



COMPOSITIO MATHEMATICA

Formule du conducteur pour un caractère l -adique

Isabelle Vidal

Compositio Math. **145** (2009), 687–717.

[doi:10.1112/S0010437X08003850](https://doi.org/10.1112/S0010437X08003850)



FOUNDATION
COMPOSITIO
MATHEMATICA

*The London
Mathematical
Society*





Formule du conducteur pour un caractère l -adique

Isabelle Vidal

ABSTRACT

Let K be a local field of equal characteristic $p > 2$, let X_K/K be a smooth proper relative curve, and let \mathcal{F} be a rank 1 smooth l -adic sheaf ($l \neq p$) on a dense open subset $U_K \subset X_K$. In this paper, under some assumptions on the wild ramification of \mathcal{F} , we prove a conductor formula that computes the Swan conductor of the étale cohomology of the vanishing cycles of \mathcal{F} . Our conductor formula is a generalization of the conductor formula of Bloch, but for non-constant coefficients.

RÉSUMÉ

Soit K un corps local d'égal caractéristique $p > 2$, X_K/K une courbe relative propre et lisse, \mathcal{F} un caractère l -adique (avec $l \neq p$) lisse sur un ouvert dense $U_K \subset X_K$. Dans cet article, sous certaines hypothèses sur la ramification sauvage de \mathcal{F} , on prouve une formule qui calcule le conducteur de Swan de la cohomologie des cycles évanescents de \mathcal{F} . Notre formule du conducteur est une généralisation, pour des coefficients non constants, de la formule du conducteur de Bloch.

Table des matières

1	Rappels sur la théorie de Kato–Matsuda	689
2	Enoncé de la formule du conducteur pour un caractère l-adique	692
3	Une formule de traces	695
4	Ramification d'un revêtement d'Artin–Schreier	700
5	Formule du conducteur pour un caractère d'Artin–Schreier	703
6	Formule du conducteur pour un caractère d'ordre p^e, à ramification horizontale totalement non féroce	708
7	Fin de la preuve de la formule du conducteur	714
	References	716

Introduction

Soit K un corps local d'égal caractéristique $p > 0$, d'anneau des entiers \mathcal{O}_K , de corps résiduel k parfait. On pose $\eta = \text{Spec } K$, $S = \text{Spec } \mathcal{O}_K$, $s = \text{Spec } k$. Soit X/S une courbe relative propre, à fibre générique X_η/η lisse. On suppose que X est régulier, et que sa fibre spéciale réduite

Received 7 November 2007, accepted in final form 14 July 2008, published online 25 March 2009.

2000 Mathematics Subject Classification 14G20, 11G25, 11S15.

Keywords: ramification, vanishing cycles, Swan conductor.

This journal is © [Foundation Compositio Mathematica](#) 2009.

$(X_s)_{\text{red}}$ est un diviseur à croisements normaux stricts. On fixe un nombre premier $l \neq p$. La cohomologie étale de la fibre générique géométrique $H^*(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{F}_l)$ est naturellement munie d’une action du groupe de Galois de K , et la ramification sauvage de ce module galoisien est mesurée par un entier, le conducteur de Swan :

$$\text{sw } H^*(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{F}_l) = \sum (-1)^i \text{sw } H^i(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{F}_l) \in \mathbb{Z}.$$

Dans [Blo87], Bloch prouve une très belle formule qui calcule cet invariant galoisien en termes différentiels. La formule du conducteur de Bloch s’écrit

$$\text{sw } H^*(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{F}_l) = -\text{deg } c_{2, X_s}^X(\omega_{(X, (X_s)_{\text{red}})} / \omega_{(S, s)}) \in \mathbb{Z},$$

où dans le membre de droite apparaît le degré de la seconde classe de Chern localisée (à la Fulton et MacPherson, [Ful98]) du cotangent relatif à pôles logarithmiques le long de la fibre spéciale. De plus, Bloch traite le cas d’inégale caractéristique, et conjecture une formule analogue en dimension supérieure ; cette formule a été récemment établie par Kato et Saito [KS04].

