NOMBRES EXPONENTIELS ET NOMBRES DE BERNOULLI

JACQUES TOUCHARD

Introduction. Les nombres entiers positifs $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ définis par la fonction génératrice

$$e^{e^z-1} = \sum_0^\infty a_n \frac{z^n}{n!},$$

et que l'on appelle nombres exponentiels jouent, pour la sommation de certaines séries, un rôle qui rappelle le rôle sommatoire des nombres de Bernoulli. Nous avons rassemblé ici les principales propriétés des nombres a_n dont plusieurs sont, croyons nous, nouvelles. L'une d'elles qui se présente spontanément, comme on le verra, est l'existence d'une orthogonalité symbolique par rapport à ces nombres. C'est ce qui nous a conduit à rechercher si l'on pouvait former une suite de polynômes orthogonaux symboliquement par rapport aux nombres de Bernoulli. On y parvient en effet, mais beaucoup moins facilement, grâce à une fraction continue donnée par Stieltjes.

Nous étudions aussi des polynômes exponentiels.

Nous ferons constamment usage du calcul symbolique, appelé calcul de Blissard. La plupart des démonstrations sont si simples qu'il suffira le plus souvent de les esquisser.

Propriétés des nombres exponentiels

1. En différentiant la formule symbolique

(1) $$e^{e^z-1} = e^{az},$$

on obtient

(2) $$a_{n+1} = (a+1)^n$$

et, en posant dans (1), $e^z - 1 = u$, on trouve

(3) $$a(a-1)\ldots(a-n+1) = 1.$$

Plus généralement, $f(u)$ désignant un polynôme quelconque,

(4) $$f(a+1) = a\,f(a),$$
$$f(a+p) = a(a-1)\ldots(a-p+1)\,f(a).$$

L'expression de $f(u)$ par la formule de Newton donne, en vertu de (3)

(5) $$f(a) = f(0) + \frac{\Delta f(0)}{1} + \frac{\Delta^2 f(0)}{2!} + \ldots$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1956-034-1 Published online by Cambridge University Press

et aussi

$$f(a+x) = f(x) + \frac{\Delta f(x)}{1} + \frac{\Delta^2 f(x)}{2!} + \ldots,$$

les différences étant prises pour la suite des valeurs $x, x+1, x+2, \ldots$ de la variable. En particulier

$$(6) \qquad \begin{aligned} a_p &= \frac{\Delta 0^p}{1} + \frac{\Delta^2 0^p}{2!} + \ldots + \frac{\Delta^p 0^p}{p!}, & p \geqslant 1, \\ a_{p+1} &= 1^p + \frac{\Delta 1^p}{1} + \frac{\Delta^2 1^p}{2!} + \ldots + \frac{\Delta^p 1^p}{p!}, & p \geqslant 0. \end{aligned}$$

Dans (5), substituons les expressions des différences successives, savoir

$$\Delta^p f(0) = f(p) - \binom{p}{1} f(p-1) + \binom{p}{2} f(p-2) - \ldots,$$

admettons ensuite que le polynôme $f(u)$ soit de degré $\leqslant n$ et posons

$$w(n) = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!};$$

nous obtiendrons

$$f(a) = w(n) f(0) + \ldots + w(n-i) \frac{f(i)}{i!} + \ldots + w(0) \frac{f(n)}{n!}$$

et, en faisant grandir n indéfiniment,

$$e f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{n!}.$$

On voit d'ailleurs directement, en multipliant les deux membres de (1) par e^{xz} et en développant que

$$e(a+x)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x+i)^n}{i!}$$

et que, $f(u)$ désignant un polynôme quelconque,

$$(7) \qquad e f(a+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(x+n)}{n!}.$$

C'est là la propriété sommatoire des nombres exponentiels. En particulier

$$(8) \qquad \begin{cases} e\, a_{n+1} = 1^n + \dfrac{2^n}{1} + \dfrac{3^n}{2!} + \ldots, & n \geqslant 0, \\ e\, a_0 = \displaystyle\sum_0^{\infty} \frac{1}{n!} \end{cases}$$

Les valeurs suivantes sont empruntées à Bell **(4)**. Le calcul a été poursuivi par Becker **(1)** jusqu'à l'indice $n = 35$ et par Miksa **(6a**, p. 54**)** jusqu'à l'indice $n = 51$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1956-034-1 Published online by Cambridge University Press

n	a_n	n	a_n
0	1		
1	1	6	203
2	2	7	877
3	5	8	4140
4	15	9	21147
5	52	10	115975

2. Remplaçons maintenant, dans l'équation (5), $f(x)$ par $\Delta^n f(x)$ et faisons usage, au premier membre, de la formule (4) pour $p = 0, 1, 2, \ldots, n$, nous aurons symboliquement

$$h_n(a) f(a) = \Delta^n f(0) + \frac{\Delta^{n+1} f(0)}{1!} + \frac{\Delta^{n+2} f(0)}{2!} + \ldots,$$

où

$$h_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} x(x-1)\ldots(x-n+i+1). \tag{9}$$

On en déduit que

$$a^p h_n(a) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant p < n, \\ n!, & p = n. \end{cases} \tag{10}$$

