



# Une propriété de domination convexe pour les orbites sturmiennes

Thierry Bousch

*Abstract.* Let  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots)$  be a  $N$ -periodic sequence of integers ( $N \geq 1$ ), and  $\mathbf{s}$  a sturmian sequence with the same barycenter (and also  $N$ -periodic, consequently). It is shown that, for affine functions  $\alpha: \mathbb{R}_{(N)}^N \rightarrow \mathbb{R}$  which are increasing relatively to some order  $\leq_2$  on  $\mathbb{R}_{(N)}^N$  (the space of all  $N$ -periodic sequences), the average of  $|\alpha|$  on the orbit of  $\mathbf{x}$  is greater than its average on the orbit of  $\mathbf{s}$ .

*Résumé.* Soit  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots)$  une suite  $N$ -périodique d'entiers ( $N \geq 1$ ), et  $\mathbf{s}$  une suite sturmiennne de même barycentre (et donc également  $N$ -périodique). On montre que, pour les fonctions affines  $\alpha: \mathbb{R}_{(N)}^N \rightarrow \mathbb{R}$  qui sont croissantes relativement à un certain ordre  $\leq_2$  sur  $\mathbb{R}_{(N)}^N$  (l'espace de toutes les suites  $N$ -périodiques), la moyenne de  $|\alpha|$  sur l'orbite de  $\mathbf{x}$  est plus grande que sa moyenne sur l'orbite de  $\mathbf{s}$ .

## 1 Énoncé du théorème

**Ordres sur  $\mathbb{R}^N$ .** Soit  $\mathbb{R}^N$  l'ensemble de toutes les suites (unilatères) de réels. On note  $\triangleleft$  l'opération de décalage vers la gauche, et  $\mathbb{R}_{(N)}^N$  le sous-espace constitué des suites  $N$ -périodiques, c.à.d. telles que  $\triangleleft^N \mathbf{x} = \mathbf{x}$ ; c'est un espace vectoriel de dimension  $N$ . On note  $\mathbb{R}_{\text{per}}^N = \bigcup_{N \geq 1} \mathbb{R}_{(N)}^N$  l'ensemble de toutes les suites périodiques. Enfin, on note  $\mathbf{1}$  la suite constante  $(1, 1, \dots)$ .

Outre l'ordre produit sur  $\mathbb{R}^N$ , il y a deux autres relations d'ordre sur  $\mathbb{R}^N$ , invariantes par translation, qui sont importantes pour le problème donné. Notons  $\pi_n$  les projections canoniques de  $\mathbb{R}^N$ , i.e.,  $\pi_n(\mathbf{x}) = x_n$  si  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots)$ . Posons également, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_n(\mathbf{x}) &= (\pi_0 + \pi_1 + \dots + \pi_{n-1})(\mathbf{x}) = x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1}, \\ h_n(\mathbf{x}) &= (\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n)(\mathbf{x}) = nx_0 + (n-1)x_1 + \dots + 1x_{n-1}, \end{aligned}$$

puis définissons les ordres  $\leq_1$  et  $\leq_2$  sur  $\mathbb{R}^N$  comme suit:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \leq_1 \mathbf{y} &\iff \forall n \sigma_n(\mathbf{x}) \leq \sigma_n(\mathbf{y}), \\ \mathbf{x} \leq_2 \mathbf{y} &\iff \forall n h_n(\mathbf{x}) \leq h_n(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Il est clair que l'ordre  $\leq_2$  est plus faible que l'ordre  $\leq_1$ , qui est lui-même plus faible que l'ordre produit  $\leq$ , c'est-à-dire que

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \implies \mathbf{x} \leq_1 \mathbf{y} \implies \mathbf{x} \leq_2 \mathbf{y}.$$

Reçu par la rédaction le 21 juin, 2013.

Publié électronique au 7 mai, 2014.

Classification (AMS) par sujet: 37D35, 49N20, 90C27.

Mots clés: suite sturmiennne, domination convexe, optimisation ergodique.

Les espaces vectoriels ordonnés  $(\mathbb{R}^N, \leq_1)$  et  $(\mathbb{R}^N, \leq_2)$  sont manifestement isomorphes à  $(\mathbb{R}^N, \leq)$ , et sont en particulier des treillis.

On écrira  $\mathbf{x} <_1 \mathbf{y}$  (ou  $\mathbf{x} <_2 \mathbf{y}$ ) pour dire que l'inégalité est satisfaite, avec  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ .

Si  $\mathbf{x}$  est une suite périodique, on notera  $\text{bar}(\mathbf{x})$  ou  $\langle \mathbf{x} \rangle$  son "barycentre", c.à.d. la moyenne de ses coordonnées (qui est aussi sa limite au sens de Cesàro). La fonction  $\text{bar} : \mathbb{R}_{\text{per}}^N \rightarrow \mathbb{R}$  est linéaire, croissante pour l'ordre  $\leq_2$ , parce que  $h_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}n^2 \langle \mathbf{x} \rangle + o(n^2)$  pour  $n$  grand, ce qui montre que  $\langle \mathbf{x} \rangle \geq 0$  si  $\mathbf{x} \geq_2 0$ .

**Lemme 1.1** Un élément  $\mathbf{x}$  de  $\mathbb{R}_{(N)}^N$  vérifie  $\mathbf{x} \geq_2 0$  si et seulement si

$$h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \dots, h_{N-1}(\mathbf{x}), \sigma_N(\mathbf{x}) \geq 0.$$

**Démonstration** Les conditions sont évidemment nécessaires: si  $\mathbf{x} \geq_2 0$  alors tous les  $h_i(\mathbf{x})$  sont positifs, ainsi que  $\langle \mathbf{x} \rangle$  comme on vient de le voir, donc  $\sigma_N(\mathbf{x}) = N \langle \mathbf{x} \rangle \geq 0$ .

Réciproquement, supposons  $h_i(\mathbf{x}) \geq 0$  pour  $i < N$  et  $\sigma_N(\mathbf{x}) \geq 0$ . Si  $\mathbf{x}$  n'est pas  $\geq_2 0$ , soit  $s$  le plus petit indice tel que  $h_s(\mathbf{x}) < 0$ . Il vérifie donc  $s \geq N$ . Mais alors

$$\begin{aligned} h_s(\mathbf{x}) &= sx_0 + \dots + (s - N + 1)x_{N-1} + (s - N)x_N + \dots + 0x_s \\ &= (s - N + 1)(x_0 + \dots + x_{N-1}) + (N - 1)x_0 + \dots + 0x_{N-1} + h_{s-N}(\mathbf{x}) \\ &= (s - N + 1)\sigma_N(\mathbf{x}) + h_{N-1}(\mathbf{x}) + h_{s-N}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

et donc  $h_{s-N}(\mathbf{x}) < 0$ , ce qui contredit la minimalité de  $s$ . ■

**Lemme 1.2** Une fonction linéaire  $h : \mathbb{R}_{(N)}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , de la forme

$$\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots) \mapsto a_0x_0 + \dots + a_{N-1}x_{N-1}$$

est croissante pour l'ordre  $\leq_2$  si et seulement si

$$\begin{cases} a_0 - a_1 \geq a_1 - a_2 \geq \dots \geq a_{N-2} - a_{N-1}, \\ a_{N-2} \geq a_{N-1} \geq 0, \end{cases}$$

et strictement croissante (i.e.,  $h(\mathbf{x}) > 0$  si  $\mathbf{x} >_2 0$ ) si et seulement si toutes ces inégalités sont strictes.

**Démonstration** Par le lemme précédent, l'espace vectoriel ordonné  $(\mathbb{R}_{(N)}^N, \leq_2)$  est isomorphe à  $\mathbb{R}^N$  muni de l'ordre usuel, via les nouvelles coordonnées  $h_1, \dots, h_{N-1}, \sigma_N$ . Les formes linéaires croissantes (resp. strictement croissantes) sont donc exactement les combinaisons linéaires positives (resp. à coefficients strictement positifs) de ces fonctions coordonnées.

