Canad. Math. Bull. Vol. **15** (3), 1972

UNE CARACTERISATION DE LA CATEGORIE DES GROUPES

PAR
PIERRE LEROUX

§0. **Introduction.** Nous présentons dans cette note une caractérisation catégorique de la catégorie **Gr** des groupes et homomorphismes. Pour cela nous introduisons la notion de "catégorie projective de groupes" et montrons qu'elle correspond exactement à celle de "demi-variété" de **Gr**; cette démonstration dépend essentiellement du théorème de caractérisation des catégories algébriques Lawvere [4]. De même la notion de "monomorphisme prénormal" est inspirée de ce théorème et permet de formuler un critère un peu plus faible que celui de Lawvere sur les pré-congruences et distinguant les variétés parmi les demi-variétés de **Gr**. Finalement, la caractérisation de **Gr** que nous donnons fait appel à la classification des variétés de Shreier de **Gr** de Neumann et Wiegold [7] et au théorème de Scott [8] permettant de plonger tout groupe dans un groupe simple.

Ce résultat, annoncé dans les "Notices of the A.M.S.", Vol. 15, 68 T. 514, fut obtenu alors que l'auteur travaillait sous la direction de Monsieur J. Maranda et bénéficiait d'une bourse d'entretien du Conseil national de Recherches du Canada.

§1. Catégories projectives de groupes.

1.1. Définition. *Une catégorie projective de groupes* est un couple $(\mathscr{C}, G)$, où $\mathscr{C}$ est une catégorie et G est un objet de $\mathscr{C}$, tel que les conditions suivantes soient satisfaites.

G-1 $\mathscr{C}$ est complète (i.e. avec limites inductives et projectives) et possède un objet zéro.

G-2 G est un générateur projectif régulier de $\mathscr{C}$ (c.f. Lawvere [4]),

G-3 G est un co-groupe de $\mathscr{C}$ (Eckmann-Hilton [1]), i.e. il existe des morphismes $\mu: G \to G \oplus G$ et $\iota: G \to G$ tels que

(i) $(\mu \oplus 1)\mu = (1 \oplus \mu)\mu$,

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\mu"'] & G \oplus G \arrow[d, "1 \oplus \mu"] \\ G \oplus G \arrow[r, "\mu \oplus 1"'] & G \oplus G \oplus G \end{tikzcd}$$

Reçu par les rédacteurs le 30 juillet 1970.

https://doi.org/10.4153/CMB-1972-069-6 Published online by Cambridge University Press

(ii) $\pi_1\mu = 1_G = \pi_2\mu$,

$$\begin{tikzcd}
 & G \oplus G \arrow[dr, "\pi_1 = \langle 1_G, 0\rangle"] & \\
G \arrow[ur, "\mu"] \arrow[rr, "1_G"] \arrow[dr, "\mu"'] & & G \\
 & G \oplus G \arrow[ur, "\pi_2 = \langle 0, 1_G\rangle"'] &
\end{tikzcd}$$

(iii) $\langle \iota, 1\rangle\mu = 0 = \langle 1, \iota\rangle\mu$.

$$\begin{tikzcd}
 & G \oplus G \arrow[dr, "\langle \iota, 1\rangle"] & \\
G \arrow[ur, "\mu"] \arrow[rr, dash, "0"] \arrow[dr, "\mu"'] & & G \\
 & G \oplus G \arrow[ur, "\langle 1, \iota\rangle"'] &
\end{tikzcd}$$

G-4 La sous-catégorie pleine $\mathscr{C}_G$ de $\mathscr{C}$ dont les objets sont les sommes directes $E \cdot G$ de "E copies" de G est engendrée, comme catégorie avec sommes directes par $\mu: G \to G \oplus G = 2 \cdot G$, $\iota: G \to G$ et $0: G \to 0 = 0 \cdot G$.