Grâce à ces formules on peut, connaissant $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ et le seul polynôme $h_n(x)$, calculer $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n}$. On voit de plus que les polynômes $h_n(x)$ jouissent de la belle propriété d'être orthogonaux symboliquement par rapport aux nombres a_n:

$$h_m(a)\, h_n(a) = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ m!, & m = n. \end{cases} \tag{11}$$

D'après (9), la fonction génératrice des polynômes $h_n(x)$ est

$$(1+z)^x e^{-z} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x) \frac{z^n}{n!}.$$

En faisant, dans (7), $x = 0$ et $f(u) = h_m(u) h_n(u)$, on voit, d'après (11), que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_m(k)\, h_n(k)}{k!} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ em!, & m = n. \end{cases}$$

C'est là un résultat qui se rattache à la théorie des polynômes orthogonaux de Charlier-Poisson **(10)**:

$$\begin{aligned}
h_0 &= 1, \\
h_1 &= x - 1, \\
h_2 &= x^2 - 3x + 1, \\
h_3 &= x^3 - 6x^2 + 8x - 1, \\
h_4 &= x^4 - 10x^3 + 29x^2 - 24x + 1, \\
h_5 &= x^5 - 15x^4 + 75x^3 - 145x^2 + 89x - 1, \\
h_6 &= x^6 - 21x^5 + 160x^4 - 545x^3 + 814x^2 - 415x + 1.
\end{aligned}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1956-034-1 Published online by Cambridge University Press

3. Les propriétés exposées dans les deux paragraphes précédents sont fondamentales. En voici d'autres.

Dans (1), posons $e^z = 1/(1-x)$ et divisons par $(1-x)$, nous aurons

$$(1-x)^{-1} e^{x/(1-x)} = (1-x)^{-a-1}.$$

Le premier membre se développe au moyen des polynômes de Laguerre, d'où

$$(12) \qquad (a+1)(a+2)\ldots(a+n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 i!.$$

Cette formule résulte aussi de la relation

$$(a+x)(a+x-1)\ldots(a+x-n+1) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x(x-1)\ldots(x-n+1).$$

Dans (1), posons $e^z = (1+x)^2$, nous aurons

$$e^{2x+x^2} = (1+x)^{2a}.$$

Le premier membre se développe au moyen des polynômes d'Hermite, d'où

$$2a(2a-1)\ldots(2a-n+1) = n!\sum_i \frac{1}{i!}\frac{2^{n-2i}}{(n-2i)!},$$

la somme s'étendant aux valeurs de i depuis zéro jusqu'à l'entier de $\frac{1}{2}n$.

Faisons maintenant, dans (1), $e^z = (1-x)^{\frac{1}{2}}$, il vient

$$(13) \qquad e^{(1-x)^{\frac{1}{2}}-1} = (1-x)^{\frac{1}{2}a}.$$

Si l'on pose, pour un moment,

$$(14) \qquad y(x) = -e^{(1-x)^{\frac{1}{2}}-1} = \sum_0^\infty \frac{c_n}{2^n}\frac{x^n}{n!},$$

la fonction $y(x)$ satisfait à l'équation différentielle

$$(4-4x)\,y''(x) = 2\,y'(x) + y(x),$$

d'où se tire la récurrence

$$(15) \qquad \begin{aligned} &c_{n+2} = (2n+1)\,c_{n+1} + c_n, \\ &c_0 = -1, \qquad c_6 = 329, \\ &c_1 = 1, \qquad c_7 = 3655, \\ &c_2 = 0, \qquad c_8 = 47844, \\ &c_3 = 1, \qquad c_9 = 721315, \\ &c_4 = 5, \qquad c_{10} = 12310199, \\ &c_5 = 36, \qquad c_{11} = 234615096, \end{aligned}$$

et l'on voit, d'après (15), qu'à partir de $n = 4$ les nombres c_n sont les dénominateurs des réduites de la fraction continue

$$\frac{1|}{|5} + \frac{1|}{|7} + \frac{1|}{|9} + \frac{1|}{|11} + \ldots$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1956-034-1 Published online by Cambridge University Press

qui est une fraction continue de Gauss. On en déduit l'expression de c_{n+4}, pour $n \geqslant 0$

$$\begin{aligned}(16)\qquad c_{n+4} = 5\cdot 7\cdot 9 \ldots (2n+5)\Big[1 &+ \binom{n}{1}\frac{1}{5\cdot(2n+5)} \\ &+ \binom{n-1}{2}\frac{1}{5\cdot 7\cdot(2n+3)\cdot(2n+5)} \\ &+ \binom{n-2}{3}\frac{1}{5\cdot 7\cdot 9\cdot(2n+1)(2n+3)(2n+5)} + \ldots\Big].\end{aligned}$$

Les formules (13) et (14) donnent alors

$$(17)\qquad a(a-2)(a-4)\ldots(a-2k+2) = (-1)^{k-1}c_k.$$

Par analogie avec la formule (3), considérons l'intégrale

$$\frac{(n-1)!}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)} = \int_0^1 (1-x)^a x^{n-1}dx.$$

Comme on a symboliquement

$$(1-x)^a = e^{-x},$$

cette égalité devient

$$(18)\qquad \frac{(n-1)!}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)} = \int_0^1 e^{-x}x^{n-1}\,dx = P(n),$$

$P(x)$ désignant la fonction bien connue de Prÿm. On a donc

$$\frac{1}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)} = \frac{P(n)}{\Gamma(n)} = e^{-1}\Big[e - 1 - \frac{1}{1} - \frac{1}{2!} - \ldots - \frac{1}{(n-1)!}\Big]$$

ou bien, d'après une propriété connue de $P(z)$,

$$\frac{e}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(n+i)},$$

ce qui s'accorde avec la formule (7), quand on y fait $x = 0$ et $f(u) = \Gamma(u+1)/\Gamma(u+n+1)$. Il est facile de démontrer que si l'on développe le premier membre de (18) suivant les puissances positives de a et si l'on somme, par la méthode de Borel, la série divergente obtenue en remplaçant a^n par a_n, on obtient $P(n)$.

