Compositio Mathematica **128:** 115–152, 2001.

Croissance des solutions des $\mathcal{D}$-modules algébriques holonomes

(*Growth of solutions of holonomic algebraic $\mathcal{D}$-modules*)

YACINE REBAHI
Université de Montréal, Montréal, Canada. e-mail: rebahi@dms.umontreal.ca

(Received: 24 February 1998; in final form: 28 June 1999)

Abstract. We show that the cohomology of complexes of solutions of exponantial type associated to holonomic algebraic D-modules is constructible . We also compute the Euler–Poincaré index of such complexes.

Mathematics Subject Classifications (2000). 35A27, 32C38, 58G07.

Key words: D-modules, irregularity, index theorems,microlocalization.

Introduction

Le but de ce travail est d'étudier le comportement par passage à l'infini de certains cycles analytiques attachés aux $\mathcal{D}$-modules algébriques. D'autre part, cet article pourra également compléter les résultats de [11–13] concernant la croissance des solutions des $\mathcal{D}$-modules holonomes.

En dimension un, et après les travaux de Malgrange sur l'irrégularité (voir [16] et [17]), cette situation a été étudiée en détails par Ramis [20]. Il montre que l'indice d'un opérateur différentiel linéaire à coefficients polynomiaux lorsqu'il agit sur certains espaces de solutions appropriés, peut être lu sur le polygone de Newton associé à cet opérateur.

Ce polygone est un sous-ensemble de $\mathbb{Q}^2$ qui se décompose en deux parties:

La première, appelée 'partie positive' caractérise les solutions séries formelles de type Gevrey de l'opérateur.

La deuxième, 'la partie négative', n'est définie que pour les opérateurs à coefficients algébriques. Elle caractérise le type exponentiel des solutions entières de l'équation.

En fait, il démontre le résultat pour ' la partie positive' par un calcul direct, ensuite en faisant un passage à l'infini, il ramène le cas de 'la partie négative' au cas précédent.

En dimension supérieure, cette situation est plus compliquée. Elle a été étudiée dans le cas des $\mathcal{D}$-modules analytiques par Laurent [11,13] et par Laurent-Mebkhout dans [14].

Soient Y une sous-variété lisse d'une variété analytique complexe X et $\Lambda = T^*_Y X$ le fibré conormal à Y dans X. Si r est un rationnel tel que $1 \leqslant r \leqslant +\infty$, nous noterons par $\mathcal{O}_{X|Y}(r)$ (resp. $\mathcal{B}_{Y|X}(r)$) le faisceau des séries formelles (resp. hyperfonctions) à croissance Gevrey (voir [13]). Posons également $\mathcal{Q}_Y(r) = \mathcal{O}_{X|Y}(r)/\mathcal{O}_{X|Y}$.

Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module cohérent défini au voisinage de Y, on peut lui associer d'une part les faisceaux de solutions $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}(r))$ et d'autre part les cycles caractéristiques $\tilde{Ch}_\Lambda(r)(\mathcal{M})$ qui sont des cycles analytiques de $T^*\Lambda$ et qui sont définis à partir de filtrations convenables sur $\mathcal{M}$ [11].

On démontre dans [13] que si $\mathcal{M}$ est holonome, le complexe de solutions $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}(r))$ ne dépend pas des valeurs prises par r dans l'intervalle $[1, +\infty]$ sauf pour un nombre fini d'entre elles. Ces valeurs critiques, 'appelées pentes algébriques' dans [14], mesurent en fait le défaut de bihomogèniété des cycles $\tilde{Ch}_\Lambda(r)(\mathcal{M})$.

On montre aussi que le complexe $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}(r))$ est un complexe de $\mathbb{C}$-espaces vectoriel à cohomologie constructible sur Y et que l'indice du couple $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}(r))$ coincide avec l'obstruction d'Euler du cycle $\tilde{Ch}_\Lambda(r)(\mathcal{M})$. Ce résultat est encore valable si l'on remplace $\mathcal{B}_{Y|X}(r)$ par $\mathcal{O}_{X|Y}(r)$ et les cycles $\tilde{Ch}_\Lambda(r)(\mathcal{M})$ par $\tilde{Ch}_\Lambda\{r\}(\mathcal{M})$.

Citons maintenant quelques résultats de Mebkhout [18]: les faisceaux $\mathcal{RH}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{Q}_Y(r))$ et que l'on note par $\mathcal{IR}_Y(r)(\mathcal{M})$ pour $r \in [1, +\infty)$ sont des faisceaux pervers constituant une filtration du faisceau d'irrégularité $\mathcal{IR}_Y(\mathcal{M}) = \mathcal{IR}_Y(\infty)(\mathcal{M})$. Les faisceaux gradués $gr(\mathcal{IR}_Y(r)(\mathcal{M}))$ associés à cette filtration ne sont différents (localement) que pour une suite finie de rationnels r. Ces valeurs, appelées 'pentes analytiques', coincident en effet avec les 'pentes algébriques' déja citées (voir [14]).

Par ailleurs, pour pouvoir définir les $\mathcal{D}$-modules algébriques, on a besoin de fibrés vectoriels. Il s'avère que lorsqu'il s'agit d'un fibré en droites, un passage à l'infini permet de ramener le cas des $\mathcal{D}$-modules algébriques au cas ci-dessus traité par Laurent.

Contrairement aux séries formelles, les espaces des hyperfonctions sont plus commodes en dimension supérieure. C'est pour cette raison que le chapitre un de cet article est consacré, à étendre cette classe de solutions au cas où r est inférieur à un, et à la munir d'une structure convenable.

Le chapitre deux reprend les différentes notions de cycles caractéristiques définis dans [11] avec une légère extension quand r est inférieur à 1 dans le cas de fibré en droites.

Nous nous intéressons dans le paragraphe Section 2.3 aux variétés micro-caractéristiques de type r d'un $\mathcal{D}$-module algébrique cohérent porté par une hypersurface. Nous montrons que ces dernières sont indépendantes du rationnel chiosi.

Le passage à l'infini ainsi que ses propriétés et le comportement des solutions vis à vis de cette transformation sont explicités dans les parties Section 2.6 et Section 2.7.

Le paragraphe Section 2.8 comporte le théorème central de cet article à savoir, si X est un fibré en droites sur Y et si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}$-module algebrique holonome, alors le

https://doi.org/10.1023/A:1017562822062 Published online by Cambridge University Press

complexe $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}(r))$ pour $r \in [-\infty, 1]$ est un complexe de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels à cohomologie constructible sur Y. En outre, l'indice du couple ($\mathcal{M}$, $\mathcal{B}_{Y|X}(r)$) est donné par l'obstruction d'Euler des cycles $\tilde{C}h_{\Lambda}(r)(\mathcal{M})$ associés à $\mathcal{M}$.

Dans le chapitre trois, nous introduisons les microfonctions holomorphes à croissance Gevrey pour un rationnel inférieur à un. Nous montrons aussi qu'elles sont munies d'une structure adéquate. Ceci permettra de traiter le cas de fibrés de rang quelconque.

Ainsi, nous donnons un théorème d'indice microlocal lorsqu'il s'agit d'un fibré en droites. Quand le rang de notre fibré est supérieur strictement à un, on se ramème au cas précédent par les transformations canoniques quantifiées et les transformations monoidales.

En particulier, nous obtenons un théorème analogue au théorème 2.8.1 dans le cas de fibrés de rang quelconque (Corollaire 3.4.3).

1. Hyperfonctions Holomorphes à Croissance Gevrey

1.1. QUELQUES NOTATIONS

Dans ce paragraphe, nous supposerons que X est un fibré vectoriel de base Y. Nous noterons $p : X \longrightarrow Y$ la projection canonique et nous identifierons Y à la section nulle de X. Nous noterons également par $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X et par $\mathcal{O}_X[*Y]$ le faisceau des fonctions méromorphes sur X à pôles dans Y.

Si $\mathcal{O}_{[X]}$ désigne le faisceau des fonctions holomorphes sur X polynomiales dans les fibres de p, $\mathcal{D}_{[X]}$ sera celui des opérateurs différentiels sur X à coefficients dans $\mathcal{O}_{[X]}$.

Gardons toujours les notations de [11] et considérons pour $m \in \mathbb{N}$, le sous-faisceau $\mathcal{O}_{[X]}[m]$ de $\mathcal{O}_{[X]}$ des fonctions homogènes de degré m dans les fibres de p, et pour $m \in \mathbb{Z}$, le sous-faisceau $\mathcal{D}_{[X]}[m]$ de $\mathcal{D}_{[X]}$ des opérateurs différentiels homogènes de degré m, c'est-à-dire lesous-faisceau tel que

$$\mathcal{D}_{[X]}[m].\mathcal{O}_{[X]}[m'] \subset \mathcal{O}_{[X]}[m+m']$$

Les faisceaux $\mathcal{O}_{[X]}$ et $\mathcal{D}_{[X]}$ peuvent s'écrire

$$\mathcal{O}_{[X]} = \bigoplus_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{[X]}[m] \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}_{[X]} = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_{[X]}[m]$$

1.2. HYPERFONCTIONS HOLOMORPHES FORMELLES

Les faisceaux $\mathcal{B}^{\infty}_{Y|X} = \mathcal{H}^d_Y(\mathcal{O}_X)$ et $\mathcal{B}_{Y|X} = \mathcal{H}^d_{[Y]}(\mathcal{O}_X)$ des hyperfonctions holomorphes de [23] sont respectivement les groupes de cohomologie locale et algébrique, de degré d (d est la codimension de Y dans X) de $\mathcal{O}_X$ à support dans Y.

Si X est un fibré de rang un sur Y, $\mathcal{B}^{\infty}_{Y|X}$ est le faisceau des fonctions holomorphes sur $X - Y$ modulo les fonctions holomorphes sur X. Quant à $\mathcal{B}_{Y|X}$, il n'est autre que le sous faisceau de $\mathcal{B}^{\infty}_{Y|X}$ engendré par les fonctions méromorphes sur Y.

Choisissons des coordonnées locales $(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_d)$ sur X qui soient linéaires dans les fibres et telles que $Y = \{t = 0\}$. Une section de $\mathcal{B}^{\infty}_{Y|X}$ (resp. $\mathcal{B}_{Y|X}$) sur un ouvert de coordonnées locales de Y est une série formelle (resp. finie) $\sum_{\alpha \geqslant 0} a_\alpha(x)\, \delta^{(\alpha)}(t)$ telle que:

$$\forall \varepsilon > 0, \forall K \subset\subset U, \exists\, C_\varepsilon > 0, \sup_K |a_\alpha(x)| \leqslant C_\varepsilon . \varepsilon^{|\alpha|} . \frac{1}{(|\alpha|!)}$$

En particulier, si X est un fibré en droites sur Y, $\delta^{(\alpha)}(t)$ est la classe d'équivalence de la fonction méromorphe:

$$\Phi_\alpha(t) = \frac{1}{2i\pi} \cdot \frac{\alpha!}{(-t)^{\alpha+1}}$$

THEOREM 1.2.1. *Pour tout entier $k \geqslant 0$, le faisceau $\sum_{|\alpha|=k} D_t^\alpha \mathcal{B}_{Y|X}$ est indépendant des coordonnées locales choisies.*

Preuve. Remarquons d'abord que si $(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_d)$ sont des coordonnées locales de X qui sont linéaires dans les fibres et telles que $Y = \{t = 0\}$, le faisceau $\mathcal{B}_{Y|X}$ n'est autre que le $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{D}_X / \mathcal{J}$ où $\mathcal{J}$ est l'idéal engendré par les opérateurs $t_1, \dots, t_d, D_{x_1}, \dots, D_{x_n}$. En outre, tout élément de $\mathcal{B}_{Y|X}$ peut se mettre sous la forme $\sum_{|\alpha| \leqslant k} a_\alpha(x)\, \delta^{(\alpha)}(t)$, où $\delta^{(\alpha)}(t)$ est la classe de D_t^α modulo $\mathcal{J}$.

Par conséquent, pour k fixé, le faisceau $\sum_{|\alpha|=k} D_t^\alpha \mathcal{B}_{Y|X}$ s'identifie à l'ensemble des sommes finies $\sum_{k \leqslant |\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x)\, \delta^{(\alpha)}(t)$. Considérons maintenant un changement de variables ϖ du fibré X : $y = a(x)$ et $s = b(x).t$ avec $b(x)$ une matrice de fonctions holomorphes inversible sur Y. Grâce à la formule

$$D^p_{s_k} = \frac{\partial^p}{\partial s_k^p} = \sum_{i_1 + \dots + i_d = p} b^k_{i_1 \dots i_d}(x) \frac{\partial^p}{\partial t_1^{i_1} \dots \partial t_d^{i_d}}$$

où $b^k_{i_1 \dots i_d}(x)$ sont des fonctions holomorphes sur Y, les transformés par ϖ des éléments de $\sum_{|\alpha|=k} D_t^\alpha \mathcal{B}_{Y|X}$ sont encore de la forme $\sum_{k \leqslant |\gamma| \leqslant m} b_\gamma(y)\, \delta^{(\gamma)}(s)$.

Ainsi, on en déduit que les faisceaux cités plus haut sont indépendants du changement de coordonnées locales. □

On définit alors le faisceau $\mathcal{B}_{\widehat{Y|X}}$ des hyperfonctions holomorphes formelles par:

$$\mathcal{B}_{\widehat{Y|X}} = \varprojlim_k \mathcal{B}_{Y|X} \Big/ \sum_{|\alpha|=k} D_t^\alpha \mathcal{B}_{Y|X}$$

https://doi.org/10.1023/A:1017562822062 Published online by Cambridge University Press

où la limite projective est donnée via les applications:

$$f_k : \mathcal{B}_{Y|X} \Big/ \sum_{|\alpha|=k} D_t^\alpha \mathcal{B}_{Y|X} \longrightarrow \mathcal{B}_{Y|X} \Big/ \sum_{|\alpha|=k-1} D_t^\alpha \mathcal{B}_{Y|X}$$

Comme pour tout $k \geqslant 0$, $\sum_{|\alpha|=k} D_t^\alpha \mathcal{B}_{Y|X}$ est un sous-faisceau de $\sum_{|\alpha|=k-1} D_t^\alpha \mathcal{B}_{Y|X}$, les morphismes f_k sont bien définis.

THEOREM 1.2.2. *Le faisceau $\mathcal{B}_{\widehat{Y|X}}$ est muni d'une structure de $\mathcal{D}_{[X]}$-module.*

Preuve. Soit P un élément de $\mathcal{D}_{[X]}$. P envoie $\mathcal{B}_{Y|X}/\sum_{|\alpha|=k} D_t^\alpha \mathcal{B}_{Y|X}$ dans $\mathcal{B}_{Y|X}/\sum_{|\alpha|=k-m} D_t^\alpha \mathcal{B}_{Y|X}$, avec m le plus grand degré en t des coefficients de l'opérateur P. Comme cette opération est compatible avec les applications f_k, alors $\mathcal{B}_{\widehat{Y|X}}$ est muni d'une structure de $\mathcal{D}_{[X]}$-module.

Signalons que dans [21], nous avions considéré $\mathcal{B}^\infty_{Y|X}$ au lieu de $\mathcal{B}_{Y|X}$ pour définir le faisceau $\mathcal{B}_{\widehat{Y|X}}$. Ceci ne change rien à la structure de ce dernier. □

Prenons maintenant un fibré en droites X de base Y et notons par $\mathcal{I}_Y$ l'idéal de définition de Y dans X. On désigne par $\mathcal{O}_X[*Y][k]$ le sous-faisceau de $\mathcal{O}_X[*Y]$, des fonctions méromorphes sur Y à pôles au plus d'ordre k. De la même manière que précédemment, on définit le complété formel $\mathcal{O}_{\widehat{X|Y}}$ de $\mathcal{O}_X$ le long de Y et le faisceau $\mathcal{O}_X(\widehat{*Y})$ des fonctions singulières formelles (qui sont aussi des $\mathcal{D}_{[X]}$-modules) par:

$$\mathcal{O}_{\widehat{X|Y}} = \varprojlim_k \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y^k \qquad \mathcal{O}_X(\widehat{*Y}) = \varprojlim_k \mathcal{O}_X[*Y][k]$$

où les limites projectives sont prises sur les applications:

$$g_k : \mathcal{I}_Y^{k+1} \longrightarrow \mathcal{I}_Y^k \qquad h_k : \mathcal{O}_X[*Y][k] \longrightarrow \mathcal{O}_X[*Y][k-1]$$

1.3. HYPERFONCTIONS HOLOMORPHES À CROISSANCE GEVREY

X est toujours un fibré vectoriel de base Y. Si des coordonnées locales sont choisies sur un ouvert U de Y suffisamment petit, $\Gamma(U, \mathcal{B}_{\widehat{Y|X}})$ s'identifie à l'ensemble des séries formelles $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d} a_\alpha(x)\,\delta^{(\alpha)}(t)$ où $(a_\alpha(x))_\alpha$ est une suite de fonctions holomorphes sur U.

https://doi.org/10.1023/A:1017562822062 Published online by Cambridge University Press

On définit les faisceaux $\mathcal{B}_{Y|X}(r)$ et $\mathcal{B}_{Y|X}\{r\}$(pour $r \in \mathbb{Q}$) comme les sous faisceaux de $\mathcal{B}_{\widehat{Y|X}}$des séries $\sum\limits_{\alpha \geqslant 0} a_\alpha(x)\,\delta^{(\alpha)}(t)$ qui vérifient respectivement:

$$\forall K \subset\subset U, \exists C > 0, \sup_K |a_\alpha(x)| \leqslant C^{|\alpha|}.\,\frac{1}{(|\alpha|!)^r}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \forall K \subset\subset U, \exists C_\varepsilon > 0, \sup_K |a_\alpha(x)| \leqslant C_\varepsilon.\,\varepsilon^{|\alpha|}.\frac{1}{(|\alpha|!)^r}.$$

On pose:

$$\mathcal{B}_{Y|X}(-\infty) := \mathcal{B}_{\widehat{Y|X}} \qquad \mathcal{B}_{Y|X}\{1\} = \mathcal{B}^\infty_{Y|X}$$

$$\mathcal{B}_{Y|X}(+\infty) := \mathcal{B}_{Y|X}$$

Signalons que pour $r > 1$, ces faisceaux ont été définis dans [13] dans un cas plus général à savoir X est une variété analytique complexe et Y une sous variété lisse de X.

