Astin Bulletin 11 (1980) 73

BOOK REVIEW

H. L. SEAL, SURVIVAL PROBABILITIES (THE GOAL OF RISK THEORY)

Chichester: John Wiley & Sons Inc., 1978, x + 103, $ 24.50.

Le but de ce livre est de donner quelques méthodes de calcul de la probabilité de ruine sur un horizon fini dans le cas du modèle "stationnaire" en théorie du risque pour des capitaux à risques positifs ainsi que les programmes d'ordinateur associés.

Il est subdivisé en 5 chapitres (occupant 63 pages) suivi d'un appendice (de 32 pages) relatif aux programmes, d'une bibliographie et d'un index. Les titres des chapitres sont:

1. Historical introduction.
2. The choice for $p_n(t)$ and B(.); the simplest model of a non-life company; and the use of queueing techniques.
3. A computational accessory — The Laplace transform.
4. The probability of t-year survival.
5. Approximations and Controls.

Analysons maintenant le contenu de chaque chapitre. Au chapitre 1, un processus de risque est "caractérisé" par la f.d. B des montants des sinistres successifs supposés indépendants et équidistribués—avec $B(0) = 0$— et par la distribution $p_n(t)$ de la variable $N(t)$ donnant le nombre de sinistres sur $(0, t)$ et ce, pour tout $t > 0$; de plus, le processus ponctuel $(N(t), t \geq 0)$ est supposé être stationnaire au sens de la terminologie de *J. A. MacFadden* (1962). Il en résulte que les interarrivées entre deux sinistres consécutifs sont équidistribuées mais pas forcément indépendantes; la f.d. commune est désignée par A.

Le choix de l'origine de l'axe des temps n'est pas clairement abordé; or, il est essentiel. En effet, si ce choix est fait a priori la suite des interarrivées peut perdre son caractère d'équidistribution (cfr. *MacFadden* (1962)) excepté dans le cas d'indépendance c'est-à-dire pour le modèle de E. S. Andersen. Par conséquent, la préservation de l'équidistribution de cette suite n'a lieu, en général, que si $t = 0$ coïncide avec un instant d'apparition d'un sinistre qui est le premier observé. Ajoutons encore que si l'origine des temps est arbitraire, la variable aléatoire représentant l'arrivée du premier sinistre est distribuée comme les temps d'interarrivées si et seulement ceux-ci ont une distribution exponentielle négative; si on fait l'hypothèse supplémentaire que ceux-ci sont indépendants, on retrouve le modèle de Cramér ou le modèle M/G/1 des files d'attente.

Ensuite l'auteur rappelle les principales phases de l'évolution de la théorie du risque (essentiellement les travaux de F. Lundberg et H. Cramér) et introduit la fonction de distribution $F(x, t)$ du montant total des sinistres à l'instant t —grâce à l'hypothèse d'indépendance des montants et du processus des arrivées de sinistres—, le processus des réserves de la compagnie et les probabilités de non-ruine partant d'une réserve initiale w respectivement sur $[0, \infty]$ et $[0, t]$ et notées $U(w)$ et $U(w, t)$.

Le chapitre 2 commence par quelques exemples de distribution pour $(p_n(t))$ et pour $B(t)$; à ce propos, il est dommage que l'auteur se contente de parler uniquement en termes de $p_n(t)$ du fait que ces distributions marginales ne suffisent pas, sauf dans le cas d'un processus de renouvellement, à caractériser le processus des arrivées de sinistres. L'auteur poursuit en rappelant le parallélisme bien connu maintenant entre le modèle de Cramér en théorie du risque et le modèle M/G/1 en théorie des files d'attente. Dans le cas M/M/1, l'auteur rappelle la forme explicite de la distribution $(q_n(t))$ du nombre de clients dans la file à l'instant t, résultat dû à *Lederman* et *Reuter* (1956), *Bailey* (1956) et *Champernowne* (1956). De façon pertinente, H. L. Seal dénote l'absence de résultats numériques à partir de cette formule, chose faite dans ce livre pour w variant de 0 à 10 par pas de 1 et pour $t = 10$ pour obtenir $U(w, t)$. Ensuite, utilisant le "ballot theorem", l'auteur retombe sur la formule d'Arfwedson donnant, pour le cas M/M/1, une forme explicite de $U(w, t)$ à l'aide de F(x, t) et de sa densité f(x, t) par le biais d'une intégration. Ceci conduit à la table 2.4. - 2.5. donnant les valeurs numériques de U(w, t) pour un modèle M/M/1 avec $\lambda = \mu = 1$, le chargement η étant soit nul, soit de 10%; t varie de 0 à 10 par pas de 1 et prend ensuite les valeurs 10, 20, 30, 40, 50, 100, 150, 200, 400, 600, 800, 1000, 1500, 2000 et ∞; w varie de 0 à 11 par pas de 1 et ensuite de 11 à 110 par pas de 11. En fait, cette table a été donnée par H. L. Seal en 1972.