1.2. Exemples. (a) Prenant $\mathscr{C} = \mathbf{Gr}$, la catégorie de tous les groupes et de leurs homomorphismes, et $G = Z$, le groupe libre engendré par un élément, on obtient une catégorie projective de groupes $(\mathbf{Gr}, Z)$.

(b) Si **An** dénote la catégorie des anneaux avec élément unité et de leurs homomorphismes, le couple $(\mathbf{An}, Z[x])$ satisfait à toutes les conditions sauf *G-4*.

(c) Si **Gt** est la catégorie des groupes topologiques et homomorphismes continus, et si Z est muni de la topologie discrète, le couple $(\mathbf{Gt}, Z)$ satisfait à toutes les conditions, sauf *G-2*.

1.3. Remarques. (a) Si $(\mathscr{C}, G)$ est une catégorie projective de groupes, il suit de *G-1* et *G-2* que tout morphisme de $\mathscr{C}$ se décompose de façon "unique" en un épimorphisme régulier (i.e. un coégalisateur) suivi d'un monomorphisme et que la classe des objets-quotients (déterminés pas les épimorphismes réguliers) de tout objet de $\mathscr{C}$ possède un ensemble représentatif.

(b) La condition *G-3* revient à dire qu'il existe un foncteur $\Phi: \mathscr{C} \to \mathbf{Gr}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif, où U est le foncteur oubliant de **Gr** à la catégorie **Ens** des ensembles et applications.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\mathscr{C}(G,-)"'] & & \mathbf{Gr} \arrow[dl, "U"] \\ & \mathbf{Ens} & \end{tikzcd}$$

(c) La catégorie $\mathscr{C}_G$ peut être considérée comme la catégorie duale de la théorie variétale au sens de Linton [5] associée au foncteur $\mathscr{C}(G, -):\mathscr{C}\to\mathbf{Ens}$.

La condition *G-4* affirme alors que cette théorie est de rang dénombrable, i.e. que G est abstraitement fini (Freyd [2]), et que la théorie algébrique $\mathscr{T}_G$ (au sens de Lawvere [4]) associée au foncteur $\mathscr{C}(G, -)$ possède une présentation dont les opérations fondamentales sont μ, ι et 0.

(d) Dénotons par $\mathscr{T}_{Gr}$ la théorie algébrique des groupes. La conjonction de *G-3* et *G-4* signifie alors qu'il existe un morphisme de théories $\mathscr{T}_{Gr}\xrightarrow{t}\mathscr{T}_G$ (correspondant au foncteur $\Phi:\mathscr{C}\to\mathbf{Gr}$ par "structure algébrique") qui est un foncteur plein.

1.4. Définitions. Une *demi-variété* $\mathscr{B}$ d'une catégorie $\mathscr{C}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathscr{C}$ fermée sous les sous-objets et les produits directs (pris dans $\mathscr{C}$). Une demi-variété est une *variété* si de plus elle est fermée sous les objets quotients.

1.5. Proposition. *Si* $(\mathscr{C}, G)$ *est une catégorie projective de groupes et si* $\mathscr{C}$ *est une demi-variété de* $\mathscr{C}$, *il existe un objet* F *de* $\mathscr{B}$ *tel que* $(\mathscr{B}, F)$ *soit aussi une catégorie projective de groupes.*

Preuve. Il est bien connu (voir par exemple, J. F. Kennison [3]) que dans une telle situation, le plongement canonique $\mathscr{B}\to\mathscr{C}$ possède un adjoint à gauche $L:\mathscr{C}\to\mathscr{B}$. Il suffit de prendre $F=L(G)$. En effet F est alors un générateur projectif régulier de $\mathscr{B}$ qui est une catégorie complète, contenant l'objet zéro; de plus $L(E\cdot G)=E\cdot F$ et il suit que la restriction de L à $\mathscr{C}_G$ est un foncteur plein $\mathscr{C}_G\to\mathscr{B}_F$.