Considérons enfin les nombres

$$q_n = a_n a_0 - \binom{n}{1}a_{n-1}a_1 + \binom{n}{2}a_{n-2}a_2 - \ldots + (-1)^n a_0 a_n$$

ou, symboliquement,

$$(19)\qquad q_n = (a-a')^n.$$

Ces nombres q_n sont les invariants quadratiques des formes binaires $(x+ay)^n$. Ceux d'indice impair sont nuls. D'après (19), leur fonction génératrice est

https://doi.org/10.4153/CJM-1956-034-1 Published online by Cambridge University Press

$$e^{e^z+e^{-z}-2} = \sum_0^\infty q_n \frac{z^n}{n!} = e^{qz} \tag{20}$$

et, en différentiant cette équation, on obtient la récurrence très simple

$$q_{n+1} = (q+1)^n - (q-1)^n,$$

qui donne

$$\begin{aligned} q_0 &= 1, & q_8 &= 3614,\\ q_2 &= 2, & q_{10} &= 99302,\\ q_4 &= 14, & q_{12} &= 3554894,\\ q_6 &= 182, & q_{14} &= 159175382. \end{aligned}$$

Dans (20), changeons z en $2\,iz$, remarquons que

$$e^{2iz} + e^{-2iz} - 2 = -4\sin^2 z$$

et posons $\sin z = \frac{1}{2}u$, nous obtenons, puisque $q_{2n+1} = 0$, l'égalité symbolique

$$e^{-u^2} = \cos\left(2\,q \arcsin\frac{u}{2}\right). \tag{21}$$

Or on sait que

$$\cos\left(2\,m \arcsin\frac{u}{2}\right) = 1 - \frac{m^2}{2!}u^2 + \frac{m^2(m^2-1^2)}{4!}u^4 - \dots .$$

Le développement des deux membres de (21) conduit donc à la formule

$$q^2(q^2-1^2)(q^2-2^2)\dots[q^2-(k-1)^2] = \frac{(2k)!}{k!}. \tag{22}$$

Les nombres q_n jouissent d'une propriété sommatoire que nous établirons plus loin.

4. Une définition intéressante des nombres exponentiels a_n a été donnée par Broggi **(5)** au moyen de la série asymptotique

$$I(x) = e^{-1}\int_0^1 t^{x-1}e^t dt = \sum_{i=0}^\infty \frac{(-1)^i a_i}{x^{i+1}}, \qquad R(x) > 0 \tag{23}$$

qu'on obtient en développant d'abord e^t, en intégrant terme à terme, en développant ensuite les fractions suivant les puissances de $1/x$ et en ayant égard aux formules (8). Or la fonction $\mathrm{I}(x)$ peut être représentée par la fraction continue

$$I(x) = \frac{1|}{|x+1} - \frac{1|}{|x+2} - \frac{2|}{|x+3} - \frac{3|}{|x+4} - \dots$$

En désignant les réduites par α_n/β_n, on a

$$\frac{\alpha_0}{\beta_0} = \frac{0}{1}, \quad \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{1}{x+1}, \dots$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1956-034-1 Published online by Cambridge University Press

et, en général, α_n est un polynôme de degré $n - 1$, β_n un polynôme de degré n, qui satisfont tous les deux à l'équation aux différences

$$u_n = (x + n)\, u_{n-1} - (n - 1)\, u_{n-2}.$$

Partant de cette relation et des valeurs initiales $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = x + 1$, un calcul facile montre que

$$\sum_0^\infty \beta_n(x) \frac{z^n}{n!} = (1 - z)^{-x} e^z,$$

d'où se tire l'expression

$$\beta_n(x) = (-1)^n h_n(-x),$$

$h_n(x)$ étant le polynôme (9). Il résulte alors de la théorie des fractions continues que

$$\frac{\alpha_n(x)}{\beta_n(x)} = \frac{a_0}{x} - \frac{a_1}{x^2} + \ldots - \frac{a_{2n-1}}{x^{2n}} + \frac{1}{x^{2n+1}} R_n\left(\frac{1}{x}\right),$$

$R_n(1/x)$ désignant une série en $1/x$, et les propriétés d'orthogonalité symbolique des polynômes $h_n(x)$, que nous avons rencontrées au §2, sont, comme il est aisé de le voir, une conséquence immédiate de cette formule. Nous utiliserons cette remarque plus loin.

