous avons introduit les distributions $J^T_{\mathfrak{o}}$. Pour des classes $\mathfrak{o}$ dans $\mathcal{O}_{rs}$ cette distribution s'exprime comme suit.

Proposition 6.17 *Pour $T \in T_+ + \mathfrak{a}^+_0$, $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}))$ et $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}_{rs}$ on a*

$$J^T_{\mathfrak{o}}(f) = \int_{U(\mathrm{F}) \backslash U(\mathbb{A})} j^T_{\mathfrak{o}}(x) \, dx.$$

Démonstration Dans la preuve on utilisera la notation introduite au début de la preuve du théorème 3.1. Donc, en raisonnant comme au début de la preuve de ce théorème-là, on voit que

$$\begin{aligned}\int_{U(\mathrm{F}) \backslash U(\mathbb{A})} & j^T_{f,\mathfrak{o}}(x) \, dx \\ &= \sum_{P_2 \supseteq P_1 \supseteq P_0} \int_{P_1(\mathrm{F}) \backslash U(\mathbb{A})} \chi^T_{1,2}(x) \sum_{P_1 \subseteq P \subseteq P_2} (-1)^{d_P} \sum_{\xi \in \mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}} \sum_{\eta \in N_P(\mathrm{F})} f^P_{\eta x}(\xi) \, dx.\end{aligned}$$

Fixons $P_2 \supseteq P_1 \supseteq P_0$ et décomposons l'intégrale sur $P_1(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A})$ en une double intégrale sur $x \in M_1(\mathrm{F})N_1(\mathbb{A})\backslash U(\mathbb{A})$ et $n_1 \in N_1(\mathrm{F})\backslash N_1(\mathbb{A})$. Ensuite on fait passer cette dernière intégrale à l'intérieure de la somme sur P. On peut le faire car la fonction

$$N_1(\mathbb{A}) \ni n_1 \mapsto \sum_{\xi\in\mathfrak{m}_{\overline{P}}(\mathrm{F})\cap\mathfrak{o}} \sum_{\eta\in N_P(\mathrm{F})} f^P_{\eta n_1 x}(\xi)$$

est $N_1(\mathrm{F})$-invariante et continue donc bornée sur le compact $N_1(\mathrm{F})\backslash N_1(\mathbb{A})$. Pour P et $x \in M_1(\mathrm{F})N_1(\mathbb{A})\backslash U(\mathbb{A})$ fixés, on regarde alors

$$\int_{[N_1]} \sum_{\xi\in\mathfrak{m}_{\overline{P}}(\mathrm{F})\cap\mathfrak{o}} \sum_{\eta\in N_P(\mathrm{F})} f^P_{\eta n_1 x}(\xi)\,dn_1.$$

Comme le volume de $N_P(\mathrm{F})\backslash N_P(\mathbb{A})$ vaut 1 et $N_P \subseteq N_1$, cette expression vaut

$$\int_{[N_1]} \sum_{\xi\in\mathfrak{m}_{\overline{P}}(\mathrm{F})\cap\mathfrak{o}} \int_{[N_P]} \sum_{\eta\in N_P(\mathrm{F})} f^P_{\eta n n_1 x}(\xi)\,dn\,dn_1$$
$$= \int_{[N_1]} \sum_{\xi\in\mathfrak{m}_{\overline{P}}(\mathrm{F})\cap\mathfrak{o}} \int_{N_P(\mathbb{A})} f^P_{n n_1 x}(\xi)\,dn\,dn_1 = \int_{[N_1]} k_{\mathfrak{o},P}(n_1 x)\,dn_1.$$

La dernière égalité découle du corollaire 6.15. On intervertit de nouveau la somme qui porte sur P avec l'intégrale sur $N_1(\mathrm{F})\backslash N_1(\mathbb{A})$ et l'on recombine cette dernière avec l'intégrale sur $M_1(\mathrm{F})N_1(\mathbb{A})\backslash U(\mathbb{A})$. On retrouve donc

$$\int_{U(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A})} j^T_{f,\mathfrak{o}}(x)\,dx = \sum_{P_2\supseteq P_1\supseteq P_0} \int_{P_1(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A})} \chi^T_{1,2}(x) k_{1,2,\mathfrak{o}}(x)\,dx.$$

Chaque intégrale dans la somme ci-dessus converge d'après le théorème 3.2 ce qui justifie l'intégration et de surcroît, la somme elle-même égale $J^T_{\mathfrak{o}}(f)$ grâce à l'identité (3.2) et la définition de $J^T_{\mathfrak{o}}(f)$ donnée au début de la section 4 ce qu'il fallait démontrer. ∎

Plaçons nous maintenant dans le cadre du paragraphe 4.1. On veut généraliser le théorème 6.16 et la proposition 6.17 au cas $G \times U'$. Notons $\mathcal{O}^{G\times U'}_{rs}$ l'ensemble de classes contenant un élément $X_1 + X_2 \in \mathfrak{g}(\mathrm{F}) \times \widetilde{\mathfrak{u}}'(\mathrm{F})$ tel que le polynôme caractéristique de X_1 est séparable et tel que $X_2 \in \widetilde{\mathfrak{u}}'(\mathrm{F})$ appartient à une classe relativement semi-simple régulière dans le contexte d'inclusion $U' \hookrightarrow \widetilde{U}'$.

Pour $f \in \mathcal{S}((\mathfrak{g}\times\widetilde{\mathfrak{u}}')(\mathbb{A}))$, $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}^{G\times U'}_{rs}$, et un sous-groupe parabolique standard P de $G \times U'$ soit

$$I_{f,P,\mathfrak{o}}(x) = \sum_{\xi\in\mathfrak{m}_{\overline{P}}(\mathrm{F})\cap\mathfrak{o}} \sum_{\eta\in N_P(\mathrm{F})} \int_{V'_P(\mathbb{A})} f(\mathrm{Ad}((\eta x)^{-1})(\xi + Y'_P))\,dY'_P,$$

où $x \in P(\mathrm{F})\backslash(G\times U')(\mathbb{A})^1$ et V'_P c'est le plus grand sous-espace isotrope de V' stabilisé par P.

Pour $T \in (\mathfrak{a}^{G\times U'}_{P_0})^+$ et $x \in (G \times U')(\mathrm{F})\backslash(G \times U')(\mathbb{A})^1$ on pose aussi

$$j^T_{f,\mathfrak{o}}(x) = \sum_{P\supseteq P_0} (-1)^{d_P^{G\times U'}} \sum_{\delta\in P(\mathrm{F})\backslash(G\times U')(\mathrm{F})} \hat{\tau}^{G\times U'}_P(H_P(\delta x) - T_P) I_{P,\mathfrak{o}}(\delta x).$$

La preuve du théorème 6.16 s'étend sans problème dans ce cas donnant

$$\int_{(G\times U')(\mathrm{F})\backslash(G\times U')(\mathbb{A})^1} |j^T_{\mathfrak{o}}(x)|\,dx < \infty$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2015-054-9 Published online by Cambridge University Press

pour T suffisamment régulier. De même, la preuve de la proposition 6.17 s'étend aussi bien et l'on obtient, avec la notation du paragraphe 4.1, pour $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}_{rs}^{G\times U'}$

$$\int_{(G\times U')(\mathrm{F})\backslash(G\times U')(\mathbb{A})^1} j_{f,\mathfrak{o}}^T(x)\,dx = J_{\mathfrak{o}}^{G\times U',T}(f).$$

Soient maintenant Q un sous-groupe parabolique standard de U, $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}_{rs}$, et $\mathfrak{o}_{Q,1},\dots,\mathfrak{o}_{Q,m} \in \mathcal{O}^{M_Q}$ comme dans l'équation (4.1). Alors $\mathfrak{o}_{Q,i} \in \mathcal{O}_{rs}^{M_Q}$ pour $i = 1,\dots,m$. Si $P \subseteq Q$, alors $V_P^Q := V_P \cap Z_Q$ c'est le plus grand sous-espace isotrope de Z_Q stabilisé par $P\cap M_Q$. On a dans ce cas l'analogue suivant de l'égalité (4.3) pour tout $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}))$:

(6.14)

$$\begin{aligned} J_{\mathfrak{o}}^{M_Q,T}(f_Q) &= \int_{M_Q(\mathrm{F})\backslash M_Q(\mathbb{A})^1} \sum_{i=1}^{m} j^T_{f_Q,\mathfrak{o}_{Q,i}}(m)\,dm \\ &= \int_{M_Q(\mathrm{F})\backslash M_Q(\mathbb{A})^1} \sum_{P\subseteq Q}(-1)^{d_P^Q} \sum_{\eta\in(P\cap M_Q)(\mathrm{F})\backslash M_Q(\mathrm{F})} \hat{\tau}_P^Q(H_P(\eta m)-T) \\ &\quad\times\Big(\sum_{\xi\in\mathfrak{m}_{\overline{P}}(\mathrm{F})\cap\mathfrak{o}}\ \sum_{\delta\in N_P^Q(\mathrm{F})} \int_{V_P^Q(\mathbb{A})} f_Q(\mathrm{Ad}((\delta\eta m)^{-1})(\xi+Y_P^Q))\,dY_P^Q\Big)\,dm. \end{aligned}$$

6.6 Expression intégrale de $J_{\mathfrak{o}}$

Dans ce paragraphe, on démontre la proposition 6.6.