En appliquant la transformation d'Abel à  $h$ , on obtient

$$h = \underbrace{(a_0 - a_1)}_{b_1} \sigma_1 + \underbrace{(a_1 - a_2)}_{b_2} \sigma_2 + \dots + \underbrace{(a_{N-2} - a_{N-1})}_{b_{N-1}} \sigma_{N-1} + a_{N-1} \sigma_N$$

et une deuxième application de la transformation d'Abel donne

$$h = (b_1 - b_2)h_1 + (b_2 - b_3)h_2 + \dots + (b_{N-2} - b_{N-1})h_{N-2} + b_{N-1}h_{N-1} + a_{N-1}\sigma_N.$$

Donc  $h$  est croissante si et seulement si  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_{N-1} \geq 0$  et  $a_{N-1} \geq 0$ , et strictement croissante si et seulement si ces inégalités sont strictes. ■

**Corollaire 1.3** Soit  $a_0, a_1, \dots$  une suite de réels positifs tels que  $\sum a_n < \infty$ , et convexe, c.à.d. telle que la suite  $a_0 - a_1, a_1 - a_2, \dots$  soit décroissante. Alors la fonction linéaire  $h: \mathbb{R}_{\text{per}}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $h(\mathbf{x}) = \sum_{n \geq 0} a_n x_n$  est croissante pour l'ordre  $\leq_2$ .

**Démonstration** Notons d'abord que la suite  $a_0, a_1, \dots$  est décroissante, puisque la suite des différences  $a_n - a_{n+1}$  est décroissante et tend vers 0.

On doit montrer que pour tout  $N \geq 1$ , la restriction de  $h$  à  $\mathbb{R}_{(N)}^{\mathbb{N}}$  est croissante. Or, cette restriction s'écrit

$$\mathbf{x} \longmapsto \bar{a}_0 x_0 + \dots + \bar{a}_{N-1} x_{N-1}$$

avec  $\bar{a}_k = \sum_{\ell \geq 0} a_{k+\ell N}$ , et ces coefficients satisfont manifestement les conditions du lemme 1.2. ■

**Suites sturmiennes.** Les suites sturmiennes ont été introduites par Morse et Hedlund dans l'article [MH], et jouent un rôle central en optimisation ergodique. Comme les conventions varient quelque peu entre les auteurs, je précise ci-dessous les miennes.

Soit  $\rho$  un nombre réel. Une suite d'entiers  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots)$  est appelée  $\rho$ -sturmi-*enne* si elle vérifie

$$\forall k, n \in \mathbb{N} \quad |x_k + x_{k+1} + \dots + x_{k+n-1} - n\rho| < 1,$$

voir [BM]. L'ensemble  $S_\rho$  des suites  $\rho$ -sturmiennes est un sous-ensemble compact non vide de  $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ , stable par décalage, minimal et uniquement ergodique. Pour l'ordre  $\leq_1$ , il est totalement ordonné, et contient un plus petit élément  $\mathbf{s}_\perp$  et un plus grand élément  $\mathbf{s}_\top$ , donnés par  $\sigma_n(\mathbf{s}_\perp) = \lfloor n\rho \rfloor$  et  $\sigma_n(\mathbf{s}_\top) = \lceil n\rho \rceil$  ( $n \geq 0$ ).

Si  $\rho$  est rationnel, d'écriture réduite  $p/q$  (i.e.,  $\text{pgcd}(p, q) = 1$  et  $q \geq 1$ ), l'ensemble  $S_\rho$  est fini, et consiste en une unique orbite, dont la période est  $q$  et le barycentre  $\rho$ . Ses éléments  $\mathbf{s}_0, \dots, \mathbf{s}_{q-1}$  sont donnés par

$$\sigma_n(\mathbf{s}_k) = \left\lfloor \frac{np + k}{q} \right\rfloor, \quad n \geq 0, 0 \leq k < q,$$

et vérifient

$$\mathbf{s}_\perp = \mathbf{s}_0 \leq_1 \mathbf{s}_1 \leq_1 \dots \leq_1 \mathbf{s}_{q-1} = \mathbf{s}_\top.$$

Le but de cet article est de démontrer le théorème suivant.

**Théorème 1.4** Soit  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots)$  une suite  $N$ -périodique d'entiers, et  $\mathbf{s}$  une suite sturmienne de même barycentre (et donc aussi  $N$ -périodique). Pour toute fonction affine  $\alpha: \mathbb{R}_{(N)}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$  croissante pour l'ordre  $\leq_2$ , on a

$$\sum_{0 \leq i < N} |\alpha(\langle^i \mathbf{x} \rangle)| \geq \sum_{0 \leq i < N} |\alpha(\langle^i \mathbf{s} \rangle)|.$$

Notons que le membre de droite ne dépend pas du choix de  $\mathbf{s}$ , puisque les suites  $\langle \mathbf{x} \rangle$ -sturmiennes sont toutes dans une même orbite (dont la période divise  $N$ ).

## 2 Démonstration

Soit  $\rho$  réel. Pour tout  $t \in [0, 1[$ , soit  $\mathbf{s}(\rho, t)$  l'élément de  $\mathbb{Z}^N$  défini par

$$\sigma_n[\mathbf{s}(\rho, t)] = \lfloor n\rho + t \rfloor, \quad n \geq 0,$$

et qui est  $\rho$ -sturmien. Définissons maintenant, pour  $\kappa \in [0, 1]$ ,

$$\mathbf{S}(\rho, \kappa) = \int_0^\kappa \mathbf{s}(\rho, t) dt,$$

c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} \sigma_n[\mathbf{S}(\rho, \kappa)] &= \int_0^\kappa \lfloor n\rho + t \rfloor dt \\ &= \text{Max}\{\kappa \lfloor n\rho \rfloor, n\rho - (1 - \kappa) \lceil n\rho \rceil\}, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\mathbf{S}(\rho, \kappa) = (\kappa \mathbf{s}_\perp) \vee_1 (\rho \mathbf{1} - (1 - \kappa) \mathbf{s}_\top)$$

où  $\vee_1$  est l'opération de borne supérieure pour l'ordre  $\leq_1$ . On a en particulier la relation de symétrie

$$\mathbf{S}(1 - \rho, 1 - \kappa) = (1 - \rho - \kappa) \mathbf{1} + \mathbf{S}(\rho, \kappa)$$

pour tout  $\rho \in \mathbb{R}$  et  $\kappa \in [0, 1]$ .

Un cas particulier important est celui où  $\rho$  est un rationnel  $p/q$  (forme réduite) et  $\kappa$  un multiple de  $1/q$ ; dans ce cas, la fonction  $t \mapsto \mathbf{s}(\rho, t)$  est constante sur chaque intervalle de la forme  $[\frac{i}{q}, \frac{i+1}{q}[$ , où elle vaut  $\mathbf{s}_i$ , donc

$$\mathbf{S}(\rho, k/q) = \frac{\mathbf{s}_0 + \dots + \mathbf{s}_{k-1}}{q}, \quad 0 \leq k \leq q$$

et de plus, la fonction  $\kappa \mapsto \mathbf{S}(\rho, \kappa)$  est affine entre deux multiples consécutifs de  $1/q$ .

**Lemme 2.1** Soit  $C$  un sous-ensemble compact convexe de  $\mathbb{R}_{(N)}^N$ . On suppose que pour toute application linéaire  $h: \mathbb{R}_{(N)}^N \rightarrow \mathbb{R}$  croissante pour l'ordre  $\leq_2$ , il existe  $\mathbf{x}$  dans  $C$  tel que  $h(\mathbf{x}) \geq 0$ . Alors, il existe un élément  $\geq_2 0$  dans  $C$ .

Ce lemme est une conséquence facile du théorème de Hahn–Banach (pour la séparation des fermés convexes dans  $\mathbb{R}^N$ ); je laisse la preuve au lecteur.