PROPOSITION 1.3.1 (*1*) *Pour tout* $r \in [-\infty, +\infty] \cap \mathbb{Q}$ *fixé, les faisceaux* $\mathcal{B}_{Y|X}(r)$ *et* $\mathcal{B}_{Y|X}\{r\}$ *ne dépendent pas des coordonnées locales choisies.*

(*2*) *Pour tout rationnel* $-\infty \leqslant r \leqslant +\infty$*, les faisceaux* $\mathcal{B}_{Y|X}(r)$ *et* $\mathcal{B}_{Y|X}\{r\}$ *sont des* $\mathcal{D}_{[X]}$*-modules.*

Preuve. (1) Pour cela, il suffit de constater que les majorations ci-dessus sont conservées par changement de coordonnées.

(2) Comme $\mathcal{B}_{\widehat{Y|X}}$ est un $\mathcal{D}_{[X]}$-module, il suffit donc de vérifier que dans un système de coordonnées locales , l'action de $\mathcal{D}_{[X]}$ sur $\mathcal{B}_{Y|X}(r)$ et $\mathcal{B}_{Y|X}\{r\}$ conserve les majorations ci-dessus.

Or un élément de $\mathcal{D}_{[X]}$ est une somme finie $\sum a_{\alpha\beta\gamma}(x)\, t^\alpha D_x^\beta D_t^\gamma$, donc il suffit de vérifier que les majorations sont conservées par les monônes $t^\alpha D_x^\beta D_t^\gamma$.

Soient U un ouvert de coordonnées de Y et V un voisinage de U dans X. Prenons une section $u = \sum\limits_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_\alpha(x)\,\delta^{(\alpha)}(t)$ de $\mathcal{B}_{Y|X}(r)$ sur U. Pour tout compact K de U, il existe une constante $C > 0$ telle que:

$$\sup_K |a_\alpha(x)| \leqslant C^{|\alpha|}.\frac{1}{(|\alpha|!)^r}$$

Mais

$$t^\beta u = \sum_\alpha \frac{(\alpha+\beta)!\, a_{\alpha+\beta}(x)}{\alpha!}\,\delta^{(\alpha)}(t)$$

et

$$\left|\frac{(\alpha+\beta)!\,a_{\alpha+\beta}(x)}{\alpha!}\right| \leqslant C^{|\alpha+\beta|}.\frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!}.\frac{1}{(|\alpha+\beta|!)^{r}}$$

Grâce à la double-inégalité $\alpha!\,\beta! \leqslant (\alpha+\beta)! \leqslant 2^{|\alpha|+|\beta|}.\,\alpha!.\,\beta!$, il existe une constante C' telle qu'on ait:

$$\left|\frac{(\alpha+\beta)!\,a_{\alpha+\beta}(x)}{\alpha!}\right| \leqslant C'^{|\alpha|}.\frac{1}{(|\alpha|!)^{r}}$$

Pour l'action de D_x ou de D_t, la démonstration se fait de la même manière. □

Considérons maintenant un fibré en droites X de base Y et un rationnel r tel que $-\infty \leqslant r \leqslant +\infty$. Considérons quelques faisceaux de fonctions holomorphes et de séries formelles qui vont nous être utiles et qui sont en partie repris de [12].

$\mathcal{O}_{X\mid Y}$	:	La restriction à Y du faisceau $\mathcal{O}_X$
$\mathcal{O}_{\widehat{X\mid Y}}$	:	le complété formel de $\mathcal{O}_X$ le long de Y
$\mathcal{O}_{X\mid Y}(r)$	:	le sous-faisceau de $\mathcal{O}_{\widehat{X\mid Y}}$ dont les éléments s'écrivent dans une carte locale V sous la forme $u=\sum_{\alpha\geqslant 0} a_\alpha(x)t^\alpha$ telle que la série $\sum_{\alpha\geqslant 0} a_\alpha(x)t^\alpha/(\alpha!)^{r-1}$ ait un rayon de convergence non nul sur V. On pose : $\mathcal{O}_{X\mid Y}(-\infty) := \mathcal{O}_{[X]}$ $\quad \mathcal{O}_{X\mid Y}(+\infty) := \mathcal{O}_{\widehat{X\mid Y}}$
$\mathcal{O}_X[*Y]$	:	le faisceau des fonctions méromorphes à pôles dans Y.
$\mathcal{O}_X[*Y](r)$	=	$\mathcal{O}_{X\mid Y}(r)\bigotimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_X[*Y]$ pour $r\in[1,+\infty]$
$\mathcal{O}_X(*Y)$	=	$j_*j^{-1}\mathcal{O}_X$ ($j: X-Y\hookrightarrow X$) le faisceau des fonctions holomorphes à singularités essentielles sur Y.
$\mathcal{O}_X(*Y)(1,r)$	:	le sous-faisceau de $\mathcal{O}_X(*Y)\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_{X\mid Y}(r)$ ($r\in[1,+\infty]$) dont les éléments s'écrivent en coordonnées locales $u=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}} a_\alpha(x)t^\alpha$ telles que les séries $\sum_{\alpha<0} a_\alpha(x)t^\alpha$ et $\sum_{\alpha\geqslant 0} a_\alpha(x)t^\alpha/(\alpha!)^{r-1}$ aient des rayons de convergence non nuls.
$\mathcal{O}_X(\widehat{*Y})$	:	le faisceau des fonctions singulières déjà cité.
$\mathcal{O}_X(*Y)(r,1)$	:	le sous-faisceau de $\mathcal{O}_X(\widehat{*Y})$ dont les éléments s'écrivent en coordonnées locales $u=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}} a_\alpha(x)t^\alpha$ tels que $\sum_{\alpha<0} a_\alpha(x)t^\alpha((-\alpha)!)^{r-1}$ ait un rayon de convergence non nul. On pose : $\mathcal{O}_X(*Y)(+\infty,1) := \mathcal{O}_X[*Y]$ $\quad \mathcal{O}_X(*Y)(-\infty,1) := \mathcal{O}_X(\widehat{*Y})$

https://doi.org/10.1023/A:1017562822062 Published online by Cambridge University Press

$\mathcal{O}_{[X]}(*Y)((r))$: le sous-faisceau de $\mathcal{O}_X(\widehat{*Y})$ dont les éléments se mettent localement sous la forme $\sum_{\alpha<m} a_\alpha(x)t^\alpha$ avec $m \geqslant 0$ et la série $\sum_{\alpha<0} a_\alpha(x)t^\alpha((-\alpha)!)^{r-1}$ a un rayon de convergence non nul.
On pose :
$\mathcal{O}_{[X]}(*Y)((1)) := \mathcal{O}_{[X]}(*Y)$

PROPOSITION 1.3.2. *Soit r un rationnel tel que $-\infty \leqslant r \leqslant +\infty$. Les suites de $\mathcal{D}_{[X]}$-modules suivantes sont exactes:*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X|Y} \longrightarrow \mathcal{O}_X(*Y)(r,1) \xrightarrow{h} \mathcal{B}_{Y|X}(r) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X|Y} \longrightarrow \mathcal{O}_X[*Y] \longrightarrow \mathcal{B}_{Y|X} \longrightarrow 0$$

Preuve. Soient (x,t) des coordonnées locales sur le fibré X telles que $Y = \{t = 0\}$ et considérons une section u de $\mathcal{O}_X(*Y)(r,1)$ donnée sur un ouvert assez petit par la série formelle $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(x)\,t^n$.

La partie négative de ce développement peut se mettre sous la forme $\sum_{k\geqslant 0} b_k(x)\,\Phi_k(t)$ où $\Phi_k(t)$ sont les fonctions méromorphes de la partie 1-2

et

$$b_k(x) = \frac{(-1)^{k+1}.2i\pi.a_{-k-1}(x)}{k!}$$

Il suffit ainsi de prendre pour h, le morphisme qui associe à u l'élément $h(u) = \sum_{k\geqslant 0} b_k(x)\,\delta^{(k)}(t)$ de $\mathcal{B}_{Y|X}(r)$ pour que la première suite soit exacte.

Quant à la deuxième, il suffit de prendre $r = +\infty$.

2. Cycles Microcaractéristiques

2.1. F_r-FILTRATIONS DES $\mathcal{D}_{[X]}$-MODULES COHÉRENTS

Considérons un fibré vectoriel X de base Y. Notons $p : X \longrightarrow Y$ la projection canonique et identifions Y à la section nulle de X. Le faisceau $\mathcal{D}_{[X]}$ est muni de deux filtrations canoniques. La première est la filtration usuelle par l'ordre des opérateurs, notée $(\mathcal{D}_{[X],l})_{l\in\mathbb{N}}$.La deuxième est définie dans [9] par:

$$V_k\mathcal{D}_{[X]} = \{P \in \mathcal{D}_{[X]} / P\mathcal{I}_Y^j \subset \mathcal{I}_Y^{j-k}\} \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

où $\mathcal{I}_Y$ est l'idéal de définition de Y et $\mathcal{I}_Y^j = \mathcal{O}_X$ pour $j \leqslant 0$.

https://doi.org/10.1023/A:1017562822062 Published online by Cambridge University Press

Considérons également sur $\mathcal{D}_{[X]}$ (voir [11]) la filtration $F^{\cdot}_{-\infty}\mathcal{D}_{[X]}$ en posant:

$$F^{k}_{-\infty}\mathcal{D}_{[X]} = \bigoplus_{m \leqslant k} p_* \mathcal{D}_{[X]}[m] \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Soit $r \in \mathbb{Q} \cup \{\pm\infty\}$ et $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$,$p$ et q premiers entre eux tels que $r = p/q$ [si $r = \pm\infty$, on prend $(p, q) = (\pm 1, 0)$]. La F_r-filtration a été définie dans [11]. Elle s'exprime pour tout $k \in \mathbb{Z}$ par:

$$F^{k}_{r}\mathcal{D}_{[X]} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{(p-q)m+ql \leqslant k} \mathcal{D}_{[X],l} \cap V_m\mathcal{D}_{[X]} & \text{si} \quad r \geqslant 1 \\ \displaystyle\sum_{(p-q)m+ql \leqslant k} \mathcal{D}_{[X],l} \cap F^{-m}_{-\infty}\mathcal{D}_{[X]} & \text{si} \quad r < 1 \end{cases}$$

Il est clair que pour les valeurs particulières $+\infty,\ 1,\ -\infty$ du rationnel r, la filtration $F^{\cdot}_{r}\mathcal{D}_{[X]}$ coincide respectivement avec la filtration $(V_m\mathcal{D}_{[X]})_{m\in\mathbb{Z}}$, la filtration $(\mathcal{D}_{[X],l})_{l\in\mathbb{N}}$ et la filtration $F^{\cdot}_{-\infty}\mathcal{D}_{[X]}$.

Si (x, t) est un système de coordonnées locales sur X tel que $Y = \{t = 0\}$ et si (x, t, ξ, τ) sont les coordonnées locales associées sur T^*X, alors le fibré conormal à Y dans X (noté Λ) est donné par:

$$\Lambda = \{(x, t, \xi, \tau) \in T^*X / t = \xi = 0\}$$

On note par (x, τ, x^*, τ^*) les coordonnées locales induites sur $T^*\Lambda$.

On constate que pour la F_r-filtration, x_i est d'ordre 0, D_{x_i} est d'ordre q, t_i est d'ordre $(q - p)$ et D_{t_i} est d'ordre p.

Pour $r \in \mathbb{Q} - \{1\}$, le gradué $gr_{F_r}\mathcal{D}_{[X]}$ est isomorphe (voir [11]) à $\tilde{\pi}_*\mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}$, où $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}$ est le sous-faisceau de $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}$ des fonctions holomorphes sur $T^*\Lambda$ et polynomiales dans les fibres de $\tilde{\pi} : T^*\Lambda = T^*(T^*_Y X) \longrightarrow Y$.

En fait, cet isomorphisme est donné par l'application 'symbole principal' d'ordre k et que l'on peut écrire,

$$\sigma^{[k]}_{k} : gr^{k}_{F_r}\mathcal{D}_{[X]} \longrightarrow \bigoplus_{(p-q)(j-i)+qj=k} \tilde{\pi}_*\mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}(i, j)$$

où $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}(i, j)$ est l'anneau des polynômes en τ, x^*, τ^* qui s'écrivent localement comme des sommes $\sum f_{\beta\gamma\theta}(x)\tau^{\beta}x^{*\gamma}\tau^{*\theta}$ telles que $i = |\gamma| + |\theta|$ et $j = |\gamma| + |\beta|$.

Si $r = \pm\infty$, on a $gr_{F_{-\infty}}\mathcal{D}_{[X]} \simeq \pi_{0*}\mathcal{D}_{[X]} \simeq gr_{F_{+\infty}}\mathcal{D}_{[X]}$, avec $\pi_0 : \Lambda \longrightarrow Y$.

D'autre part, comme pour tout $r \in \mathbb{Q}$, le gradué $gr_{F_r}\mathcal{D}_{[X]}$ s'identifie à $\tilde{\pi}_*\mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]} = \bigoplus_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \tilde{\pi}_*\mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}(i, j)$, on peut donc munir (selon [11]) l'anneau

https://doi.org/10.1023/A:1017562822062 Published online by Cambridge University Press

$gr_{F_r}\mathcal{D}_{[X]}$ des filtrations:

$$G_+^l\, gr_{F_r}\mathcal{D}_{[X]} = \bigoplus_{j-i \leqslant l} \tilde{\pi}_*\mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}(i,j) \qquad \forall l \in \mathbb{Z}$$

$$G_-^l\, gr_{F_r}\mathcal{D}_{[X]} = \bigoplus_{j-i \geqslant l} \tilde{\pi}_*\mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}(i,j) \qquad \forall l \in \mathbb{Z}$$

Ces dernières vérifient:

$$gr_{G_\pm}\, gr_{F_r}\mathcal{D}_{[X]} = \tilde{\pi}_*\mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}$$

Si $r = 1$, on considère sur le gradué $gr_{F_1}\mathcal{D}_{[X]} = \mathcal{O}_{[T^*X|Y]}$ la filtration $G^{\cdot}(gr_{F_1}\mathcal{D}_{[X]})$ par l'ordre d'annulation sur Λ (pour plus de détails, voir [11]).

Par ailleurs, si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_{[X]}$-module cohérent défini près de Y, on dit qu'une F_r-filtration $(\mathcal{M}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{M}$ est bonne si localement il existe des générateurs $u_1, \ldots, u_N$ de $\mathcal{M}$ et des entiers $k_1, \ldots, k_N$ tels que:

$$\mathcal{M}_k = \sum_{i=1}^{N} F_r^{k-k_i}\mathcal{D}_{[X]}u_i.$$

On démontre dans [11] que le gradué associé à une bonne F_r-filtration est un $\tilde{\pi}_*\mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}$-module cohérent qui définit un cycle analytique positif $\tilde{\Sigma}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ sur $T^*\Lambda$, appelé cycle microcaractéristique de type r.

Le support de ce dernier – noté $\Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ et appelé variété microcaractéristique de type r – est indépendant du choix de la bonne filtration.

De même, on démontre que pour une bonne filtration $G^{\cdot}_\pm(gr_{F_r}(\mathcal{M}))$, le gradué associé $gr_{G_\pm}gr_{F_r}\mathcal{M}$ est un $\tilde{\pi}_*\mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}$-module cohérent.

Le support du $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}$-module cohérent $\tilde{\pi}^{-1}gr_{G_-}gr_{F_r}(\mathcal{M})$ (resp. $\tilde{\pi}^{-1}gr_{G_+}gr_{F_r}(\mathcal{M})$), noté $Ch_\Lambda(r)(\mathcal{M})$, (resp. $Ch_\Lambda\{r\}(\mathcal{M})$), est appelé variété microcaractéristique de type (r), (resp. $\{r\}$). Leurs cycles respectifs associés $\tilde{Ch}_\Lambda(r)(\mathcal{M})$ et $\tilde{Ch}_\Lambda\{r\}(\mathcal{M})$ sont indépendants des choix des bonnes filtrations $F_r^{\cdot}(\mathcal{M})$ et $G^{\cdot}_\pm(gr_{F_r}(\mathcal{M}))$.

