BULL. AUSTRAL. MATH. SOC. 53C25,53C30
VOL. 68 (2003) [39–43]

SUR UN TYPE PARTICULIER DE VALEUR PROPRE DES SOLVARIÉTÉS D'EINSTEIN

HAMID-REZA FANAÏ

On montre que la partie nilpotente d'une solvariété d'Einstein standard, dont le type de valeur propre est égal à $(1 < 2; d_1, d_2)$, est nécessairement indécomposable si d_1 et d_2 sont premiers entre eux.

1. INTRODUCTION

Nous étudions dans cette note, certaines métriques invariantes à gauche sur les groupes de Lie résolubles.

Nous rappelons que tous les exemples connus de variétés homogènes d'Einstein non-compactes et non-plates sont isométriques aux solvariétés d'Einstein (S, Q_0) où S désigne un groupe de Lie résoluble simplement connexe muni d'une métrique invariante à gauche d'Einstein Q_0. Essentiellement nous étudions les algèbres de Lie résolubles métriques $(\mathfrak{s}, Q)$ comme nous l'avons fait dans [**3**, **4**]. Une telle algèbre de Lie métrique est appelée *standard* ([**6**]) si $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]^\perp$ est abélien. On note $\mathfrak{n} := [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ (la partie nilpotente) et $\mathfrak{a} := \mathfrak{n}^\perp$.

Soit $H_Q \in \mathfrak{s}$ le vecteur défini par

$$Q(H_Q, X) = \operatorname{tr} \operatorname{ad}_X \quad \text{pour tout } X \in \mathfrak{s}.$$

Dans la formule de ric_Q, l'application ad_{H_Q} apparaît de manière décisive. Nous étudions une propriété de cette application.

Tout d'abord, nous présentons une propriété importante trouvée par J. Heber : soit $(\mathfrak{s}, [,])$ une algèbre de Lie non-unimodulaire résoluble munie d'une métrique d'Einstein standard Q_0. Alors d'après le [**6**, Théorème 4.10], D_{H_0} la partie symétrique de ad_{H_0} $\in \operatorname{End}(\mathfrak{s})$ est aussi une dérivation (et définie positive sur $\mathfrak{n}$), où $H_0 = H_{Q_0}$ est non nul (par hypothèse de non-unimodularité).

En d'autre terme, $(\mathfrak{s}, [,], Q_0)$ est isométrique à un espace *de type Iwasawa*. Ceci implique que ad_{H_0} est un opérateur *normal* de $(\mathfrak{s}, Q_0)$. La propriété qui nous intéresse est la suivante : pour une telle algèbre de Lie $(\mathfrak{s}, [,], Q_0)$, il existe un multiple positif unique

Received 22nd October, 2002
Je remercie le Conseil de Recherches de l'Université Technologique Sharif de Téhéran, Iran pour son soutien.

$H_1 = \lambda H_0$ tel que l'opérateur normal $\mathrm{ad}_{H_1}|_{\mathfrak{n}}$ a des valeurs propres dont les parties réelles $\mu_1 < \cdots < \mu_m$ sont des entiers sans diviseur commun ([**6**, Théorème 4.14]). Les μ_i sont les valeurs propres de $D_{H_1}|_{\mathfrak{n}}$. Si $d_i, i = 1, \ldots, m$ désignent les multiplicités correspondantes, alors on appelle le $2m$-uplet

$$(\mu_1 < \cdots < \mu_m; d_1, \ldots, d_m)$$

le type de valeur propre de solvariété d'Einstein standard associée ([**6**]).

Dans la partie suivante, nous considérons le cas particulier de type de valeur propre $(1 < 2;\ d_1, d_2)$ où $\mathfrak{n}$ est nécessairement nilpotente de rang deux et $\dim \mathfrak{a} = 1$. C'est dans ce cadre que Damek et Ricci ont trouvé leurs exemples harmoniques. Récemment dans [**5**] une famille continue de solvariétés d'Einstein de courbure sectionnelle négative a été obtenue dans ce cas. Il est intéressant d'étudier les obstructions possibles sur d_1 et d_2 lorsqu'il existe une solvariété d'Einstein de type de valeur propre égal à $(1 < 2; d_1, d_2)$. Nous montrons que si d_1 et d_2 sont premiers entre eux, alors la partie nilpotente d'une telle solvariété est indécomposable.