**Proposition 2.2** Soit  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots)$  une suite  $N$ -périodique d'entiers,  $\rho$  son barycentre, et  $\mathbf{s}$  une suite sturmiennne de même barycentre. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) Pour toute fonction affine  $\alpha: \mathbb{R}_{(N)}^N \rightarrow \mathbb{R}$  croissante pour l'ordre  $\leq_2$ , on a

$$(2.1) \quad \sum_{0 \leq i < N} |\alpha(\langle^i \mathbf{x} \rangle)| \geq \sum_{0 \leq i < N} |\alpha(\langle^i \mathbf{s} \rangle)|.$$

(ii) Pour tout réel  $\kappa$  dans  $[0, 1]$ , il existe des nombres réels  $c_0, \dots, c_{N-1}$  dans  $[0, 1]$ , dont la somme vaut  $\kappa N$  et tels que

$$(2.2) \quad c_0 \mathbf{x} + c_1 \langle \mathbf{x} \rangle + \dots + c_{N-1} \langle^{N-1} \mathbf{x} \rangle \leq_2 N \mathbf{S}(\rho, \kappa).$$

**Démonstration** Observons d’abord que

$$\sum_{0 \leq i < N} \alpha(\langle^i \mathbf{x}) = \sum_{0 \leq i < N} \alpha(\langle^i \mathbf{s})$$

puisque  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{s}$  ont même barycentre; il en résulte que l’inégalité (2.1) est équivalente à

$$\sum_{0 \leq i < N} [\alpha(\langle^i \mathbf{x})]^+ \geq \sum_{0 \leq i < N} [\alpha(\langle^i \mathbf{s})]^+$$

et aussi à

$$(2.3) \quad \sum_{0 \leq i < N} [\alpha(\langle^i \mathbf{x})]^- \geq \sum_{0 \leq i < N} [\alpha(\langle^i \mathbf{s})]^-$$

et c’est plutôt cette dernière inégalité que nous utiliserons pour prouver l’équivalence entre les conditions (i) et (ii).

**(ii) ⇒ (i).** Soient  $\mathbf{s}_0, \dots, \mathbf{s}_{q-1}$  les points de l’orbite sturmiennne, rangés par ordre croissant (où  $p/q$  est l’écriture réduite de  $\rho$ ). Soit  $K$  le nombre d’indices  $i$  pour lesquels  $\alpha(\mathbf{s}_i) < 0$ , et posons  $\kappa = K/q$ . On a

$$\sum_{0 \leq i < N} [\alpha(\langle^i \mathbf{s})]^- = \frac{N}{q} \sum_{0 \leq i < q} [\alpha(\mathbf{s}_i)]^- = -\frac{N}{q} [\alpha(\mathbf{s}_0) + \dots + \alpha(\mathbf{s}_{K-1})].$$

Considérons maintenant les  $c_i$  donnés par la condition (ii) pour cette valeur particulière de  $\kappa$ . Comme ils sont dans  $[0, 1]$ , on a toujours

$$\begin{aligned} [\alpha(\langle^i \mathbf{x})]^- &\geq -c_i \alpha(\langle^i \mathbf{x}) \\ &= -c_i \alpha(0) - c_i h(\langle^i \mathbf{x}) \end{aligned}$$

où  $h$  est la partie linéaire de  $\alpha$ , donc

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i < N} [\alpha(\langle^i \mathbf{x})]^- &\geq -\alpha(0) \left[ \sum_{0 \leq i < N} c_i \right] - h \left[ \sum_{0 \leq i < N} c_i (\langle^i \mathbf{x}) \right] \\ &\geq -\kappa N \alpha(0) - h[NS(\rho, \kappa)] \\ &= -\frac{N}{q} [K\alpha(0) + h(\mathbf{s}_0) + \dots + h(\mathbf{s}_{K-1})] \\ &= -\frac{N}{q} [\alpha(\mathbf{s}_0) + \dots + \alpha(\mathbf{s}_{K-1})] \\ &= \sum_{0 \leq i < N} [\alpha(\langle^i \mathbf{s})]^- \end{aligned}$$

ce qu’il fallait démontrer.

**(i) ⇒ (ii).** Traitons d’abord le cas où  $\kappa = K/q$ , avec  $K$  entier, et posons  $M = \kappa N$ . Pour  $K = 0$  la condition (ii) est trivialement satisfaite, supposons donc  $1 \leq K \leq q$ . Soit  $C$  le sous-ensemble (compact, convexe) de  $\mathbb{R}_{(N)}^N$  constitué des éléments de la forme

$$NS(\rho, \kappa) - c_0 \mathbf{x} - \dots - c_{N-1} (\langle^{N-1} \mathbf{x})$$

où  $c_0, \dots, c_{N-1}$  sont dans  $[0, 1]$  et de somme  $M$ . On doit montrer que  $C$  contient un élément  $\geq_2 0$ . D'après le lemme 2.1, il suffit de montrer que pour toute fonction linéaire  $\leq_2$ -croissante  $h: \mathbb{R}_{(N)}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , on peut trouver des  $c_i$  tels que

$$c_0 h(\mathbf{x}) + \dots + c_{N-1} h(\triangleleft^{N-1} \mathbf{x}) \leq h[NS(\rho, \kappa)].$$

Soit  $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{N-1}$  un réarrangement de l'orbite de  $\mathbf{x}$ , i.e.,  $\mathbf{x}_i = \triangleleft^{\sigma(i)} \mathbf{x}$ , où la permutation  $\sigma$  de  $\{0, \dots, N-1\}$  est choisie de manière à ce que

$$h(\mathbf{x}_0) \leq h(\mathbf{x}_1) \leq \dots \leq h(\mathbf{x}_{N-1}),$$

et posons

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma^{-1}(i) < M, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il s'agit alors de montrer que

$$(2.4) \quad h(\mathbf{x}_0) + \dots + h(\mathbf{x}_{M-1}) \leq h[NS(\rho, \kappa)].$$

Considérons pour cela la fonction affine  $\leq_2$ -croissante  $\alpha: \mathbf{p} \rightarrow h(\mathbf{p}) - h(\mathbf{x}_{M-1})$ . Par l'hypothèse (i), elle satisfait l'inégalité (2.3), donc,

$$\begin{aligned} & Mh(\mathbf{x}_{M-1}) - [h(\mathbf{x}_0) + \dots + h(\mathbf{x}_{M-1})] \\ &= \sum_{0 \leq i < N} [\alpha(\triangleleft^i \mathbf{x})]^- \geq \sum_{0 \leq i < N} [\alpha(\triangleleft^i \mathbf{s})]^- \\ &= \frac{N}{q} \sum_{0 \leq i < q} [\alpha(\mathbf{s}_i)]^- \geq \frac{N}{q} \sum_{0 \leq i < K} [\alpha(\mathbf{s}_i)]^- \geq -\frac{N}{q} \sum_{0 \leq i < K} \alpha(\mathbf{s}_i) \\ &= -\frac{N}{q} [h(\mathbf{s}_0 + \dots + \mathbf{s}_{K-1}) - Kh(\mathbf{x}_{M-1})] \\ &= -h[NS(\rho, \kappa)] + Mh(\mathbf{x}_{M-1}) \end{aligned}$$

ce qui établit (2.4), et prouve la condition (ii) dans le cas où  $\kappa$  est multiple de  $1/q$ .

Si  $\kappa$  n'est pas de cette forme, on obtient une solution de (2.2) simplement en interpolant les solutions obtenues pour les deux multiples de  $1/q$  les plus proches. Ça marche parce que la fonction  $\kappa \mapsto S(\rho, \kappa)$  est affine sur un tel intervalle. ■

**Renormalisation.** A toute suite  $\mathbf{x} = x_0 x_1 \dots$  d'entiers naturels, associons la suite  $\mathcal{R}\mathbf{x}$  définie par

$$\mathcal{R}\mathbf{x} = 01^{x_0} 01^{x_1} 01^{x_2} \dots$$

Si  $\mathbf{x}$  est  $N$ -périodique, de barycentre  $\rho$ , alors  $\mathcal{R}\mathbf{x}$  est  $N'$ -périodique, où

$$N' = N + x_0 + \dots + x_{N-1} = N(1 + \rho)$$

et de barycentre

$$\rho' = \frac{x_0 + \dots + x_{N-1}}{N + x_0 + \dots + x_{N-1}} = \frac{\rho}{1 + \rho}.$$

Il est bien connu que  $\mathcal{R}\mathbf{x}$  est une suite sturmiennes si et seulement si  $\mathbf{x}$  est une suite sturmiennes; voir notamment [MH, section 8]. Plus précisément, j'aurai besoin de l'énoncé suivant.