Si $r = \pm\infty$, comme $gr_{F_{-\infty}}\mathcal{D}_{[X]} \simeq \pi_{0*}\mathcal{D}_{[\Lambda]} \simeq gr_{F_{+\infty}}\mathcal{D}_{[X]}$, nous noterons $\tilde{Ch}_\Lambda\{r\}(\mathcal{M}) = \tilde{Ch}_\Lambda(r)(\mathcal{M})$ le cycle caractéristique de $gr_{F_r}\mathcal{M}$, considéré comme $\pi_{0*}\mathcal{D}_{[\Lambda]}$-module cohérent.

Quand $r = 1$, on munit $\mathcal{M}$ d'une bonne filtration $F_1^{\cdot}\mathcal{M}$, puis $gr_{F_1}\mathcal{M}$ d'une bonne $G^{\cdot}(gr_{F_1}\mathcal{M})$-filtration et le gradué associé est un $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}$-module cohérent dont on prend le cycle caractéristique. On notera ce dernier par $\tilde{Ch}_\Lambda\{1\}(\mathcal{M}) = \tilde{Ch}_\Lambda(1)(\mathcal{M}) = \tilde{Ch}_\Lambda(\mathcal{M})$.

Rappelons maintenant quelques propriétés du fibré $T^*\Lambda$.

Le fibré cotangent $T^*\Lambda$ est muni de deux actions de $\mathbb{C}^*$: H_0 qui n'est autre que la multiplication dans les fibres de $T^*\Lambda \longrightarrow \Lambda$ et H_∞ qui provient du fait que Λ est-elle même munie d'une action de $\mathbb{C}^*$. On peut encore en définir une troixième selon Section 1.3 de [13] par $H_r = H_\infty^p H_0^q$.

https://doi.org/10.1023/A:1017562822062 Published online by Cambridge University Press

En coordonnées locales, ces actions s'écrivent ($r = p/q$):

$$H_0(\lambda) : (x, \tau, x^*, \tau^*) \longrightarrow (x, \tau, \lambda x^*, \lambda\tau^*)$$

$$H_\infty(\lambda) : (x, \tau, x^*, \tau^*) \longrightarrow (x, \lambda\tau, \lambda x^*, \tau^*)$$

$$H_r(\lambda) : (x, \tau, x^*, \tau^*) \longrightarrow (x, \lambda^p\tau, \lambda^q x^*, \lambda^{q-p}\tau^*)$$

On montre dans [11] que les variétés microcaractéristiques $\Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ sont des sous-ensembles involutifs, H_r-homogènes et de dimension inférieure ou égale à celle de la variété caractéristique $Ch_\Lambda(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$. En plus, quand r varie, ces variétés ne sont différentes que pour un nombre fini de valeurs de r. Ces valeurs sont appelées **indices critiques** de $\mathcal{M}$.

On démontre aussi qu'en dehors de cette suite finie de rationnels, la variété $\Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ est bihomogène, i.e. homogènespour H_0 et H_∞.

Par contre, pour $r \in \mathbb{Q}$ (voir [11]) les variétés microcaractéristiques $Ch_\Lambda\{r\}(\mathcal{M})$ et $Ch_\Lambda(r)(\mathcal{M})$ sont toujours bihomogènes et sont égales à la variété $\Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ si r n'est pas un indice critique de $\mathcal{M}$.

Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_{[X]}$-module de la forme $\mathcal{D}_{[X]}/\mathcal{I}$, où $\mathcal{I}$ est un idéal de type fini, les variétés $Ch_\Lambda\{r\}(\mathcal{M})$ et $Ch_\Lambda(r)(\mathcal{M})$ sont données par:

$$Ch_\Lambda\{r\}(\mathcal{M}) = \{\theta \in T^*\Lambda/\sigma^{\{r\}}(P)(\theta) = 0 \qquad \forall P \in \mathcal{I}\}$$

$$Ch_\Lambda(r)(\mathcal{M}) = \{\theta \in T^*\Lambda/\sigma^{(r)}(P)(\theta) = 0 \qquad \forall P \in \mathcal{I}\}$$

2.2. LE CYCLE ANALYTIQUE $Irr(r)(\tilde{\Sigma})$

Dans cette partie, nous allons rappeler la notion du cycle analytique $Irr(r)(\tilde{\Sigma})$ introduite dans [14] pour un rationnel $r > 1$. Cette définition se généralise sans difficulté au cas où r est inférieur à 1.

Considérons une variété analytique complexe Y, un fibré vectoriel complexe Λ de rang un sur Y et le fibré cotangent $T^*\Lambda$ à Λ.

Dans ce cas, la projection $p : \Lambda \longrightarrow Y$ et le plongement $j : Y \hookrightarrow \Lambda$ définissent les applications:

$$T^*Y \xleftarrow{p_1} (T^*Y) \times_Y \Lambda \xrightarrow{j_1} T^*\Lambda$$

$$T^*Y \xleftarrow{p_2} (T^*\Lambda) \times_\Lambda Y \xrightarrow{j_2} T^*\Lambda$$

qui s'écrivent en coordonnées locales:

$$p_1(x, x^*, \tau) = (x, x^*) \qquad j_1(x, x^*, \tau) = (x, \tau, x^*, 0)$$

$$p_2(x, x^*, \tau^*) = (x, x^*) \qquad j_2(x, x^*, \tau^*) = (x, 0, x^*, \tau^*)$$

La réunion de $j_1((T^*Y)\times_Y\Lambda)$ et de $j_2((T^*\Lambda)\times_\Lambda Y)$ est une hypersurface S_Λ de $T^*\Lambda$ donnée localement par $\{\tau\tau^*=0\}$.

Soient $r\in\mathbb{Q}$ et Σ une variété analytique lagrangienne de $T^*\Lambda$, homogène pour l'action H_r. A cette variété, on peut associer deux variétés Σ^+ et Σ^-de $T^*\Lambda$ (voir [14]) qui sont non seulement H_r-homogènes mais bihomogènes. En plus, elles sont lagrangiennes si Σ est lagrangienne.

D'autre part, on démontre dans [12] que si Σ est une sous-variété lagrangienne bihomogène de $T^*\Lambda$, il existe deux variétés lagrangiennes homogènes (au sens usuel) S_1 et S_2 de T^*Y telles que:

$$\Sigma = j_1p_1^{-1}S_1\cup j_2p_2^{-1}S_2$$

Cette décomposition est valable aussi pour les cycles analytiques : si $\tilde{\Sigma}$ est un cycle analytique dont le support est une sous-variété lagrangienne bihomogène de $T^*\Lambda$, alors il existe deux cycles lagrangiens homogènes $S_1(\tilde{\Sigma})$ et $S_2(\tilde{\Sigma})$ de T^*Y tels que:

$$\tilde{\Sigma} = j_1p_1^{-1}S_1(\tilde{\Sigma})+j_2p_2^{-1}S_2(\tilde{\Sigma})$$

Les variétés Σ^+ et Σ^- citées plus haut se décomposent donc en quatre variétés lagrangiennes et homogènes S_1^+,S_2^+, S_1^- et S_2^- de T^*Y. On note par $\tilde{S}_1^+$,$\tilde{S}_2^+$, $\tilde{S}_1^-$ et $\tilde{S}_2^-$ les cycles analytiques correspondants.

DÉFINITION 2.2.1. ([*14*]) *Soient $\tilde{\Sigma}$ un cycle analytique lagrangien de $T^*\Lambda$ et r un rationnel quelconque. On définit le cycle analytique lagrangien $Irr(r)(\tilde{\Sigma})$ par:*

$$Irr(r)(\tilde{\Sigma}) = \tilde{S}_1^- - \tilde{S}_2^- - \tilde{S}_1^+ + \tilde{S}_2^+$$

Remarque 2.2.2. (1) Si Σ est irréductible et bihomogène , on a $\tilde{\Sigma}=\tilde{\Sigma}^+=\tilde{\Sigma}^-$ et donc $Irr(r)(\tilde{\Sigma})=0$.

(2) Soit $r\in\mathbb{Q}$. Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_{[X]}$-module cohérent, la variété microcaractéristique $Ch_\Lambda(r)(\mathcal{M})$ (resp. $Ch_\Lambda\{r\}(\mathcal{M})$) coincide avec la variété $\Sigma_\Lambda^{(r)-}(\mathcal{M})$ (resp.$\Sigma_\Lambda^{(r)+}(\mathcal{M})$).

2.3. VARIÉTÉS MICROCARACTÉRISTIQUES D'UN $\mathcal{D}_X$-MODULE PORTÉ PAR UNE HYPERSURFACE

Dans cette partie, nous allons démontrer que dans le cas des $\mathcal{D}_X$-modules portés par une hypersurface, les variétés microcaractéristiques de type r introduite dans Section 2.1 ne dépendent pas du rationnel choisi.

Soient X une variété analytique complexe et Y une hypersurface lisse de X. On note par i l'injection de Y dans X.

Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_Y$-module (à gauche) cohérent, on définit son image directe par i en posant:

$$i_+\mathcal{M} = \mathbb{R}i_*(\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}\otimes_{\mathcal{D}_Y}\mathcal{M})$$

https://doi.org/10.1023/A:1017562822062 Published online by Cambridge University Press

$\mathcal{D}_{X\longleftarrow Y}$ est le $(i^{-1}\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_Y)$-bimodule $\Omega_Y^{n-1}\bigotimes_{i^{-1}\mathcal{O}_X} i^{-1}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X^n, \mathcal{D}_X)$ à support dans Y, n est la dimension de X et Ω_Y^{n-1} (resp. Ω_X^n) est le faisceau des $(n-1)$-formes (resp. n-formes) holomorphes sur Y (resp. X).

Si i est une immersion fermée, i_* n'est autre que le prolongement par 0 et donc $i_+\mathcal{M} = i_*(\mathcal{D}_{X\longleftarrow Y} \bigotimes_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{M})$.

LEMMA 2.3.1, *Soient $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_Y$-module cohérent et r un rationnel supérieur ou égal à un. Si $\Sigma_\Lambda^{(r)}(i_+\mathcal{M})$ et $Ch_\Lambda(\mathcal{M})$ sont respectivement la variété microcaractéristique associée au gradué $gr_{F_r}(i_+\mathcal{M})$ et la variété caractéristique de $\mathcal{M}$, et si $i: Y \hookrightarrow X$ et une injection fermée et lisse, alors:*

$$\Sigma_\Lambda^{(r)}(i_+\mathcal{M}) = j_1 p_1^{-1} Ch_\Lambda(\mathcal{M})$$

où j_1 et p_1 sont les applications de Section 2.2.

Preuve. Soit $r \in \mathbb{Q}$ tel que $r \geqslant 1$. Supposons d'abord qu'il est entier et qu'il est égal à p.

Vu le caractère local des ensembles ci-dessus, il suffit de se placer sur un ouvert de coordonnées locales. □

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_Y$-module cohérent. Munissons $\mathcal{D}_Y$ de la filtration $(\mathcal{D}_{Y,k})_{k\geqslant 0}$ par l'ordre des opérateurs et $\mathcal{M}$ d'une bonne filtration $(\mathcal{M}_k)_{k\geqslant 0}$ associée à la filtration $(\mathcal{D}_{Y,k})_{k\geqslant 0}$.

Si l'anneau $\mathcal{D}_X$ est muni de la filtration $(F_p^{\cdot}\mathcal{D}_X)$, le $\mathcal{D}_X$-module (à gauche) $i_+\mathcal{D}_Y = i_*(\mathcal{D}_{X\longleftarrow Y})$ est cohérent et on peut donc le munir d'une bonne filtration associée à cette dernière. D'autre part, $i_+\mathcal{D}_Y$ est un $\mathcal{D}_Y$-module (à droite) localement libre dont la filtration induite par $(\mathcal{D}_{Y,k})_{k\geqslant 0}$ est compatible avec la filtration $(F_p^{\cdot}(i_+\mathcal{D}_Y))$ pour la structure de $\mathcal{D}_Y$-module à droite, à savoir: Si $P \in \mathcal{D}_{Y,l}$ et $u \in F_p^j(i_+\mathcal{D}_Y)$ alors $u.P \in F_p^{j+l}(i_+\mathcal{D}_Y)$.

Par ailleurs, $(\mathcal{M}_k)_{k\geqslant 0}$ est l'image par un morphisme $\mathcal{D}_Y^N \xrightarrow{h} \mathcal{M} \longrightarrow 0$ d'une filtration du type $(\mathcal{D}_Y^N)_k = \bigoplus_{i=1}^N \mathcal{D}_{Y,k-k_i}$. La suite $i_+\mathcal{D}_Y^N \xrightarrow{h'} i_+\mathcal{M} \longrightarrow 0$ est exacte, donc quite à réduire l'ouvert au besoin, on peut munir $i_+\mathcal{M}$ d'une bonne filtration $F_p^{\cdot}(i_+\mathcal{M})$ associée à la filtration $F_p^{\cdot}(i_+\mathcal{D}_Y)$.

En fait $F_p^k(i_+\mathcal{M})$ est l'image par h' de la somme $\bigoplus_m F_p^{k-k_m}(i_+\mathcal{D}_Y^N)$, mais le groupe $F_p^{k-k_m}(i_+\mathcal{D}_Y^N)$ est exactement

$$i_*\left(\sum_{j+l\leqslant k-k_m} F_p^j\mathcal{D}_{X\longleftarrow Y} \otimes \mathcal{D}_{Y,l}^N\right)$$

vu la compatibilité ci-dessus. Comme h' est le morphisme qui à $u \otimes v \in \mathcal{D}_{X\longleftarrow Y} \otimes \mathcal{D}_Y^N$

associe $u \otimes h(v) \in \mathcal{D}_{X \longleftarrow Y} \otimes \mathcal{M}$, on en déduit que:

$$F_p^k(i_+\mathcal{M}) = i_* \left(\bigoplus_m \sum_{j+l \leqslant k-k_m} F_p^j \mathcal{D}_{X \longrightarrow Y} \otimes \mathcal{M}_l \right)$$

Cela donne au niveau des gradués, la relation:

$$gr_{F_p}(i_+\mathcal{M}) = \frac{\mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}}{\mathcal{I}} \bigotimes_{i_*\mathcal{O}_{T^*Y}} i_* gr\mathcal{M}$$

où $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}$ (resp. $\mathcal{O}_{[T^*Y]}$) est le faisceau des fonctions holomorphes sur $T^*\Lambda$ (resp. T^*Y) et polynomiales dans les fibres de $T^*\Lambda \longrightarrow \Lambda$ (resp. $T^*Y \longrightarrow Y$), et $\mathcal{I}$ est l'idéal de $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}$ engendré localement par τ^*.

Si maintenant r est un rationnel quelconque qui s'écrit $r = p/q$, on seramène au cas précédent en considérant la filtration $\tilde{\mathcal{D}}_{Y,k} = \mathcal{D}_{Y,[kq]}$ où $[kq]$ est la partie entière de k/q.

En coordonnées locales, cette relation se traduit par: $(x, \tau, x^*, 0) \in \Sigma_\Lambda^{(r)}(i_+\mathcal{M})$ si et seulement si $(x, x^*) \in Ch_\Lambda(\mathcal{M})$.

Par ailleurs, Kashiwara démontre dans [7] que si $Y \hookrightarrow X$ est une injection lisse et fermée d'une sous-variété Y dans une variété analytique complexe X, alors le foncteur $\mathcal{M} \longrightarrow i_+\mathcal{M}$ définit une équivalence de catégories entre les $\mathcal{D}_Y$-modules cohérents et les $\mathcal{D}_X$-modules cohérents à support dans Y.

Supposons maintenant que X est un fibré vectoriel de rang un et de base Y. En utilisant le résultat de Kashiwara que l'on vient de citer et le lemme 2.3.1, on obtient le:

COROLLAIRE 2.3.2. *Considérons un $\mathcal{D}_{[X]}$-module cohérent L à support dans Y. Soient r et r' deux rationnels supérieurs où égaux à un. Si $\Sigma_\Lambda^{(r)}(L)$ et $\Sigma_\Lambda^{(r')}(L)$ sont les variétés microcaractéristiques associées respectivement aux graduées $gr_{F_r}(L)$ et $gr_{F_{r'}}(L)$, alors:*

$$\Sigma_\Lambda^{(r)}(L) = \Sigma_\Lambda^{(r')}(L).$$

Remarque 2.3.3. Si L est un $\mathcal{D}_{[X]}$-module cohérent à support dans Y, alors $\Sigma_\Lambda^{(r)}(L)$ est bihomogène et est contenue dans la variété particulière d'equation locale $\{\tau^* = 0\}$.

Considérons maintenant un fibré en droites X de base Y. Fixons un système de coordonnées locales $(x_1, \dots, x_n, t)$ de X qui soient linéaires dans les fibres et telles que $Y = \{t = 0\}$. Les fibrés $\Lambda = T_Y^*X$ et $T^*\Lambda$ ont pour coordonnées locales respectives (x, τ) et (x, τ, x^*, τ^*).