2. Type de valeur propre $(1 < 2; d_1, d_2)$

Soit S un groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe. On note $\mathfrak{s}$ son algèbre de Lie. On désigne par $\mathrm{Der}(\mathfrak{s}) \subset \mathrm{End}(\mathfrak{s})$ l'algèbre de Lie de toutes les dérivations de $\mathfrak{s}$.

Supposons que $\mathfrak{s}$ est munie d'un produit scalaire (défini positif) Q. Comme nous avons défini auparavant, le vecteur H_Q est déterminé par $Q(H_Q, X) = \mathrm{tr}\,\mathrm{ad}_X$ pour tout $X \in \mathfrak{s}$. Il est clair que H_Q est perpendiculaire à l'algèbre dérivée $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$. Nous rappelons que S (ou $\mathfrak{s}$) est appelé unimodulaire si pour tout $X \in \mathfrak{s}, \mathrm{tr}\,\mathrm{ad}_X = 0$ ou de manière équivalente si le vecteur H_Q s'annule (pour tout Q).

Le produit scalaire Q induit une métrique riemannienne invariante à gauche sur S que l'on note toujours Q. Si le tenseur de courbure de Ricci $\mathrm{ric}(v, w) = \mathrm{tr}\, R\,(\cdot, v)w$ défini à partir de R, le tenseur de courbure de Riemann, est un multiple de la métrique Q, alors Q est appelée d'Einstein. Si Q_0 est une métrique d'Einstein sur $\big(\mathfrak{s}, [\,,\,]\big)$, la constante de proportionnalité est non-positive puisque S est non-compact ([**2**]). De plus, si ric_{Q_0} s'annule alors (S, Q_0) est une variété plate (voir par exemple [**1**]). Nous considérons donc le cas

$$\mathrm{ric}_{Q_0}(v, w) = -c \cdot Q_0(v, w)$$

avec $c > 0$. La courbure scalaire est alors égale à $sc(Q_0) = -c \cdot \dim S$. Si $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]^\perp$ (relatif à Q) est abélien, nous appelons $(\mathfrak{s}, Q)$ une algèbre de Lie standard ([**6**]).

Maintenant nous citons la propriété de rationnalité concernant les valeurs propres de D_{H_0} mentionnée auparavant dès qu'une métrique d'Einstein standard Q_0 est fixée. Nous rappelons tout d'abord le lemme crucial suivant (voir le [**6**, Lemme 4.13]).

Lemme 2.1. *Avec les notations précédentes, si $(\mathfrak{s}, [,], Q_0)$ est une algèbre de Lie non-unimodulaire résoluble munie d'une métrique d'Einstein standard Q_0, alors pour toute dérivation $A \in \mathrm{Der}(\mathfrak{s})$, nous avons*

$$c \cdot \mathrm{tr}\, A = \mathrm{tr}(D_{H_0} \circ A).$$

Remarque. La dérivation symétrique D_{H_0} est caractérisée par cette propriété. Notons que le cas $A = D_{H_0}$ donne $c = \mathrm{tr}\, D_{H_0}^2 / \mathrm{tr}\, \mathrm{ad}_{H_0}$.

Le [7, Lemme 1.4(3)] sera également utilisé dans la suite. Rappelons ce lemme.

Lemme 2.2. *Soit $(\langle H \rangle \oplus \mathfrak{n}, Q)$ une algèbre de Lie résoluble métrique. Si ad_{H_Q} est symétrique, alors pour tout vecteur $X \in \mathfrak{s}$*

$$\mathrm{ric}_{\mathfrak{s}}(X,X) = \mathrm{ric}_{\mathfrak{n}}(X,X) - Q(\mathrm{ad}_{H_Q} X, X).$$

Maintenant, supposons que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_m$ sont les valeurs propres distinctes de $D_{H_0}|_{\mathfrak{n}}$ de multiplicités $d_j = \dim \mathfrak{n}_j$ et $\mathfrak{n}_j$ les espaces propres associés dans $\mathfrak{n}$. Nous avons alors :

Théorème 2.3. (Heber) *Il existe une constante positive ω, telle que les valeurs propres de $D_{H_0} : \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}$ appartiennent à $\omega \cdot \mathbb{N}$.*