Proposition 6.18 *On a* $\int_{U(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A})} |j_{\mathfrak{o}}(x)|\,dx < \infty$ *et* $\int_{U(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A})} j_{\mathfrak{o}}(x)\,dx = J_{\mathfrak{o}}(f)$.

Démonstration Pour tout sous-groupe parabolique standard Q de U soit $\overline{\tau}_Q$ la fonction caractéristique de $H \in \mathfrak{a}_Q$ tels que $\alpha(H) \le 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_Q$. Il résulte du lemme combinatoire de Langlands [14, Proposition 1.7.2] que pour tout sous-groupe parabolique standard P de U on a $\sum_{Q\supseteq P}\hat{\tau}_P^Q\overline{\tau}_Q = 1$. En utilisant cette identité, on a pour tout $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$

$$\begin{aligned} j_{\mathfrak{o}}(x) &= \sum_P (-1)^{d_P} \sum_{\delta\in P(\mathrm{F})\backslash U(\mathrm{F})} I_{P,\mathfrak{o}}(\delta x) \\ &= \sum_P (-1)^{d_P} \sum_{\delta\in P(\mathrm{F})\backslash U(\mathrm{F})} I_{P,\mathfrak{o}}(\delta x)\Big(\sum_{Q\supseteq P}\hat{\tau}_P^Q(H_P(\delta x)-T_P)\overline{\tau}_Q(H_Q(\delta x)-T_Q)\Big) \\ &= \sum_Q (-1)^{d_Q} \sum_{\delta\in Q(\mathrm{F})\backslash U(\mathrm{F})} \overline{\tau}_Q(H_Q(\delta x)-T_Q) \sum_{P\subseteq Q}(-1)^{d_Q^P} \\ &\quad\times \sum_{\eta\in(M_Q\cap P)(\mathrm{F})\backslash M_Q(\mathrm{F})} I_{P,\mathfrak{o}}(\eta\delta x)\hat{\tau}_P^Q(H_P(\eta\delta x)-T_P), \end{aligned}$$

où les sommes sont absolument convergentes. Il suffit de montrer que pour tout Q l'intégrale

$$(6.15)\quad \int_{Q(\mathrm{F})\backslash U(\mathbb{A})} \overline{\tau}_Q(H_Q(x)-T_Q) \sum_{P\subseteq Q}(-1)^{d_Q^P} \sum_{\eta\in(M_Q\cap P)(\mathrm{F})\backslash M_Q(\mathrm{F})} I_{P,\mathfrak{o}}(\eta x)\hat{\tau}_P^Q(H_P(\eta x)-T_P)\,dx$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2015-054-9 Published online by Cambridge University Press

converge absolument. L'analyse va être analogue à celle de la preuve du théorème 4.5.

Posons $x = namk$ où $n \in N_Q(\mathrm{F})\backslash N_Q(\mathbb{A})$, $m \in M_Q(\mathrm{F})\backslash M_Q(\mathbb{A})^1$, $a \in A_Q^\infty$, et $k \in K$. Donc $dx = e^{-2\rho_Q(H_Q(a))}dndadmdk$.

Fixons $P \subseteq Q$. Pour n, m, k, et a comme ci-dessus et $\eta \in M_Q(\mathrm{F})$ on a

$$\overline{\tau}_Q(H_Q(\eta namk) - T_Q) = \overline{\tau}_Q(H_Q(a) - T_Q)$$

et, en faisant les changements de variable $a^{-1}na \mapsto n$ et $a^{-1}Y_P a \mapsto Y_P$,

$$\begin{aligned}(6.16)\qquad &\int_K\int_{[N_Q]} I_{P,\mathfrak{o}}(\eta namk)\hat{\tau}_P^Q(H_P(\eta namk) - T_P)\,dndk\\ &= \int_K\int_{[N_Q]} I_{P,\mathfrak{o}}(\eta namk)\hat{\tau}_P^Q(H_P(\eta m) - T_P)\,dndk\\ &= \hat{\tau}_P^Q(H_P(\eta m) - T_P)e^{2\rho_{\widetilde{Q}}(H_Q(a))}\\ &\quad \int_K \sum_{\xi\in\mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F})\cap\mathfrak{o}}\ \sum_{\delta\in N_P^Q(\mathrm{F})}\int_{N_Q(\mathbb{A})}\int_{V_P(\mathbb{A})} f_{n\delta\eta mk}(\xi + Y_P)\,dY_P dndk.\end{aligned}$$

Fixons $\xi \in \mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}$. Pour une fonction $\phi \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}))$ regardons

$$(6.17)\qquad \int_{N_Q(\mathbb{A})}\int_{V_P(\mathbb{A})} \phi(n^{-1}(\xi + Y_P)n)\,dY_P dn.$$

On a $V_P = V_Q \oplus V_P^Q$, où $V_P^Q = V_P \cap Z_Q$. Pour $Y_P \in V_P$ soient $Y_Q \in V_Q$ et $Y_P^Q \in V_P^Q$ tels que $Y_P = Y_Q + Y_P^Q$. Donc puisque $Y_P^Q \in Z_Q$, si $n \in N_Q$, on a $Y_P^Q - nY_P^Q n^{-1} \in V_Q$. L'intégrale (6.17) ci-dessus égale donc

$$\begin{aligned}&\int_{V_P^Q(\mathbb{A})}\int_{N_Q(\mathbb{A})}\int_{V_Q(\mathbb{A})} \phi(n^{-1}(\xi + Y_Q + Y_P^Q - nY_P^Q n^{-1})n + Y_P^Q)dY_Q dn dY_P^Q\\ &\qquad\qquad = \int_{V_P^Q(\mathbb{A})}\int_{N_Q(\mathbb{A})}\int_{V_Q(\mathbb{A})} \phi(n^{-1}(\xi + Y_Q)n + Y_P^Q)dY_Q dn dY_P^Q.\end{aligned}$$

En utilisant le corollaire 6.15 et en faisant un changement de variable, ceci égale

$$\int_{V_P^Q(\mathbb{A})}\int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})} \phi(\xi + U_Q + Y_P^Q)\,dU_Q dY_P^Q.$$

On voit alors que (6.16) devient

$$\begin{aligned}&e^{2\rho_{\widetilde{Q}}(H_Q(a))}\hat{\tau}_P^Q(H_P(\eta m) - T_P)\\ &\qquad\qquad \sum_{\xi\in\mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F})\cap\mathfrak{o}}\ \sum_{\delta\in N_P^Q(\mathrm{F})}\int_{V_P^Q(\mathbb{A})} f_Q(\mathrm{Ad}((\delta\eta m)^{-1})(\xi + Y_P^Q))\,dY_P^Q\end{aligned}$$

où $f_Q \in \mathcal{S}(\mathfrak{m}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A}))$ est définie par (4.2).

En utilisant alors l'égalité (6.14), on s'aperçoit que l'intégrale (6.15) égale $J_{\mathfrak{o}}^{M_Q,T}(f_Q)$ fois

$$(6.18)\qquad \int_{\mathfrak{a}_Q} e^{\underline{\rho}_Q(H)}\overline{\tau}_Q(H - T_Q)dH.$$

La convergence de l'intégrale dans le théorème va alors découler de la convergence de l'intégrale (6.18). Or cette intégrale converge en vertu du lemme 4.2 et donne précisément $\hat{\theta}_Q(\underline{\rho}_Q)^{-1}e^{\underline{\rho}_Q(T_Q)}$ où $\hat{\theta}_Q = \hat{\theta}_Q^U$ est définie par (4.4).

https://doi.org/10.4153/CJM-2015-054-9 Published online by Cambridge University Press

On vient d'obtenir la convergence ainsi que pour tout $T \in \mathfrak{a}_0^+$ suffisamment régulier,

$$\int_{[U]} j_{\mathfrak{o}}(x)\, dx = \sum_Q (-1)^{d_Q} \hat{\theta}_Q(\underline{\rho}_Q)^{-1} e^{\underline{\rho}_Q(T_Q)} J_{\mathfrak{o}}^{M_Q,T}(f_Q).$$

D'après le théorème 4.5 la somme ci-dessus égale $J_{\mathfrak{o}}(f)$, ce qu'il fallait démontrer. ∎

6.7 Résultats de convergence

Pour toute place v de F on note F_v son complété à v. Soit S_∞ l'ensemble des places archimédiennes de F. Par définition d'un sous-groupe compact maximal admissible de $U(\mathbb{A})$ par rapport à M_0 (voir [1, §1]), on a $K = \prod_v K_v$ où K_v est un sous-groupe compact maximal admissible de $U(\mathrm{F}_v)$ par rapport à M_0. Pour toute place v de F, on choisit une mesure de Haar dx_v sur $U(\mathrm{F}_v)$ de façon que la mesure de Haar sur $U(\mathbb{A})$ soit leur produit. De même, pour tout $i \in I$ on choisit une mesure de Haar sur $T_i(\mathbb{A})$ et des mesures de Haar sur $T_i(\mathrm{F}_v)$ pour toute place v de F de façon que la mesure de Haar sur $T_i(\mathbb{A})$ soit leur produit. Pour tout $I' \subseteq I$ et toute place v de F on met la mesure produit sur $T_{I'}(\mathrm{F}_v) = \prod_{i \in I'} T_i(\mathrm{F}_v)$ et sur $T_{I'}(\mathbb{A}) = \prod_{i\in I'} T_i(\mathbb{A})$. On fixe aussi sur K_v la mesure de Haar de masse totale 1.