2.4. FILTRATIONS D'UN $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$-MODULE

Notons par $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$ le faisceau d'anneaux des opérateurs différentiels sur X à coefficients méromorphes sur Y et polynomiaux dans les fibres et considérons pour $r \in [-\infty, +\infty]$ fixé les groupes:

$$F_r^k \mathcal{D}_{[X]}[*Y] = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} t^{-\alpha} F_r^{k+(q-p)\alpha} \mathcal{D}_{[X]} \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$F_r\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$ définit une filtration de $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$ telle que l'ordre de t^{-1} soit $p-q$. En outre, si $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}(\lambda, \mu)$ désigne le faisceau dont chaque élément s'écrit localement comme une somme finie $\sum f_{\beta\gamma\theta}(x)\tau^{\beta} x^{*\gamma} \tau^{*\theta}$ telle que $\lambda = |\gamma| + \theta$et $\mu = |\gamma| + \beta$, alors on a l'isomorphisme (voir [11])

$$\tilde{\pi}^{-1} gr_{F_r}^k \mathcal{D}_{[X]}[*Y] \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \tau^{*-\alpha} \left(\bigoplus_{p\mu+(q-p)(\lambda-\alpha)=k} \mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}(\lambda, \mu) \right)$$

où $\tilde{\pi}$ est la projection $T^*\Lambda = T^*(T_Y^*X) \longrightarrow Y$. Par conséquent, le gradué de $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$ associé à cette filtration est isomorphe à $\tilde{\pi}_* \mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}[\tau^{*-1}]$.

PROPOSITION 2.4.1. *La filtration $F_r\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$ est noethérienne.*

Preuve. Pour cela , d'après le chap 2 , proposition 1.1.7 de [24], il suffit de montrer que pour tout $\theta \in X$, l'anneau de Rees $A_\theta = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (F_r^k \mathcal{D}_{[X]}[*Y])_\theta T^k$ est noethérien.

Pour $\theta = (x_0, t_0) \in X$, les éléments de A_θ sont représentés par:

$$P(T) = \sum_k L_k T^k, \qquad \text{avec} \qquad L_k \in F_r^k \mathcal{D}_{[X]}[*Y]$$

où la somme est finie en k.

Il existe donc $\alpha_n^k, \alpha_2^k, \ldots, \alpha_n^k$ dans $\mathbb{N}$ et Q_i^k dans $F_r^{k+(q-p)\alpha_i^k} \mathcal{D}_{[X]}$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ tels que $L_k = \sum_{i=1} t^{-\alpha_i^k} Q_i^k$.

Mais Q_i^k peut s'écrire:

$$Q_i^k = \sum_{(p-q)(\theta-\beta)+q(|\gamma|+\theta) \leqslant k+(q-p)\alpha_i^k} a_{\beta\gamma\theta}(x)\, t^\beta D_x^\gamma D_t^\theta$$

Alors en posant $m = k - (p-q)(\theta - \beta + \alpha_i^k)$ et en faisant le changement de variable $u = T^{q-p} t$ $(D_u = T^{p-q} D_t)$, on obtient:

$$P(T) = \sum_m \left(\sum_{\substack{q(|\gamma|+\theta) \leqslant m \\ i}} a_{\beta\gamma\theta}(x)\, t^{\beta-\alpha_i^k} D_x^\gamma D_u^\theta \right) T^m$$

A m fixé, $\sum_{q(|\gamma|+\theta) \leqslant m} a_{\beta\gamma\theta}(x)\, t^{\beta-\alpha_i^k} D_x^\gamma D_u^\theta$ est un opérateur différentiel à coefficients méromorphes.^{i}

https://doi.org/10.1023/A:1017562822062 Published online by Cambridge University Press

Si $q = 1$, A_θ est isomorphe à l'anneau de Rees $\bigoplus_m \mathcal{D}_{[X]}[*Y]_{\tilde{\theta},m} T^m$, où $(\mathcal{D}_{[X]}[*Y]_m)_{m \geqslant 0}$ est la filtration de $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$ par l'ordre des opérateurs et $\tilde{\theta} = (x_0, u_0)$. Or la restriction de cette filtation à $\mathcal{D}_{[X]}$ est noethérienne (proposition 5.1.4 de [11]), donc son gradué $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}$ est noethérien et par conséquent son localisé $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}[\tau^{*-1}]$ est noethérien. Comme la filtration $(\mathcal{D}_{[X]}[*Y]_m)_{m \geqslant 0}$ est noethérienne (théorème 1.26 de [3]), A_θ est un anneau noethérien.

Si $q > 1$, le résultat est le même, en considérant au lieu de la filtration usuelle, la filtation

$$\tilde{\mathcal{D}}_{[X]}[*Y]_{\tilde{\theta},m} = \mathcal{D}_{[X]}[*Y]_{\tilde{\theta},[m/q]} \qquad \forall m \geqslant 0$$

où $[m/q]$ est la partie entière de m/q.

Soit $\mathcal{I}$ un idéal de type fini de $\mathcal{D}_{[X]}$. Munissons $\mathcal{I}$ de la filtration induite par $(F_r\mathcal{D}_{[X]})$ et posons $\mathcal{I}' = \mathcal{D}_{[X]}[*Y] \bigotimes_{\mathcal{D}_{[X]}} \mathcal{I}$.

PROPOSITION 2.4.2. *Si $(F_r\mathcal{D}_{[X]}[*Y] \bigcap \mathcal{I}')$ est la filtration induite par celle de $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$ sur $\mathcal{I}'$, alors on a la relation suivante:*

$$gr_{F_r}(\mathcal{I}') = \mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}[\tau^{*-1}] \bigotimes_{\mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}} gr_{F_r}(\mathcal{I})$$

Preuve. Soient $\mathcal{Q}_1, \ldots, \mathcal{Q}_N$ des éléments de $\mathcal{I}$ tels que les symboles $\sigma^{[r]}(\mathcal{Q}_1), \ldots, \sigma^{[r]}(\mathcal{Q}_N)$ engendrent l'idéal $gr_{F_r}(\mathcal{I})$. Comme ces opérateurs appartiennent à $\mathcal{I}'$ et $gr_{F_r}(\mathcal{I}')$ est un $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}[\tau^{*-1}]$-module, alors forcément:

$$gr_{F_r}(\mathcal{I}') \supset \mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}[\tau^{*-1}] \otimes_{\mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}} gr_{F_r}(\mathcal{I}).$$

Il reste à démontrer l'autre inclusion. Supposons que $\mathcal{I} = \sum_{i=1}^n \mathcal{D}_{[X]} P_i$ où P_i est d'ordre m_i pour la $F_r\mathcal{D}_{[X]}$-filtration. Soit $P \in F_r^k \mathcal{D}_{[X]}[*Y] \bigcap \mathcal{I}'$, alors il existe $A_1, \ldots, A_n$ dans $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$ tels que: $P = \sum_{i=1}^n A_i P_i$.

Si tous les A_i appartiennent à $\mathcal{D}_{[X]}$, alors $P \in \mathcal{I}$ et par conséquent $\sigma^{[r]}(P) \in \mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}[\tau^{*-1}] \bigotimes_{\mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}} gr_{F_r}(\mathcal{I})$.

S'il existe maintenant au moins un A_i qui n'appartient pas à $\mathcal{D}_{[X]}$, on multiplie P par une puissance convenable de t pour avoir:

$$t^q P = \sum_{i=1}^n (t^q A_i) P_i, \qquad \text{où} \qquad t^q P_i \in \mathcal{D}_{[X]} \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Comme $\sigma^{[r]}(P) = (1/\sigma^{[r]}(t^q)) \,.\, \sigma^{[r]}(t^q P)$ et $(1/\sigma^{[r]}(t^q))$ est dans $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}[\tau^{*-1}]$, alors $\sigma^{[r]}(P)$ appartient à $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}[\tau^{*-1}] \bigotimes_{\mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}} gr_{F_r}(\mathcal{I})$. Ce qui achève la démonstration. □

https://doi.org/10.1023/A:1017562822062 Published online by Cambridge University Press

PROPOSITION 2.4.3. *Soit r un rationnel supérieur ou égal à 1. Si $0 \longrightarrow \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'' \longrightarrow 0$ est une suite exacte de $\mathcal{D}_{[X]}$-modules cohérents, et si sur un ouvet U de $T^*\Lambda$, la codimension de $\Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ est supérieure ou égale à d, alors on a sur cet ouvert U:*

$$[\tilde{\Sigma}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})]_d = [\tilde{\Sigma}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M}^{'})]_d + [\tilde{\Sigma}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M}^{``})]_d$$

où $[\tilde{C}]_d$ est la composante homogène de degré d du cycle $\tilde{C}$.

2.5. CYCLES MICROCARACTÉRISTIQUES D'UN $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$-MODULE

X est toujours un fibré en droites de base Y. Si Σ est une variété microcaractéristique d'un $\mathcal{D}_{[X]}$-module cohérent $\mathcal{M}$, nous désignerons par Σ' la réunion des composantes irréductibles de Σ qui ne sont pas contenues dans l'hypersurface d'équation locale $\{\varsigma^* = 0\}$, et par $[\Sigma]'$ le cycle analytique correspondant. Soit $\mathcal{P}$ un $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$-module cohérent. Supposons de plus qu'il est cohérent en tant que $\mathcal{D}_{[X]}$-module. Localement, il existe un $\mathcal{D}_{[X]}$-module cohérent $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{P} = \mathcal{D}_{[X]}[*Y] \bigotimes_{\mathcal{D}_{[X]}} \mathcal{M}$. Nous définissons son cycle microcaractéristique de type r en tant que $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$-module par:

$$[\tilde{\Sigma}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{P})] = [\tilde{\Sigma}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})]^{'}$$

Cette définition est indépendante du choix de $\mathcal{M}$. En effet, si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_{[X]}$-module cohérent tel que $\mathcal{M}[*Y] = \mathcal{P}$, alors la suite de $\mathcal{D}_{[X]}$-modules

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{H}_1 \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$ sont à support dans Y, est exacte.

Par conséquent, le résultat découle de la proposition 2.4.3 et de la remarque 2.2.2.

Par la suite, on ne ferra plus la différence entre le cycle microcaractéristique $[\tilde{\Sigma}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{P})]$ du $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$-module $\mathcal{P}$ et le cycle microcaractéristique $[\tilde{\Sigma}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{P})]$.

2.6. PASSAGE À L'INFINI

X est toujours un fibré de rang un et de base Y. On l'identifiera localement au produit $Y \times \mathbb{C}$.

Dans cette partie, on se place sur un ouvert V de coordonnées locales (x, t) qui soient linéaires dans les fibres et telles que $Y = \{t = 0\}$. Soient (x, t, ξ, τ) les coordonnées locales induites sur T^*X. Si $\Lambda = T_Y^*X$ est le fibré conormal à Y dans X, on note par (x, τ, x^*, τ^*) les coordonnées locales correspondantes sur $T^*\Lambda$.

On désigne par χ et $\bar{\chi}$ respectivement l'isomorphisme ci-dessous et l'application cotangente associée:

$$\chi : Y \times \mathbb{C}^* \longrightarrow Y \times \mathbb{C}^*$$

$$(x, t) \longrightarrow (x, s = 1/t)$$

$$\bar{\chi} : T^*(Y \times \mathbb{C}^*) \longrightarrow T^*(Y \times \mathbb{C}^*)$$

$$(x, t, \xi, \tau) \longrightarrow (x, s, \xi, \varsigma)$$

avec

$$\begin{cases} s = 1/t \\ \varsigma = -t^2\tau \end{cases}$$

Soit $T_Y X$ le fibré normal à Y dans X. Les fibrés $T^*_Y X$ et $T_Y X$ ont pour coordonnées locales respectives (x, τ) et $(x, \tilde{\tau})$.

X est un fibré vectoriel de base Y, on peut donc l'identifier à $T_Y X$ et par conséquent T^*X est isomorphe à $T^*(T_Y X)$.

Soient $(x, \tilde{\tau}, x^*, \tilde{\tau}^*)$ et (x, τ, x^*, τ^*) les coordonnées locales induites respectivement sur $T^*(T_Y X)$ et $T^*(T^*_Y X)$.

Les fibrés $T_Y X$ et $T^*_Y X$ sont duaux, alors il existe un isomorphisme canonique entre leurs fibrés cotangents. Si on revient aux coordonnées locales, cet isomorphisme est donnée par: $(x, \tilde{\tau}, x^*, \tilde{\tau}^*) \longrightarrow (x, \tilde{\tau}^*, x^*, -\tilde{\tau})$

Par conséquent, il existe un isomorphisme local entre T^*X et $T^*(T^*_Y X)$. Ce dernier est défini par: $(x, t, \xi, \tau) \longrightarrow (x, \tau, x^*, \tau^*) = (x, \tau, \xi, -t)$.

D'après ce qui précède, on peut exhiber le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccc}
Y \times \mathbb{C}^* & \leftarrow & T^*(Y \times \mathbb{C}^*) & \longrightarrow & T^*\Lambda - \{\tau^* = 0\} \\
(x, t) & \longleftarrow & (x, t, \xi, \tau) & \longrightarrow & (x, \tau, x^*, \tau^*) \\
\downarrow \chi & & \downarrow \bar{\chi} & & \downarrow \phi \\
(x, s) & \longleftarrow & (x, s, \xi, \varsigma) & \longrightarrow & (x, \varsigma, x^*, \varsigma^*) \\
Y \times \mathbb{C}^* & \leftarrow & T^*(Y \times \mathbb{C}^*) & \longrightarrow & T^*\Lambda - \{\varsigma^* = 0\}
\end{array}$$

avec

$$\phi(x, \tau, x^*, \tau^*) = (x, \varsigma, x^*, \varsigma^*) \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} \varsigma = -\tau\tau^{*2} \\ \varsigma^* = 1/\tau^* \end{cases}$$

Remarquons qu'étant donnée l'application χ, on peut définir sur $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$, la transformation ψ qui à t associe $1/s$ et à D_t le monôme $-s^2 D_s$.

Les opérateurs x_i, t, D_{x_i} et D_t ont pour ordres respectifs pour la F_r-filtration: 0, $q - p$, q et p.

Quant à leurs transformés par $\psi : x_i$, $1/s$, D_{x_i} et $-s^2 D_s$, leurs ordres sont 0, $q - p$, q et p respectivement.

https://doi.org/10.1023/A:1017562822062 Published online by Cambridge University Press

ψ est un isomorphisme d'anneaux filtrés et le symbole $\sigma^{[r]}(.)$ est multiplicatif, il en résulte que ψ définit un isomorphisme vérifiant:

$$\psi(F_r^k \mathcal{D}_{[X]}[*Y]) = F_{2-r}^k \mathcal{D}_{[X]}[*Y]$$

$$\sigma^{[2-r]}(\psi(P)) = \sigma^{[r]}(P) o \phi^{-1} \qquad \forall P \in \mathcal{D}_{[X]}[*Y]$$

Notons maintenant par $\bar{\psi}$ l'isomorphisme local de $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$-module induit par ψ. Soient $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{[X]}$-module cohérent et U l'ouvert $X - Y$. On pose:

$$\mathcal{N} = \bar{\psi}(\mathcal{M}_{|U})$$

$\mathcal{N}$ est donc un $\mathcal{D}_{[X]|U}$-module cohérent.

PROPOSITION 2.6.1. *Il existe (localement) un $\mathcal{D}_{[X]}$-module cohérent $\tilde{\mathcal{N}}$ tel que $\tilde{\mathcal{N}}_{|U} = \mathcal{N}$.*

Preuve. Soit $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_{[X]}$-module cohérent. On peut l'écrire donc localement sous la forme $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{[X]}u_1 + \cdots + \mathcal{D}_{[X]}u_N$. Comme $\bar{\psi}$ est en particulier un isomorphisme de $\mathcal{D}_{[X]|U}$-modules, alors $\mathcal{N}$ peut aussi se mettre localement sous la forme $\mathcal{N} = \mathcal{D}_{[X]|U}\bar{\psi}(u_1) + \cdots + \mathcal{D}_{[X]|U}\bar{\psi}(u_N)$. Donc il suffit de démontrer qu'un $\mathcal{D}_{[X]|U}$-module à un générateur se prolonge en un $\mathcal{D}_{[X]}$-module cohérent sur l'ouvert de coordonnées V.

Prenons alors un $\mathcal{D}_{[X]}$-module cohérent $\mathcal{M}$ de la forme $\mathcal{D}_{[X]}/\mathcal{I}$ où $\mathcal{I}$ est un idéal de type fini engendré localement par des opérateurs $P_1, \ldots, P_n$. Choisissons des coordonnées locales (x, s) sur V qui soient linéaires dans les fibres et telles que $Y = \{s = 0\}$ et désignons par $\mathcal{N}$ le transformé de $\mathcal{M}_{|U}$ par $\bar{\psi}$ sur V.

Comme les opérateurs $\psi(P_1), \ldots, \psi(P_n)$ sont à coefficients méromorphes en s, alors il existe un entier m (qui n'est pas unique) tel que

$$s^m \psi(P_i) \in \mathcal{D}_{[X]} \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Notons par $\mathcal{J}_m$ l'idéal de $\mathcal{D}_{[X]}$ engendré par $s^m\psi(P_1), \ldots, s^m\psi(P_n)$ et par $\tilde{\mathcal{N}}$ le $\mathcal{D}_{[X]}$-module $\mathcal{D}_{[X]}/\mathcal{J}_m$. Ainsi, on a $\tilde{\mathcal{N}}_{|U} = \mathcal{N}$ sur l'ouvert V, d'où le résultat. $\square$

DEFINITION 2.6.2. Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_{[X]}$-module cohérent, on note par $T(\mathcal{M})$ le $\mathcal{D}_{[X]}$-module donné par:

$$T(\mathcal{M}) = \tilde{\mathcal{N}}[*Y]$$

où $\tilde{\mathcal{N}}[*Y]$ est le localisé de $\tilde{\mathcal{N}}$ le long de Y.