Ceci implique qu'il existe un multiple positif unique $H_1 = \lambda H_0$ tel que l'opérateur $\mathrm{ad}_{H_1}|_{\mathfrak{n}}$ a des valeurs propres dont les parties réelles $\mu_1 < \cdots < \mu_m$ sont des entiers positifs sans diviseur commun. Les μ_i sont les valeurs propres de $D_{H_1}|_{\mathfrak{n}}$. Si d_i désignent les multiplicités correspondantes, alors on appelle le $2m$-uplet

$$(\mu_1 < \cdots < \mu_m; d_1, \ldots, d_m)$$

le type de valeur propre de solvariété (non-unimodulaire) d'Einstein standard $(\mathfrak{s}, [,], Q_0)$. À l'aide du théorème précédent nous obtenons des obstructions à l'existence d'une telle métrique Q_0 sur $(\mathfrak{s}, [,])$ avec $\dim \mathfrak{a} = 1$, dès qu'un type de valeur propre est fixé. En effet, l'espace $\mathfrak{a} = \langle H \rangle$ étant de dimension 1, nous pouvons parler de type de valeur propre sans fixer une métrique d'Einstein. Dans ce cas les valeurs propres dans un type donné sont celles de ad_H (pour quelques exemples voir [6] 5.3). Nous considérons dans cette partie, le type de valeur propre $(1 < 2; d_1, d_2)$ pour $\mathfrak{s} = \langle H \rangle \oplus \mathfrak{n}$.

Dans la partie [6, (E) 5.3], il y a déjà un exemple d'une telle $\mathfrak{s}$ de type en question qui n'admet pas de métrique d'Einstein. Notre résultat fournit une condition d'indécomposabilité lorsque d_1 et d_2 sont premiers entre eux. En effet, nous allons montrer que si $(\mathfrak{s}, [,])$ admet une métrique d'Einstein Q_0, alors $\mathfrak{n} = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ est indécomposable. Ceci se fait par la méthode utilisée dans [6]. Rappelons qu'une algèbre de Lie $(\mathfrak{n}, [,])$ est dite décomposable s'il existe deux sous-algèbres non triviales $\mathfrak{n}_1$ et $\mathfrak{n}_2$ telles que $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2$ et $[\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2] = \{0\}$. Maintenant nous pouvons montrer le

THÉORÈME 2.4. *Soit $(\mathfrak{s} = \langle H\rangle \oplus \mathfrak{n}, [,])$ une algèbre de Lie résoluble non-unimodulaire de type de valeur propre $(1 < 2; d_1, d_2)$ où d_1 et d_2 sont premiers entre eux. Si $\mathfrak{s}$ admet une métrique d'Einstein Q_0, alors $\mathfrak{n}$ est indécomposable.*

DÉMONSTRATION: Supposons que $(\mathfrak{s}, [,])$ est munie d'une métrique d'Einstein Q_0. Tout d'abord, nous remarquons que le type de valeur propre est un invariant d'isomérie, i.e. deux solvariétés d'Einstein standards isométriques ont même type de valeur propre. Grâce au [**6**, Théorème 4.10] que nous avons rapidement expliqué au début de la note, nous sommes sûrs que les deux espaces $(\mathfrak{s}, [,], Q_0)$ et $(\mathfrak{s}, [,]^+, Q_0)$ sont isométriques, où $[,]^+ = [,]$ sur $\mathfrak{n}$ et $[H_0, \cdot]^+ = D_{H_0}$. Par conséquent, ils ont même type de valeur propre. Ceci nous permet donc de supposer sans perdre de généralité que ad_{H_0} est une dérivation symétrique de $\mathfrak{s}$.

Nous écrivons maintenant $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \overset{\perp}{\oplus} \mathfrak{n}_2$ où $\dim \mathfrak{n}_i = d_i$ et $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}_2] = \{0\}$, $0 \neq [\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_1] \subset \mathfrak{n}_2$ ce qui est possible car nous avons

$$\mathrm{ad}_{H_0}|_{\mathfrak{n}_i} = i\mu \,\mathrm{Id}$$

avec $i = 1, 2$ pour une constante μ. Notons que ceci entraîne que $(\mathfrak{n}, [,])$ est nilpotente de rang deux. Nous montrons qu'en fait $[\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_1] = \mathfrak{n}_2$.

Si ceci n'est pas le cas, alors $\mathfrak{n} = (\mathfrak{n}_1 \oplus [\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_1]) \overset{\perp}{\oplus} \mathfrak{n}_0$ où $0 \neq \mathfrak{n}_0 \subset \mathfrak{n}_2$ est abélien. En appliquant le Lemme 2.2 pour $X \in \mathfrak{n}_0$ nous obtenons $c = 2\mu$. D'autre part l'égalité $c = \mathrm{tr}\, D_{H_0}^2 / \mathrm{tr}\, \mathrm{ad}_{H_0}$ donne

$$c = \mu \cdot (d_1 + 4d_2)/(d_1 + 2d_2)$$

ce qui contredit l'égalité précédente.