1.6. Corollaire. *Toute demi-variété de la catégorie* **Gr** *des groupes et homomorphismes peut être considérée de façon canonique comme une catégorie projective de groupes.*

En fait, se sont là les seules catégories projectives de groupes; en effet:

1.7. Théorème. *Si* $(\mathscr{C}, G)$ *est une catégorie projective de groupes,* $\mathscr{C}$ *est équivalente à une demi-variété de* **Gr**.

Preuve. Le foncteur $\Phi:\mathscr{C}\to\mathbf{Gr}$ par lequel se décompose $\mathscr{C}(G, -):\mathscr{C}\to\mathbf{Ens}$ est évidemment fidèle et commute aux limites projectives. On peut montrer directement que de plus il est plein et représentatif pour les sous-objets (i.e. tout sous-groupe d'un groupe $\Phi(A)$ est aussi de la forme $\Phi(A')$ où A' est un sous-objet de A), ce qui termine essentiellement la démonstration.

https://doi.org/10.4153/CMB-1972-069-6 Published online by Cambridge University Press

Cependant il résulte immédiatement du théorème de caractérisation des catégories algébriques de Lawvere [4] que $\mathscr{C}$ est équivalente à une demi-variété de la catégorie algébrique **Ens** $^{(\mathscr{F}_6)}$ laquelle, par la Remarque 1.3.(d) est une variété de groupes.

§2. Variétés de groupes.

2.1. Définition. Un monomorphisme $m: A \to B$ d'une catégorie $\mathscr{C}$ avec un objet zéro sera dit *prénormal* s'il existe une précongruence (c.f. Lawvere [4]) (R, r) sur B et un produit fibré du type suivant, où $L_1 = \{1_B, 0\}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "m"'] & R \arrow[d, "r"] \\ B \arrow[r, "L_1"'] & B \times B \end{tikzcd}$$

On remarque qui si $\mathscr{C}$ est avec limites projectives finies, tout monomorphisme normal (i.e. un noyau) est prénormal et que dans une catégorie algébrique (au sens de Lawvere) avec un objet zéro, tout monomorphisme prénormal est normal puisqu'alors toute précongruence est une congruence.

2.2. Lemme. *Soit $\mathscr{B}$ une demi-variété d'une catégorie algébrique $\mathscr{C}$ avec un objet zéro. Si m est un monomorphisme de $\mathscr{B}$ normal dans $\mathscr{C}$, il est prénormal dans $\mathscr{B}$.*

Preuve. En effet la congruence dans $\mathscr{C}$ associée au conoyau de m est une préconguence dans $\mathscr{B}$ faisant de m un monomorphisme prénormal.

2.3. Théorème. *Soit $(\mathscr{B}, G)$ une catégorie projective de groupes. Alors $\mathscr{B}$ est équivalente à une variété de* **Gr** *si et seulement si tout monomorphisme prénormal est normal dans $\mathscr{B}$.*

Preuve. Puisqu'une variété de **Gr** est une catégorie algébrique, la condition est nécessaire.

Réciproquement on peut supposer que $\mathscr{B}$ est une demi-variété de **Gr** et il reste à montrer que $\mathscr{B}$ est fermée sous les objets quotients. Soit $p: B \to C$ un épimorphisme régulier de **Gr** avec $B \in |\mathscr{B}|$. Alors p est le conoyau de son noyau, dans **Gr**, $k: K \to B$, et on déduit successivement que $K \in |\mathscr{B}|$, k est normal dans **Gr**, donc prénormal dans $\mathscr{B}$, par le lemme, et normal dans $\mathscr{B}$ par hypothèse; si $p': B \to C'$ est le conoyau de k dans $\mathscr{B}$, k est le noyau de p' dans $\mathscr{B}$ et donc aussi dans **Gr** et alors p' est le conoyau de k dans **Gr**. Ainsi $C \cong C' \in |\mathscr{B}|$.