Quant à la relation entre les cycles microcaractéristiques de $\mathcal{M}$ et de $T(\mathcal{M})$, elle est donnée par le:

https://doi.org/10.1023/A:1017562822062 Published online by Cambridge University Press

THÉORÈME 2.6.3. *Soient r un rationnel quelconque et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{[X]}$-module cohérent. Si $\tilde{\Sigma}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ est la variéte ḿicrocaractéristique de type r de $\mathcal{M}$ et $\tilde{\Sigma}_\Lambda^{(2-r)'}(T(\mathcal{M}))$ est l'ensemble analytique cité dans Section 2.5, alors*

$$\Sigma_\Lambda^{(2-r)'}(T(\mathcal{M})) = Ad[\phi(\Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M}) \cap \{\tau^* \neq 0\})]$$

où ϕ est l'application définie dans Section 2.6 et $Ad(C)$ est l'adhérence de l'ensemble analytique C.

Preuve. Supposons d'abord que $\mathcal{M}$ est de la forme $\mathcal{D}_{[X]}/\mathcal{I}$, où $\mathcal{I}$ est un idéal de type fini.

$\mathcal{I}$ est engendré (localement) par des opérateurs $P_1, \ldots, P_n$. Si r un rationnel quelconque, on munit $\mathcal{I}$ de la filtration induite par $(F_r\mathcal{D}_{[X]})$ et on suppose que l'idéal $\sigma^{[r]}(\mathcal{I})$ de $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}$ engendré par les symboles de type r des éléments de $\mathcal{I}$, est engendré par $\sigma^{[r]}(L_1), \ldots, \sigma^{[r]}(L_N)$. □

Notons par (x, ς) et $(x, \varsigma, x^*, \varsigma^*)$ les coordonnées locales induites respectivement sur Λ et $T^*\Lambda$ par les coordonnées locales déjà choisies sur V. Comme chaque $\psi(P_i)$ est dans $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$s^m\psi(P_i) \in \mathcal{D}_{[X]} \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Notons également par $\mathcal{J}_m$ l'idéal de $\mathcal{D}_{[X]}$ engendré localement par les opérateurs $s^m\psi(P_1), \ldots, s^m\psi(P_n)$ et par $\tilde{\mathcal{N}}$ le $\mathcal{D}_{[X]}$-module $\mathcal{D}_{[X]}/\mathcal{J}_m$.

L'idéal $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]\otimes_{\mathcal{D}_{[X]}}\mathcal{J}_m$ n'est autre que le transformé par l'isomorphisme ψ de l'idéal $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]\otimes_{\mathcal{D}_{[X]}}\mathcal{I}$ de $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$. Par conséquent l'idéal $\sigma^{[2-r]}(\psi((\mathcal{D}_{[X]}[*Y]\otimes_{\mathcal{D}_{[X]}}\mathcal{I}))$ de $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}[\varsigma^{*-1}]$ engendré par les symboles de type $[2-r]$ de $\psi(\mathcal{D}_{[X]}\otimes_{\mathcal{D}_{[X]}}\mathcal{I})$ a pour partie génératric e$\sigma^{[2-r]}(\psi(L_1)), \ldots, \sigma^{[2-r]}(\psi(L_N))$.

Ainsi, d'après la proposition 2.4.2, l'idéal $\sigma^{[2-r]}(\mathcal{J}_m)$ de $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda|Y]}$ est engendré en dehors de l'hypersurface d'équation locale $\{\varsigma^* = 0\}$ par les symboles $\sigma^{[2-r]}(\psi(L_1)), \ldots, \sigma^{[2-r]}(\psi(L_N))$.

Il en résulte que la restriction de la variété microcaractéristique $\Sigma_\Lambda^{(2-r)}(\tilde{\mathcal{N}})$ de $\tilde{\mathcal{N}}$ à $T^*\Lambda - \{\varsigma^* = 0\}$ est donnée par:

$$\Sigma_\Lambda^{(2-r)}(\tilde{\mathcal{N}})_{|\{\varsigma^*\neq 0\}} = \{\theta \in T^*\Lambda/\sigma^{[2-r]}(\psi(L_j))(\theta) = 0, \quad j = 1, \ldots, N\}$$

Ceci donne vu les propriétés précédentes de ψ,

$$\tilde{\Sigma}^{(2-r)'}(\mathcal{N}) = Ad[\phi(\Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M}) \cap \{\tau^* \neq 0\})]$$

où $Ad(C)$ est l'adhérence de l'ensemble analytique C.

Si maintenant $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_{[X]}$-module cohérent quelconque engendré localement par des sections $u_1, \ldots, u_l$, alors on a la suite exacte.

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_{[X]}u_1 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}_0 \longrightarrow 0$$

https://doi.org/10.1023/A:1017562822062 Published online by Cambridge University Press

où $\mathcal{M}_0$ est le $\mathcal{D}_{[X]}$-module engendré par les classes d'équivalence modulo $\mathcal{D}_{[X]}u_1$ des sections $u_2, \ldots, u_l$.

Le résultat est alors obtenu en faisant une récurrence sur le nombre de générateurs de $\mathcal{M}$.

LEMMA 2.6.4. *Soient r un rationnel quelconque et Σ un sous-ensemble analytique lagrangien de $T^*\Lambda$ qui est homogène pour H_r. Soit ϕ l'application donnée dans des coordonnées locales par:*

$$T^*\Lambda - \{\tau^* = 0\} \longrightarrow T^*\Lambda - \{\varsigma^* = 0\}$$

$$(x, \tau, x^*, \tau^*) \longrightarrow (x, \varsigma, x^*, \varsigma^*)$$

$$\textit{telles que} \begin{cases} \varsigma = -\tau\tau^{*2} \\ \varsigma^* = 1/\tau^*. \end{cases}$$

Alors l'ensemble analytique $\phi(\Sigma \cap \{\tau^* \neq 0\})$ est lagrangien et H_{2-r}-homogène.

Preuve. Si Σ est un ensemble analytique H_r-homogène, alors il est donné localement par un nombre fini d'équations $\{f = 0\}$ telles qu'il existe pour chaque f, un entier k qui vérifie $u_r(f) = k.f$, où u_r est le champ de vecteurs associé à l'action en question et quel'on peut écrire localement comme:

$$u_r = \sum_i x_i^* \frac{\partial}{\partial x_i^*} + r\tau \frac{\partial}{\partial \tau} + (1 - r)\tau^* \frac{\partial}{\partial \tau^*}$$

ϕ est biholomorphe, la fonction $fo\phi^{-1}$ est donc analytique sur $T^*\Lambda - \{\varsigma^* = 0\}$.

Soit u_{2-r} le champ de vecteurs donné localement par:

$$u_{2-r} = \sum_i x_i^* \frac{\partial}{\partial x_i^*} + (2 - r)\varsigma \frac{\partial}{\partial \varsigma} + (r - 1)\varsigma^* \frac{\partial}{\partial \varsigma^*}$$

Il est facile de vérifier que $u_{2-r}(fo\phi^{-1}) = k(fo\phi^{-1})$. Ceci montre que cette fonction est H_{2-r}-homogène et vérifie $(fo\phi^{-1})_{|\phi(\Sigma \cap \{\tau^* \neq 0\}} = 0$.

Le sous-ensemble analytique Σ est lagrangien, donc ses composantes irréductibles ont la même dimension. Il suffit donc de supposer que Σ est irréductible et par conséquent, le sous-ensemble analytique $\phi(\Sigma \cap \{\tau^* \neq 0\})$ est lagrangien puisque ϕ est un isomorphisme. $\square$

COROLLAIRE 2.6.5. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{[X]}$-module cohérent.*

(1) *Deux rationnels r_k et r_{k+1} sont deux indices consécutifs de $\mathcal{M}$ si et seulement si $(2 - r_k)$ et $(2 - r_{k+1})$ sont deux indices critiques de $\tilde{\mathcal{N}}$.*

(2) *Si la variété $\Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ est lagrangienne, alors*

$$Irr(2 - r)(\tilde{\Sigma}_\Lambda^{(2-r)}(T(\mathcal{M})) = Irr(r)(\tilde{\Sigma}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M}))$$

https://doi.org/10.1023/A:1017562822062 Published online by Cambridge University Press

Preuve. (1) Soient $r_k \in \mathbb{Q}$ et $\Sigma_\Lambda^{(r_k)}(\mathcal{M})$ la variété microcaractéristique de type r_k de $\mathcal{M}$. Supposons que $\Sigma_\Lambda^{(r_k)}(\mathcal{M})$ s'écrive $\Sigma_\Lambda^{(r_k)}(\mathcal{M}) = \cup_l \Sigma_l^{(r_k)}(\mathcal{M})$ où $\Sigma_l^{(r_k)}(\mathcal{M})$ est irréductible.

D'après le Section 2.1, r_k est un indice critique pour $\mathcal{M}$ s'il existe un entier l_0 tel que la composante irréductible $\Sigma_{l_0}^{(r_k)}(\mathcal{M})$ correspondante ne soit pas bihomogène (i.e. homogène pour H_0 et H_∞).

Choisissons sur X des coordonnées locales (x, t) telles que $Y = \{t = 0\}$ et qui soient linéaires dans les fibres de $p : X \longrightarrow Y$. Si (x, τ) sont les coordonnées locales de $\Lambda = T_Y^* X$, nous noterons (x, τ, x^*, τ^*) celles induites sur $T^*\Lambda$.

Remarquons que si $\Sigma_{l_0}^{(r_k)}(\mathcal{M})$ est une composante irréductible contenue dans l'hypersurface d'équation locale $\{\tau^* = 0\}$, alors (voir lemme 4.5.1 de [12]) elle est bihomogène.

Prenons donc une composante qui n'est pas contenue dans l'hypersurface d'équation locale $\{\tau^* = 0\}$ et notons la $\Sigma_{l_0}^{(r_k)'}(\mathcal{M})$. Grâce au théorème 2.6.3, l'adhérence de la composante $\phi(\Sigma_{l_0}^{(r_k)}(\mathcal{M}) \cap \{\tau^* \neq 0\})$ est une composante $\Sigma_{l_0}^{(2-r_k)'}(\tilde{\mathcal{N}})$ qui est irréductible et non bihomogène. Ainsi $(2 - r_k)$ est un indice critique de $\tilde{\mathcal{N}}$.

(2) Comme la fonction qui à un cycle $\tilde{\Sigma}$ associe $Irr(r)(\Sigma)$ est additive et vu la remarque 2.3.3, il suffit donc de montrer l'égalité pour les composantes irréductibles de $\Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ qui ne soient pas contenues dans l'hypersurface donnée localement par $\{\tau^* = 0\}$.

Soit $\Sigma_l^{(r)}(\mathcal{M})$ une telle composante et $\Sigma_l^{(r)\pm}(\mathcal{M})$ les cycles lagrangiens et bihomogènes (de $T^*\Lambda$) associés. □

Remarquons que d'une part, les transformations canoniques de T^*Y conservent le faisceau $\mathcal{O}_{T^*\Lambda}$ et les actions H_r de $\mathbb{C}^*$ sur $T^*\Lambda$ et que d'autre part, elles sont compatibles avec l'application ϕ. Par conséquent une composante irréductible de la réunion $\Sigma_l^{(r)+}(\mathcal{M}) \cup \Sigma_l^{(r)-}(\mathcal{M})$ qui n'est pas contenue dans l'hypersurface $\{x^* = 0\}$, peut être ramenée par une transformation canonique de T^*Y au voisinage d'un point générique en une composante contenue dans $\{x = 0\}$.

Choisissons des coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n)$ de Y, (x, τ) de $\Lambda = T_Y^*X$ et (x, τ, x^*, τ^*) de $T^*\Lambda$ et supposons que les variétés $\Sigma_l^{(r)\pm}(\mathcal{M})$ sont contenues dans l'ensemble $\{x_1 = 0\}$.

D'après les lemmes 1.4.4 et 1.4.5 et la proposition 1.4.6 de [14], si π est la projection définie en coordonnées locales par $\pi(x, \tau, x^*, \tau^*) = (\tau, x^*, \tau^*)$, alors on a les propriétés suivantes:

– π est finie et propre sur $\Sigma_l^{(r)}(\mathcal{M})$.

https://doi.org/10.1023/A:1017562822062 Published online by Cambridge University Press

– $\pi(\Sigma_l^{(r)}(\mathcal{M}))$ est une hypersurface irréductible H_r-homogène donnée par une fonction unique du type

$$f(\tau, x^*, \tau^*) = u(x^*)\tau^{\beta_0}\tau^{*\beta_0+a} + \sum_{a<\gamma-\beta<b} f_{\beta\gamma}(x^*)\tau^{\beta}\tau^{*\gamma} + v(x^*)\tau^{\beta_1}\tau^{*\beta_1+b}$$

où $u(x^*)$ et $v(x^*)$ sont deux fonctions inversibles et $\beta_0 = a = 0$, ($\pi(\Sigma_l^{(r)}(\mathcal{M}))$ est irréductible).

– $Irr(r)(\tilde{\Sigma}_l^{(r)}(\mathcal{M})) = Irr(r)(\pi_*\tilde{\Sigma}_l^{(r)}(\mathcal{M})) = (\beta_1 + b) - \beta_1 - (\beta_0 + a) + \beta_0 = b$

Par ailleurs, si ϕ est l'application citée dans le lemme 2.6.4, alors

$$\phi_* f(x^*, \varsigma, \varsigma^*) = u(x^*) + \sum_{a<\gamma-\beta<b} (-1)^{\beta} f_{\beta\gamma}(x^*)\varsigma^{\beta}\varsigma^{*2\beta-\gamma} + (-1)^{\beta_1} v(x^*)\varsigma^{\beta_1}\varsigma^{*\beta_1-b}$$

est une fonction H_{2-r}-homogène.

L'adhérence de la composante irréductible $\{\phi_* f = 0\}$ est une composante $\pi_*\tilde{\Sigma}_l^{(2-r)}(T(\mathcal{M}))$ donnée par l'équation:

$$g(x^*, \varsigma, \varsigma^*) = (-1)^{\beta_1} v(x^*)\varsigma^{\beta_1} + \sum_{a<\gamma-\beta<b} (-1)^{\beta} f_{\beta\gamma}(x^*)\varsigma^{\beta}\varsigma^{*2\beta-\gamma+b-\beta_1} + u(x^*)\varsigma^{*\beta_1}$$

Comme $Irr(2-r)(\pi_*\tilde{\Sigma}_l^{(2-r)}(T(\mathcal{M})) = b$, alors

$$Irr(2-r)(\tilde{\Sigma}_l^{(2-r)}(T(\mathcal{M})) = Irr(r)(\tilde{\Sigma}_l^{(r)}(\mathcal{M}))$$

PROPOSITION 2.6.6. *Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_{[X]}$-module holonome. $T(\mathcal{M})$ est holonome vu comme un $\mathcal{D}_{[X]}$-module.*

Preuve. Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_{[X]}$-module holonome, $\tilde{\mathcal{N}}_{|U} = \bar{\psi}(\mathcal{M}_{|U})$ est un $\mathcal{D}_{[X]|U}$-module holonome (ψ est un isomorphisme). Or $\tilde{\mathcal{N}}_{|U}$ est holonome veut dire que $(\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{D}_{[X]}} \tilde{\mathcal{N}})_{|U}$ est un $\mathcal{D}_{X|U}$-module holonome. D'après le théorème 1.3 de [7], cela implique que $\mathcal{D}_{[X]}[*Y] \otimes_{\mathcal{D}_{[X]}} \tilde{\mathcal{N}}$ est un $\mathcal{D}_X$-module holonome. Comme

$$\mathcal{D}_{[X]}[*Y] \otimes_{\mathcal{D}_{[X]}} \tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{D}_{[X]}[*Y] \otimes_{\mathcal{D}_{[X]}[*Y]} \tilde{\mathcal{N}}$$

et $T(\mathcal{M})$ est déjà localisé, alors $\mathcal{D}_{[X]}[*Y] \otimes_{\mathcal{D}_{[X]}} \tilde{\mathcal{N}}$ n'est autre que $T(\mathcal{M})$ tensorisé par $\mathcal{D}_X$, d'où le résultat. □

2.7. COMPORTEMENT DES SOLUTIONS VIS À VIS DU PASSAGE À L'INFINI

Considérons un fibré en droites X de base Y et identifions cette dernière à la section nulle de X. Soient (x, t) des coordonnées locales sur X qui soient linéaires dans les fibres et telles que $Y = \{t = 0\}$.

PROPOSITION 2.7.1. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{[X]}$-module cohérent. Pour tout $r \in [-\infty, +\infty]$, la flèche suivante est un quasi-isomorphisme:*

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}(r)/\mathcal{B}_{Y|X}) \longrightarrow \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{[X]}[*Y]}(\mathcal{M}[*Y], \mathcal{B}_{Y|X}(r)/\mathcal{B}_{Y|X})$$

Preuve. *Le résultat découle de la proposition 5 de l'index de [6].* □

Par ailleurs, grâce à la proposition 1.3.2, les faisceaux $\mathcal{B}_{\widehat{Y|X}}/\mathcal{B}_{Y|X}$et $\mathcal{O}_X(\widehat{*Y})/\mathcal{O}_X[*Y]$ sont isomorphes en tant que $\mathcal{D}_{[X]}$-modules. Cet isomorphisme n'est autre que le prolongement de l'application $F : \mathcal{B}^{\infty}_{Y|X} \longrightarrow \mathcal{O}_X(*Y)/\mathcal{O}_X$ aux faisceaux en question. En coordonnées locales, F associe à $\delta^{(\alpha)}(t)$ la classe d'équivalence de la fonction méromorphe $n!/2i\pi.(-t)^{n+1}$.