En suivant [14, paragraphe 3.2], on fixe une F-base de V et à partir d'elle, pour toute place v de F, on définit des normes notées $|\cdot|_v$ sur $V(\mathrm{F}_v) := V \otimes_{\mathrm{F}} \mathrm{F}_v \cong \mathrm{E}_I \otimes_{\mathrm{F}} \mathrm{F}_v$ et $\mathrm{End}(V(\mathrm{F}_v))$. Grâce à l'inclusion $\mathfrak{u}(\mathrm{F}_v) \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathrm{F}_v}(V(\mathrm{F}_v))$ on obtient une norme $|\cdot|_v$ sur $\mathfrak{u}(\mathrm{F}_v)$ par restriction. On fixe une norme, notée aussi $|\cdot|_v$, sur $U(\mathrm{F}_v)$ grâce à l'inclusion $U(\mathrm{F}_v) \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathrm{F}_v}(V(\mathrm{F}_v)) \oplus \mathrm{End}_{\mathrm{F}_v}(V(\mathrm{F}_v))$ donnée par $U(\mathrm{F}_v) \ni g \mapsto (g, {}^t g^{-1})$. On a donc $|x_v|_v = |x_v^{-1}|_v$ pour tout $x_v \in U(\mathrm{F}_v)$. On va supposer en plus que $|k_v|_v = 1$ pour tout $k_v \in K_v$. On en déduit des hauteurs sur $V(\mathbb{A}) := V \otimes_{\mathrm{F}} \mathbb{A}$, $U(\mathbb{A})$, et $\mathfrak{u}(\mathbb{A})$ par $\|\cdot\| := \prod_v |\cdot|_v$. Il existe alors des constantes $c_0, c_1, c_2 > 0$ telles que pour tous $x_1, x_2 \in U(\mathbb{A})$, et tout $v \in V(\mathbb{A})$ on a

$$\|x_1^{-1}\| = \|x_1\|, \quad \|x_1\| \geq c_0, \quad \|x_1 x_2\| \leq c_1 \|x_1\| \|x_2\|, \quad \|x_1 v\| \leq c_2 \|x_1\| \|v\|.$$

On note aussi qu'il existe des constantes $c_3, r_3 > 0$ telles que

$$|e^{\lambda(H_0(x))}| \leq c_3 e^{\|\mathrm{Re}(\lambda)\|} \|x\|^{r_3}, \quad \forall\, x \in U(\mathbb{A}),\ \lambda \in \mathfrak{a}^*_{I_0,\mathbb{C}}. \tag{6.19}$$

Notons finalement que pour simplifier l'exposition ci-dessous et éviter l'expression 0^{-1}, on pose $\|0\| = 1$ où $0 \in V(\mathbb{A})$.

Lemme 6.19 *Soit $\mathcal{J} \subseteq_\epsilon I_0$. Il existe des constantes $r_0, c_0 > 0$ telles que pour tout $t \in T_{|\mathcal{J}|}(\mathbb{A})$ et tout $x \in U(\mathbb{A})$ on a $\mathbb{1}_{\mathcal{J}}(H_0(tx)) \|t\| \leq c_0 \|t^{-1} 1_{\mathcal{J}}\|^{r_0} \|x\|^{r_0}$.*

Démonstration C'est une conséquence de définitions des hauteurs ci-dessus ainsi que de la manière par laquelle $T_{|\mathcal{J}|}(\mathbb{A})$ agit sur $\mathrm{F}_{\mathcal{J}} \otimes_{\mathrm{F}} \mathbb{A}$, qu'il existe des constantes $c', r' > 0$ telles que

$$\|t\| \leq c' \max(\|t^{-1} 1_{\mathcal{J}}\|^{r'}, \|t 1_{\mathcal{J}}\|^{r'}). \tag{6.20}$$

Si l'on suppose $\mathbb{1}_{\mathcal{J}}(H_0(tx)) = 1$, il résulte de la définition de $\mathbb{1}_{\mathcal{J}}$ donnée au paragraphe 6.3 qu'il existe des constantes $c'', r'' > 0$ telles que $\|t^{-1} 1_{\mathcal{J}}\| \geq c'' \|x\|^{-r''}$ et $\|t 1_{\mathcal{J}}\| \leq c'' \|x\|^{r''}$. En utilisant ceci dans (6.20) et en utilisant le fait que $\|x\| \geq c_0$, on trouve le résultat voulu. ∎

Lemme 6.20 *Il existe un $r_0 > 0$ tel que pour tout $r \geq r_0$ on a*

$$\int_{T_{I_2 \smallsetminus I_0}(\mathrm{F})\backslash T_{I \smallsetminus I_0}(\mathbb{A})} \|t^{-1}\xi_{\varnothing}\|^{-r}\, dt < \infty$$

Démonstration En utilisant la définition de l'ensemble I_2 donnée avant la proposition 6.2, ainsi que la description de $\xi_{\varnothing}$ donnée dans cette proposition-là, on regarde les projections de $t^{-1}\xi_{\varnothing}$ à $\mathrm{E}_i \otimes_{\mathrm{F}} \mathbb{A}$ pour tout $i \in I \smallsetminus I_0$ et on s'aperçoit qu'il existe une constante $c > 0$ telle que l'intégrale dans le lemme est majorée par le produit sur $i \in I \smallsetminus I_2$ de $\int_0^\infty \min(t^{cr}, t^{-cr})\, dt$ fois le volume de $T_{I_2 \smallsetminus I_0}(\mathrm{F})\backslash T_{I_2 \smallsetminus I_0}(\mathbb{A})$. En prenant r suffisamment grand on obtient donc la convergence. ∎

Lemme 6.21 *Soit $\mathfrak{I} \subseteq_\epsilon I_0$. Il existe un $r_0 > 0$ tel que pour tout $r \geq r_0$ il existe un $r' > r$ et une constante $c > 0$ telles que pour tout $x \in U(\mathbb{A})$ on a*

$$\int_{T_{|\mathfrak{I}|}(\mathbb{A})} \mathbb{1}_{\mathfrak{I}}(H_0(tx))\|x^{-1}t^{-1}1_{\mathfrak{I}}\|^{-r}\, dt \leq c \inf_{t \in T_I(\mathbb{A})} \|tx\|^{r'}.$$

Démonstration On a $\|x^{-1}t^{-1}1_{\mathfrak{I}}\| \geq c_2^{-1}\|x\|^{-1}\|t^{-1}1_{\mathfrak{I}}\|$. On voit donc qu'il existe des constantes $c > 0$, $c' > 0$ telles que l'intégrale du lemme est majorée par le produit sur $i \in \mathfrak{I}$ de $\|x\|^r \int_{c'\|x\|^{-r_3}}^\infty t^{-cr}\, dt$ où r_3 est comme dans l'inégalité (6.19), ce qui converge pour r suffisamment grand. On obtient le résultat voulu en remarquant que l'intégrale du lemme est $T_I(\mathbb{A})$-invariante à gauche en tant qu'une fonction de $x \in U(\mathbb{A})$. ∎

Lemme 6.22 *Soit v une place de* F*. Il existe des constantes $c_B, N_B > 0$ telles que pour tout $x_v \in U(\mathrm{F}_v)$ on a $\inf_{t_v \in T_I(\mathrm{F}_v)} |t_v x_v|_v \leq c_B(1 + |\operatorname{Ad}((x_v)^{-1})B|_v)^{N_B}$.*

Démonstration Supposons d'abord T_I déployé sur F_v. Dans ce cas T_I est une partie de Levi d'un F_v-sous-groupe de Borel de U de la forme $T_I N_v$ où N_v c'est sa partie unipotente. De plus $B \in \operatorname{Lie}(T_I)(\mathrm{F}_v)$. En utilisant la décomposition d'Iwasawa, on écrit $x_v = t_v n_v k_v$ où $t_v \in T_I(\mathrm{F}_v)$, $n_v \in N_v(\mathrm{F}_v)$, et $k_v \in K_v$. Soient $U_v, U'_v \in \operatorname{Lie}(N_v)(\mathrm{F}_v)$ tels que $n_v = \exp(U_v)$ et $\operatorname{Ad}(n_v^{-1})B = B + U'_v$. D'après [5, lemme 2.1], il existe un polynôme Q sur $\operatorname{Lie}(N_v)$ qui ne dépend que de B, tel que $U_v = Q(U'_v)$. Il est clair qu'il existe des constantes c'_B, c''_B, N'_B qui ne dépendent que de B, telles que $(1 + |U_v|_v)$ est plus petit que

$$c'_B(1 + |B + U'_v|_v)^{N'_B} = c'_B(1 + |\operatorname{Ad}((t_v n_v)^{-1})B|_v)^{N'_B} \leq c''_B(1 + |\operatorname{Ad}((x_v^{-1})B|_v)^{N'_B}.$$

D'autre part, il existe des constants c_0, N_0 telles que $|n_v|_v \leq c_0(1 + |U_v|_v)^{N_0}$ d'où

$$\inf_{t_v \in T_I(\mathrm{F}_v)} |t_v x_v|_v \leq |n_v k_v|_v \leq \sup_{k_v \in K_v} |k_v|_v |n_v|_v \leq c_B(1 + |\operatorname{Ad}((x_v)^{-1})B|_v)^{N_B}.$$