**Lemme 2.3** Pour tout  $\rho$  réel positif, et  $t$  dans  $[0, 1[$ , on a

$$\mathcal{R}[\mathbf{s}(\rho, t)] = \mathbf{s}\left[\frac{\rho}{1+\rho}, \frac{t}{1+\rho}\right].$$

**Démonstration** Notons  $\mathbf{x} = \mathbf{s}(\rho, t)$ ,  $\mathbf{y} = \mathcal{R}\mathbf{x}$  et  $\mathbf{z} = \mathbf{1} - \mathbf{y}$ . Pour tout entier naturel  $n$ , on a  $\sigma_n(\mathbf{y}) = n - \sigma_n(\mathbf{z})$ . Or, les seuls chiffres non nuls de  $\mathbf{z}$  sont des ‘1’ aux positions  $0, 1 + x_0, 2 + x_0 + x_1$ , etc. Donc,  $\sigma_n(\mathbf{z})$  est le plus petit entier naturel  $k$  pour lequel

$$k + x_0 + \dots + x_{k-1} \geq n.$$

Ici  $x_0 + \dots + x_{k-1} = \lfloor k\rho + t \rfloor$ , donc

$$\begin{aligned} k + x_0 + \dots + x_{k-1} \geq n &\iff k + \lfloor k\rho + t \rfloor \geq n \\ &\iff k + k\rho + t \geq n \\ &\iff k \geq \frac{n-t}{1+\rho} \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\sigma_n(\mathbf{z}) = \left\lceil \frac{n-t}{1+\rho} \right\rceil$$

pour tout  $n \geq 0$ , et

$$\sigma_n(\mathbf{y}) = n - \left\lceil \frac{n-t}{1+\rho} \right\rceil = \left\lfloor n + \frac{t-n}{1+\rho} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n\rho + t}{1+\rho} \right\rfloor$$

ce qu’il fallait démontrer. ■

**Lemme 2.4** Soit  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots)$  une suite d’entiers naturels. Quels que soient  $n, \ell$  entiers naturels, on a l’inégalité

$$(2.5) \quad h_n(\mathcal{R}\mathbf{x}) \leq \frac{(n-\ell)(n-\ell-1)}{2} + h_\ell(\mathbf{x}).$$

En outre, si  $\mathbf{x}$  est une suite sturmiennne,  $\rho$  son barycentre, et

$$\ell = \left\lfloor \frac{n}{1+\rho} \right\rfloor$$

alors on a égalité dans (2.5).

**Démonstration** Posons  $\mathbf{y} = \mathcal{R}\mathbf{x}$  et  $\mathbf{z} = \mathbf{1} - \mathbf{y}$ . Comme précédemment,  $z_i$  vaut 1 si l’indice  $i$  est de la forme  $k + x_0 + \dots + x_{k-1}$  pour un certain  $k \geq 0$ , et zéro sinon, donc

$$h_n(\mathbf{z}) = \sum_{i=0}^{\infty} (n-i)^+ z_i = \sum_{k=0}^{\infty} (n-k-x_0-\dots-x_{k-1})^+.$$

La minoration évidente

$$(2.6) \quad (n-k-x_0-\dots-x_{k-1})^+ \geq \begin{cases} n-k-x_0-\dots-x_{k-1} & \text{si } k \leq \ell, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

nous donne

$$\begin{aligned} h_n(\mathbf{z}) &\geq \sum_{k=0}^{\ell} (n - k - x_0 - \dots - x_{k-1}) \\ &= (\ell + 1)n - (0 + 1 + \dots + \ell) - \ell x_0 - (\ell - 1)x_1 - \dots - 1x_{\ell-1} \\ &= (\ell + 1)n - \frac{1}{2}\ell(\ell + 1) - h_{\ell}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} h_n(\mathbf{y}) &= \frac{1}{2}n(n + 1) - h_n(\mathbf{z}) \\ &\leq \frac{1}{2}n(n + 1) - (\ell + 1)n + \frac{1}{2}\ell(\ell + 1) + h_{\ell}(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2}(n - \ell)(n - \ell - 1) + h_{\ell}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

comme annoncé.

Nous allons voir maintenant que si  $\mathbf{x}$  est  $\rho$ -sturmiennes et  $\ell = \lfloor n/(1 + \rho) \rfloor$ , l'inégalité (2.6) est en fait une égalité quel que soit  $k$ , et il en sera donc de même pour (2.5).

Supposons d'abord  $k \leq \ell$ . Comme  $\mathbf{x}$  est  $\rho$ -sturmiennes, on a  $x_0 + \dots + x_{k-1} \leq \lceil k\rho \rceil$  et donc

$$\begin{aligned} n - k - x_0 - \dots - x_{k-1} &\geq n - k - \lceil k\rho \rceil = \lceil n - k(1 + \rho) \rceil \\ &\geq \lceil n - \ell(1 + \rho) \rceil \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

puisque  $\ell \leq n/(1 + \rho)$ .

Inversement, pour  $k > \ell$ , on utilise l'inégalité  $x_0 + \dots + x_{k-1} \geq \lfloor k\rho \rfloor$ , qui entraîne

$$\begin{aligned} n - k - x_0 - \dots - x_{k-1} &\leq n - k - \lfloor k\rho \rfloor = \lfloor n - k(1 + \rho) \rfloor \\ &\leq \lfloor n - (\ell + 1)(1 + \rho) \rfloor \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

puisque  $\ell + 1 \geq n/(1 + \rho)$ . On a donc bien égalité dans (2.6) pour tout  $k$ , ce qui établit la deuxième partie du lemme. ■

**Lemme 2.5** Soit  $\rho$  un réel positif,  $\kappa$  dans  $[0, 1]$ ,  $n$  un entier naturel et  $\ell = \lfloor n/(1 + \rho) \rfloor$ . On a

$$(1 + \rho)h_n \left[ \mathbf{S} \left( \frac{\rho}{1 + \rho}, \frac{\kappa}{1 + \rho} \right) \right] = \frac{(n - \ell)(n - \ell - 1)}{2} \kappa + h_{\ell}[\mathbf{S}(\rho, \kappa)].$$

**Démonstration** D'après les deux lemmes précédents, on a

$$h_n \left[ \mathbf{s} \left( \frac{\rho}{1 + \rho}, \frac{t}{1 + \rho} \right) \right] = \frac{(n - \ell)(n - \ell - 1)}{2} + h_{\ell}[\mathbf{s}(\rho, t)]$$

quel que soit  $t$  dans  $[0, 1]$ , et en intégrant cette égalité entre 0 et  $\kappa$ , on obtient le résultat cherché. ■



Etant donné  $N$  entier strictement positif,  $\rho$  rationnel, et  $\kappa$  dans  $[0, 1]$ , définissons  $\mathcal{E}_N(\rho, \kappa)$  comme l'ensemble des suites  $N$ -périodiques entières  $\mathbf{x}$  de barycentre  $\rho$  et pour lesquelles le système d'inégalités

$$(2.7) \quad \begin{cases} c_0, c_1, \dots, c_{N-1} \in [0, 1], \\ c_0 + c_1 + \dots + c_{N-1} = \kappa N, \\ c_0(\mathbf{x}) + c_1(\triangleleft \mathbf{x}) + \dots + c_{N-1}(\triangleleft^{N-1} \mathbf{x}) \leq_2 NS(\rho, \kappa), \end{cases}$$

n'admet pas de solution. Au vu de la proposition 2.2, l'objectif est de démontrer que ces ensembles sont vides. Un résultat partiel dans ce sens est le suivant.

**Proposition 2.6** Soit  $\mathbf{x}$  une suite  $N$ -périodique d'entiers naturels,  $\rho$  son barycentre, et  $\mathbf{y} = \mathcal{R}\mathbf{x}$ , qui est  $N'$ -périodique avec  $N' = N(1 + \rho)$ , et de barycentre  $\rho' = \rho/(1 + \rho)$ . Soit  $\kappa$  un élément de  $[0, 1]$  tel que  $\mathbf{x} \notin \mathcal{E}_N(\rho, \kappa)$ . Alors  $\mathbf{y} \notin \mathcal{E}_{N'}(\rho', \kappa/(1 + \rho))$ .

**Démonstration** Soit  $(c_0, \dots, c_{N-1})$  une solution du système (2.7). Considérons maintenant les réels  $c'_0, \dots, c'_{N'-1}$  définis par

$$\begin{aligned} c'_0 &= c_0, \\ c'_{1+x_0} &= c_1, \\ c'_{2+x_0+x_1} &= c_2, \\ &\vdots \\ c'_{N-1+x_0+\dots+x_{N-1}} &= c_{N-1}, \end{aligned}$$

et tous les autres  $c'_i$  sont nuls. Il est évident que les  $c'_i$  sont dans  $[0, 1]$  et que leur somme vaut  $\kappa N = \kappa' N'$ , où  $\kappa' = \kappa/(1 + \rho)$ . Nous allons voir que

$$c'_0(\mathbf{y}) + c'_1(\triangleleft \mathbf{y}) + \dots + c'_{N'-1}(\triangleleft^{N'-1} \mathbf{y}) \leq_2 N' \mathbf{S}(\rho', \kappa')$$

ce qui démontrera la proposition.

