Canad. Math. Bull. Vol. **25** (1), 1982

REMARQUES SUR LES SOLUTIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES DE L'ÉQUATION $[(d/dt)-A]x=0$

PAR

GASTON MANDATA N'GUÉRÉKATA

ABSTRACT. L'auteur démontre la presque-périodicité des solutions à trajectoires relativement compactes de l'équation différentielle abstraite dans un espace de Hilbert: $[(d/dt)-A]x=0$ où $A=A_+ + A_-$, avec A_+ un opérateur linéaire symétrique et A_- antisymétrique.

Introduction. Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(.,.)$ et de la norme $\|.\|$. Une fonction continue $x:\mathbf{R}\to H$ est dite presque-périodique si pour tout $\varepsilon>0$ il existe $l=l(\varepsilon)>0$ tel que tout intervalle de l'axe réel de longueur l contient au moins un point d'abscisse τ tel que:

$$\sup_{t\in\mathbf{R}}\|x(t+\tau)-x(t)\|<\varepsilon$$

Considérons dans H l'équation différentielle

$$x'(t)=Ax(t), \qquad -\infty<t<\infty \tag{1}$$

où A est un opérateur linéaire de domaine $D(A)$ dense dans H. Une solution de (1) est une fonction $x(t)$ continûment différentiable sur $\mathbf{R}$ et satisfaisant (1).

Il est bien connu (voir [1] ou [3] Théorème 3.1) que si A est un opérateur antisymétrique, alors toute solution à trajectoire relativement compacte de l'équation (1) est presque-périodique. Ce résultat devient, un corollaire simple du Théorème suivant que nous établissons et démontrons:

THÉORÈME.* *Supposons que* $A=A_+ + A_-$ *où*

(i) A_+ *est symétrique*

(ii) A_- *est antisymétrique*

(iii) $\mathrm{Re}(A_+x, A_-x)\geq -c\,\|A_+x\|^2$ *pour tout* $x\in D(A)$ *où* c *est une constante telle que* $c\leq 1$.

Alors toute solution à trajectoire relativement compacte de l'équation (1) est presque-périodique.

Reçu par les redacteurs le 29 juillet, 1980

AMS Subject Classification (1980) 34C 27

Mots-clé: Solution presque périodiques, equations differentielles abstraits.

* Ce résultat a été annoncé dans Not. Am. Mat. Soc. 196.

Démonstration. Soit $y(t)$ une solution arbitraire non identiquement nulle et bornée; soit la fonction numérique

$$\phi(t) = \|y(t)\|^2 = (y(t), y(t)).$$

Alors $\phi(t)$ est aussi bornée sur $\mathbf{R}$. De plus on a:

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= \frac{d}{dt}(y(t), y(t)) \\ &= (y'(t), y(t)) + (y(t), y'(t)) \\ &= (Ay(t), y(t)) + (y(t), Ay(t)) \\ &= (A_+y(t), y(t)) + (A_-y(t), y(t)) + (y(t), A_+y(t)) + (y(t), A_-y(t)) \\ &= 2(A_+y(t), y(t))\end{aligned}$$

à cause de (i) et (ii). Nous utilisons le

Lemme ([4] Sublemma page 56). *Soit $x(t)$ une fonction continûment différentiable à valeurs dans $D(B) \subset H$ où B est un opérateur symétrique; alors la fonction $b(t) = (Bx(t), x(t))$ est continûment differentiable et sa dérivée est égale à* $2\ \mathrm{Re}(Bx(t), x'(t))$.

Nous obtenons donc:

$$\begin{aligned}\phi''(t) &= 4\ \mathrm{Re}(A_+y(t), y'(t)) \\ &= 4\ \mathrm{Re}(A_+y(t), Ay(t)) \\ &= 4\ \mathrm{Re}[(A_+y(t), A_+y(t)) + (A_+y(t), A_-y(t))] \\ &= 4[\|A_+y(t)\|^2 + \mathrm{Re}(A_+y(t), A_-y(t))] \\ &\geq 4[\|A_+y(t)\|^2 - c\,\|A_+y(t)\|^2], \quad \text{par} \quad \text{(iii)} \\ &= 4(1-c)\,\|A_+y(t)\|^2 \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

$\phi(t)$ est donc une fonction convexe; étant bornée sur $\mathbf{R}$, elle est constante; nous pouvons alors dire:

$$\phi(t) = \phi(0), \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbf{R},$$

c'est-à-dire

$$\|y(t)\|^2 = \|y(0)\|^2, \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

Supposons maintenant que $y(t)$ est une solution à trajectoire relativement compacte; $y(t)$ est donc bornée et vérifie l'égalité (2).

Soit $s \in \mathbf{R}$ quelconque et considérons la fonction

$$y_s(t) = x(t+s), \qquad -\infty < t < \infty.$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1982-018-1 Published online by Cambridge University Press

Alors on a:

$$y_s'(t) = Ay_s(t), \qquad -\infty < t < \infty.$$

Donc si s_1 et s_2 sont donnés, on a:

$$(y_{s_1}(t) - y_{s_2}(t))' = A(y_{s_1}(t) - y_{s_2}(t))$$

et par la suite

$$\|y_{s_1}(t) - y_{s_2}(t)\|^2 = \|y_{s_1}(0) - y_{s_2}(0)\|^2$$

ou encore

$$\|x(t+s_1) - x(t+s_2)\|^2 = \|x(s_1) - x(s_2)\|^2.$$

Soit $(s_n')_{n=1}^{\infty}$ une suite réelle arbitraire; alors on peut en extraire une sous-suite $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que $(x(s_n))_{n=1}^{\infty}$ soit de Cauchy dans H, puisque $x(t)$ est à trajectoire relativement compacte. Nous avons

$$\sup_{t\in\mathbf{R}} \|x(t+s_n) - x(t+s_m)\|^2 = \|x(s_n) - x(s_m)\|^2$$

donc la suite des translatées $(x(t+s_n))_{n=1}^{\infty}$ est de Cauchy uniforme en $t \in \mathbf{R}$. Alors par le critère de Bochner (voir [1] ou [2]), $x(t)$ est presque-périodique; ce qu'il fallait démontrer.

Bibliographie

1. L. Amerio and G. Prouse, *Almost-periodic functions and functional equations.* Van Nostrand Reinhold Co., 1971.

2. C. Corduneanu, *Almost-periodic functions.* Interscience Publishers, 1968.

3. S. Zaidman, *Solutions presque-périodiques des équations différentielles abstraites*, L'ens. Math. IIe série Tome XXIV-Fasc. 1–2, Janv.-Juin 1978.

4. S. Zaidman, *Equations différentielles abstraites.* Pitman Advanced Publishing Program, 1979.

Département de Mathématiques et de Statistiques,
Université de Montréal,
Canada.

https://doi.org/10.4153/CMB-1982-018-1 Published online by Cambridge University Press