Dans le cas général, soit F'_v une extension finie de F_v qui déploie T_I. On prolonge la hauteur $|\cdot|_v$ à $U(\mathrm{F}'_v)$. Grâce à [3, (4.6)], il existe des constantes c, N telles que

$$\inf_{t_v \in T_I(\mathrm{F}_v)} |t_v x_v|_v \leq c \inf_{t'_v \in T_I(\mathrm{F}'_v)} |t'_v x_v|_v^N$$

et le résultat suit du cas déployé. ∎

https://doi.org/10.4153/CJM-2015-054-9 Published online by Cambridge University Press

Lemme 6.23 *Soient $\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{J}_3 \subseteq_\epsilon I_0$ et $\mathcal{J}_1 \subseteq_\epsilon I_0$ tels que $|\mathcal{J}_1| \cap |\mathcal{J}_3| = \varnothing$. Alors pour tout $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}))$ et tout compact $C \subseteq \mathfrak{a}^*_{|\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2|}$, l'intégrale*

$$\int_{T_{I_2 \smallsetminus I_0}(\mathrm{F}) T_{I_0 \smallsetminus |\mathcal{J}_{12}|}(\mathbb{A}) \backslash U(\mathbb{A})} \mathbb{1}_{\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2^\sharp}(H_0(x)) e^{(\lambda + \rho_{\mathcal{J}^\sharp_{3\smallsetminus 2}})(H_0(x))} \hat{f}_x^{\mathcal{J}_3}(X_{\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2^\sharp})\, dx$$

converge absolument et est majorée indépendamment de $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{|\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2|, \mathbb{C}}$ tel que $\mathrm{Re}(\lambda) \in C$.

Remarque Soit $t \in T_{I_2 \smallsetminus I_0}(\mathrm{F}) T_{I_0 \smallsetminus |\mathcal{J}_{12}|}(\mathbb{A})$. Pour tout $x \in U(\mathbb{A})$ on a alors

$\mathbb{1}_{\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2^\sharp}(H_0(tx)) = \mathbb{1}_{\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2^\sharp}(H_0(x))$, $e^{(\lambda + \rho_{\mathcal{J}^\sharp_{3\smallsetminus 2}})(H_0(tx))} = e^{(\lambda + \rho_{\mathcal{J}^\sharp_{3\smallsetminus 2}})(H_0(x))} e^{\rho_{\mathcal{J}^\sharp_{3\smallsetminus 2}}(H_0(t))}$

et

$$\hat{f}_{tx}^{\mathcal{J}_3}(X_{\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2^\sharp}) = e^{-\rho_{\mathcal{J}^\sharp_{3\smallsetminus 2}}(H_0(t))} \hat{f}_x^{\mathcal{J}_3}(X_{\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2^\sharp}),$$

d'où $T_{I_2 \smallsetminus I_0}(\mathrm{F}) T_{I_0 \smallsetminus |\mathcal{J}_{12}|}(\mathbb{A})$-invariance de l'intégrale considérée.

Démonstration Pour $\mathcal{J} \subseteq_\epsilon I_0$ et $I' \subseteq I$ soient $\mathbb{A}_{\mathcal{J}} = \mathrm{F}_{\mathcal{J}} \otimes_{\mathrm{F}} \mathbb{A}$ et $\mathbb{A}_{I'} = \prod_{i \in I'} \mathrm{E}_i \otimes_{\mathrm{F}} \mathbb{A}$. Soit h_x la fonction sur $\mathfrak{u}(\mathbb{A}) \times \mathbb{A}_{I \smallsetminus |\mathcal{J}_3|} \times \mathbb{A}_{\mathcal{J}_3^\sharp}$ définie pour tout $x \in U(\mathbb{A})$ de façon suivante :

$$h_x(B', u_{I \smallsetminus |\mathcal{J}_3|}, u_{\mathcal{J}_3^\sharp}) = \int_{\mathbb{A}_{\mathcal{J}_3}} f_x \begin{pmatrix} B' & u_{I \smallsetminus |\mathcal{J}_3|} + u_{\mathcal{J}_3} \\ (u_{I \smallsetminus |\mathcal{J}_3|} + u_{\mathcal{J}_3})^\sharp & d_{\mathfrak{o}} \end{pmatrix} \psi(\langle u_{\mathcal{J}_3}, u_{\mathcal{J}_3^\sharp} \rangle)\, du_{\mathcal{J}_3}.$$

Alors $h_x \in \mathcal{S}(\mathfrak{u}(\mathbb{A}) \times \mathbb{A}_{I \smallsetminus |\mathcal{J}_3|} \times \mathbb{A}_{\mathcal{J}_3^\sharp})$. Soit $P \in \mathcal{P}(M_{I_1})$ un sous-groupe stabilisant le drapeau $\mathrm{F}_{\mathcal{J}_3} \subseteq \mathrm{F}_{\mathcal{J}_{13}}$. Soient $m \in M_{I_1}(\mathbb{A})$, $n \in N_P(\mathbb{A})$, et $k \in K$. En faisant le changement de variable $(mn)^{-1} u_{\mathcal{J}_3} \mapsto u_{\mathcal{J}_3}$ on obtient que $|\hat{f}_{mnk}^{\mathcal{J}_3}(X_{\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2^\sharp})|$ vaut

$$\left| e^{\rho_{\mathcal{J}_3}(H_P(m))} h_k(\mathrm{Ad}((mn)^{-1})B, (1 - 1_{\mathcal{J}_3})((mn)^{-1}(1_{\mathcal{J}_1} + \xi_\varnothing)), 1_{\mathcal{J}_3^\sharp}((mn)^{-1} 1_{\mathcal{J}_2^\sharp})) \right|$$

où 1 c'est l'unité dans E_I.

On voit donc que pour tout $r > 0$ il existe une fonction $\Phi \in \mathcal{S}(\mathfrak{u}(\mathbb{A}))$ telle que

$$\begin{aligned} |\hat{f}_{mnk}^{\mathcal{J}_3}(X_{\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2^\sharp})| &\le e^{\rho_{\mathcal{J}_3}(H_P(m))} \Phi(\mathrm{Ad}((mn)^{-1})B) \\ &\quad \times \|(1 - 1_{\mathcal{J}_3})((mn)^{-1}(1_{\mathcal{J}_1} + \xi_\varnothing))\|^{-r} \|1_{\mathcal{J}_3^\sharp}((mn)^{-1} 1_{\mathcal{J}_2^\sharp})\|^{-r}. \end{aligned}$$

Il existe des constantes $c, c_0, c_1, c_2, c_3 > 0$ qui ne dépendent pas de r telles que

$$\begin{aligned} &\|(1 - 1_{\mathcal{J}_3})((mn)^{-1}(1_{\mathcal{J}_1} + \xi_\varnothing))\|^{-r} \|1_{\mathcal{J}_3^\sharp}((mn)^{-1} 1_{\mathcal{J}_2^\sharp})\|^{-r} \\ &\qquad \le c \|n\|^{c_3 r} \|m^{-1} \xi_\varnothing\|^{-c_0 r} \|m^{-1} 1_{\mathcal{J}_1}\|^{-c_1 r} \|m^{-1} 1_{\mathcal{J}_2^\sharp}\|^{-c_2 r}. \end{aligned}$$

On va montrer alors la convergence de l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} &\int_{T_I(\mathbb{A}) \backslash M_{I_1}(\mathbb{A})} \int_{N_P(\mathbb{A})} \int_K \Phi(\mathrm{Ad}((mn)^{-1})B) \|n\|^{c_3 r} \\ &\quad \times \int_{T_{I_2 \smallsetminus I_0}(\mathrm{F}) \backslash T_{|\mathcal{J}_{12}| \cup (I \smallsetminus I_0)}(\mathbb{A})} \mathbb{1}_{\mathcal{J}_1}(H_0(tmnk)) \mathbb{1}_{\mathcal{J}_2^\sharp}(H_0(tmnk)) \\ &\qquad \times \|(tm)^{-1} \xi_\varnothing\|^{-c_0 r} \|(tm)^{-1} 1_{\mathcal{J}_1}\|^{-c_1 r} \|(tm)^{-1} 1_{\mathcal{J}_2^\sharp}\|^{-c_2 r} \\ &\qquad\quad \times \left| e^{(\lambda + \rho_{\mathcal{J}^\sharp_{3\smallsetminus 2}})(H_0(tmnk)) + \rho_{\mathcal{J}_3}(H_P(tm))} \right| dt\,dk\,dn\,dm. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Majorons l'exponentielle qui apparaît sous l'intégrale. Notons qu'on a

$$\rho_{\mathcal{J}_3} = -\rho_{\mathcal{J}^\sharp_{3\smallsetminus 2}} + \rho_{\mathcal{J}_2}.$$

On va majorer alors d'abord $|e^{\lambda(H_0(tmn))+\rho_{\mathcal{J}_2}(H_P(tm))}|$ et puis l'expression

$$e^{\rho_{\mathcal{J}^\sharp_{3\smallsetminus 2}}(H_0(tmnk)-H_P(tm))}.$$

Fixons donc m, n, et k comme ci-dessus. Soit $t \in T_{|\mathcal{J}_{12}|\cup(I\smallsetminus I_0)}(\mathbb{A})$ tel que

$$\mathbb{1}_{\mathcal{J}_1}(H_0(tmnk))\mathbb{1}_{\mathcal{J}^\sharp_2}(H_0(tmnk)) = 1.$$