L'inégalité ci-dessus se réécrit

$$c_0(\mathcal{R}\mathbf{x}) + c_1(\mathcal{R}\triangleleft \mathbf{x}) + \dots + c_{N-1}(\mathcal{R}\triangleleft^{N-1} \mathbf{x}) \leq_2 N' \mathbf{S}(\rho', \kappa').$$

Il s'agit donc de montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a

$$c_0 h_n(\mathcal{R}\mathbf{x}) + \dots + c_{N-1} h_n(\mathcal{R}\triangleleft^{N-1} \mathbf{x}) \leq N(1 + \rho) h_n[\mathbf{S}(\rho', \kappa')].$$

Pour  $n$  fixé, posons  $\ell = \lfloor n/(1 + \rho) \rfloor$ . Par le lemme 2.4, on a

$$h_n(\mathcal{R}\triangleleft^i \mathbf{x}) \leq \frac{(n - \ell)(n - \ell - 1)}{2} + h_\ell(\triangleleft^i \mathbf{x})$$

pour  $i = 0, \dots, N - 1$ . Donc

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i < N} c_i h_n(\mathcal{R} \langle^i \mathbf{x}) &\leq \frac{(n - \ell)(n - \ell - 1)}{2} \left[ \sum_{0 \leq i < N} c_i \right] + h_\ell \left[ \sum_{0 \leq i < N} c_i \langle^i \mathbf{x} \right] \\ &\leq \frac{(n - \ell)(n - \ell - 1)}{2} \kappa N + h_\ell [NS(\rho, \kappa)] \\ &= N \left[ \frac{(n - \ell)(n - \ell - 1)}{2} \kappa + h_\ell [S(\rho, \kappa)] \right] \\ &= N(1 + \rho) h_n [S(\rho', \kappa')] \end{aligned}$$

par le lemme 2.5, ce qui termine la preuve. ■

**Lemme 2.7** Soit  $\mathbf{x}$  une suite périodique d'entiers, et  $\mathbf{s}_\perp, \mathbf{s}_\top$  la plus petite et la plus grande suite sturmiennne de même barycentre que  $\mathbf{x}$ . Il existe des entiers naturels  $i, j$  pour lesquels  $\langle^i \mathbf{x} \leq_1 \mathbf{s}_\perp$  et  $\mathbf{s}_\top \leq_1 \langle^j \mathbf{x}$ .

**Démonstration** Définissons  $h(n) = \sigma_n(\mathbf{x}) - n\rho$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , où  $\rho$  est le barycentre de  $\mathbf{x}$ . C'est une fonction périodique  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , donc on peut trouver des indices  $i, j$  où elle atteint son maximum et son minimum, respectivement.

Posons  $\mathbf{y} = \sigma^i \mathbf{x}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\sigma_n(\mathbf{y}) = x_i + \dots + x_{i+n-1} = \sigma_{i+n}(\mathbf{x}) - \sigma_i(\mathbf{x}) = n\rho + h(i+n) - h(i) \leq n\rho$ , et comme  $\sigma_n(\mathbf{y})$  est entier, cette inégalité équivaut à  $\sigma_n(\mathbf{y}) \leq \lfloor n\rho \rfloor$ . Ceci montre que  $\mathbf{y} \leq_1 \mathbf{s}_\perp$ . De même, la suite  $\mathbf{z} = \langle^j \mathbf{x}$  vérifie  $\sigma_n(\mathbf{z}) \geq \lceil n\rho \rceil$  pour tout  $n$ , et donc  $\mathbf{z} \geq_1 \mathbf{s}_\top$ . ■

**Lemme 2.8** Soit  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots)$  une suite  $N$ -périodique d'entiers, de barycentre  $\rho > 0$ , et dont l'une au moins des coordonnées  $x_n$  est strictement négative. Il existe alors des entiers naturels  $i < j$  pour lesquels

$$\begin{cases} x_i < 0, \\ x_k = 0 & \text{pour tout } k \text{ tel que } i < k < j, \\ x_j + \dots + x_{j+\ell-1} > 0 & \text{pour tout } \ell > 0. \end{cases}$$

**Démonstration** Soient  $I, J$  les sous-ensembles de  $\mathbb{N}$  définis par

$$\begin{aligned} I &= \{i \in \mathbb{N} : x_i < 0\}, \\ J &= \{j \in \mathbb{N} : \sigma_j(\mathbf{x}) < \sigma_k(\mathbf{x}) \text{ pour tout } k > j\} \\ &= \{j \in \mathbb{N} : x_j + \dots + x_{j+\ell-1} > 0 \text{ pour tout } \ell > 0\}. \end{aligned}$$

Ils sont disjoints,  $N$ -périodiques (i.e., contiennent  $i$  si et seulement si ils contiennent  $N + i$ ), et non vides: pour  $I$  cela fait partie des hypothèses, et pour  $J$  c'est une conséquence facile de l'hypothèse  $\rho > 0$  (voir aussi le lemme précédent).

On peut donc trouver un élément  $i \in I$  qui est "immédiatement suivi" d'un élément  $j \in J$ , dans le sens où il n'existe aucun élément de  $I \cup J$  situé strictement entre  $i$  et  $j$ . J'affirme qu'on a alors  $x_k = 0$  pour tout  $k$  strictement entre  $i$  et  $j$ , ce qui démontrera le lemme.

Supposons le contraire; il existe alors un plus grand entier  $k$  tel que  $i < k < j$  et  $x_k \neq 0$ . Comme c'est le plus grand, on a  $x_s = 0$  pour tout  $s$  tel que  $k < s < j$ . D'autre

part, on ne peut pas avoir  $x_k < 0$ , sinon  $k$  serait élément de  $I$ ; donc  $x_k > 0$ . Mais alors

$$x_k + \dots + x_{k+\ell-1} = \begin{cases} x_k & \text{si } 0 < \ell \leq j - k, \\ x_k + \sigma_{\ell+k}(\mathbf{x}) - \sigma_j(\mathbf{x}) & \text{si } \ell \geq j - k \end{cases} \geq x_k > 0 \quad \text{pour tout } \ell > 0$$

et donc  $k$  serait élément de  $J$ , ce qui n'est pas possible non plus; contradiction. ■

**Proposition 2.9** Soit  $\alpha: \mathbb{R}_{(N)}^N \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction affine strictement croissante pour l'ordre  $\leq_2$ , et  $A: \mathbb{Z}_{(N)}^N \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$(2.8) \quad A(\mathbf{x}) = \sum_{0 \leq i < N} |\alpha(\langle^i \mathbf{x} \rangle)|.$$

Soit  $\mathbf{x}$  une suite  $N$ -périodique d'entiers, dont le barycentre  $\rho$  vérifie  $0 < \rho < 1$ , et telle que  $A(\mathbf{x}) \neq A(\mathbf{s})$ , où  $\mathbf{s}$  est une suite  $\rho$ -sturmiennne. On suppose que  $\mathbf{x}$  possède au moins une coordonnée strictement négative. Alors, il existe une autre suite  $N$ -périodique d'entiers  $\mathbf{y}$ , de même barycentre, telle que  $A(\mathbf{y}) < A(\mathbf{x})$ .

**Démonstration** D'après le lemme 2.8, et quitte à remplacer  $\mathbf{x}$  par un autre point de la même orbite, on peut trouver un entier  $s$  tel que  $0 < s < N$  et

$$\begin{cases} x_s < 0, \\ x_i = 0 & \text{pour tout } i \text{ tel que } s < i < N, \\ \sigma_n(\mathbf{x}) = x_0 + \dots + x_{n-1} > 0 & \text{pour tout } n > 0. \end{cases}$$

Ecrivons

$$\alpha(\mathbf{t}) = \alpha(0) + a_0 t_0 + \dots + a_{N-1} t_{N-1}$$

où  $a_0, \dots, a_{N-1}$  vérifient les conditions du lemme 1.2. On va distinguer deux cas, selon que  $\alpha(\mathbf{x})$  est plus grand ou plus petit que  $a_0 - a_{N-1}$ .