L’objectif de l’article est de prouver une formule similaire, mais pour des coefficients non constants. Plus précisément, on considère comme précédemment une courbe sur un corps local, et on se donne en outre un faisceau l -adique lisse \mathcal{F} sur un ouvert dense $U \subset X_{\bar{\eta}}$. La cohomologie étale géométrique à coefficients dans le faisceau est naturellement munie d’une action du groupe de Galois de K , et l’on souhaiterait une formule calculant le conducteur de Swan de cette cohomologie en termes d’invariants différentiels associés au faisceau. En égale caractéristique $p > 2$, et pour un faisceau de rang un, une telle formule a été conjecturée par Matsuda [Mat97] à l’aide de la théorie de Kato de la ramification sauvage des caractères l -adiques en dimension supérieure. Dans cet article, on prouve cette conjecture dans deux cas particuliers :

- (1) pour un caractère d’ordre np , avec $(n, p) = 1$ (i.e. un caractère d’Artin–Schreier tordu par un caractère modéré) ; et
- (2) pour un caractère dont la ramification sauvage est totalement non féroce le long de la fibre générique.

On renvoie au Théorème 2.2 pour un énoncé précis. En fait, on établit une formule de Riemann–Roch, qui mesure la chute du conducteur de Swan de la cohomologie des cycles évanescents. Si le support des cycles évanescents comprend plusieurs composantes, notre formule permet de distinguer les contributions de chacune. Dans un travail ultérieur [Vid07], on donnera une application de cette formule aux constantes globales des équations fonctionnelles des fonctions L . Signalons aussi que lorsque la base est un corps local d’inégale caractéristique, ou lorsque la ramification du faisceau le long de la fibre générique est modérée, des variantes de cette formule ont été récemment établies par Kato, Saito et Tsushima [KS06, Tsu07].

Grosso modo, l’énoncé de la formule qu’on va démontrer est le suivant. On note $\alpha : U \hookrightarrow X$ l’inclusion. On suppose que $U \subset X$ est le complémentaire d’un diviseur à croisements normaux $D \cup (X_s)_{\text{red}} \subset X$. Ci-dessus, $D \subset X$ est fini, plat et génériquement étale sur S ; c’est le lieu ‘horizontal’ de ramification de \mathcal{F} . La théorie de Kato [Kat89, Kat94a] associe à \mathcal{F} un diviseur effectif $S_{\mathcal{F}} = \sum_{E \subset X_s} \text{sw}_E(\mathcal{F})E + \sum_{D_i \subset D} \text{sw}_{D_i}(\mathcal{F})D_i$ (où la somme est prise sur toutes les composantes irréductibles de $X_s \cup D$), ainsi qu’une forme différentielle tordue

$$\mathcal{O}(-S_{\mathcal{F}})|_+ \xrightarrow{\text{mrs}_{\mathcal{F}}} \omega_{(X, (X_s)_{\text{red}} \cup D)_{\text{It}}|_+}$$

supportée par le lieu de ramification sauvage de \mathcal{F} (noté $+$), et à valeurs dans le cotangent à pôles logarithmiques le long de la fibre spéciale et le long du lieu horizontal où la ramification de \mathcal{F} est modérée ou de type I (i.e. pas trop féroce). Ce conducteur de Swan raffiné mixte décrit la ramification sauvage de \mathcal{F} ; c’est un raffinement en dimension supérieure du conducteur de

Swan classique. Sous des hypothèses de régularité et de transversalité convenables, on définit la classe de Swan localisée de \mathcal{F} comme étant le zéro cycle supporté par X_s :

$$s_{\mathcal{F}} = \sum_{E \subset X_s} \text{sw}_E(\mathcal{F}) c_1(\text{Coker } \text{mrs}_{\mathcal{F}}) \cap [E] + \sum_{D_i \subset D} \text{sw}_{D_i}(\mathcal{F}) c_{1, D_i}^{D_i}(\text{Coker } \text{mrs}_{\mathcal{F}} / \omega_{(S, s)}) \cap [D_i] - \sum_{D_i \subset D_{\text{II}}} c_{1, D_i}^{D_i}(\omega_{(D_i, D_{i_s})} / \omega_{(S, s)}) \cap [D_i] \in CH_0(X_s).$$