Notons t_1 (resp. t_2) sa projection à $T_{|\mathcal{J}_1|}(\mathbb{A})$ (resp. $T_{|\mathcal{J}_2|}(\mathbb{A})$). En utilisant la propriété (6.19) ainsi que le lemme 6.19, on voit qu'il existe des constantes $c', c'', r'_1, r_1 > 0$ telles que pour tout $\mathrm{Re}(\lambda) \in C$ on a

$$\begin{aligned}|e^{\lambda(H_0(tmn))+\rho_{\mathcal{J}_2}(H_P(tm))}| &= |e^{\lambda(H_0(t_1t_2mn))+\rho_{\mathcal{J}_2}(H_P(t_1t_2m))}|\\ &\leq c'\|n\|^{r'_1}\|m\|^{r'_1}\|t_1\|^{r'_1}\|t_2\|^{r'_1}\\ &\leq \|t_1^{-1}1_{\mathcal{J}_1}\|^{r_1}\|t_2^{-1}1_{\mathcal{J}^\sharp_2}\|^{r_1}\\ &= c''\|n\|^{r_1}\|m\|^{r_1}\|t^{-1}1_{\mathcal{J}_1}\|^{r_1}\|t^{-1}1_{\mathcal{J}^\sharp_2}\|^{r_1}.\end{aligned}$$

En utilisant (6.19), vu que la fonction $M_{I_1}(\mathbb{A}) \ni m \mapsto e^{\rho_{\mathcal{J}^\sharp_{3\smallsetminus 2}}(H_0(tmnk)-H_P(tm))}$ est $T_I(\mathbb{A})$-invariante à gauche, on trouve $c'', r_2 > 0$ telles que

$$e^{\rho_{\mathcal{J}^\sharp_{3\smallsetminus 2}}(H_0(tmnk)-H_P(tm))} \leq c''\|n\|^{r_2}\inf_{t\in T_I(\mathbb{A})}\|tm\|^{r_2}.$$

Remarquons qu'il existe $c_4 > 0$ tel que pour $\mathcal{I} = \mathcal{J}_1, \mathcal{J}^\sharp_2$ on a

$$\|t^{-1}1_{\mathcal{I}}\| \leq c_4\|m\|\|n\|\|(tmnk)^{-1}1_{\mathcal{I}}\|, \quad \|(tm)^{-1}1_{\mathcal{I}}\|^{-1} \leq c_4\|n\|\|(tmnk)^{-1}1_{\mathcal{I}}\|^{-1}.$$

En plus $\|(tm)^{-1}\xi_\varnothing\| \leq c_2\|m\|\|t^{-1}\xi_\varnothing\|$. Donc en prenant r suffisamment grand pour qu'on puisse appliquer les lemmes 6.20 et 6.21, on voit que l'intégrale sur le tore dans (6.21) est majorée par $\|n\|^{r_3}\|m\|^{r_3}\inf_{t\in T_I(\mathbb{A})}\|tm\|^{r_4}$ pour certaines constantes positives r_3, r_4, r_5. Puisqu'elle est $T_I(\mathbb{A})$-invariante à gauche, en tant qu'une fonction de m, on voit qu'elle est simplement majorée par $\|n\|^{r_3}\inf_{t\in T_I(\mathbb{A})}\|tm\|^{r_3+r_4}$.

On vient de se ramener à majorer l'intégrale suivante :

$$\int_{T_I(\mathbb{A})\backslash M_{I_1}(\mathbb{A})}\int_{N_P(\mathbb{A})}\Phi(\mathrm{Ad}((mn)^{-1})B)\|n\|^{r'}\inf_{t\in T_I(\mathbb{A})}\|tm\|^{r''}\,dndm \tag{6.22}$$

pour certaines constantes positives $r', r'' > 0$.

Quitte à majorer Φ, on peut supposer que $\Phi = \otimes_v \Phi_v$ où Φ_v est une fonction dans la classe de Schwartz sur $\mathfrak{u}(\mathrm{F}_v)$ si $v \in S_\infty$ et Φ_v est une fonction caractéristique d'un compact ouvert $\mathfrak{k}_v$ dans $\mathfrak{u}(\mathrm{F}_v)$ si v est une place finie. On fixe un ensemble fini de places S qui contient l'ensemble S_∞ et qui vérifie en plus pour toute place $v \notin S$

(1) pour tout $k_v \in K_v$, $\mathrm{Ad}(k_v)B \in \mathfrak{k}_v$,
(2) pour tout $x_v \in U(F_v)$ tel que $\mathrm{Ad}(x_v^{-1})B \in \mathfrak{k}_v$ on a $x_v \in T_I(\mathrm{F}_v)K_v$.

C'est possible, comme il est expliqué dans [5, paragraphe 5.2].

L'intégrale (6.22) est alors majorée par le produit sur $v \in S$ de

$$\int_{T_I(\mathrm{F}_v)\backslash M_{I_1}(\mathrm{F}_v)}\int_{N_P(\mathrm{F}_v)}\Phi_v(\mathrm{Ad}((m_vn_v)^{-1})B)|n_v|_v^{r'}\inf_{t_v\in T_I(\mathrm{F}_v)}|t_vm_v|_v^{r''}\,dn_vdm_v$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2015-054-9 Published online by Cambridge University Press

ce qui converge si $v \in S \smallsetminus S_\infty$, car toutes les intégrales sont sur des ensembles compacts. Si $v \in S_\infty$, cette intégrale égale

$$\int_{T_I(\mathrm{F}_v)\backslash M_{I_1}(\mathrm{F}_v)} \int_{\mathfrak{n}_P(\mathrm{F}_v)} \Phi_v(\mathrm{Ad}(m_v^{-1})B + U_{P,v})|n_v|_v^{r'} \inf_{t_v \in T_I(\mathrm{F}_v)} |t_v m_v|_v^{r''}\, dU_{P,v}\, dm_v,$$

où $\mathrm{Ad}(n_v^{-1})\,\mathrm{Ad}(m_v^{-1})B = \mathrm{Ad}(m_v^{-1})B + U_{P,v}$. Comme on l'a remarqué dans la preuve du lemme 6.22, il résulte de [5, lemme 2.1] qu'il existe des constantes N_1, N_2 telles que $|n_v|_v \le (1 + |\,\mathrm{Ad}(m_v^{-1})B|_v)^{N_1}(1 + |U_{P,v}|_v)^{N_2}$. En utilisant le lemme 6.22, ainsi que le fait que Φ_v est dans la classe de Schwartz, on se ramène a majorer

$$\int_{T_I(\mathrm{F}_v)\backslash M_{I_1}(\mathrm{F}_v)} (1 + |\,\mathrm{Ad}(m_v^{-1})B|_v)^{-N'}\, dm_v \int_{\mathfrak{n}_P(\mathrm{F}_v)} (1 + |U_{P,v}|_v)^{-N''}\, dU_{P,v}$$

pour N', N'' arbitrairement grands. Il est clair que pour N'' suffisamment grand la deuxième intégrale est convergente. La première converge pour N' suffisamment grand en vertu de [16, théorème I.3.9]. ∎

Il nous reste à justifier la convergence de l'expression (6.8).

Lemme 6.24 *Soient $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subseteq_\epsilon I_0$ tels que $|\mathcal{I}| \cap |\mathcal{J}| = \varnothing$. Alors pour tout $x \in U(\mathbb{A})$ on a*

$$\sum_{\delta \in U(X_{\mathcal{I}},\mathrm{F})\backslash U(\mathrm{F})} |\hat{f}^{\mathcal{J}}_{\delta x}(X_{\mathcal{I}})| < \infty.$$

Démonstration Soit $P \in \mathcal{P}(M_{I_1})$ un sous-groupe parabolique stabilisant le drapeau $\mathcal{F}_{\mathcal{J}} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{J}\cup\mathcal{I}}$. En raisonnant comme dans le lemme 6.23 et en utilisant la notation de ce lemme, on trouve des fonctions $\Phi \in \mathcal{S}(\mathfrak{u}(\mathbb{A}))$ et $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_{I\smallsetminus|\mathcal{J}|})$ telles que pour tout $p \in P(\mathbb{A})$ et $k \in K$ on a

$$|\hat{f}^{\mathcal{J}}_{pk}(X_{\mathcal{I}})| \le e^{\rho_{\mathcal{J}}(H_P(p))}|\Phi(\mathrm{Ad}((pk)^{-1})B)\phi((1 - 1_{\mathcal{J}})p^{-1}(1_{\mathcal{I}} + \xi_\varnothing))|.$$

On suppose que $\Phi = \otimes_v \Phi_v$ (resp. $\phi = \otimes_v \phi_v$) où Φ_v (resp. ϕ_v) est une fonction dans la classe de Schwartz dans $\mathfrak{u}(\mathrm{F}_v)$ (resp. $\mathrm{F}_{I\smallsetminus|\mathcal{J}|} \otimes_{\mathrm{F}} \mathrm{F}_v$) si $v \in \mathcal{S}_\infty$ et Φ_v (resp. ϕ_v) est une fonction caractéristique d'un compact ouvert $\mathfrak{k}_v$ dans $\mathfrak{u}(\mathrm{F}_v)$ (resp. $\mathfrak{l}_v$ dans $\mathrm{F}_{I\smallsetminus|\mathcal{J}|}\otimes_{\mathrm{F}} \mathrm{F}_v$) si v est une place finie de F. Soit S l'ensemble des places de F vérifiant les conditions (1) et (2) données dans la preuve du lemme 6.23.