**Premier cas:**  $\alpha(\mathbf{x}) \geq a_0 - a_{N-1}$ . Définissons alors  $\mathbf{y}$  comme l'unique élément de  $\mathbb{Z}_{(N)}^N$  tel que

$$\sigma_n(\mathbf{y}) = \begin{cases} \sigma_n(\mathbf{x}) & \text{si } n = 0 \pmod{N}, \\ \sigma_n(\mathbf{x}) - 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} y_0 = x_0 - 1, \\ y_1 = x_1, \\ \vdots \\ y_{N-2} = x_{N-2}, \\ y_{N-1} = x_{N-1} + 1. \end{cases}$$

L'inégalité  $A(\mathbf{y}) < A(\mathbf{x})$  équivaut à

$$(2.9) \quad \sum_{0 \leq i < N} [\alpha(\langle^i \mathbf{y} \rangle)]^- < \sum_{0 \leq i < N} [\alpha(\langle^i \mathbf{x} \rangle)]^-.$$

On voit facilement que pour  $0 < i < N$  on a  $\langle^i \mathbf{y} \rangle_1 \langle^i \mathbf{x}$ , et donc

$$(2.10) \quad \alpha(\langle^i \mathbf{y} \rangle) > \alpha(\langle^i \mathbf{x} \rangle),$$

ce qui entraîne

$$(2.11) \quad [\alpha(\langle^i \mathbf{y} \rangle)]^- \leq [\alpha(\langle^i \mathbf{x} \rangle)]^-.$$

D'autre part  $\alpha(\mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x}) - a_0 + a_{N-1}$ , donc  $0 \leq \alpha(\mathbf{y}) < \alpha(\mathbf{x})$  et en particulier  $[\alpha(\mathbf{y})]^- = [\alpha(\mathbf{x})]^- = 0$ . Ceci, combiné avec les inégalités (2.11) pour  $i = 1, \dots, N - 1$ , entraîne l'inégalité large dans (2.9).

Pour montrer l'inégalité stricte, il suffit de montrer que l'une au moins des inégalités (2.11) est stricte. Supposons, par l'absurde, qu'elles soient toutes des égalités; vu la manière dont elles sont obtenues à partir de (2.10), cela revient à demander  $\alpha(\langle^i \mathbf{x} \rangle) \geq 0$  pour tout  $i$  tel que  $0 < i < N$ . Par ailleurs, cette inégalité est toujours vraie pour  $i = 0$ . Par le lemme 2.7, cela entraîne  $\alpha(\mathbf{s}_\perp) \geq 0$  et par suite  $\alpha(\langle^i \mathbf{s} \rangle) \geq 0$  pour tout  $i$ , donc

$$\sum_{0 \leq i < N} [\alpha(\langle^i \mathbf{x} \rangle)]^- = \sum_{0 \leq i < N} [\alpha(\langle^i \mathbf{s} \rangle)]^-$$

ce qui équivaut à  $A(\mathbf{x}) = A(\mathbf{s})$ , en contradiction avec les hypothèses.

**Second cas:**  $\alpha(\mathbf{x}) \leq a_0 - a_{N-1}$ . Ici, on définit  $\mathbf{y}$  comme l'unique élément de  $\mathbb{Z}_{(N)}^N$  tel que

$$\sigma_n(\mathbf{y}) = \begin{cases} \sigma_n(\mathbf{x}) & \text{si } n = 0 \pmod{N}, \\ \sigma_n(\mathbf{x}) - 2 & \text{si } n = s \pmod{N}, \\ \sigma_n(\mathbf{x}) - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$y_n = x_n + \begin{cases} -1 & \text{si } n = 0 \pmod{N}, \\ 1 & \text{si } n = N - 1 \pmod{N}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} + \begin{cases} -1 & \text{si } n = s - 1 \pmod{N}, \\ 1 & \text{si } n = s \pmod{N}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrons en premier lieu que ce  $\mathbf{y}$  satisfait

$$(2.12) \quad \langle^{N-1} \mathbf{y} \rangle_2 < \mathbf{x}.$$

Pour cela, observons que  $y_{N-1} \leq 1$ , et d'autre part  $\sigma_n(\mathbf{y}) \leq \sigma_n(\mathbf{x}) - 1$  pour tout  $n$  tel que  $0 < n < N$ , et par conséquent

$$\begin{aligned} \sigma_n(\langle^{N-1} \mathbf{y} \rangle - \mathbf{x}) &= y_{N-1} + y_0 + \dots + y_{n-2} - x_0 - \dots - x_{n-1} \\ &= y_{N-1} + \sigma_{n-1}(\mathbf{y}) - \sigma_n(\mathbf{x}) \\ &\leq \begin{cases} 1 - \sigma_1(\mathbf{x}) & \text{si } n = 1, \\ \sigma_{n-1}(\mathbf{x}) - \sigma_n(\mathbf{x}) & \text{si } 1 < n \leq N. \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit  $h_n(\langle^{N-1} \mathbf{y} \rangle - \mathbf{x}) \leq 1 - \sigma_n(\mathbf{x})$  pour tout  $n$  tel que  $1 \leq n \leq N$ , et comme  $\sigma_n(\mathbf{x}) \geq 1$  (avec inégalité stricte pour  $n = s$ ) cela montre (2.12).

L'inégalité  $A(\mathbf{y}) < A(\mathbf{x})$  équivaut à

$$(2.13) \quad \sum_{0 \leq i < N} [\alpha(\triangleleft^i \mathbf{y})]^+ < \sum_{0 \leq i < N} [\alpha(\triangleleft^i \mathbf{x})]^+.$$

On voit facilement que pour  $0 < i < s$  on a  $\triangleleft^i \mathbf{y} <_2 \triangleleft^i \mathbf{x}$ , et donc

$$\alpha(\triangleleft^i \mathbf{y}) < \alpha(\triangleleft^i \mathbf{x})$$

ce qui entraîne

$$(2.14) \quad [\alpha(\triangleleft^i \mathbf{y})]^+ \leq [\alpha(\triangleleft^i \mathbf{x})]^+.$$

On sait que  $x_{s+1} = \dots = x_{N-1} = 0$  et  $y_{s+1} = \dots = y_{N-2} = 0$ , et on a par ailleurs l'inégalité  $y_s \leq 0$  pourvu que  $s \neq N - 1$ ; en combinant ceci avec la relation (2.12), on déduit facilement que pour  $s \leq i < N$  on a  $\triangleleft^i \mathbf{y} <_2 \triangleleft^{i+1} \mathbf{x}$ , et donc

$$\alpha(\triangleleft^i \mathbf{y}) < \alpha(\triangleleft^{i+1} \mathbf{x})$$

ce qui entraîne

$$(2.15) \quad [\alpha(\triangleleft^i \mathbf{y})]^+ \leq [\alpha(\triangleleft^{i+1} \mathbf{x})]^+.$$

Enfin, on a  $\alpha(\mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x}) - a_0 + a_{N-1} - a_{s-1} + a_s \leq a_s - a_{s-1} \leq 0$ , donc

$$[\alpha(\mathbf{y})]^+ = 0 \leq [\alpha(\triangleleft^s \mathbf{x})]^+$$

ce qui, combiné avec les inégalités (2.14) pour  $i = 1, \dots, s - 1$ , et (2.15) pour  $i = s, \dots, N - 1$ , fournit l'inégalité *large* dans (2.13).

Pour montrer l'inégalité stricte, il suffit de montrer qu'une au moins de ces inégalités est stricte. Supposons, par l'absurde, qu'elles sont toutes des égalités: alors  $\alpha(\triangleleft^i \mathbf{x}) \leq 0$  pour tout  $i$ , ce qui entraîne  $\alpha(\triangleleft^i \mathbf{s}) \leq 0$  pour tout  $i$ , d'après le lemme 2.7. Donc

$$\sum_{0 \leq i < N} [\alpha(\triangleleft^i \mathbf{x})]^+ = \sum_{0 \leq i < N} [\alpha(\triangleleft^i \mathbf{s})]^+$$

ce qui équivaut à  $A(\mathbf{x}) = A(\mathbf{s})$ , en contradiction avec les hypothèses. ■

Nous avons maintenant tous les éléments pour démontrer le théorème principal de l'article.

**Démonstration du théorème 1.4** Notons

$$\mathcal{E}_N = \bigcup_{\rho \in \mathbb{Q}} \bigcup_{\kappa \in [0,1]} \mathcal{E}_N(\rho, \kappa).$$

On doit montrer que  $\mathcal{E}_N$  est vide, pour tout  $N \geq 1$ . Supposons que ce ne soit pas le cas, et considérons le plus petit  $N$  pour lequel  $\mathcal{E}_N \neq \emptyset$ .