5. Epstein **(5)** a considéré la fonction entière de s

$$g(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{1}\frac{1}{2^s} + \frac{1}{2!}\frac{1}{3^s} + \ldots. \tag{24}$$

On a évidemment

$$\begin{cases} g(-n) = e\, a_{n+1}, & n \geqslant 0, \\ g(1) = e - 1 \end{cases} \tag{25}$$

et, d'après une intégrale eulérienne classique,

$$g(n) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^1 e^t \log^{n-1} t\, dt, \qquad n \geqslant 1 \tag{26}$$

formule que nous généraliserons plus loin. Epstein a calculé les valeurs de $e^{-1} g(n)$, pour n entier positif jusqu'à $n = 21$, mais, sauf pour $n = 0$ et $n = 1$, ces valeurs ne paraissent pas pouvoir s'exprimer à l'aide de nombres connus.

En posant $g(n) = g_n$, on vérifie sans peine la relation symbolique

$$(1 - g)(1 - 2g) \ldots (1 - ng)$$
$$= \frac{1}{(n+1)^n} + \frac{1}{1}\frac{1}{(n+2)^n} + \frac{1}{2!}\frac{1}{(n+3)^n} + \ldots$$

qui présente une certaine analogie avec (3) et constitue une formule de récurrence approchée des nombres g_n.

https://doi.org/10.4153/CJM-1956-034-1 Published online by Cambridge University Press

Polynômes exponentiels

6. Les polynômes $\phi_n(x)$ dont nous désirons nous occuper et qui se présentent souvent en analyse sont définis par la fonction génératrice

$$e^{x(e^z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x)\,\frac{z^n}{n!}. \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
\phi_0 &= 1,\\
\phi_1 &= x,\\
\phi_2 &= x^2 + x,\\
\phi_3 &= x^3 + 3\,x^2 + x,\\
\phi_4 &= x^4 + 6\,x^3 + 7\,x^2 + x,\\
\phi_5 &= x^5 + 10\,x^4 + 25\,x^3 + 15\,x^2 + x.
\end{aligned}$$

On peut aussi les définir par le développement asymptotique

$$e^{-x}\int_0^1 e^{xt}t^{z-1}dt = \frac{1}{z}\,\phi_0(x) - \frac{1}{z^2}\,\phi_1(x) + \ldots + \frac{(-1)^n}{z^{n+1}}\,\phi_n(x) + \ldots.$$

La plupart des propriétés des nombres a_n peuvent être étendues aux polynômes ϕ_n. Enumérons les principales:

$$\begin{aligned}
\phi_n(1) &= a_n,\\
\phi_{n+1}(x) &= x(\phi + 1)^n,\\
\phi_{n+1}(x) &= x(\phi_n + \phi_n'),\\
\phi_n' &= (\phi + 1)^n - \phi_n,\\
\phi(\phi - 1)\ldots(\phi - n + 1) &= x^n.
\end{aligned} \tag{28}$$

Si on pose $j_n(x) = x(x-1)\ldots(x-n+1)$, cette formule s'écrit symboliquement $j_n(\phi) = x^n$ et l'on a aussi $\phi_n(j) = x^n$. Les polynômes j_n *et* ϕ_n sont donc inverses les uns des autres.

Nous avons ensuite

$$\begin{aligned}
\phi_n(x) &= 0^n + \frac{x}{1}\,\Delta 0^n + \frac{x^2}{2!}\,\Delta^2 0^n + \ldots + \frac{x^n}{n!}\,\Delta^n 0^n,\\
e^x\phi_0(x) &= \sum_{s=0}^{\infty}\frac{x^s}{s!},\\
e^x\phi_{n+1}(x) &= x\sum_{s=0}^{\infty}(s+1)^n\,\frac{x^s}{s!}, \qquad n \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Plus généralement, $f(u)$ désignant un polynôme quelconque de degré n, on a

$$\begin{aligned}
x f(\phi + 1) &= f(\phi),\\
x^p f(\phi + p) &= \phi(\phi - 1)\ldots(\phi - p + 1)f(\phi),
\end{aligned} \tag{29}$$

$$f(\phi) = f(0) + \frac{x}{1}\,\Delta f(0) + \frac{x^2}{2!}\,\Delta^2 f(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}\,\Delta^n f(0),$$

$$e^x f(\phi + k) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{x^s f(s+k)}{s!}. \tag{30}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1956-034-1 Published online by Cambridge University Press

Cette dernière formule, où k est un nombre quelconque, exprime la propriété sommatoire des polynômes ϕ_n. L'équation (28) est équivalente à

$$\frac{\phi_n(t)\, e^t}{t} = \frac{d}{dt}[\phi_{n-1}(t)\, e^t].$$

En utilisant cette relation et en intégrant plusieurs fois par parties le second membre de (26), on obtient, k étant un entier positif ou nul,

$$g(n) = \frac{(-1)^{n+k}}{(n+k)!}\int_0^1 \frac{\phi_{k+2}(t)}{t}\, e^t \log^{n+k} t\, dt, \qquad n \geqslant -k,$$

qui est un prolongement de l'intégrale (26) pour des valeurs négatives de n.