Supposons maintenant que $\mathfrak{n}$ est décomposable. Nous pouvons écrire dans ce cas

$$\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}' \oplus \mathfrak{n}'', \mathfrak{n}_2 = [\mathfrak{n}', \mathfrak{n}'] \oplus [\mathfrak{n}'', \mathfrak{n}'']$$

où $[\mathfrak{n}', \mathfrak{n}''] = \{0\}$ et $\dim \mathfrak{n}' = d' > 0, \dim \mathfrak{n}'' = d'' > 0$ $(d' + d'' = d_1)$ et $\dim[\mathfrak{n}', \mathfrak{n}'] = \ell' > 0$, $\dim[\mathfrak{n}'', \mathfrak{n}''] = \ell'' \geqslant 0$ $(\ell' + \ell'' = d_2)$.

Soit $A : \mathfrak{s} \to \mathfrak{s}$ définie par $A(H_0) = 0$, $A|_{\mathfrak{n}'} = \alpha_1 \,\mathrm{Id}$, $A|_{\mathfrak{n}''} = \alpha_2 \,\mathrm{Id}$, $A|_{[\mathfrak{n}', \mathfrak{n}']} = 2\alpha_1 \,\mathrm{Id}$ et si $\ell'' > 0$, $A|_{[\mathfrak{n}'', \mathfrak{n}'']} = 2\alpha_2 \,\mathrm{Id}$. Il est clair que A est une dérivation de $\mathfrak{s}$. Si $\ell'' = 0$, le Lemme 2.1 nous donne

$$d'(c - \mu)\alpha_1 + d''(c - \mu)\alpha_2 + 2d_2(c - 2\mu)\alpha_1 = 0$$

et puisque α_1 et α_2 sont quelconques, nous obtenons $c - \mu = c - 2\mu = 0$ une contradiction. Si $\ell'' > 0$, alors le même argument implique

$$d'(c - \mu)\alpha_1 + d''(c - \mu)\alpha_2 + 2\ell'(c - 2\mu)\alpha_1 + 2\ell''(c - 2\mu)\alpha_2 = 0$$

et nous obtenons $d'/d'' = \ell'/\ell''$ ou bien $d'/(d_1 - d') = \ell'/(d_2 - \ell')$ et donc $d'd_2 = d_1\ell'$. Maintenant d_2 divise $d_1\ell'$ et puisque d_1 et d_2 sont premiers entre eux, d_2 divise ℓ', impossible car $d_2 > \ell'$. $\square$

REMARQUE. Il est facile de voir que l'existence d'une métrique d'Einstein Q_0 impose la condition $d_2 \leqslant d_1(d_1 - 1)/2$. De même si d_1 est impaire, alors d_2 ne peut pas être égal à 1 ou 2 ni égal à $d_1(d_1 - 1)/2 - 1$ ou $d_1(d_1 - 1)/2 - 2$ ([5]). D'autres obstructions ne sont pas connues à ce sujet. Par contre, pour les cas possibles, il y a des exemples, comme le cas $d_2 = 2r$ et $d_1 = kd_2$, pour tous r, k.

REFERENCES

[1] L. Bérard Bergery, 'Sur la courbure des métriques riemanniennes invariantes des groupes de Lie et des espaces homogènes', *Ann. Sci. École. Norm. Sup.* **11** (1978), 543–576.

[2] A.L. Besse, *Einstein manifolds* (Springer-Verlag, Berlin, 1987).

[3] H.-R. Fanaï, 'Espaces homogènes d'Einstein non-compacts', *Geom. Dedicata* **80** (2000), 187–200.

[4] H.-R. Fanaï, 'Variétés homogènes d'Einstein de courbure scalaire négative : Construction à l'aide de certains modules de Clifford', *Geom. Dedicata* **93** (2002), 77–87.

[5] C.S. Gordon et M.M. Kerr, 'New homogeneous Einstein metrics of negative Ricci curvature', *Ann. Global Anal. Geom.* **19** (2001), 75–101.

[6] J. Heber, 'Noncompact homogeneous Einstein spaces', *Invent. Math.* **133** (1998), 279–352.

[7] T. Wolter, 'Einstein metrics on solvable groups', *Math. Z.* **206** (1991), 457–471.

Department of Mathematical Sciences
Sharif University of Technology
P.O.Box 11365-9415
Tehran
Iran
e-mail: fanai@sharif.ac.ir