§3. La catégorie des groupes.

3.1. DÉFINITION. Soit $(\mathscr{C}, G)$ une catégorie projective de groupes. Un objet C de $\mathscr{C}$ est dit *libre* s'il existe un ensemble E tel que $C=E \cdot G$. Nous dirons que $(\mathscr{C}, G)$ est une *catégorie de Shreier* si $\mathscr{C}$ est non-dégénérée (i,e, $G \not\approx 0$) et si dans $\mathscr{C}$ tout sous-objet d'un objet libre est libre.

Si $\mathscr{V}$ est une variété de groupes, les objets libres de $\mathscr{V}$ sont les groupes $\mathscr{V}$-libres (Bates-free; voir H. Neumann [6]. Le résultat suivant est dû à Neumann et Wiegold [7].)

3.2. PROPOSITION. *Les seules variétés de groupes qui soient des catégories de Shreier sont les suivantes:* **Gr** *et les catégories* **Ab** *et* $\mathbf{Ab}_p$ *des groupes abéliens et des groupes abéliens d'exposant p où p est un entier premier.*

3.3. DÉFINITION. Si une catégorie $\mathscr{C}$ possède un objet final T, un objet C de $\mathscr{C}$ est dit *simple* si pour tout épimorphisme régulier $p:C\to C'$, ou bien p est un isomorphisme, ou bien C' est isomorphe à T. Nous dirons que $\mathscr{C}$ est une *catégorie de Scott* si tout objet de $\mathscr{C}$ est sous-objet d'un objet simple.

Il est évident que les catégories **Ab** et $\mathbf{Ab}_p$ ne sont pas des catégories de Scott car dans ces catégories les objets simples sont ceux qui n'admettent comme sous-objets qu'eux-mêmes et 0. La proposition suivante, due à Scott [8] affirme que **Gr** est une catégorie de Scott.

3.4 PROPOSITION. *Tout groupe est sous-groupe d'un groupe simple.*

Ainsi la seule variété de groupes qui soit à la fois une catégorie de Shreier et une catégorie de Scott est la variété triviale **Gr** de tous les groupes. On obtient alors le théorème de caractérisation suivant:

3.5. THÉORÈME. *Une catégorie $\mathscr{C}$ est équivalente à la catégorie des groupes si et seulement si:*

(i) il existe un objet G de $\mathscr{C}$ faisant de $(\mathscr{C}, G)$ une catégorie projective de groupes,

(ii) tout monomorphisme prénormal de $\mathscr{C}$ est normal,

(iii) $\mathscr{C}$ est une catégorie de Shreier,

(iv) tout objet de $\mathscr{C}$ est sous-objet d'un objet simple.

BIBLIOGRAPHIE

1. B. Eckmann et P. J. Hilton, *Group-like structures in general categories I*, Math. Ann. **145** (1962), 227–255.

2. P. J. Freyd, *Abelian categories*, Harper and Row, New York, 1964.

3. J. F. Kennison, *Full reflexive subcategories and generalized covering spaces*, Illinois J. Math. **12** (1968), 353–365.

4. F. W. Lawvere, *Functorial semantics of algebraic theories*, Dissertation, Columbia Univ., New York, 1963. Résumée dans Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **50** (1963), 869–871.

https://doi.org/10.4153/CMB-1972-069-6 Published online by Cambridge University Press

5. F. E. J. Linton, *Some aspects of equational categories*, Proceedings of the La Jolla Conference on Categories, Springer-Verlag, Berlin (1966), 84–94.

6. H. Neumann, *Varieties of groups*, Springer-Verlag, New York, 1967.

7. P. M. Neumann, et J. Wiegold, *Shreier varieties of groups*, Math. Z. **85** (1964), 392–400.

8. W. R. Scott, *The infinite symmetric and alternating groups*, Contributions to the Theory of Groups, University of Kansas, Lawrence, 1956.

Université du Québec à Montréal