7. En raisonnant comme au §2 et en s'appuyant sur la formule (29), on verra que les polynômes

$$H_n(x, z) = z(z-1)\ldots(z-n+1) - \binom{n}{1} x\, z(z-1)\ldots(z-n+2) + \binom{n}{2} x^2 z(z-1)\ldots(z-n+3) - \ldots + (-1)^n x^n$$

satisfont aux relations symboliques

$$\begin{aligned} H_n(x, \phi) &= 0, \\ \phi H_n(x, \phi) &= 0, \\ &\ldots\ldots \\ \phi^{n-1} H_n(x, \phi) &= 0, \\ \phi^n H_n(x, \phi) &= n!\, x^n \end{aligned}$$

et que, par conséquent, ces polynômes sont orthogonaux symboliquement par rapport aux polynômes $\phi_n(x)$. En faisant usage de la formule (30) pour $k = 0$ et $f(u) = H_m(x, u) \cdot H_n(x, u)$ on aura

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^s H_m(x, s)\, H_n(x, s)}{s!} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ m!\, x^m e^x, & m = n. \end{cases}$$

On observera que ce sont là de pures identités et que l'on peut y remplacer les diverses puissances de x par des nombres arbitraires.

Notons encore que, par analogie avec les nombres q_n du §3, on peut considérer les polynômes définis par l'égalité

$$\chi_n(x) = \phi_n\phi_0 - \binom{n}{1}\phi_{n-1}\phi_1 + \binom{n}{2}\phi_{n-2}\phi_2 - \ldots + (-1)^n \phi_0\phi_n.$$

On démontrera comme au §3 la belle relation symbolique

$$\chi^2(\chi^2 - 1^2)(\chi^2 - 2^2)\ldots[\chi^2 - (k-1)^2] = \frac{(2k)!}{k!} x^k.$$

Propriétés arithmétiques

8. Les nombres exponentiels satisfont à diverses congruences dont les plus simples se tirent de (2), (3), (4) et de la congruence identique de Lagrange

$$x(x-1)\dots(x-p+1) \equiv x^p - x \pmod{p} \tag{31}$$

où p désigne, comme dans tout le reste de ce paragraphe, un nombre premier. Voici quelques unes de ces congruences

$$a_p \equiv 2, \quad a_{p+1} \equiv 3, \quad a_{p^v+h} \equiv v\, a_h + a_{h+1} \pmod{p}, \tag{32}$$

et notamment

$$a_{p^v} \equiv v + 1 \pmod{p}$$

relation qui montre que la suite des restes (mod p) de $a_1, a_p, a_{p^2}, \dots$ admet la période p.

D'après les formules (4) et (12) on a symboliquement

$$[a(a-1)\dots(a-p+1)]^2 = (a+1)(a+2)\dots(a+p) \equiv 1 + p! \pmod{p^2}$$

or, d'après le théorème de Wilson

$$p! + p \equiv 0 \pmod{p^2}$$

donc

$$[a(a-1)\dots(a-p+1)]^2 \equiv 1 - p \pmod{p^2}. \tag{33}$$

D'autre part, en vertu de (31),

$$[x(x-1)\dots(x-p+1)]^2 - 2x(x-1)\dots(x-p+1)(x^p - x) + (x^p - x)^2 \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

En remplaçant x^k par a_k et en transformant le second terme à l'aide de (4), on obtient

$$[a(a-1)\dots(a-p+1)]^2 - 2(a_p - a_1 - p) + a_{2p} - 2a_{p+1} + a_2 \equiv 0 \pmod{p^2},$$

et en comparant à (33) on trouve la relation

$$a_{2p} - 2\, a_{p+1} - 2\, a_p + p + 5 \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

Une autre congruence concerne les nombres c_k du §3 et se tire de la formule (17). On a évidemment, lorsque p est un nombre premier impair,

$$x(x-2)(x-4)\dots(x-2p+2) \equiv x^p - x \pmod{p}$$

et, par conséquent, d'après (17) et (32)

$$c_p \equiv 1 \pmod{p}, \qquad p \text{ premier impair.}$$

On a ensuite, d'après (15),

$$c_{p+2} - c_{p+1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Considérons maintenant les nombres q_n du §3 et supposons encore p premier impair. On sait que

$$x(x-1^2)(x-2^2)\dots\left[x - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2\right] \equiv x^{\frac{1}{2}(p+1)} - x \pmod{p}. \tag{34}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1956-034-1 Published online by Cambridge University Press

D'autre part, dans la formule (22), faisons $k = \frac{1}{2}(p+1)$; le second membre devient divisible par p. Donc, en faisant dans (34) $x = q^2$ symboliquement, on obtient

$$q_{p+1} - q_2 \equiv 0 \pmod{p},$$

ou bien

$$(35) \qquad q_{p+1} \equiv 2 \pmod{p}, \qquad p \text{ premier impair.}$$

Maintenant, on a aussi identiquement

$$(x-1^2)(x-2^2)\ldots[x-(p-1)^2] \equiv (x^{\frac{1}{2}(p-1)}-1)^2 \pmod{p};$$

d'où

$$(36) \qquad x(x-1^2)\ldots[x-(p-1)^2] \equiv x^p - 2x^{\frac{1}{2}(p+1)} + x \pmod{p};$$

mais si dans (22) on fait $k = p$ le second membre est divisible par p. On a donc, en remplaçant dans (36) x par q^2 symboliquement

$$q_{2p} - 2\,q_{p+1} + q_2 \equiv 0 \pmod{p},$$

et, en vertu de (35)

$$(37) \qquad q_{2p} \equiv 2 \pmod{p}, \qquad p \text{ premier impair.}$$

En comparant (35) et (37) on voit que, si p et $2p-1$ sont tous deux premiers impairs, on a

$$q_{2p} \equiv 2 \pmod{p(2p-1)},$$

congruence que l'on peut vérifier pour $p = 3$ et $p = 7$ et qui a lieu aussi pour $p = 2$.