Utilisant un programme de *Bagchi* et *Templeton* (1972), l'auteur fournit des résultats numériques pour les probabilités de non-ruine après le n^e sinistre qu'il compare avec un de ses programmes datant de 1972 et basé sur un résultat explicite de Cohen pour le modèles M/M/1 (voir table 2.6.).

Le but du chapitre III est le calcul numérique de la fonction de distribution du montant total des sinistres F(x, t). A cet effet, les bases du principe des transformées de Fourier et de Laplace sont rappelées et le traitement numérique de la transformée inverse est largement exploré; en conclusion, il apparaît que l'utilisation de la classique formule trapézoïdale d'intégration numérique conduit, en théorie du risque, à des résultats satisfaisants dans les cas M/M/1 et M/G/1 avec la distribution normale inverse.

Plusieurs méthodes d'inversion numérique sont proposées et comparées, notamment dans le cas de montants de sinistres suivant une distribution de Pareto ou une distribution lognormale pour lesquelles la forme explicite de la transformée de Laplace n'est pas connue.

Le chapitre IV constitue le cœur de l'ouvrage du fait qu'il est consacré au calcul de U(w, t). Il commence par l'établissement de la "formule de Prabhu" datant de 1961 donnant, pour le modèle M/G/1, U(w, t) à l'aide de F(x, t) et de f(x, t) convoluée avec U(0, t). H. L. Seal persiste à présenter cette formule valable dès que le processus des arrivées de sinistres est stationnaire rappelant à ce propos (page 45) son désaccord avec certains "théoriciens des files d'attente" pour qui la formule de Prabhu est valable seulement dans le cas M/G/1. Ce problème est important étant donné certains résultats numériques dans des cas non M/G/1. Or il semble bien que la prudence s'impose. En effet, dans l'établissement de la formule incriminée (1) (p. 44), on conditionne par rapport au dernier passage par 0 pour le processus des réserves avec ruine permise; cette information fait que, même dans le cas de processus stationnaires, la distribution de "l'excès" n'est pas celle de la stationnarité (voir *MacFadden* (1962)); d'ailleurs, la stationnarité implique que l'âge et l'excès en t, instant arbitraire sans information a priori, ont même distribution en t. Or ici, cela n'est pas le cas car l'âge est sûrement majoré par t; la seule possibilité restante est d'avoir une distribution intersinistre exponentielle négative qui entraîne l'indépendance entre l'âge et l'excès et qui garde pour cette dernière une distribution exponentielle négative.

L'opinion personnelle du "reviewer" est donc que la formule de Prabhu (1) est valable dans le cas M/G/1 avec peut-être une possibilité de généralisation à certains processus stationnaires à distribution intersinistres ayant une distribution exponentielle négative. Le calcul de U(w, t) est fait par la formule déduite du "ballot theorem" par *Takacs* (1967).

Les programmes GETUWT et GETBRM permettent le calcul numérique de U(w, t) et figurent dans l'appendice. Le programme GETUWT utilise pour le calcul des transformées de Laplace inverse la méthode trapézoïdale. Comme pour les valeurs de t voisines de 1, la formule de quadrature proposée par SEAL (1974) donne de meilleurs résultats, le programme GETBRM se base sur celle-ci.

Le côté "surprenant" — dixit l'auteur — des résultats de la table 4.1. (p. 52) comparant diverses distributions ne pourrait-il pas être dû, en partie, à l'utilisation non-adéquate de la formule (1) au cas non poissonien ?

Pour terminer ce chapitre, l'auteur calcule les probabilités de non-ruine après le n^e sinistre par le programme POLLAK se basant sur les travaux désormais classiques de Lindley (1952) en files d'attente.

Le chapitre V aborde le problème de l'approximation de F(x, t) et de U(w, t) par diverses méthodes.

Pour la fonction F, l'auteur recommande l'approximation "gamma" de Bohman-Esscher, recommandation mise récemment en doute par *Goovaerts* et *Van Goethem* (1978).

Se servant de cette approximation dans la formule du "ballot theorem", H. L. Seal construit ainsi le programme DEMUWT donnant U(w, t).