Soit $\|\cdot\|_\infty$, la norme sur $\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}_\infty)$ fixée dans le paragraphe 2.6. On prétend qu'il existe des constantes $n, c > 0$ telles que pour tout $\delta \in U(\mathrm{F})$ on a

$$\sum_{\eta \in T_{I_2\smallsetminus|\mathcal{I}|}(\mathrm{F})\backslash T_I(\mathrm{F})} |\hat{f}^{\mathcal{J}}_{\delta\eta}(X_{\mathcal{I}})| \le c\|\,\mathrm{Ad}(\delta^{-1})B\|_\infty^n |\Phi(\mathrm{Ad}(\delta^{-1})B)|. \tag{6.23}$$

Or soit $\delta \in U(\mathrm{F})$. Si $\Phi(\mathrm{Ad}(\delta^{-1})B) = 0$, le résultat est évident. Sinon, puisque multiplication à gauche de δ par un élément de $T_I(\mathrm{F})$ ne change pas l'inégalité (6.23) en utilisant la définition de l'ensemble S, on peut supposer que $\delta_v \in K_v$ pour tout $v \notin S$, où $\delta = \prod_v \delta_v$. Décomposons δ selon la décomposition d'Iwasawa $\delta = pk$, où $p = \prod_v p_v \in P(\mathbb{A})$ et $k = \prod_v k_v \in K$. On a

$$\sum_{\eta \in T_{I_2\smallsetminus|\mathcal{I}|}(\mathrm{F})\backslash T_I(\mathrm{F})} |\hat{f}^{\mathcal{J}}_{\delta\eta}(X_{\mathcal{I}})| \le e^{\rho_{\mathcal{J}}(H_P(p))}|\Phi(\mathrm{Ad}(\delta^{-1})B)|\Big(\sum_{\xi \in \mathrm{F}_{I\smallsetminus|\mathcal{J}|}} |\phi((1 - 1_{\mathcal{J}})p^{-1}\xi)|\Big).$$

Soit $\mathcal{R} \subseteq \mathrm{F}_{I\smallsetminus|\mathcal{J}|}$ un $\mathbb{Z}$-réseau tel que pour tout $\xi \in \mathrm{F}_{I\smallsetminus|\mathcal{J}|}$, si $\phi(\xi) \ne 0$, alors $\xi \in \mathcal{R}$ (voir la preuve du théorème 3.2). Soit aussi $m > 0$ tel que $\sum_{\xi\in\mathcal{R}} \|\xi\|^{-m} < \infty$. Il existe un

https://doi.org/10.4153/CJM-2015-054-9 Published online by Cambridge University Press

$m_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $\xi \in \mathrm{F}_{I \smallsetminus |\mathcal{J}|}$, si $\phi((1-1_{\mathcal{J}})p^{-1}\xi) \neq 0$, on a $\xi \in m_0^{-1}\mathcal{R}$. Tout diviseur premier de m_0, vu comme une place finie de $\mathbb{Q}$, divise un élément de $S \smallsetminus S_\infty$ car p_v est l'identité pour $v \notin S$. Donc puisque $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_{\mathfrak{J} \smallsetminus |\mathcal{J}|})$, il existe des constantes positives c_0, c_1, et r qui ne dépendent que de ϕ et S telles que

$$\sum_{\xi \in \mathrm{F}_{I \smallsetminus |\mathcal{J}|}} |\phi((1-1_{\mathcal{J}})p^{-1}\xi)| \leq c_0 \sum_{\xi \in m_0^{-1}\mathcal{R}} \|p_\infty^{-1}\xi\|^{-m} \leq c_1 \Big(\prod_{v \in S} |p_v|_v^r\Big) \sum_{\xi \in \mathcal{R}} \|\xi\|^{-m},$$

où $p_\infty = \prod_{v \in S_\infty} p_v \in P(\mathbb{A}_\infty)$. Si on remplace p par ηp où $\eta \in T_I(\mathrm{F})$ est tel que $\eta_v \mathfrak{l}_v \supseteq \mathfrak{l}_v$ pour $v \notin S$, rien ne change ci-dessus, sauf peut être l'entier m_0. Quitte à élargir S, des tels η sont denses dans $\prod_{v \in S} T_I(\mathrm{F}_v)$ et on trouve, en passant par le lemme 6.22 que

$$\sum_{\xi \in \mathrm{F}_{I \smallsetminus |\mathcal{J}|}} |\phi((1-1_{\mathcal{J}})p^{-1}\xi)| \leq c_2 \Big(\prod_{v \in S} \inf_{t_v \in T_I(\mathrm{F}_v)} |t_v p_v|_v^r\Big) \leq c_3 \prod_{v \in S} (1 + |\operatorname{Ad}(\delta_v^{-1})B|_v)^{rN_B}$$

pour certains $c_2, c_3 > 0$ indépendantes de δ. Puisque on suppose $\Phi(\operatorname{Ad}(\delta^{-1})B) \neq 0$, il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de Φ telle que

$$\prod_{v \in S \smallsetminus S_\infty} (1 + |\operatorname{Ad}(\delta_v^{-1}B)|_v)^{rN_B} < C.$$

Pour la même raison, toujours en passant par le lemme 6.22, il existe des constantes $C', r' > 0$ telles que $e^{\rho_{\mathcal{J}}(H_P(p))} \leq C' \|\operatorname{Ad}(\delta^{-1}B)\|_\infty^{r'}$. Il est clair alors qu'on a (6.23). On vient de montrer que la somme dans l'énoncé est majorée par la somme

$$\sum_{\delta \in U(B,\mathrm{F}) \backslash U(\mathrm{F})} \|\operatorname{Ad}(\delta^{-1})B\|_\infty^n |\Phi(\operatorname{Ad}(\delta^{-1})B)|$$

pour un $n > 0$, ce qui converge. ∎

6.8 Résultats d'holomorphie

Pour $I' \subseteq I_0$ notons $c_{I'}$ le volume de $T_{I'}(\mathrm{F}) \backslash T_{I'}(\mathbb{A})^1$ et $\nu_{I'}$ le volume dans $\mathfrak{a}_{I'}$ du parallélotope déterminé par les vecteurs $\{e_i^\vee\}_{i \in \mathfrak{J}}$ où $\mathfrak{J} \subseteq_\epsilon I'$ est tel que $|\mathfrak{J}| = I'$. Cela ne dépend pas du choix de $\mathfrak{J}$.

Lemme 6.25 *Soit $\mathfrak{J} \subseteq_\epsilon I_0$. Alors pour tout $x \in U(\mathbb{A})$, l'intégrale*

$$\int_{T_{|\mathfrak{J}|}(\mathrm{F}) \backslash T_{|\mathfrak{J}|}(\mathbb{A})} \mathbb{1}_{\mathfrak{J}}(H_0(tx)) e^{\lambda(H_0(tx))}\, dt, \qquad \lambda \in \mathfrak{a}^*_{|\mathfrak{J}|,\mathbb{C}}$$

converge absolument et uniformément sur tous les compacts de $\operatorname{Re}(\lambda) \in \mathfrak{a}^*_{\mathfrak{J}}$. *Elle admet un prolongement méromorphe, noté $\eta_{\mathfrak{J}}$, égale à $\eta_{\mathfrak{J}}(\lambda) = c_{|\mathfrak{J}|}\nu_{|\mathfrak{J}|} \prod_{j \in \mathfrak{J}} \lambda(e_j^\vee)^{-1}$. En particulier, $\eta_{\mathfrak{J}}$ ne dépend pas de $x \in U(\mathbb{A})$.*

Démonstration Calcul direct. ∎

Soient $\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{J}_3 \subseteq_\epsilon I_0$ et $\mathcal{J}_1 \subseteq_\epsilon I_0$ tels que $|\mathcal{J}_1| \cap |\mathcal{J}_3| = \varnothing$. Notons $\Upsilon_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2,\mathcal{J}_3}(f)$ la fonction holomorphe sur $\mathfrak{a}^*_{|\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2|,\mathbb{C}}$ définie par l'intégrale considérée dans le lemme 6.23.

https://doi.org/10.4153/CJM-2015-054-9 Published online by Cambridge University Press

Lemme 6.26 *Soient $\mathcal{J}, \mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3 \subseteq_\epsilon I_0$ tels que $\mathcal{J}_1 \sqcup \mathcal{J}_3 \subseteq \mathcal{J}$ et $\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{J}_3$. L'intégrale suivante*

$$\int_{T_{(I_2 \smallsetminus I_0)\cup|\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12}|}(\mathrm{F})T_{I_0\smallsetminus|\mathcal{J}|}(\mathbb{A})\backslash U(\mathbb{A})} \mathbb{1}_{\mathcal{J}_1\cup(\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_1)^\sharp}(H_0(x))e^{\lambda(H_0(x))}\hat{f}_x^{\mathcal{J}_3}(X_{\mathcal{J}_1\cup\mathcal{J}_2^\sharp})\,dx,$$

pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{|\mathcal{J}|,\mathbb{C}}$, converge absolument et uniformément sur tous les compacts de

$$\mathrm{Re}(\lambda) \in \mathfrak{a}^*_{|\mathcal{J}_1\cup\mathcal{J}_2|} \times (\rho_{\mathcal{J}^\sharp_{3\smallsetminus 2}} + \mathfrak{a}^*_{(\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12})^\sharp})$$

et elle admet un prolongement méromorphe à $\mathfrak{a}^*_{|\mathcal{J}|,\mathbb{C}}$, noté $\Lambda^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2,\mathcal{J}_3}(f)$, qui vérifie

$$\Lambda^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2,\mathcal{J}_3}(f)(\lambda) = \eta_{\mathcal{J}^\sharp_{3\smallsetminus 2}}(\lambda_{|\mathcal{J}_{3\smallsetminus 2}|} + \rho_{\mathcal{J}_{3\smallsetminus 2}})\eta_{(\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{13})^\sharp}(\lambda_{|\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{13}|})\Upsilon_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2,\mathcal{J}_3}(f)(\lambda_{|\mathcal{J}_{12}|}).$$