Considérons maintenant pour $k \in \mathbb{N}$, les groupes:

$$\mathcal{B}_{\widehat{Y|X}}[k] = \{u + \mathcal{B}_{Y|X}, u \in \mathcal{B}_{Y|X}/D_t^{k+1}\mathcal{B}_{Y|X}\}$$

Comme les faisceaux $\mathcal{B}_{Y|X}/D_t^{k+1}\mathcal{B}_{Y|X}$ sont indépendants des coordonnées locales, alors le faisceau quotient $\mathcal{B}_{\widehat{Y|X}}/\mathcal{B}_{Y|X}$ peut s'écrire:

$$\mathcal{B}_{\widehat{Y|X}}/\mathcal{B}_{Y|X} = \varprojlim_k \mathcal{B}_{\widehat{Y|X}}[k]$$

où la limite projective est prise sur les applications:

$$f_k : \mathcal{B}_{\widehat{Y|X}}[k] \longrightarrow \mathcal{B}_{\widehat{Y|X}}[k-1]$$

De la même manière, si $\mathcal{O}_X(*Y)[k]$ désigne le sous faisceau de $\mathcal{O}_X(*Y)$ des éléments qui s'écrivent en coordonnées locales comme $\sum_{0 \leqslant l \leqslant k} a_l(x)\,\Phi_l(t)$, où $\Phi_l(t)$ est la fonction méromorphe $l!/2i\pi.(-t)^{l+1}$, on définit les faisceaux $\mathcal{O}_X(\widehat{*Y})[k]$, pour $k \in \mathbb{N}$, par:

$$\mathcal{O}_X(\widehat{*Y})[k] = \{u + \mathcal{O}_X[*Y]/\ u \in \mathcal{O}_X(*Y)[k]\}$$

On démontre aussi que:

$$\mathcal{O}_X(\widehat{*Y})/\mathcal{O}_X[*Y] = \varprojlim_k \mathcal{O}_X(\widehat{*Y})[k]$$

où la limite projective est donnée via les applications:

$$h_k : \mathcal{O}_X(\widehat{*Y})[k] \longrightarrow \mathcal{O}_X(\widehat{*Y})[k-1]$$

Remarquons que l'application F définit un isomorphisme de groupes entre $\mathcal{B}_{\widehat{Y|X}}[k]$ et $\mathcal{O}_X(\widehat{*Y})[k]$, qui est compatible, d'une part, avec les applications f_k et h_k, et d'autre part avec la structure de $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$-module. Par un argument similaire à celui de la proposition 1.2.2, on vérifie que F induit un isomorphisme de $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$-module entre les faisceaux $\mathcal{B}_{\widehat{Y|X}}/\mathcal{B}_{Y|X}$ et $\mathcal{O}_X(\widehat{*Y})/\mathcal{O}_X[*Y]$.

PROPOSITION 2.7.2. *Pour tout rationnel* $r \in [-\infty, +\infty]$, *les faisceaux* $\mathcal{O}_X(*Y)(r,1)/\mathcal{O}_X[*Y]$ *et* $\mathcal{B}_{Y|X}(r)/\mathcal{B}_{Y|X}$ *sont isomorphes en tant que* $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$*-modules.*

Preuve. Remarquons d'abord que les faisceaux ci-dessus sont respectivement dessous-faisceaux des $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$-modules isomorphes $\mathcal{O}_X(\widehat{*Y})/\mathcal{O}_X[*Y]$ et $\mathcal{B}_{\widehat{Y|X}}/\mathcal{B}_{Y|X}$. On peut donc adapter la démonstration de la proposition 1.3.1 et vérifier seulement si dans des coordonnées locales, les monômes $t^\alpha D_x^\beta D_t^\gamma$ $(\alpha \in \mathbb{Z})$ conservent les majorations données dans Section 1.3.

Comme ces faisceaux ont déjà la structure de $\mathcal{D}_{[X]}$-modules, il suffit donc d'étudier l'action de t^{-1}.

D'après la preuve de la proposition 1.3.2, un élément de $\mathcal{O}_X(*Y)(r,1)/\mathcal{O}_X[*Y]$ est localement une série formelle de la forme $\sum_{k\geqslant n} b_k(x)\,\Phi_k(t)$ telle que

$$|a_k(x)| \leqslant C^k \cdot \frac{1}{(k!)^r}$$

où x est dans un compact K. Mais $t^{-1}u = -\sum_{l\geqslant n+1} (b_{l-1}(x)/l)\,\Phi_l(t)$ et son image par F est:

$$F(t^{-1}u) = \sum_{l\geqslant n+1} (b_{l-1}(x)/l)\,\delta^{(l)}(t) = t^{-1}\left(\sum_{m\geqslant n} b_m(x)\,\delta^{(m)}(t)\right)$$

D'où le résultat.

Choisissons maintenant deux systèmes de coordonnées locales (x,t) et (x,s) sur X qui soient linéaires dans les fibres et telles que Y est donnée respectivement par $\{t=0\}$ et $\{s=0\}$.

Soient r un rationnel inférieur ou égal à un et f une section de $\mathcal{O}_X(*Y)(r,1)$ sur un ouvert suffisamment petit. Il est clair que l'image directe par l'isomorphisme χ de f est une série formelle $\chi_* f(x,s) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(x)s^{-n}$ telle que

$$\sum_{n\leqslant 0} a_x(x)s^{-n}/((-n)!)^{1-r} < \infty.$$

χ définit donc un isomorphisme local χ' entre $\mathcal{O}_X(*Y)(r,1)$ et $\mathcal{O}_X(*Y)(1,2-r)$.

Comme ψ est automorphisme sur $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$, nous pouvons introduire une nouvelle structure de $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$-module sur $\mathcal{O}_X(*Y)(1,2-r)$ de la facon suivante: si $P \in \mathcal{D}_{[X]}[*Y]$, on définit son action sur une section u de $\mathcal{O}_X(*Y)(1,2-r)$ (sur un ouvert suffisamment petit) par $P.u = \psi(P)u$.

LEMMA 2.7.3. *L'isomorphisme* $\mathbb{C}$*-linéaire* χ' *entre* $\mathcal{O}_X(*Y)(r,1)$ *et* $\mathcal{O}_X(*Y)(1,2-r)$ *pour* $r \in [-\infty, 1]$, *se prolonge en un isomorphisme de* $\mathcal{D}_{[X]}[*Y]$*-modules.*

Terminons ce paragraphe par la:

PROPOSITION 2.7.4. *Soient $r \leqslant 1$ et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{[X]}$-module cohérent.*
(*1*) *Les complexes*

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}(r)/\mathcal{B}_{Y|X}) \text{ et } \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{[X]}}(T(\mathcal{M}), \mathcal{O}_X(*Y)(1, 2-r)/\mathcal{O}_{[X]}(*Y))$$

sont quasi-isomorphes.
(*2*) *Si r_1 et r_2 sont deux rationnels tels que $-\infty < r_1 < r_2 \leqslant 1$, alors les complexes*

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}(r_1)/\mathcal{B}_{Y|X}(r_2))$$

et

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{[X]}}(T(\mathcal{M}), \mathcal{O}_X(*Y)(1, 2-r_1)/\mathcal{O}_X(*Y)(1, 2-r_2))$$

sont quasi-isomorphes.

Preuve. (1) Comme $T(\mathcal{M})$ n'est autre que le transformé par $\bar{\psi}$ du localisé $\mathcal{M}[*Y]$ de $\mathcal{M}$, alors il suffit d'appliquer la proposition 2.7.2, ensuite le lemme 2.7.3.

2.8. THÉORÈMES D'INDICE

Soient X une variété analytique complexe et T^*X le fibré cotangent associé. Si Σ est un sous-ensemble analytique de T^*X, homogène et lagrangien, alors il s'écrit comme la réunion de $T^*_{X_j}X$, où X_j est une sous-variété de X et $T^*_{X_j}X$ est l'adhérence du fibré conormal à la partie réguliére de X_j. Ainsi, tout cycle positif $\tilde{\Sigma}$ de support Σ s'écrit:

$$\tilde{\Sigma} = \sum_j m_j[T^*_{X_j}X] \quad \text{avec} \quad m_j \in \mathbb{N}$$

L'obstruction d'Euler de $\tilde{\Sigma}$ en un point $x \in X$ est définie par:

$$Eu_{\tilde{\Sigma}}(x) = \sum_j m_j(-1)^{codim X_j} Eu_{X_j}(x)$$

où $Eu_{X_j}(x)$ est l'obstruction d'Euler locale de X_j en x.

Signalons que $Eu_{\tilde{\Sigma}}(x)$ est une fonction constructible sur X.

Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{F}$ sont deux $\mathcal{D}_X$-modules à gauche, et si tous les $Ext^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{F})_x$ pour $x \in X$ fixé, sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie, on dira que le couple $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ est d'indice fini en x et ce dernier sera donné par:

$$\chi(\mathcal{M}, \mathcal{F})_x = \sum_j (-1)^j dim_{\mathbb{C}} Ext^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{F})_x$$

Rappelons que si $\mathcal{M}$ est un complexe de $\mathcal{D}_X$-modules à cohomologie holonome, Kashiwara démontre que $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ est un complexe de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels à cohomologie constructible sur X. En particulier, si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module holonome, $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ est un faisceau pervers et le couple $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ est d'indice

https://doi.org/10.1023/A:1017562822062 Published online by Cambridge University Press

fini en chaque point x. En outre, il vérifie:

$$\chi(\mathcal{M},\mathcal{F})_x = Eu_{\tilde{Ch}_\Lambda(\mathcal{M})}(x)$$

Prenons maintenant un fibré en droites X de base Y et un $\mathcal{D}_{[X]}$-module cohérent $\mathcal{M}$ de la forme $\mathcal{M} = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{D}_{[X]}u_i$.

THÉORÈME 2.8.1. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{[X]}$-module holonome.*

(*1*) *Pour tout $r \in [-\infty, +\infty]$, $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}(r))$ est un complexe de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels à cohomologie constructible sur Y.*

(*2*) *Si r_k et r_{k+1} sont deux indices consécutifs de $\mathcal{M}$, alors pour tout r tel que $r_k < r < r_{k+1}$, on a:*

$$\begin{aligned}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}\{r_k\}) &= \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}\{r\})\\ &= \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}(r))\\ &= \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}(r_{k+1}))\end{aligned}$$

(*3*) *En outre, pour tout $x \in Y$, on a:*

$$\chi(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}(r))_x = Eu_{\tilde{Ch}_\Lambda(r)(\mathcal{M})}(x)$$

$$\chi(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}\{r\})_x = Eu_{\tilde{Ch}_\Lambda\{r\}(\mathcal{M})}(x)$$

COROLLAIRE 2.8.2. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{[X]}$-module holonome.*
Si $\tilde{Ch}_\Lambda(r)(\mathcal{M}) = j_1p_1^{-1}\tilde{S}_1(r)(\mathcal{M}) + j_2p_2^{-1}\tilde{S}_2(r)(\mathcal{M})$ est l'unique décomposition du cycle microcaractéristique $\tilde{Ch}_\Lambda(r)(\mathcal{M})$ selon le lemme 4.5.1 de [12], $\tilde{S}_1(r)(\mathcal{M})$ et $\tilde{S}_2(r)(\mathcal{M})$ étant des cycles lagrangiens positifs de T^*Y, alors pour tout point $x \in Y$, on a:

$$\chi(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}(r))_x = Eu(\tilde{S}_1(r)(\mathcal{M}) - \tilde{S}_2(r)(\mathcal{M}))(x)$$

Le résultat est encore vrai si l'on remplace (r) *par* $\{r\}$.

Pour démontrer le théorème 2.8.1, on a besoin du lemme suivant:

Soit X un fibré en droites de base Y. Rappelons que $\mathcal{O}_{[X]}$ est le faisceau des fonctions holomorphes sur X et polynomiales dans les fibres de $p : X \longrightarrow Y$.

LEMMA 2.8.3. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{[X]}$-module holonome défini près de Y. Le complexe $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{[X]})$ est un complexe de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels à cohomologie constructible sur Y. En plus, pour tout $x \in Y$, on a:*

$$\chi(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{[X]})_x = -Eu_{\tilde{Ch}_\Lambda(-\infty)(\mathcal{M})}(x)$$

Preuve. Soient (x, t) et (x, s) deux systèmes de coordonnées locales sur X qui soient linéaires dans les fibres et telles que Y est donnée respectivement par $\{t = 0\}$ et $\{s = 0\}$.

Notons par (x, τ) et (x, ς) les coordonnées locales induites sur Λ associées respectivement aux deux systèmes de coordonnées ci-dessus, et par (x, τ, x^*, τ^*) et $(x, \varsigma, x^*, \varsigma^*)$ les coordonnées locales respectives de $T^*\Lambda$.

Remarquons qu'en coordonnées locales, le faisceau $\mathcal{O}_{[X]}$ n'est autre que le $\mathcal{D}_{[X]}$-module $\mathcal{D}_{[X]}/\mathcal{D}_{[X]}D_t + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}_{[X]}D_{x_i}$.

La transformation de Fourier sur $\mathcal{D}_{[X]}$ est l'application $\mathcal{F}$qui, en coordonnées locales, associe à (t, D_t) le couple $(-D_s, s)$. Elle transforme le $\mathcal{D}_{[X]}$-module $\mathcal{O}_{[X]}$ en le $\mathcal{D}_{[X]}$-module $\mathcal{D}_{[X]}/\mathcal{D}_{[X]}s + \sum_{i=1}^{n} D_{x_i}$ qui est exactement le faisceau $\mathcal{B}_{Y|X}$.

D'après le corollaire 4.5.3 de [12], et vu que la transformation $\mathcal{F}$ échange les variétés $Ch_\Lambda(+\infty)(\mathcal{F}(\mathcal{M}))$ et $Ch_\Lambda(-\infty)(\mathcal{M})$ et en particulier les composantes contenues dans $\{\tau^* = 0\}$ (resp. $\{\tau = 0\}$) et celles contenues dans $\{\varsigma = 0\}$ (resp. $\{\varsigma^* = 0\}$), alors le complexe $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{[X]})$ est un complexe de $\mathbb{C}$-espaces à cohomologie constructible sur Y. En plus, on a:

$$\chi(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{[X]})_x = -Eu_{\tilde{C}h_\Lambda(-\infty)(\mathcal{M})}(x)$$

Démonstration du théorème 2.8.1

Pour $r \in [1, +\infty]$, le résultat est donné par le corollaire 4.3.2 de [13].

Supposons par la suite que $-\infty < r \leqslant 1$.

(1) Comme $T(\mathcal{M})$ est holonome, la constructibilité de $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}(r)/\mathcal{B}_{Y|X})$ se ramène donc à celle du complexe $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{[X]}}(T(\mathcal{M}), \mathcal{O}_X(*Y)(1, 2-r)/\mathcal{O}_{[X]}(*Y))$. Comme la suite de $\mathcal{D}_{[X]}$-modules:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X|Y}(2-r) \longrightarrow \mathcal{O}_X(*Y)(1, 2-r) \longrightarrow \mathcal{B}^\infty_{Y|X} \longrightarrow 0$$

est exacte, le résultat découle directement des corollaires 4.3.2 et 4.3.6 de [13] et du lemme 2.8.3.

https://doi.org/10.1023/A:1017562822062 Published online by Cambridge University Press

(3) En utilisant le corollaire 4.3.6 de [13] et le corollaire 2.6.5 cité plus haut, on peut écrire:

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}(r)/\mathcal{B}_{Y|X})_x &= Eu(\tilde{Ch}_\Lambda(-\infty)(T(\mathcal{M})) - \tilde{Ch}_\Lambda\{2-r\}(T(\mathcal{M})))(x)\\ &= Eu\left(\sum_{r \leqslant 2-s \leqslant +\infty} Irr(2-s)(\tilde{\Sigma}_\Lambda^{(s)}(T(\mathcal{M})))\right)(x)\\ &= Eu\left(\sum_{-\infty \leqslant s \leqslant 2-r} Irr(s)(\tilde{\Sigma}_\Lambda^{(2-s)}(\mathcal{M}))\right)(x)\\ &= Eu(\tilde{Ch}_\Lambda(r)(\mathcal{M}) - \tilde{Ch}_\Lambda(+\infty)(\mathcal{M}))(x)\end{aligned}$$

d'où le résultat.

3. Microlocalisation

3.1. MICROFONCTIONS HOLOMORPHES

Soient X une variété analytique complexe et Y une sous-variété lisse de X. Le faisceau $\mathcal{C}_{Y|X}$ a été défini dans [23] et [13]. Il est muni d'une filtration canonique $(\mathcal{C}_{Y|X,l})_{l\in\mathbb{Z}}$.

Prenons maintenant un fibré vectoriel X de rang d et de base Y. Identifions Y à la section nulle de X et notons par $\Lambda = T_Y^*X$ le fibré conormal à Y dans X. Soit Θ le champ d'Euler associé à l'action de $\mathbb{C}^*$ sur les fibres de X.