La probabilité de non-ruine sur [0, ∞), U(w), est calculée pour le modèle M/G/1 pour lequel la forme explicite de U(w) est bien connue. Le chapitre se termine en examinant d'autres méthodes d'approximation de U(w) dans le cas M/G/1 à savoir celles de *Beekman-Bowers* (1969), *Ryder* (1976), *Grandell* et *Segerdhal* (1971) dont aucune ne semble se dégager nettement, exception faite de la méthode de Ryder qui est à rejeter vu le faible nombre de décimales exactes fourni sur un exemple. L'auteur recommande, à quelques exceptions près, l'emploi de la méthode de Beekman-Bowers. Enfin, signalons que le cas général G/G/1 est à peine effleuré à la dernière page de ce chapitre.

Ceci nous amène à faire le bilan. Du côté positif, retenons qu'il s'agit du premier ouvrage traitant essentiellement du calcul numérique des probabilités de ruine en régime transitoire, problème capital à l'heure actuelle pour tous les utilisateurs de la théorie du risque. A ce titre, il faut espérer que ce livre agira comme catalyseur à la fois au niveau de la recherche en sciences actuarielles — il reste en effet beaucoup à faire à la fois dans l'élaboration de modèles plus réalistes et dans le traitement des modèles existants — et au niveau des milieux professionnels de l'assurance dans lesquels l'utilisation de modèles de risque devrait devenir un réflexe normal. Il faut aussi souhaiter que les chercheurs opérationnels en files d'attente tireront le plus grand profit de la lecture de cet ouvrage pour l'obtention de résultats efficaces sur les distributions des temps d'attente en régime transitoire. Il est en effet clair que dans l'interaction théorie du risque-théorie des files d'attente, cette dernière l'emporte dans les études asymptotiques et l'inverse se produit très nettement dans les études transitoires.

Du côté négatif, il y a tout d'abord l'utilisation non-adéquate de la "formule de Prabhu", une présentation généralement peu claire des tableaux numériques (cfr. en particulier les tableaux 4.1., page 52 et 5.2., page 62) ainsi qu'un manque d'ordre dans la présentation de la matière.

Enfin, nous terminerons en faisant deux remarques essentielles à nos yeux, dans le cadre du problème traité. Tout d'abord, il est regrettable que l'auteur n'ait pas cru devoir au moins mentionner les remarquables travaux de *Thorin* et *Wikstad* (1971, 1973), sur l'approche numérique, dans le cas transitoire, du modèle GI/G/1 dont les illustrations connues actuellement prônent en faveur de son efficacité et ce sans parler d'autres travaux comme ceux de *Gerber* (1973) et de l'école belge aussi oubliés ici.

Ensuite — mais ceci n'est pas une critique vis-à-vis de l'approche de H. L. Seal mais de l'ensemble des travaux sur la théorie du risque — il n'existe aucune tentative en vue de fournir une majoration de l'erreur faite en utilisant une méthode approchée ce qui rend particulièrement malaisée la comparaison des diverses méthodes proposées.

J. Janssen

REFERENCES *

Bailey, N. T. J. (1956). A Continuous Time Treatment of a Simple queue using Generating Functions, *J. Roy. Stat. Soc.*, Sec. B, **16**, 288-29.

Champernowne, D. G. (1956). An Elementary Method of Solution of the Queueing problem with a single Server and a constant Parameter, *J. Roy Stat. Soc.*, Ser. B, **18**, 125-128.

Gerber, H., (1973). Martingales in risk theory, *Mitt. Ver. Schweiz. Vers. Math.*, **73**, 205-216.

Goovaerts, M. J. and P. Van Goethem. (1978). On a Barry-Esseen theorem for compound Poisson processes, *Journ. of Comput. and Ap. Math.* **4**, 93-100.

Thorin, O. (1977). Ruin probabilities prepared for Numerical Calculation, Scand. Ac. Journal, supplement, 7-17.

* N'y figurent que les références dans le présent compte rendu et non dans l'ouvrage analysé.

LEDERMANN, W. and G. E. REUTER. (1956). Spectral Theory for the Differential Equations of Simple Birth and Death Processes, *Phil. Trans. Roy. Soc. London,* ser. A, **246,** 321-369.

THORIN, O. and N. WIKSTAD. (1973). "Numerical evaluation of Ruin Probability for a Finite Period", *Astin Bulletin,* **7,** 137-153.

WIKSTAD, N. (1971). Exemplification of Ruin Probabilities, *Astin Bulletin,* **6,** 147-152.

TAKACS, L. (1967). *Combinational Methods in the Theory of Stochastic Processes,* John Wiley & Sons, New York.

https://doi.org/10.1017/S0515036100006632 Published online by Cambridge University Press