Démonstration On intègre d'abord sur $T_{|\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12}|}(\mathrm{F})\backslash T_{|\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12}|}(\mathbb{A})$ ce qui donne

$$\int_{[T_{|\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12}|}]} \mathbb{1}_{(\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12})^\sharp}(H_0(tx))e^{(\lambda_{|\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12}|}+\rho_{\mathcal{J}_{3\smallsetminus 2}})(H_0(tx))}dt$$

ce qui converge, en vertu du lemme 6.25, pour $\mathrm{Re}(\lambda_{|\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12}|}) \in (\rho_{\mathcal{J}^\sharp_{3\smallsetminus 2}} + \mathfrak{a}^*_{(\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12})^\sharp})$ et admet un prolongement méromorphe égale à $\eta_{(\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12})^\sharp}(\lambda_{|\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12}|} + \rho_{\mathcal{J}_{3\smallsetminus 2}})$.

L'intégrale qui reste à calculer c'est précisément l'intégrale considérée dans le lemme 6.23, c'est-à-dire $\Upsilon_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2,\mathcal{J}_3}(f)(\lambda_{|\mathcal{J}_{12}|})$, d'où la convergence voulue. Finalement, on a $\eta_{(\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12})^\sharp}(\lambda_{|\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12}|}+\rho_{\mathcal{J}_{3\smallsetminus 2}}) = \eta_{\mathcal{J}^\sharp_{3\smallsetminus 2}}(\lambda_{|\mathcal{J}_{3\smallsetminus 2}|}+\rho_{\mathcal{J}_{3\smallsetminus 2}})\eta_{(\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{13})^\sharp}(\lambda_{|\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{13}|})$ d'où le résultat. ■

En vertu du lemme 6.26, si $\mathcal{J}_3 = \mathcal{J} \smallsetminus \mathcal{J}_1$, la fonction $\Lambda^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2,\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_1}(f)$ est holomorphe en $\lambda = 0$ et on la note simplement $\Lambda^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2}(f)$. Dans ce cas il y a une autre représentation intégrale de $\Lambda^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2}(f)$ convergente sur un ouvert qui contient zéro.

Lemme 6.27 *Soient $\mathcal{J}, \mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2 \subseteq_\epsilon I_0$ tels que $\mathcal{J}_1 \sqcup \mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{J}$. L'intégrale suivante*

$$\int_{T_{(I_2\smallsetminus I_0)\cup|\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12}|}(\mathrm{F})T_{I_0\smallsetminus|\mathcal{J}|}(\mathbb{A})\backslash U(\mathbb{A})} \mathbb{1}_{(\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_2)\cup\mathcal{J}_2^\sharp}(H_0(x))e^{\lambda(H_0(x))}\hat{f}_x^{\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_1}(X_{\mathcal{J}_1\cup\mathcal{J}_2^\sharp})dx,$$

pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{|\mathcal{J}|,\mathbb{C}}$, converge absolument et uniformément sur tous les compacts de

$$\mathrm{Re}(\lambda) \in \mathfrak{a}^*_{|\mathcal{J}_1\cup\mathcal{J}_2|} \times (\rho_{(\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12})^\sharp} + \mathfrak{a}^*_{\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12}}).$$

En particulier, elle converge pour $\lambda = 0$. L'intégrale, en tant qu'une fonction de variable λ, admet un prolongement méromorphe à $\mathfrak{a}^*_{|\mathcal{J}|,\mathbb{C}}$, noté $\overline{\Lambda}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2}(f)$, qui vérifie

$$\overline{\Lambda}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2}(f)(\lambda) = \eta_{\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12}}(\lambda_{|\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12}|} + \rho_{\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12}})\Upsilon_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2,\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_1}(f)(\lambda_{|\mathcal{J}_{12}|}),$$
$$\overline{\Lambda}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2}(f)(\lambda) = (-1)^{\#(\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12})}\Lambda^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2}(f)(\lambda).$$

Démonstration Toutes les assertions, sauf la dernière, se démontrent de même façon que dans le lemme 6.26 et la dernière découle du fait que $\eta_{\mathcal{I}} = (-1)^{\#\mathcal{I}}\eta_{\mathcal{I}^\sharp}$ pour tout $\mathcal{I} \subseteq_\epsilon I_0$. ■

Proposition 6.28 *Soit $\mathcal{J} \subseteq_\epsilon I_0$. Alors l'intégrale*

$$\mathrm{vol}(T_{I_2\smallsetminus I_0}(\mathrm{F})\backslash T_{I_2\smallsetminus I_0}(\mathbb{A}))\int_{U(\mathbb{A},X_{\mathcal{J}})\backslash U(\mathbb{A})} f(x^{-1}X_{\mathcal{J}}x)e^{\lambda(H_0(x))}\,dx, \quad \lambda \in \mathfrak{a}^*_{|\mathcal{J}|,\mathbb{C}}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2015-054-9 Published online by Cambridge University Press

converge absolument et uniformément sur tous les compacts de $\mathrm{Re}(\lambda) \in \rho_{\mathcal{J}^\sharp} + \mathfrak{a}^*_{\mathcal{J}^\sharp}$ *et admet un prolongement méromorphe à* $\mathfrak{a}^*_{|\mathcal{J}|,\mathbb{C}}$*, noté* $\zeta_{\mathcal{J}}(f)$*, qui vérifie*

$$\zeta_{\mathcal{J}}(f) = \sum_{\mathcal{J}_1 \sqcup \mathcal{J}_3 \subseteq \mathcal{J}} (-1)^{\#(\mathcal{J} \smallsetminus \mathcal{J}_{13})} \sum_{\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{J}_3} \Lambda^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2,\mathcal{J}_3}(f).$$

Démonstration Remarquons d'abord que l'intégrale considérée dans la proposition c'est juste $\int_{T_{I_2 \smallsetminus I_0}(\mathrm{F}) T_{I_0 \smallsetminus |\mathcal{J}|}(\mathbb{A}) \backslash U(\mathbb{A})} f_x(X_{\mathcal{J}}) e^{\lambda(H_0(x))}\, dx$. Pour tout $\mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{J}$ et tout $x \in U(\mathbb{A})$, en utilisant l'égalité (6.10), on a

$$\sum_{\eta \in T_{|\mathcal{J}|}(\mathrm{F})} f_{\eta x}(X_{\mathcal{J}}) = \sum_{\mathcal{J}_3 \subseteq \mathcal{J} \smallsetminus \mathcal{J}_1} (-1)^{\#(\mathcal{J} \smallsetminus \mathcal{J}_{13})} \sum_{\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{J}_3} \sum_{\eta \in T_{|\mathcal{J}_{12}|}(\mathrm{F})} \hat{f}^{\mathcal{J}_3}_{\eta x}(X_{\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2^\sharp}). \tag{6.24}$$

Remarquons aussi que pour tout $\mathcal{I} \subseteq_\epsilon I_0$ tel que $|\mathcal{I}| = |\mathcal{J}|$ et tout $\eta \in T_{|\mathcal{J}|}(\mathrm{F})$ on a $\mathbb{1}_{\mathcal{I}}(H_0(\eta x)) = \mathbb{1}_{\mathcal{I}}(H_0(x))$. En utilisant ceci, l'égalité (6.24), ainsi que l'égalité (6.3), on trouve

$$\begin{aligned}\sum_{\eta \in T_{|\mathcal{J}|}(\mathrm{F})} f_{\eta x}(X_{\mathcal{J}}) &= \sum_{\mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{J}} \sum_{\eta \in T_{|\mathcal{J}|}(\mathrm{F})} f_{\eta x}(X_{\mathcal{J}}) \mathbb{1}_{\mathcal{J}_1 \cup (\mathcal{J} \smallsetminus \mathcal{J}_1)^\sharp}(H_0(\eta x)) \\ &= \sum_{\mathcal{J}_1 \sqcup \mathcal{J}_3 \subseteq \mathcal{J}} (-1)^{\#(\mathcal{J} \smallsetminus \mathcal{J}_{13})} \sum_{\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{J}_3} \sum_{\eta \in T_{|\mathcal{J}_{12}|}(\mathrm{F})} \hat{f}^{\mathcal{J}_3}_{\eta x}(X_{\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2^\sharp}) \mathbb{1}_{\mathcal{J}_1 \cup (\mathcal{J} \smallsetminus \mathcal{J}_1)^\sharp}(H_0(\eta x)).\end{aligned} \tag{6.25}$$