Si $m \in \mathbb{Z}$, on pose:

$$\mathcal{C}_{Y|X}[m] = \{u \in \mathcal{C}_{Y|X} / \Theta\, u = (-m-d)\, u\}$$

et on définit le faisceau des microfonctions formelles par:

$$\mathcal{C}_{Y|X}(-\infty, 1) = \{u^{(0)} + \sum_{k \geqslant 1} u_k,\ u^{(0)} \in \mathcal{C}_{Y|X,0} \quad \text{et} \quad u_k \in \mathcal{C}_{Y|X}[k]\}$$

Si maintenant r est un rationnel quelconque, on note par $\mathcal{C}_{Y|X}(r, 1)$ le sous-faisceau de $\mathcal{C}_{Y|X}(-\infty, 1)$ tel que si $u = u^{(0)} + \sum_{k\geqslant 1} u_k$ est un élément de $\mathcal{C}_{Y|X}(-\infty, 1)$, alors il vérifie :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, C_k > 0, \exists\, \alpha, \forall\, T,\ |T| < \alpha,\ N_k(u_k, T) \leqslant C_\varepsilon . \varepsilon^k . \frac{1}{(k!)^r} \quad \forall k \geqslant 1$$

$N(P, T)$ est la norme formelle de Boutet de Monvel-Kree [4].

Choisissons des coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_d)$ de X, linéaires dans les fibres et telles que $Y = \{t = 0\}$. Si (x, τ) sont les coordonnées locales induites sur Λ, alors une section de $\mathcal{C}_{Y|X}$ sur un ouvert U de Λ peut s'écrire comme une série formelle $\sum_{j\leqslant m} f_j(x, \tau)$ de fonctions holomorphes sur U telles que:

(1) f_j est homogène de degré j en τ,

https://doi.org/10.1023/A:1017562822062 Published online by Cambridge University Press

(2) $\forall K \subset\subset U, \exists\, C > 0, \forall j < 0, \forall (x,\tau) \in K, |f_j(x,\tau)| < C^{-j}(-j)!$.

Dans ce cas, le faisceau $\mathcal{C}_{Y|X,l}$ n'est autre que le sous-faisceau de $\mathcal{C}_{Y|X}$ dont les éléments s'écrivent comme des séries formelles $\sum_{j \leqslant l} f_j(x,\tau)$.

Dans ces mêmes coordonnées locales, l'opérateur Θ est donné par $\sum_{i=1}^{d} t_i D_{t_i}$ et le faisceau $\mathcal{C}_{Y|X}[m]$ s'identifie à l'ensemble des fonctions holomorphes sur Λ et homogènes de degré m en τ.

Par ailleurs, la restriction du faisceau $\mathcal{C}_{Y|X}(r, 1)$ à la section nulle Y de $T^*_Y X$ n'est autre que le faisceau $\mathcal{B}_{Y|X}\{r\}$ défini dans Section 1.3.

On pose:

$$\mathcal{C}_{Y|X}(+\infty, 1) := \mathcal{C}_{Y|X} \qquad \mathcal{C}_{Y|X}(1.1) := \mathcal{C}^{\infty}_{Y|X}$$

$$\mathcal{C}_{Y|X}(+\infty, 1)_{|Y} := \mathcal{B}_{Y|X} \qquad \mathcal{C}_{Y|X}(1, 1)_{|Y} = \mathcal{B}^{\infty}_{Y|X}$$

3.2. TRANSFORMATIONS CANONIQUES

X est toujours un fibré vectoriel de rang d et de base Y et Θ est le champ d'Euler associé. On notera par $\mathcal{E}_X$ le faisceau des opérateurs microdifférentiels sur X.

Considérons maintenant un fibré vectoriel X' de rang un et de base Y'. Identifions Y' à la section nulle de X' et notons par Θ' le champ d'Euler associé et par $T^*_{Y'}X'$ le fibré conormal à Y' dans X'.

D'après [11], il existe localement une transformation canonique qui transforme $T^*_Y X$ en $T^*_{Y'}X'$ et par conséquent, il existe une transformation canonique quantifiée qui transforme $\mathcal{C}_{Y|X}$ en $\mathcal{C}_{Y'|X'}$ et Θ en un champ Θ_1.

D'autre part, vu la proposition 5.2.2 de [11], il existe une transformation canonique quantifiée (associée à l'identité sur T^*X') qui conserve $T^*_{Y'}X'$ et qui transforme Θ_1 en Θ'. Cette dernière n'est autre que la multiplication par un opérateur microdifférentiel d'ordre 0, donc elle conserve $\mathcal{C}_{Y|X}$ et sa filtration $(\mathcal{C}_{Y|X,l})_{l\in\mathbb{Z}}$. Si on note par ϕ_1 la composée des deux transformations canoniques ci-dessus, et par $\hat{\phi}_1$ la transformation canonique quantifiée associée, alors cette dernière transforme $\mathcal{C}_{Y|X}$ en $\mathcal{C}_{Y'|X'}$ et Θ en Θ'. Par conséquent, elle transforme les éléments de $\mathcal{C}_{Y|X}[m]$ en les éléments de $\mathcal{C}_{Y'|X'}[m]$.

Prenons maintenant des coordonnées locales (x) et (y) sur X et X' et notons par (x, ξ) et (y, η) les coordonnées locales associées sur T^*X et T^*X' respectivement. Dans ces coordonnées, la transformation ϕ_1 est donnée par:

$$y_i = f_i(x, \xi) \qquad \eta_i = g_i(x, \xi) \qquad 1 \leqslant i \leqslant n + d$$

où f_i (resp. g_i) est homogène de degré 0 (resp. 1) par rapport à ξ.

https://doi.org/10.1023/A:1017562822062 Published online by Cambridge University Press

Soient P_i et Q_k les opérateurs microdifférentiels définis par:

$$P_i = \hat{\phi}_1^{-1}(y_i) \qquad Q_k = \hat{\phi}_1^{-1}(D_{y_k})$$

et notons $\mathcal{I}$ l'idéal de $\mathcal{E}_{X\times X'}$ engendré localement par les opérateurs

$$\bar{P}_i = y_i - P_i(x, D_x) \quad \bar{Q}_k = D_{y_k} + Q_k(x, D_x) \quad 1 \leqslant i, k \leqslant n + d$$

D'après le théorème 5.1.3 de [24], si P est un opérateur microdifférentiel sur T^*X, alors son transformé $Q = \hat{\phi}_1(P)$ est l'opérateur qui vérifie $P - Q^* \in \mathcal{I}$ où Q^* est l'adjoint de Q.

Il existe donc, des opérateurs G_i, H_k dans $\mathcal{E}_{X\times X'}$ tels que:

$$P - Q^* = \sum_{i=1}^{n+d} G_i\bar{P}_i + \sum_{k=1}^{n+d} H_k\bar{Q}_k$$

En plus, les opérateurs G_i, H_k et Q^* sont obtenus par division de P par les opérateurs $\bar{P}_i$ et $\bar{Q}_k$ suivant le théorème 2.6 de [2]. Cette division se fait en général de la facon suivante:

Si (x) et (x, ξ) sont les coordonnées locales respectives de X et de T^*X, et si au voisinage du point $\zeta = (0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 1)$ de T^*X, l'opérateur P_1 est tel que $\frac{\partial^m\sigma(P_1)}{\partial\xi_1^m(\zeta)\neq 0}$ et $\frac{\partial^\nu\sigma(P_1)}{\partial\xi_1^\nu}(\zeta) = 0$ pour $0 \leqslant \nu < m$, alors il existe des opérateurs uniques F et A de $\mathcal{E}_X$, définis au voisinage de ζ et qui vérifient: $P = F\,P_1 + A$. A est de la forme $A = A_{m-1}D_1^m + +A_0$, où les opérateurs A_i, $0 \leqslant i \leqslant m-1$ sont indépendants de ξ_1.

Or, il est possible par division de l'opérateur $F\,P_1$ par D_1^m, de réécrire l'opérateur P sous la forme: $P = F_2D_1^m + R$ où $R \in \mathcal{E}_X$ tel que $R = R_{m-1}D_1^m + +R_0$, les opérateurs $R_0, \dots, R_{m-1}$ ne dépendent pas de ξ_1.

D'après le lemme 4.4 de [2], on a: $N(R, T) \ll C_1.\ N(P, T)$

où C_1 est une constante et $N(P, T)$ désigne la norme formelle de Boutet de Monvel-Kree [4].

On en déduit que: $N(Q, T) \ll C_2.\ N(P, T) \quad (\diamond)$

où Q est l'opérateur $\hat{\phi}_1(P)$.

Par conséquent, $\hat{\phi}_1$ qui transforme $\mathcal{C}_{Y|X,k}$ en $\mathcal{C}_{Y'|X',k}$, Θ en Θ' et qui vérifie $(\diamond)$, transforme $\mathcal{C}_{Y|X}(-\infty, 1)$ en $\mathcal{C}_{Y'|X'}(-\infty, 1)$ et pour tout rationnel r, $\mathcal{C}_{Y|X}(r, 1)$ en $\mathcal{C}_{Y'|X'}(r, 1)$.

https://doi.org/10.1023/A:1017562822062 Published online by Cambridge University Press

3.3. TRANSFORMATIONS MONOIDALES

Soit X un fibré vectoriel de base Y. Notons par $\dot{\Lambda} = T^*_Y X - Y$ le fibré conormal à Y dans X privé de sa section nulle et par $\mathbb{P}^*_Y X$ le fibré projectif associé.

La transformée monoidale de Λ est un fibré $\tilde{\Lambda}$ de rang un sur $\mathbb{P}^*_Y X$ muni d'un isomorphisme $(\tilde{\Lambda} - \mathbb{P}^*_Y X) \simeq (\Lambda - Y)$. On peut le définir par:

$$\tilde{\Lambda} = \{(u, \varrho) \in \Lambda \times \mathbb{P}^*_Y X / u \in \varrho\}$$

Le fibré $\tilde{\Lambda}$ n'est autre que la réunion disjointe de $\dot{\Lambda}$ et de $\mathbb{P}^*_Y X$.

Les applications $H_r(\lambda)$ de la partie Section 2.1 sont bien définies sur $T^*\Lambda = T^*(T^*_Y X)$ et sont compatibles avec le plongement $T^*\Lambda \hookrightarrow T^*\tilde{\Lambda}$.

Si Σ est une sous variété lagrangienne H_r-homogène de $T^*\Lambda$, son adhérence $\underline{\Sigma}$ dans $T^*\tilde{\Lambda}$ est encore lagrangienne H_r-homogène (voir [14]) et on peut donc considérer $Irr(\underline{\Sigma})$ qui est un cycle de $T^*(\mathbb{P}^*_Y X)$.

Rappelons maintenant les définitions des faisceaux $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{Y|X}$ et $\mathcal{C}^{\mathbb{R},f}_{Y|X}$ des microfonctions holomorphes réelles.

Soient X une variété analytique complexe et Y une sous-variété de X. Le faisceau $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{Y|X}$ est le faisceau des microfonctions holomorphes réelles, défini dans [23] comme la microlocalisation du faisceau $\mathcal{O}_X$ des fonctions holomorphes sur X. Il est à support dans $T^*_Y X$ et vérifie (voir [23] ou [13]) les relations:

$$\mathcal{C}^{\infty}_{Y|X}|_Y = \mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{Y|X}|_Y$$

$$\mathcal{C}^{\infty}_{Y|X}|_{\dot{T}^*_Y X} = \gamma^{-1}\gamma^*(\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{Y|X}|_{\dot{T}^*_Y X})$$

où $\dot{T}^*_Y X = T^*_Y X - Y$ et γ est la projection canonique de $\dot{T}^*_Y X$ sur le fibré projectif associé $\mathbb{P}^*_Y X$.

D'autre part, le faisceau $\mathcal{C}^{\mathbb{R},f}_{Y|X}$ est celui des microfonctions holomorphes tempérées, défini dans [1], c'est un sous-faiseau de $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{Y|X}$ qui vérifie:

$$\mathcal{C}_{Y|X}|_Y = \mathcal{C}^{\mathbb{R},f}_{Y|X}|_Y$$

$$\mathcal{C}_{Y|X}|_{\dot{T}^*_Y X} = \gamma^{-1}\gamma^*(\mathcal{C}^{\mathbb{R},f}_{Y|X}|_{\dot{T}^*_Y X})$$

Considérons maintenant un fibré vectoriel de base Y et identifions cette dernière à la section nulle de X.

Le diagramme suivant est commutatif,

$$\begin{tikzcd} \dot{T}^*_Y X \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "\dot{\pi}"'] & \mathbb{P}^*_Y X \arrow[d, "\theta"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

PROPOSITION 3.3.1. *Si r est un rationnel inférieur ou égal à un, alors:*

$$\begin{cases} \theta_*(\gamma_*(\mathcal{C}_{Y|X}(r,1)/\mathcal{C}_{Y|X})) = \mathcal{B}_{Y|X}\{r\}/\mathcal{B}_{Y|X} \\ \mathbb{R}^k\theta_*(\gamma_*(\mathcal{C}_{Y|X}(r,1)/\mathcal{C}_{Y|X})) = 0 \quad \forall k > 0. \end{cases}$$

Preuve. Commençons par le cas $r = 1$.

Si X est un fibré en droites sur Y, l'isomorphisme $\mathbb{P}^*_Y X \simeq Y$ identifie γ et $\dot{\pi}$. En plus, les suites de faisceaux suivantes sont exactes:

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}^\infty_{Y|X} \longrightarrow \gamma_*\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{Y|X} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y|X} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}_{Y|X} \longrightarrow \gamma_*\mathcal{C}^{\mathbb{R},f}_{Y|X} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y|X} \longrightarrow 0$$

Donc on en déduit que:

$$\gamma_*(\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{Y|X}/\mathcal{C}^{\mathbb{R},f}_{Y|X}) = \gamma_*(\mathcal{C}^\infty_{Y|X}/\mathcal{C}_{Y|X}) = \mathcal{B}^\infty_{Y|X}/\mathcal{B}_{Y|X}$$

Si le rang de notre fibré est d, alors vu la proposition 1.1.5 de [23],

$$\mathbb{R}^k\dot{\pi}_*\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{Y|X} = \begin{cases} \dot{\pi}\mathcal{C}^\infty_{Y|X} = \mathcal{B}^\infty_{Y|X} & k = 0 \\ \mathcal{O}_{X|Y} & k = d-1 \\ 0 & k \neq 0, d-1 \end{cases}$$

En outre, on a $\mathbb{R}^k\gamma_*\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{Y|X} = 0 \quad \forall k > 0$.

Quant au faisceau $\mathcal{C}^{\mathbb{R},f}_{Y|X}$, il vérifie des propriétés similaires, grâce au théorème 4.1.7 de [1]:

$$\mathbb{R}^k\dot{\pi}_*\mathcal{C}^{\mathbb{R},f}_{Y|X} = \begin{cases} \dot{\pi}\mathcal{C}_{Y|X} = \mathcal{B}_{Y|X} & k = 0 \\ \mathcal{O}_{X|Y} & k = d-1 \\ 0 & k \neq 0, d-1 \end{cases}$$

et $\mathbb{R}^k\gamma_*\mathcal{C}^{\mathbb{R},f}_{Y|X} = 0 \quad \forall k > 0$.

Comme $\mathbb{R}\dot{\pi}_* = \mathbb{R}\theta_*\mathbb{R}\gamma_*$, alors les propriétés des faisceaux $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{Y|X}$ et$\mathcal{C}^{\mathbb{R},f}_{Y|X}$ que l'on vient de citer, se transmettent au quotient $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{Y|X}/\mathcal{C}^{\mathbb{R},f}_{Y|X}$ grâce à la suite exacte,

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathbb{R},f}_{Y|X} \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{Y|X} \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{Y|X}/\mathcal{C}^{\mathbb{R},f}_{Y|X} \longrightarrow 0.$$

Considérons maintenant un rationnel $r < 1$ et choisissons des coordonnées locales (x, t) sur X qui soient linéaires dans les fibres et telles que $Y = \{t = 0\}$. Notons par (x, t, ξ, τ) et (x, τ) les coordonnées locales respectives de T^*X et de $\Lambda = T^*_Y X$.

Soit $u = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f_j(x, \tau)$ une section de $\mathcal{C}_{Y|X}(r, 1)$ sur un ouvert suffisamment petit, et soit $v = \sum_{j\in\mathbb{Z}} g_j(x, \tau)$ la série formelle telle que:

$$g_j(x, \tau) = \begin{cases} (j!)^{r-1} f_j(x, \tau) & \text{si} \quad j \geqslant 0 \\ ((-j)!)^{r-1} f_j(x, \tau) & \text{si} \quad j < 0 \end{cases}$$

https://doi.org/10.1023/A:1017562822062 Published online by Cambridge University Press

On vérifie aisement que $v \in \mathcal{C}^{\infty}_{Y|X}$ et on remarque que l'application qui à u associe v, donne naissance à la suite exacte:

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_{Y|X}(r,1)/\mathcal{C}_{Y|X} \longrightarrow \mathcal{C}^{\infty}_{Y|X}/\mathcal{C}_{Y|X}.$$

Par conséquent, le résultat découle du cas $r = 1$.