Les polynômes $\phi_n(x)$ satisfont aussi à diverses congruences, soit qu'on considère x comme un nombre entier, soit plutôt qu'on considère x comme une indéterminée, racine d'une congruence irréductible (mod p), c'est-à-dire comme une imaginaire de Galois. Nous renverrons à ce sujet à **(12)**.

Intégrales définies

9. On peut de plusieurs manières obtenir l'expression des nombres a_n, des polynômes ϕ_n et de la fonction $g(s)$ par des intégrales définies. En voici quelques unes.

L'intégrale eulérienne de deuxième espèce donne d'abord

$$\Gamma(s)\,g(s) = \int_0^\infty e^{-x}e^{e^{-x}}x^{s-1}dx, \qquad R(s) > 0$$

et on en tire par un procédé connu la formule, valable dans tout le plan s,

$$\frac{g(1-s)}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^z e^{e^z} z^{-s} dz$$

où C désigne un lacet partant de $-\infty$ avec l'argument $-\pi$ pour z et y revenant avec l'argument $+\pi$, après avoir entouré l'origine.

https://doi.org/10.4153/CJM-1956-034-1 Published online by Cambridge University Press

En partant d'une formule, dûe à Laplace,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iuz}dz}{(1+iz)^k} = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{\Gamma(k)} u^{k-1}e^{-u}, & u > 0, \\ 0, & u < 0, \end{cases}$$

et où k est positif, on obtient à l'aide de (8), après quelques calculs

$$\frac{\pi a_n}{\Gamma(n)} = \int_0^\infty \frac{e^{\cos z}}{(1+z^2)^{\frac{1}{2}n}} \cos[z + e \sin z - n \operatorname{arctg} z]\, dz, \qquad n \geqslant 1.$$

10. Si l'on considère la distribution de Poisson

$$\text{(38)} \qquad d\alpha(x, t) = \frac{e^{-x}x^t}{t!}, \qquad t = 0, 1, 2, 3, \dots$$

c'est-à-dire la "step-function" ayant le saut $d\,\alpha(x, t)$ aux points $t = 0, 1, 2, 3, \dots$, on obtient l'intégrale de Stieltjes

$$e^{x(e^z-1)} = \int_0^\infty e^{zt} d\alpha(x, t)$$

et, par suite,

$$\phi_n(x) = \int_0^\infty t^n d\alpha(x, t), \qquad n \geqslant 0.$$

Les polynômes $\phi_n(x)$ sont donc les moments de la distribution (38). On a aussi, pour toute valeur de s,

$$\int_1^\infty t^{1-s} d\alpha(1, t) = e^{-1}g(s).$$

11. Mais l'expression la plus intéressante des nombres a_n paraît être celle qui se déduit de la formule **(11)**

$$\text{(39)} \qquad e^x = \int_0^\infty \frac{x^z dz}{\Gamma(1+z)} + \int_0^\infty \frac{e^{-xz}dz}{z(\pi^2 + \log^2 z)}, \qquad R(x) \geqslant 0.$$

En remplaçant x par e^x, en différentiant n fois et en tenant compte de (6), on obtient

$$e\, a_n = \int_0^\infty \frac{z^n dz}{\Gamma(1+z)} - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-z}\Gamma(n) \sin\{n \operatorname{arctg}(\pi/\log z)\}\, dz}{(\pi^2 + \log^2 z)^{\frac{1}{2}n}},$$

équation qui est exacte même pour $n = 0$.

Dans la formule (39), remplaçons x par $x\,e^t$ et développons suivant les puissances de t, nous obtiendrons

$$e^x \phi_n(x) = \int_0^\infty \frac{x^z z^n dz}{\Gamma(1+z)} + \int_0^\infty \frac{e^{-u}\phi_n(-u)\, du}{u\{\pi^2 + \log^2(x/u)\}}, \qquad R(x) \geqslant 0, n \geqslant 0.$$

Faisons dans cette équation, successivement $n = 0, 1, 2, \dots, p$, rappelons nous que la factorielle $j_p(x)$ du §6 satisfait à la relation symbolique $j_p(\phi) = x^p$ et nous trouverons

$$e^x x^p = \int_{-p}^\infty \frac{x^{z+p}dz}{\Gamma(1+z)} + (-1)^p \int_0^\infty \frac{e^{-u}u^p du}{u\{\pi^2 + \log^2(x/u)\}}.$$

Nombres exponentiels à plusieurs arguments

12. Nous indiquerons rapidement une généralisation des nombres exponentiels a_n. Si on pose

$$a_n(\omega, \omega') = (\omega a + \omega' a')^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \omega^{n-i} \omega'^{i} a_{n-i} a_i,$$

ω et ω' étant deux constantes, la fonction génératrice des nombres $a_n(\omega, \omega')$ sera

$$e^{e^{\omega z}-1} e^{e^{\omega' z}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\omega, \omega') \frac{z^n}{n!}$$

et, en multipliant les deux membres de cette égalité par e^{xz} et développant suivant les puissances de z, on verra que