Soit $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{|\mathcal{J}|,\mathbb{C}}$. Pour tout $\eta \in T_{|\mathcal{J}|}(\mathrm{F})$ on a $\lambda(H_0(\eta x)) = \lambda(H_0(x))$. On multiplie alors l'égalité (6.25) par $e^{\lambda(H_0(x))}$ et, en utilisant le lemme 6.26, on voit qu'on peut intégrer le terme correspondant aux $\mathcal{J}_1 \sqcup \mathcal{J}_3 \subseteq \mathcal{J}$ et $\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{J}_3$ sur

$$T_{(I_2 \smallsetminus I_0) \cup |\mathcal{J}|}(\mathrm{F}) T_{I_0 \smallsetminus |\mathcal{J}|}(\mathbb{A}) \backslash U(\mathbb{A})$$

pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{|\mathcal{J}|,\mathbb{C}}$ tels que $\mathrm{Re}(\lambda)$ appartient à $\mathfrak{a}^*_{|\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2|} \times (\rho_{\mathcal{J}^\sharp_{3\smallsetminus 2}} + \mathfrak{a}^*_{(\mathcal{J} \smallsetminus \mathcal{J}_{12})^\sharp}) \supseteq \rho_{\mathcal{J}^\sharp} + \mathfrak{a}^*_{\mathcal{J}^\sharp}$. Tout est alors intégrable sur $\mathrm{Re}(\lambda) \in \rho_{\mathcal{J}^\sharp} + \mathfrak{a}^*_{\mathcal{J}^\sharp}$ et on obtient le résultat voulu en invoquant de nouveau le lemme 6.26. ∎

Lemme 6.29 *Pour tout* $I' \subseteq I_0$ *on a l'égalité de fonctions méromorphes sur* $\mathfrak{a}^*_{I',\mathbb{C}}$ *:*

$$\sum_{|\mathcal{J}|=I'} \zeta_{\mathcal{J}}(f)(\lambda) = \sum_{|\mathcal{J}|=I'} \sum_{\mathcal{J}_1 \sqcup \mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{J}} (-1)^{\#(\mathcal{J} \smallsetminus \mathcal{J}_{12})} \overline{\Lambda}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2}(f)(\lambda).$$

En particulier, en vertu du lemme 6.27, l'expression ci-dessus est holomorphe en $\lambda = 0$.

Démonstration En utilisant la proposition 6.28 on a que pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{I',\mathbb{C}}$ la somme $\sum_{|\mathcal{J}|=I'} \zeta_{\mathcal{J}}(f)(\lambda)$ égale

$$\begin{aligned}\sum_{|\mathcal{J}|=I'} \sum_{\mathcal{J}_1 \sqcup \mathcal{J}_3 \subseteq \mathcal{J}} (-1)^{\#(\mathcal{J} \smallsetminus \mathcal{J}_{13})} \sum_{\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{J}_3} \Lambda^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2,\mathcal{J}_3}(f)(\lambda) &= \sum_{\mathcal{J}_1 \sqcup \mathcal{J}_3 \subseteq_\epsilon I'} (-1)^{\#(I' \smallsetminus |\mathcal{J}_{13}|)} \\ \sum_{\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{J}_3} \eta_{\mathcal{J}^\sharp_{3\smallsetminus 2}}(\lambda_{|\mathcal{J}_{3\smallsetminus 2}|} + \rho_{\mathcal{J}_{3\smallsetminus 2}}) \Upsilon_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2,\mathcal{J}_3}(f)(\lambda_{|\mathcal{J}_{12}|}) &\sum_{|\mathcal{J}_4| = I' \smallsetminus |\mathcal{J}_{13}|} \eta_{\mathcal{J}_4}(\lambda_{|\mathcal{J}_4|})\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le lemme 6.26 pour faire apparaître les fonctions η.

On prétend que

$$\sum_{|\mathcal{J}_4| = I' \smallsetminus |\mathcal{J}_{13}|} \eta_{\mathcal{J}_4}(\lambda_{|\mathcal{J}_4|}) \equiv 0, \qquad \text{si } I' \smallsetminus |\mathcal{J}_{13}| \neq \emptyset. \tag{6.26}$$

En effet, il résulte du lemme 6.25 que si $\mathfrak{I}_1 \sqcup \mathfrak{I}_2 \subseteq_\epsilon I'$, alors $\eta_{\mathfrak{I}_1 \sqcup \mathfrak{I}_2} = (-1)^{\#\mathfrak{I}_2} \eta_{\mathfrak{I}_1 \sqcup \mathfrak{I}_2^\sharp}$. On voit que (6.26) revient à montrer que $\sum_{S \subseteq I' \smallsetminus |\mathcal{J}_{13}|} (-1)^{\#S} = 0$ si $I' \smallsetminus |\mathcal{J}_{13}| \neq \emptyset$ ce qui est juste l'identité (3.6).

On obtient donc $\sum_{|\mathcal{J}| = I'} \zeta_{\mathcal{J}}(f) = \sum_{|\mathcal{J}| = I'} \sum_{\mathcal{J}_1 \sqcup \mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{J}} \Lambda^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2}(f)$ et le résultat suit du lemme 6.27. ■

Remerciements Je remercie chaleureusement mon directeur de thèse Pierre-Henri Chaudouard pour ses multiples conseils. Je remercie aussi Atsushi Ichino et Shunsuke Yamana pour la possibilité de consulter leur article [9] avant qu'il ne soit publié. Merci à Jacek Jendrej pour son aide dans la preuve du lemme 6.7. Je remercie finalement le rapporteur pour sa lecture attentive.

Références

[1] J. Arthur, *The trace formula in invariant form.* Ann. of Math. (2) **114**(1981), no. 1, 1–74. http://dx.doi.org/10.2307/1971376

[2] ———, *A trace formula for reductive groups. I. Terms associated to classes in $G(\mathbf{Q})$.* Duke Math. J. **45**(1978), no. 4, 911–952. http://dx.doi.org/10.1215/S0012-7094-78-04542-8

[3] ———, *A local trace formula.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1991), no. 73, 5–96.

[4] P-H. Chaudouard, *La formule des traces pour les algèbres de Lie.* Math. Ann. **322**(2002), no. 2, 347–382. http://dx.doi.org/10.1007/s002080100274

[5] ———, *Intégrales orbitales pondérées sur les algèbres de Lie : le cas p-adique.* Canad. J. Math. **54**(2002), no. 2, 263–302. http://dx.doi.org/10.4153/CJM-2002-009-6

[6] W. T. Gan, B. H. Gross, and D. Prasad, *Symplectic local root numbers, central critical L values, and restriction problems in the representation theory of classical groups.* Astérisque (2012), no. 346, 1–109.

[7] R. N. Harris, *The refined Gross-Prasad conjecture for unitary groups.* Int. Math. Res. Not. IMRN (2014), no. 2, 303–389.

[8] A. Ichino and T. Ikeda, *On the periods of automorphic forms on special orthogonal groups and the Gross-Prasad conjecture.* Geom. Funct. Anal. **19**(2010), no. 5, 1378–1425. http://dx.doi.org/10.1007/s00039-009-0040-4

[9] A. Ichino and S. Yamana, *Periods of automorphic form : the case of* $(\mathrm{U}_{n+1} \times \mathrm{U}_n, \mathrm{U}_n)$. Prépublication. (2015).

[10] H. Jacquet, E. Lapid, and J. Rogawski, *Periods of automorphic forms.* J. Amer. Math. Soc. **12**(1999), no. 1, 173–240. http://dx.doi.org/10.1090/S0894-0347-99-00279-9

[11] H. Jacquet and S. Rallis, *On the Gross-Prasad conjecture for unitary groups.* In : On certain L-functions, Clay Math. Proc., Amer. Math. Soc., 2011, pp. 205–265.

[12] M. A. Knus, A. Merkurjev, M. Rost, and J.-P. Tignol, *The book of involutions.* American Mathematical Society Colloquium Publications **44**, With a preface in French by J. Tits, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[13] J. Levy, *A truncated integral of the Poisson summation formula.* Can. J. Math. **53**(2001), no. 1, 122–160.Preprint arXiv http://dx.doi.org/10.4153/CJM-2001-006-1

[14] J.-P. Labesse and J.-L. Waldspurger, *La formule des traces tordue d'après le Friday Morning Seminar.* CRM Monograph Series 31. American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.

[15] S. Rallis and G. Schiffmann, *Multiplicity one conjectures.* arxiv:0705.21268(2008)

[16] V. S. Varadarajan, *Harmonic analysis on real reductive groups.* Lecture Notes in Mathematics 576, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.

[17] J.-L. Waldspurger, *Le lemme fondamental implique le transfert.* Compositio Math. (1997), no. 2, 153–236. http://dx.doi.org/10.1023/A:1000103112268

[18] W. Zhang, *Fourier transform and the global Gan-Gross-Prasad conjecture for unitary groups.* Ann. of Math. (2) **180**(2014), no. 3, 971–1049. http://dx.doi.org/10.4007/annals.2014.180.3.4

[19] W. Zhang, *Automorphic period and the central value of Rankin-Selberg L-function.* J. Amer. Math. Soc. **27**(2014), no. 2, 541–612. http://dx.doi.org/10.1090/S0894-0347-2014-00784-0

[20] M. Zydor, *La variante infinitésimale de la formule des traces de Jacquet-Rallis pour les groupes linéaires.* arxiv:1310.1650(2015)

[21] ———, Les formules des traces relatives de Jacquet-Rallis grossières. arxiv:1510.04301(2015)

Université Paris Diderot, Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche, UMR7586, Bâtiment Sophie Germain, Case 7012, 75205 PARIS Cedex 13, France
courriel: michalz@weizmann.ac.il