3.4. THÉORÈMES D'INDICE MICROLOCAL

Si $p : X \longrightarrow Y$ est un fibré vectoriel, on identifiera Y à la section nulle de X et on notera par Λ le fibré conormal à Y dans X et par $\dot{\Lambda}$ le fibé $T^*_Y X - Y$.

Le faisceau $\mathcal{E}_{[X]}$ des opérateurs microdifférentiels polynomiaux sur X est défini (voir [11]) de la facon suivante:

Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on pose,

$$\mathcal{E}_{[X]}[m] = \{P \in \mathcal{E}_X \mid [\Theta, P] = mP\}$$

$$\mathcal{E}_{[X]} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{E}_{[X]}[m]$$

Dans des coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_d)$ de X telles que $Y = \{t = 0\}$, les opérateurs de $\mathcal{E}_{[X]}$, définis près de Λ, sont les opérateurs microdifférentiels dont le symbole $P = \sum_{j \leqslant m} P_j(x, t, \xi, \tau)$ dans les coordonnées ci-dessus est tel que les fonctions P_j sont polynomiales en t et non nulles seulement pour un nombre fini de j.

Il est facile à vérifier que pour tout $r \in [-\infty, 1]$, le faisceau $\mathcal{C}_{Y|X}(r,1)$ est un $\mathcal{E}_{[X]}$-module.

Soit X un fibré vectoriel de rang un sur Y.

PROPOSITION 3.4.1. *Soient $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_{[X]}$-module holonome et r un rationnel qui appartient à* $[-\infty, 1]$.

Le complexe $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{Y|X}(r,1))$ est un complexe de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels à cohomologie constructible sur $\dot{\Lambda}$.

En outre, pour tout $x \in \dot{\Lambda}$,

$$\chi(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{Y|X}(r,1))_x = Eu_{\tilde{Ch}_{(1)}(\mathcal{M})}(\dot{\pi}(x)) - Eu_{\tilde{Ch}_{(r)}(\mathcal{M})}(\dot{\pi}(x))$$

où $\dot{\pi}$ est la projection $\dot{\Lambda} \longrightarrow Y$.

Preuve. Rappelons tout d'abord qu'un $\mathcal{E}_{[X]}$-module $\mathcal{M}$ est holonome si le $\mathcal{E}_X$-module $\mathcal{E}_X \otimes_{\mathcal{E}_{[X]}} \mathcal{M}$ est holonome.

Soit π (resp. $\dot{\pi}$) la projection $\Lambda \longrightarrow Y$ (resp. $\dot{\Lambda} \longrightarrow Y$). La suite,

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}_{Y|X}\{r\} \longrightarrow \dot{\pi}_* \mathcal{C}_{Y|X}(r,1) \longrightarrow \mathcal{O}_{X|Y} \longrightarrow 0$$

est exacte.

D'autre part, d'après le lemme 5.3.2 de [11], $\mathcal{E}_{[X]|\Lambda}$ est plat sur $\pi^{-1}(\mathcal{D}_{[X]|Y})$. En plus, il existe un $\mathcal{D}_{[X]}$-module $\mathcal{N}$ tel que:

$$\mathcal{M}_{|\Lambda} = (\mathcal{E}_{[X]|\Lambda}) \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{D}_{[X]|Y})} \pi^{-1}(\mathcal{N}_{|Y})$$

On peut alors supposer que $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_{[X]}$-module holonome puis appliquer le théorème 2.8.1 à la suite exacte ci-dessus. □

Prenons maintenant un fibré vectoriel X de rang quelconque. Soient $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_{[X]}$-module holonome et$\Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ sa variété microcaractéristique de type r. D'après le paragraphe Section 3.3, on peut associer à $\Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ un cycle analytique de $T^*(\mathbb{P}_Y^* X)$ et que l'on va noter $Irr(r)(\tilde{\underline{\Sigma}}^{(r)}(\mathcal{M}))$.

Rappelons également que si G est un complexe de faisceaux à cohomologie constructible sur X, alors grâce au chap 9 de [8], on peut lui associer un cycle caractéristique lagrangien (noté $CC(G)$) de T^*X. En particulier, au complexe $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ où $\mathcal{M}$ est holonome, est associé le cycle caractéristique $\tilde{Ch}_\Lambda(\mathcal{M})$.

THÉORÈME 3.4.2. *Soient $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_{[X]}$-module holonome et (r, s) un couple de rationnels tels que $-\infty < r < s \leqslant 1$.*

Le complexe $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{Y|X}(r, 1)/\mathcal{C}_{Y|X}(s, 1))$ est un complexe de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels à cohomologie constructible sur $\dot{\Lambda}$ et le cycle caractéristique associé est donné par:

$$CC[\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{Y|X}(r, 1)/\mathcal{C}_{Y|X}(s, 1))] = \gamma^* \left[\sum_{r \leqslant p \leqslant s} Irr(p)(\tilde{\underline{\Sigma}}^{(p)}(\mathcal{M})) \right]$$

où $\gamma^*(\tilde{C})$ est l'image inverse par γ du cycle $\tilde{C}$.

Preuve. Comme la suite,

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_{Y|X}(s, 1)/\mathcal{C}_{Y|X} \longrightarrow \mathcal{C}_{Y|X}(r, 1)/\mathcal{C}_{Y|X} \longrightarrow \mathcal{C}_{Y|X}(r, 1)/\mathcal{C}_{Y|X}(s, 1) \longrightarrow 0$$

est exacte, le faisceau $\mathcal{C}_{Y|X}(r, 1)/\mathcal{C}_{Y|X}(s, 1)$ vérifie aussi la propriété de la proposition 3.3.1.

Soit X' un fibré en droites sur Y', l'isomorphisme $\mathbb{P}_{Y'} X' \simeq Y'$ identifie γ_* et $\dot{\pi}_*$.

Grâce à la Proposition 3.4.1, le complexe $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_{[X']}}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{Y'|X'}(r, 1)/\mathcal{C}_{Y'|X'}(s, 1))$ est un complexe de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels à cohomologie constructible sur $\dot{\Lambda}$.

Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{E}_{[X']}$-module holonome, alors il existe un $\mathcal{D}_{[X']}$-module holonome $\mathcal{N}$ tel que $\mathcal{M}_{|\Lambda'} = (\mathcal{E}_{[X']|\Lambda'}) \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{D}_{[X']|Y'})} \pi^{-1}(\mathcal{N}_{|Y'})$ et qui vérifie:

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_{[X']}}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{Y'|X'}(r, 1)/\mathcal{C}_{Y'|X'}(s, 1)) = \gamma^{-1} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{[X']}}(\mathcal{N}, \mathcal{B}_{Y'|X'}\{r\}/\mathcal{B}_{Y'|X'}\{s\})$$

Le complexe $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{[X']}}(\mathcal{N}, \mathcal{B}_{Y'|X'}\{r\}/\mathcal{B}_{Y'|X'}\{s\})$ est un complexe de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels à cohomologie constructible sur Y', alors on peut lui associer un cycle caractéristique qui n'est autre que le cycle analytique lagangien

$\sum_{r\leqslant p\leqslant s} Irr(p)(\tilde{\Sigma}^{(p)}(\mathcal{M}))$ de T^*Y' et que l'on peut regarder aussi comme un cycle analytique lagangien $\sum_{r\leqslant p\leqslant s} Irr(p)(\tilde{\underline{\Sigma}}^{(p)}(\mathcal{M}))$ sur $T^*(\mathbb{P}^*_{Y'}X')\simeq T^*Y'$.

L'application γ définit les applications suivantes:

$$T^*Y' \xleftarrow{p_{Y'}} (T^*Y')\times_{Y'}\dot{\Lambda}' \xrightarrow{t_{\gamma'}} T^*\dot{\Lambda}'$$

L'application $t_{\gamma'}$ est propre sur

$$p_{Y'}^{-1}\left(\sum_{r\leqslant p\leqslant s} Irr(\tilde{\underline{\Sigma}}^{(p)}(\mathcal{M}))\right),$$

donc vu la proposition 9.3.2 de [8], le cycle analytique lagrangien associé au complexe

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{[X']}}(\mathcal{M},\mathcal{C}_{Y'|X'}(r,1)/\mathcal{C}_{Y'|X'}(s,1)) \quad \text{est} \quad \gamma^*\left(\sum_{r\leqslant p\leqslant s} Irr(\tilde{\underline{\Sigma}}^{(p)}(\mathcal{M}))\right).$$

D'autre part, si X est un fibré vectoriel de base Y, et si ϕ_1 est la transformation canonique du paragraphe Section 3.2 définie d'un ouvert de T^*X sur un ouvert de T^*X' et qui transforme localement $\Lambda = T^*_YX$ en $\Lambda' = T^*_{Y'}X'$, alors ϕ_1 induit des isomorphismes de $\mathbb{P}^*_YX$ sur $\mathbb{P}^*_{Y'}X'$ et de $T^*\Lambda$ sur $T^*\Lambda'$. Par conséquent, cela donne un isomorphisme entre les transformées monoidales $\tilde{\Lambda}$ et $\tilde{\Lambda}'$ de Λ et de Λ' respectivement. Si $\widehat{\phi}_1$ est la transformation canonique quantifiée associée à ϕ_1, alors les invariants par $\widehat{\phi}_1$ seront transformés d'une manière compatible (voir [14]).

Désignons finalement par φ_1 l'isomorphisme entre $T^*\tilde{\Lambda}$ et $T^*\tilde{\Lambda}'$ induit par ϕ_1. Si ϕ_1^{-1} et φ_1^{-1} sont respectivement la transformation inverse de ϕ_1 et l'isomorphisme entre $T^*\tilde{\Lambda}'$ et $T^*\tilde{\Lambda}$ induit par ϕ_1^{-1}, alors le cycle analytique $\tilde{\underline{\Sigma}}^{(p)}(\hat{\phi}_1(\mathcal{M}))$ de $T^*\tilde{\Lambda}'$ est transformé par φ_1^{-1} en le cycle analytique $\tilde{\underline{\Sigma}}^{(p)}(\mathcal{M})$ de $T^*\tilde{\Lambda}$ et par suite $Irr(p)(\tilde{\underline{\Sigma}}^{(p)}(\hat{\phi}_1(\mathcal{M}))$ est transformé en $Irr(p)(\tilde{\underline{\Sigma}}^{(p)}(\mathcal{M}))$ de $T^*(\mathbb{P}^*_YX)$.

Par conséquent, le complexe $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_{[X]}}(\mathcal{M},\mathcal{C}_{Y|X}(r,1)/\mathcal{C}_{Y|X}(s,1))$ est un complexe de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels à cohomologie constructible sur $\dot{\Lambda}$. En plus son cycle caractéristique associé est

$$\gamma^*\left[\sum_{r\leqslant p\leqslant s} Irr(\tilde{\underline{\Sigma}}^{(p)}(\mathcal{M}))\right].$$

Ce qui termine la démonstration.

COROLLAIRE 3.4.3. *Soient $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{[X]}$-module holonome et (r,s) un couple de rationnels tels que $-\infty < r < s \leqslant 1$. Le complexe $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{[X]}}(\mathcal{M},\mathcal{B}_{Y|X}\{r\}/\mathcal{B}_{Y|X}\{s\})$ est un complexe de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels à cohomologie constructible sur Y et le cycle* *caractéristique (dans T^*Y) associé est donné par:*

$$CC[\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}\{r\}/\mathcal{B}_{Y|X}\{s\})] = \theta_*\left[\sum_{r \leqslant p \leqslant s} Irr(p)(\tilde{\underline{\Sigma}}^{(p)}(\mathcal{M}))\right]$$

Preuve. Si i est l'injection $Y \hookrightarrow X$, grâce à la Proposition 3.3.1, on aura:

$$\begin{aligned}&\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{[X]}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}\{r\}/\mathcal{B}_{Y|X}\{s\})\\ &\quad= \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{[X]}}(\mathcal{M}, i_*\mathbb{R}\theta_*\gamma_*(\mathcal{C}_{Y|X}(r,1)/\mathcal{C}_{Y|X}(s,1)))\\ &\quad= \mathbb{R}\theta_*\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\theta^{-1}i^{-1}\mathcal{D}_{[X]}}(\theta^{-1}i^{-1}\mathcal{M}, \gamma_*(\mathcal{C}_{Y|X}(r,1)/\mathcal{C}_{Y|X}(s,1))).\end{aligned}$$

Si X' est un fibré de rang un sur Y', on a $\gamma_* = \dot{\pi}_*$ et donc,

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{[X']}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y'|X'}\{r\}/\mathcal{B}_{Y'|X'}\{s\}) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{[X']}}(\mathcal{M}, \gamma_*(\mathcal{C}_{Y'|X'}(r,1)/\mathcal{C}_{Y'|X'}(s,1)))$$

Par conséquent, (voir théorème 3.4.2), le cycle caractéristique associé au complexe $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{[X']}}(\mathcal{M}, \gamma_*(\mathcal{C}_{Y'|X'}(r,1)/\mathcal{C}_{Y'|X'}(s,1)))$ est le cycle analytique

$$\sum_{r \leqslant p \leqslant s} Irr(p)(\tilde{\underline{\Sigma}}^{(p)}(\mathcal{M})) \quad \text{de} \quad T^*(T^*_{Y'}X') \simeq T^*Y'.$$

Il suffit donc de reprendre la transformation canonique quantifiée $\hat{\phi}_1$ pour voir que pour un fibré vectoriel X de rang supérieur à 1 et de base Y, le cycle caractéristique associé au complexe $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{[X]}}(\mathcal{M}, i_*\mathbb{R}\theta_*\gamma_*(\mathcal{C}_{Y|X}(r,1)/\mathcal{C}_{Y|X}(s,1)))$ est le cycle $\sum_{r \leqslant p \leqslant s} Irr(p)(\tilde{\underline{\Sigma}}^{(p)}(\mathcal{M}))$de $T^*(\mathbb{P}^*_Y X)$.

Comme θ est propre, le résultat découle directement de la proposition 9.4.2 de [8]. □

Références

1. Andronikof, E.: Microlocalisation tempérée, *Bull. Soc. Math. France* **122**(2) (1994).
2. Bjork, J. E.: *Rings of Differential Operators,* North-Holland, Amsterdam, 1979.
3. Bjork, J. E.: *Analytic $\mathcal{D}$-Modules and Applications*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993.
4. Boutet de Monvel, L. et Kree, P.: Pseudo-differential operators and Gevrey classes, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **17** (1967), 295–323.
5. Brylinski, J. L., Dubson, A. et Kashiwara, M.: Formule de l'indice pour les modules holonomes et obstruction d'Euler locale, *C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. Math.* **293** (1981).
6. Kashiwara, M.: *Systems of Microdifferential Equations*, Progr. Math, 34, Birkhauser, Basel, 1983.
7. Kashiwara, M.: On the Holonomic Systems of linear differential equations, *Invent. Math.* **49** (1978), 121–135.
8. Kashiwara, M. et Schapira, P.: *Sheaves on Manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
9. Kashiwara, M.: Vanishing cycles and holonomic systems of differential equations, In: *Lecture Notes in Math.* 1016, Springer, New York, 1983, pp. 134–142.

10. Laurent, Y.: *Théorie de la 2-microlocalisation dans le domaine complexe*, Progr. Math. 53, Birkhauser, Boston, 1985.
11. Laurent, Y.: Polygone de Newton et b-fonctions pour les modules microdifferentiels, *Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup. (4)* **20** (1987), 391–441.
12. Laurent, Y.: Vanishing cycles of $\mathcal{D}$-modules, *Invent. Math.* **112** (1993), 491–539.
13. Laurent, Y.: Vanishing cycles of irregular $\mathcal{D}$-modules, Prépublication de l'Institut Fourier No. 304, Grenoble, 1995; à paraitre dans *Compositio Math.*
14. Laurent, Y. et Mebkout, Z.: Pentes algébriques et pentes analytiques d'un $\mathcal{D}$-module, Prépublication de l'institut Fourier No. 372, Grenoble, 1997.
15. Maisonobe, P. et Sabbah, C.: *Images directes et constructibilité*, les cours du CIMPA, Travaux en cours, Hermann, Paris, 1993.
16. Malgrange, B.: Sur les points singuliers des équations différentielles, *Enseign. Math.* **XX**(1–2) (1974), 147–176.
17. Malgrange, B.: Sur la réduction formelle des équations différentielles, *Astérisque, Soc. Math. France* **140–141** (1986).
18. Mebkhout, Z.: Le théorème de positivité de l'irrégularité pour les $\mathcal{D}$-modules, The Grothendieck Festschrift 3, *Progr. in Math.* **88** (1990), 83–132.
19. Monteiro-Fernandes, T.: Constructibilité des solutions des systèmes microdifférentiels, *C.R. Acad. Sci. Paris, sér. Math.* **290** (1982).
20. Ramis, J. P.: Théorèmes d'indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires, *Mem. Amer. Math. Soc.* **48** (296).
21. Rebahi, Y.: Irrégularité des D-modules algébriques holonomes, *C.R. Acad. Sci. Paris, sér. 1*, 1997.
22. Sabbah, C.: Equations différentielles à points singuliers irréguliers en dimension 2, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **43**(5) (1993), 1619–1688.
23. Sato, M., Kawai, T. et Kashiwara, M.: *Hyperfunctions and Pseudodifférentiel Equations,* Lecture Notes in Math. 287, Springer, New York, 1973.
24. Schapira, P.: *Microdifférentiel Systems in the Complex Domain*, Grundlehren der Math. 269, Springer, New York, 1985.