Soit  $\mathbf{x}$  un élément de  $\mathcal{E}_N$ , et  $\rho$  son barycentre.

On note que pour  $\rho \in \mathbb{Z}$ , les items (i) et (ii) de la proposition 2.2 sont trivialement vrais (exercice pour le lecteur). Or, pour le point  $\mathbf{x}$  que nous avons choisi, ces items sont faux par hypothèse. Donc, son barycentre  $\rho$  est *non entier*.

On peut se ramener au cas  $0 < \rho < 1$ , quitte à ajouter un même entier à toutes les coordonnées de  $\mathbf{x}$ . Par le critère (i) de la proposition 2.2, on peut trouver une fonction affine  $\alpha: \mathbb{R}_{(N)}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , croissante pour l'ordre  $\leq_2$  et telle que  $A(\mathbf{x}) < A(\mathbf{s})$ , où  $A: \mathbb{Z}_{(N)}^N \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction définie par (2.8). La condition étant ouverte, on peut perturber  $\alpha$  afin de la rendre strictement croissante, et à coefficients rationnels.

Enfin, on peut la multiplier par un entier bien choisi, pour qu'elle soit à coefficients entiers. Alors, la fonction  $A$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{N}$ , qui est bien-ordonné.

Il est maintenant possible, quitte à modifier  $\mathbf{x}$ , de faire en sorte qu'il réalise le minimum de  $A$  sur tous les éléments de  $\mathbb{Z}_{(N)}^{\mathbb{N}}$  de barycentre  $\rho$ . D'après la proposition 2.9, cela implique que toutes les coordonnées de  $\mathbf{x}$  sont  $\geq 0$ .

Mais on peut aussi appliquer la proposition 2.9 avec  $\mathbf{x}' = \mathbf{1} - \mathbf{x}$  au lieu de  $\mathbf{x}$ , et  $\alpha' : \mathbf{t} \mapsto -\alpha(\mathbf{1} - \mathbf{t})$  au lieu de  $\alpha$ , et il en résulte que toutes les coordonnées de  $\mathbf{x}$  sont  $\leq 1$ . Notre suite  $\mathbf{x}$  est donc constituée uniquement de '0' et de '1'.

Il existe  $\kappa \in [0, 1]$  tel que  $\mathbf{x}$  soit élément de  $\mathcal{E}_N(\rho, \kappa)$ . On aura peut-être

$$\kappa \leq 1 - \rho$$

et si ce n'est pas le cas, on s'y ramène en remplaçant  $\mathbf{x}$  par  $\mathbf{1} - \mathbf{x}$ , qui est élément de  $\mathcal{E}_N(1 - \rho, 1 - \kappa)$  et, là encore, constitué uniquement de '0' et de '1'.

Soit  $Z = N(1 - \rho)$  le nombre de zéros de  $\mathbf{x}$  sur une période. Quitte à décaler  $\mathbf{x}$ , on peut supposer que sa coordonnée initiale est 0, ce qui permet d'écrire  $\mathbf{x} = \mathcal{R}\mathbf{z}$  où  $\mathbf{z}$  est une suite  $Z$ -périodique d'entiers naturels, de barycentre  $\bar{\rho} = \rho/(1 - \rho)$ . Posons  $\bar{\kappa} = \kappa/(1 - \rho)$ , qui est élément de  $[0, 1]$ . Comme  $Z < N$ , l'ensemble  $\mathcal{E}_Z(\bar{\rho}, \bar{\kappa})$  est vide, et ne contient donc pas  $\mathbf{z}$ . Mais cela implique, par la proposition 2.6, que  $\mathcal{E}_N(\rho, \kappa)$  ne contient pas  $\mathcal{R}\mathbf{z}$ . Contradiction. ■

### 3 Discussion des résultats

On peut aussi présenter le résultat principal de cet article en termes de *domination convexe* ("majorization" en anglais). Cette notion a été introduite par Muirhead [Mui], mais ce sont surtout les travaux de Hardy–Littlewood–Pólya [HLP] qui ont révélé son importance. La domination convexe est également très liée à la théorie des matrices bistochastiques [Mir].

Par des arguments similaires à ceux donnés dans [HLP], on voit facilement que le théorème 1.4 peut se reformuler comme suit.

**Corollaire 3.1** Soit  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots)$  une suite  $N$ -périodique d'entiers, et  $\mathbf{s}$  une suite sturmiennne de même barycentre (et donc aussi  $N$ -périodique). Pour toute fonction affine  $\alpha : \mathbb{R}_{(N)}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$  croissante pour l'ordre  $\leq_2$ , et toute fonction convexe  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , on a

$$(3.1) \quad \sum_{0 \leq i < N} \varphi \alpha(\triangleleft^i \mathbf{x}) \geq \sum_{0 \leq i < N} \varphi \alpha(\triangleleft^i \mathbf{s}).$$

Cet énoncé affirme que, pour toute fonction affine croissante  $\alpha$ , on a une relation de domination convexe entre les  $N$ -uplets

$$(\alpha(\triangleleft^0 \mathbf{x}), \dots, \alpha(\triangleleft^{N-1} \mathbf{x})) \succ (\alpha(\triangleleft^0 \mathbf{s}), \dots, \alpha(\triangleleft^{N-1} \mathbf{s})).$$

voir [Mir, Theorem 1b]. Cela signifie intuitivement que les  $\alpha(\triangleleft^i \mathbf{x})$  sont "plus étalés" que les  $\alpha(\triangleleft^i \mathbf{s})$ , tout en ayant la même moyenne.

Le théorème 1.4–corollaire 3.1 est inspiré par une question posée par Oliver Jenkinson à la fin des années 1990, qu'on peut formuler ainsi: montrer l'inégalité

(3.1) quand  $\alpha$  est la fonction linéaire particulière

$$t \mapsto \sum_{n \geq 0} t_n / 2^{n+1}$$

et  $\mathbf{x}$  une suite périodique de ‘0’ et de ‘1’. Ce problème, plus difficile qu’il n’en a l’air, a été résolu fin 2000 par Jenkinson et l’auteur, par une démonstration basée sur la “précondition de Sturm” pour l’application  $x \mapsto 2x \pmod{1}$ . Malheureusement, cette démonstration semble très spécifique à cette situation précise, et nos tentatives pour l’étendre à des situations proches (notamment les  $\beta$ -développements) n’ont rien donné. Elle est donc restée non publiée pendant plusieurs années. On trouvera cette démonstration dans [Jen].

Il existe d’autres énoncés, plus classiques, de domination convexe entre une suite périodique d’entiers et la suite sturmienne de même barycentre. En particulier:

**Lemme 3.2** Soit  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots)$  une suite  $N$ -périodique d’entiers, et  $\mathbf{s}$  une suite sturmienne de même barycentre. Pour tout entier naturel  $n$  et toute fonction convexe  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , on a

$$(3.2) \quad \sum_{0 \leq i < N} \varphi \sigma_n(\langle^i \mathbf{x} \rangle) \geq \sum_{0 \leq i < N} \varphi \sigma_n(\langle^i \mathbf{s} \rangle).$$

Ce lemme est essentiellement [JZ, Theorem A], mais on le trouve aussi dans des travaux plus anciens, notamment [Hub, Appendix]. En voici une démonstration.

**Démonstration du lemme 3.2** Fixons  $n \geq 0$ . Observons que l’inégalité (3.2) reste inchangée si on ajoute à  $\varphi$  une quelconque fonction affine: on peut donc faire en sorte que  $\varphi$  s’annule aux points  $\lfloor n\rho \rfloor$  et  $\lfloor n\rho \rfloor + 1$ . Alors, le membre de droite est nul, puisque les  $\sigma_n(\langle^i \mathbf{s} \rangle)$  ne prennent que ces deux valeurs.

Mais d’autre part, la fonction  $\varphi$  est convexe et s’annule en deux entiers consécutifs, donc elle est positive en tout point entier, et le membre de gauche de (3.2) est positif, ce qui prouve l’inégalité. ■

Ce lemme est un cas très particulier d’un théorème de Hajek [Haj] qui affirme que

$$(3.3) \quad \sum_{0 \leq i < N} \Phi(\langle^i \mathbf{x} \rangle) \geq \sum_{0 \leq i < N} \Phi(\langle^i \mathbf{s} \rangle)$$

pour une large classe de fonctions  $\Phi: \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ , que Hajek appelle fonctions “multimodulaires”. La multimodularité est, en un sens précisé dans [Haj], une forme de “convexité discrète”. Les fonctions  $\varphi \circ \sigma_n$ , avec  $\varphi$  convexe et  $n \in \mathbb{N}$  sont en particulier des fonctions multimodulaires.