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(x + m\omega + n\omega')}{m!\, n!} = e^2 f[x + a(\omega, \omega')] \tag{40}$$

où $f(u)$ désigne un polynôme arbitraire. On peut ainsi former des nombres a_n dépendant d'un nombre quelconque d'arguments $\omega, \omega', \omega'', \ldots$. En particulier, pour $\omega = 1$, $\omega' = -1$, on aura

$$a_k(1, -1) = q_k,$$

q_k désignant les nombres définis par (19) au §3 et, par suite

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(x + m - n)}{m!\, n!} = e^2 f(x + q)$$

symboliquement. C'est la propriété sommatoire des nombres q_n. On a notamment

$$e^2 q_{2k} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m-n)^{2k}}{m!\, n!}.$$

On peut généraliser d'une manière analogue les polynômes $\phi_n(x)$. En particulier, on verra que

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{m+n}(m-n)^k}{m!\, n!} = e^{2x} \chi_k(x)$$

où $\chi_n(x)$ est le polynôme introduit au §7.

Nombres de Bernoulli

13. Les nombres de Bernoulli $b_0, b_1, b_2, \ldots$ sont définis par

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{0}^{\infty} \frac{b_n x^n}{n!}, \quad b_0 = 1, \quad b_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad b_2 = \tfrac{1}{6}, \ldots ; \; b_{2n+1} = 0, \quad n \geqslant 1,$$

et nous cherchons une suite de polynômes $Q_n(x)$ orthogonaux symboliquement par rapport à ces nombres, c'est-à-dire tels que l'on ait symboliquement

$$b^p Q_n(b) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant p < n, \\ K_n, & p = n, \end{cases} \tag{41}$$

K_n étant une constante.

https://doi.org/10.4153/CJM-1956-034-1 Published online by Cambridge University Press

Il est nécessaire pour cela, comme nous l'avons remarqué au §4, de savoir mettre sous forme de fraction continue d'un type approprié (7, chap. 9) la série asymptotique

$$\psi(x+1) = \frac{b_0}{x} + \frac{b_1}{x^2} + \frac{b_2}{x^3} + \dots. \tag{42}$$

Les polynômes $Q_n(x)$ seront alors les dénominateurs des réduites successives. On sait par la théorie de la fonction Γ que

$$\psi(x+1) = \frac{d^2 \log\Gamma(x+1)}{dx^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}, \tag{43}$$

et il se trouve que l'on déduit immédiatement d'un résultat de Stieltjes (9, p. 378) la fraction continue ayant le type qui convient

$$\psi(x+1) = \frac{2}{|2x+1} + \frac{\lambda_1}{|2x+1} + \frac{\lambda_2}{|2x+1} + \frac{\lambda_3}{|2x+1} + \dots,$$

où

$$\lambda_n = \frac{n^4}{4n^2-1}.$$

Les polynômes $Q_n(x)$ vérifient donc la formule de récurrence

$$Q_{n+1}(x) = (2x+1)\,Q_n(x) + \frac{n^4}{4n^2-1}\,Q_{n-1}(x) \tag{44}$$

à l'aide de laquelle nous avons calculé:

$$Q_0 = 1,$$

$$Q_1 = 2x+1,$$

$$Q_2 = 4\left(x^2 + x + \frac{1}{3}\right),$$

$$Q_3 = 4\left(2x^3 + 3x^2 + \frac{11}{5}x + \frac{3}{5}\right),$$

$$Q_4 = 16\left(x^4 + 2x^3 + \frac{17}{7}x^2 + \frac{10}{7}x + \frac{12}{35}\right),$$

$$Q_5 = 16\left(2x^5 + 5x^4 + \frac{80}{9}x^3 + \frac{25}{3}x^2 + \frac{274}{63}x + \frac{20}{21}\right),$$

$$Q_6 = 64\left(x^6 + 3x^5 + \frac{80}{11}x^4 + \frac{105}{11}x^3 + \frac{89}{11}x^2 + \frac{42}{11}x + \frac{60}{77}\right),$$

$$Q_7 = 64\left(2x^7 + 7x^6 + \frac{287}{13}x^5 + \frac{490}{13}x^4 + \frac{6559}{143}x^3 + \frac{4949}{143}x^2 + \frac{198}{13}x + \frac{420}{143}\right),$$

$$Q_8 = 256\left(x^8 + 4x^7 + \frac{238}{15}x^6 + \frac{168}{5}x^5 + \frac{2135}{39}x^4 + \frac{756}{13}x^3 + \frac{88316}{2145}x^2 + \frac{12176}{715}x + \frac{448}{143}\right),$$

$$Q_9 = 256\left(2x^9 + 9x^8 + \frac{744}{17}x^7 + \frac{1890}{17}x^6 + \frac{19698}{85}x^5 + \frac{5481}{17}x^4 + \frac{71756}{221}x^3 + \frac{47340}{221}x^2 + \frac{1026576}{12155}x + \frac{36288}{2431}\right).$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1956-034-1 Published online by Cambridge University Press

Comme vérification de ces expressions, nous observerons que, d'après (44), on a

$$Q_{n+1}(-\tfrac{1}{2}) = \frac{n^4}{4n^2-1} Q_{n-1}(-\tfrac{1}{2})$$

d'où l'on déduit

$$\tag{45} \begin{aligned} Q_{2n+1}(-\tfrac{1}{2}) &= 0, \\ Q_{2n}(-\tfrac{1}{2}) &= \frac{[1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)]^4}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(4n-1)}. \end{aligned}$$

La constante K_n qui figure dans (41) s'obtient en multipliant les deux membres de (44) par x^{n-1} et en remplaçant x symboliquement par b, ce qui donne

$$0 = 2K_n + \frac{n^4}{4n^2-1} K_{n-1}$$

et comme $K_0 = b_0 Q_0(b) = 1$, on obtient

$$\tag{46} K_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}\,\frac{1}{2^n}\,\frac{[n!]^4}{[1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)]^2}.$$

Le coefficient de x^n dans $Q_n(x)$ étant égal à 2^n, on a les relations d'orthogonalité symbolique

$$\tag{47} Q_m(b)\,Q_n(b) = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 2^n K_n, & m = n, \end{cases}$$

où K_n a la valeur (46).

Si l'on considère la série

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x)\frac{z^n}{n!},$$

on peut former au moyen de (44), une équation différentielle linéaire du troisième ordre à laquelle elle satisfait et montrer qu'elle converge pour $|z| < 2$. C'est ce qu'on vérifie, en faisant $x = -\frac{1}{2}$, à l'aide de (45) et de la formule de Stirling. Mais l'expression générale des polynômes $Q_n(x)$ nous échappe.

14. Les formules symboliques (47) donnent naissance à une orthogonalité véritable de la manière suivante.

Il est facile de démontrer, au moyen du calcul des résidus et en vertu de (43), que

$$\psi(x+1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \pi\frac{\cot \pi z}{(z-x)^2}\,dz, \qquad -1 < c < 0$$

le point x étant soit à droite soit à gauche de la droite d'intégration d'abscisse c. Intégrons par parties, nous obtenons

$$\psi(x+1) = \frac{\pi i}{2}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{\sin^2 \pi z}\,\frac{dz}{z-x}.$$

En développant $1/(z-x)$ suivant les puissances de $1/x$, sans avoir égard à la convergence et en comparant à la série asymptotique (42), on est conduit à penser que

https://doi.org/10.4153/CJM-1956-034-1 Published online by Cambridge University Press

$$b_n = -\frac{\pi i}{2}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{z^n dz}{\sin^2 \pi z}, \qquad -1 < c < 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{48}$$

Or cette expression des nombres de Bernoulli qui parait être restée inaperçue ou, en tous cas, peu employée n'est en définitive, qu'une application d'une belle formule, établie par Jensen, pour la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, et rappelée par Lindelöf (**6**, p. 103), savoir

$$(s-1)\,\zeta(s) = 4\pi\int_0^\infty (\tfrac{1}{4}+t^2)^{\frac{1}{2}(1-s)}\,\frac{\cos[(s-1)\operatorname{arctg} 2t]}{(e^{\pi t}+e^{-\pi t})^2}\,dt. \tag{49}$$

Si l'on tient compte, en effet, que

$$b_n = (-1)^{n-1} n\zeta(1-n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

et que

$$(\tfrac{1}{2}+ti)^n + (\tfrac{1}{2}-ti)^n = 2(\tfrac{1}{4}+t^2)^{\frac{1}{2}n}\cos(n \operatorname{arctg} 2t)$$

la formule (49) donne

$$b_n = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}(-\tfrac{1}{2}+ti)^n\,\frac{dt}{(e^{\pi t}+e^{-\pi t})^2} \tag{50}$$

qui se ramène immédiatement à (48). Les deux formules (48) et (50) conviennent l'une et l'autre pour exprimer l'orthogonalité (47) des polynômes $Q_n(x)$. En choisissant (48) on aura

$$-\frac{\pi i}{2}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{Q_m(z)\,Q_n(z)}{\sin^2\pi z}\,dz = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 2^n K_n, & m = n, \end{cases}$$

où $-1 < c < 0$ et où K_n a la valeur (46).

Références

1. H. W. Becker and D. H. Browne, *Problem* E461, American Math. Monthly, *48* (1941), 701–703.

2. H. W. Becker and John Riordan, *The arithmetic of Bell and Stirling numbers*, Amer. J. Math. *70* (1948), 385–394.

3. E. T. Bell, *Exponential numbers*, Amer. Math. Monthly, *41* (1934), 411–419.

4. ———, *Exponential polynomials*, Ann. Math. *35* (1934), 258–277.

5. Léo F. Epstein, *A function related to the series for* e^{e^x}, J. Math. Phys. *18* (1939), 153–173.

6. E. Lindelof, *Le Calcul des résidus* (Paris, 1905).

6a. L. Moser and M. Wyman, *An asymptotic formula for the Bell numbers*, Trans. Royal Soc. Can. III, *49* (1955), 49–54.

7. O. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen* (Leipzig und Berlin, 1929).

8. John Riordan, *The number of impedances of an n-terminal network*, The Bell System Technical Journal, *18* (1939), 304–314.

9. T. J. Stieltjes, *Oeuvres*, Tome II.

10. G. Szegö, *Orthogonal polynomials* (New York, 1939).

11. J. Touchard, *Sur la fonction Gamma*, Bull. Soc. Math. *41* (1913), 234–242.

12. ———, *Propriétés arithmétiques de certains nombres récurrents*, Ann. Soc. Sci. de Bruzelles, 1933, 21–31.

Lausanne