En revanche, les fonctions  $|\alpha|$  et  $\varphi \circ \alpha$ , avec  $\varphi$  convexe et  $\alpha$  croissante pour l’ordre  $\leq_2$ , ne sont pas des fonctions multimodulaires, ni même cohomologues à des fonctions multimodulaires. Je crois que le théorème 1.4–corollaire 3.1 est indépendant du théorème de Hajek: aucun des deux théorèmes ne peut se déduire de l’autre, et même les méthodes de démonstration semblent inconciliables. Cette situation est plutôt paradoxale, car on serait tenté de croire qu’il ne peut exister qu’une seule forme de “convexité discrète” garantissant les inégalités (3.3).

Dans le même ordre d'idées, notons que le lemme 3.2 ne peut pas se déduire du corollaire 3.1, parce que les fonctions  $\sigma_n$  ne sont pas croissantes pour l'ordre  $\leq_2$  (pour  $n > 1$ ).

**Inégalités quadratiques.** En prenant  $\varphi(x) = x^2$  dans le lemme 3.2, on obtient des inégalités quadratiques en les  $x_i$ :

$$(3.4) \quad \sum_{0 \leq i < N} \sigma_n(\langle^i \mathbf{x} \rangle^2) \geq \sum_{0 \leq i < N} \sigma_n(\langle^i \mathbf{s} \rangle^2) \quad (n \geq 0)$$

qu'il est commode de présenter un peu différemment. Considérons le produit scalaire sur  $\mathbb{R}_{\text{per}}^N$  défini par

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{0 \leq i < N} x_i y_i$$

où  $N$  est une période commune à  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ . Puis, pour une suite périodique  $\mathbf{x}$  donnée, définissons ses coefficients d'autocorrélation  $a_n(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \langle^n \mathbf{x} \rangle$ , pour  $n \geq 0$ , et la "suite des autocorrélations"

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \left( \frac{1}{2}a_0(\mathbf{x}), a_1(\mathbf{x}), a_2(\mathbf{x}), \dots \right).$$

Un calcul simple montre que

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{0 \leq i < N} \sigma_n(\langle^i \mathbf{x} \rangle^2) &= na_0(\mathbf{x}) + 2[(n-1)a_1(\mathbf{x}) + \dots + 1a_{n-1}(\mathbf{x})] \\ &= 2h_n(\mathcal{A}\mathbf{x}) \end{aligned}$$

ce qui permet de récrire les inégalités (3.4) sous la forme suivante.

**Proposition 3.3** *Si  $\mathbf{x}$  est une suite périodique d'entiers, et  $\mathbf{s}$  une suite sturmiennne de même barycentre, on a l'inégalité  $\mathcal{A}\mathbf{x} \geq_2 \mathcal{A}\mathbf{s}$ .*

Ces inégalités quadratiques interviennent dans différents problèmes de physique, pour montrer que les configurations de plus basse énergie sont données par des suites sturmiennes; elles ont été obtenues indépendamment par Hubbard [Hub] et Pokrovsky–Uimin [PU].

On peut se demander si on peut retrouver ces inégalités à partir du théorème 1.4–corollaire 3.1. Là encore, la réponse est décevante: on peut effectivement obtenir des inégalités quadratiques, en prenant  $\varphi(x) = x^2$  dans le corollaire 3.1, mais ces inégalités sont plus faibles que celles données par la proposition 3.3.

Cependant, si on se limite à des suites  $\mathbf{x}$  constituées uniquement de '0' et de '1', on peut obtenir l'inégalité  $\mathcal{A}\mathbf{x} \geq_2 \mathcal{A}\mathbf{s}$  à partir du corollaire 3.1, de la manière suivante: prenons  $\varphi(x) = x^2$  et  $\alpha = h_1 + \epsilon h_n$ , avec  $\epsilon > 0$ ; on obtient

$$\sum_{0 \leq i < N} (h_1^2 + 2\epsilon h_1 h_n + \epsilon^2 h_n^2)(\langle^i \mathbf{x} \rangle) \geq \sum_{0 \leq i < N} (h_1^2 + 2\epsilon h_1 h_n + \epsilon^2 h_n^2)(\langle^i \mathbf{s} \rangle)$$

et ici  $\sum h_1^2(\langle^i \mathbf{x} \rangle) = N\rho = \sum h_1^2(\langle^i \mathbf{s} \rangle)$ , car tous les  $x_i$  valent 0 ou 1. En éliminant ce terme commun et en divisant par  $2\epsilon$ , il vient

$$\sum_{0 \leq i < N} \left( h_1 h_n + \frac{1}{2} \epsilon h_n^2 \right) (\langle^i \mathbf{x} \rangle) \geq \sum_{0 \leq i < N} \left( h_1 h_n + \frac{1}{2} \epsilon h_n^2 \right) (\langle^i \mathbf{s} \rangle).$$



Puis, en faisant tendre  $\epsilon \rightarrow 0$ , on obtient

$$\sum_{0 \leq i < N} (h_1 h_n)(\langle i \mathbf{x} \rangle) \geq \sum_{0 \leq i < N} (h_1 h_n)(\langle i \mathbf{s} \rangle)$$

qui sont les inégalités cherchées. (On aurait pu aussi les établir en utilisant la proposition 2.2 (ii) avec  $\kappa = 1 - \rho$ , mais là encore, on a besoin de façon essentielle de l'hypothèse que tous les  $x_i$  valent 0 ou 1.)

En conclusion, le résultat principal de cet article n'est ni plus fort, ni plus faible, que les résultats "classiques" que j'ai rappelés dans ce chapitre, en dépit de la grande similitude des énoncés. C'est un théorème différent, avec des méthodes de preuve très différentes. Ses applications, j'imagine, concerneront principalement les  $\beta$ -développements.

## Références

- [BM] T. Bousch et J. Mairesse, *Asymptotic height optimization for topical IFS, Tetris heaps, and the finiteness conjecture*. J. Amer. Math. Soc. **15**(2002), 77–111. <http://dx.doi.org/10.1090/S0894-0347-01-00378-2>
- [Haj] B. Hajek, *Extremal splittings of point processes*. Math. Oper. Res. **10**(1985), 543–556. <http://dx.doi.org/10.1287/moor.10.4.543>
- [HLP] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, et G. Pólya, *Some simple inequalities satisfied by convex functions*. Messenger Math. **58**(1929), 145–152.
- [Hub] J. Hubbard, *Generalized Wigner lattices in one dimension and some applications to tetracyanoquinodimethane (TCNQ) salts*. Phys. Rev. B **17**(1978), 494–505.
- [Jen] O. Jenkinson, *A partial order on  $\times 2$ -invariant measures*. Math. Res. Letters **15**(2008), 893–900. <http://dx.doi.org/10.4310/MRL.2008.v15.n5.a6>
- [JZ] O. Jenkinson et L. Q. Zamboni, *Characterisations of balanced words via orderings*, Theoretical Computer Science **310**(2004), 247–271. [http://dx.doi.org/10.1016/S0304-3975\(03\)00397-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0304-3975(03)00397-9)
- [MH] M. Morse et G. A. Hedlund, *Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories*. Amer. J. Math. **62**(1940), 1–42. <http://dx.doi.org/10.2307/2371431>
- [Mir] L. Mirsky, *Results and problems in the theory of doubly-stochastic matrices*. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **1**(1963), 319–334. <http://dx.doi.org/10.1007/BF00533407>
- [Muir] R. F. Muirhead, *Some methods applicable to identities and inequalities of symmetric algebraic functions of  $n$  letters*. Proc. Edinburgh Math. Soc. **21**(1903), 144–157.
- [PU] V. L. Pokrovsky et G. V. Uimin, *On the properties of monolayers of adsorbed atoms*. J. Phys. C **11**(1978), 3535–3549.

Laboratoire de Mathématique (UMR 8628 du CNRS), bât. 425/430, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France

courriel: [Thierry.Bousch@math.u-psud.fr](mailto:Thierry.Bousch@math.u-psud.fr)