Ci-dessus, $D_{\text{II}} \subset D$ désigne le lieu horizontal où la ramification de \mathcal{F} est de type II (i.e. très féroce). Sous des hypothèses convenables, notre formule s'écrit

$$\text{sw } H^*(X_s, R\Phi(\alpha_! \mathcal{F})) - \text{sw } H^*(X_s, R\Phi(\alpha_! \mathbb{F}_l)) = -\text{deg}(s_{\mathcal{F}}) \in \mathbb{Z}.$$

La stratégie de la démonstration est la suivante. On commence par traiter le cas d'un caractère d'ordre p . On considère un revêtement Y/X qui trivialisait le faisceau. On note σ un générateur du groupe d'automorphismes. La chute du conducteur de Swan s'exprime facilement en termes de la trace de σ sur le module de Swan de la cohomologie des cycles évanescents de Y . Sous notre hypothèse de transversalité, la fibre générique de Y est lisse. On applique alors une formule de traces, qui exprime la trace de σ comme étant la caractéristique d'Euler d'un certain complexe de faisceaux cohérents sur Y_s (un complexe conormal d'excès). Cette formule de traces est l'ingrédient clé de la preuve. C'est une variante d'une formule de Kato–Saito–Saito [KSS88]. Pour terminer la preuve dans le cas d'ordre p , on utilise certains résultats de Saito [Sai91], qui relie ce complexe conormal d'excès à la forme différentielle tordue $\text{mrs}_{\mathcal{F}}$ associée à \mathcal{F} . Enfin, on traite le cas d'un caractère d'ordre une puissance de p en procédant par récurrence sur l'ordre. Pour mener à bien la récurrence, on utilise une variante d'un résultat de Saito [Sai91], qui exprime la classe de Swan localisée d'un caractère tiré à un revêtement X'/X , en fonction de celle du caractère sur X , et de la différentielle sauvage du revêtement. L'hypothèse de ramification sauvage totalement non féroce est là pour assurer que notre faisceau est trivialisé par un revêtement Y/X ayant une fibre générique Y_{η}/η lisse. Cette hypothèse est essentielle pour appliquer la formule des traces.

Passons en revue l'organisation de l'article. Au numéro 1, on rappelle la théorie de Kato–Matsuda de la ramification des caractères en dimension supérieure. La formule du conducteur pour un caractère l -adique est énoncée au numéro 2. Le théorème principal de l'article est le Théorème 2.2. Le numéro 3 est consacré à une formule de traces, qui est l'ingrédient clé de la démonstration. Au numéro 4, on rappelle certains résultats de Saito concernant la ramification d'un revêtement d'Artin–Schreier, qui serviront de pont entre la théorie de Kato–Matsuda et les résultats de la section 3. La démonstration du théorème principal commence au numéro 5, où l'on prouve la formule du conducteur pour un caractère d'Artin–Schreier. Au numéro 6, on traite le cas d'un caractère d'ordre p^e à ramification horizontale totalement non féroce. Enfin, au numéro 7, on tensorise par un caractère modéré, et l'on achève ainsi la preuve du théorème principal, le Théorème 2.2.

1. Rappels sur la théorie de Kato–Matsuda

Cette théorie est le pendant faisceautique de la théorie du corps de classes de Kato en dimension supérieure. Le but de la théorie est de décrire la ramification sauvage des caractères l -adiques en dimension supérieure en associant à chaque caractère une forme différentielle tordue, qui est un raffinement du conducteur de Swan classique (cf. [Kat89, Kat94a, Mat97, AS06]).

1.1 La théorie locale

Soit K le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète complet, d'égale caractéristique $p > 0$. On note \mathcal{O}_K l'anneau des entiers de K , m_K l'idéal maximal, k le corps résiduel. On suppose $[k : k^p] < \infty$. Les caractères de K d'ordre une puissance de p sont décrits par la théorie d'Artin–Schreier–Witt en termes de vecteurs de Witt. Cette théorie fournit un isomorphisme

$$W_{s+1}(K)/(F - 1) \xrightarrow{\sim} H^1(K, \mathbb{Z}/p^{s+1}).$$

Ci-dessus $W_{s+1}(K)$ désigne l'anneau des vecteurs de Witt de longueur $s + 1$, F l'opérateur de Frobenius, et $H^1(K, \mathbb{Z}/p^{s+1})$ la cohomologie galoisienne. Pour mesurer la ramification sauvage d'un caractère $\mathcal{F} \in H^1(K, \mathbb{Z}/p^{s+1})$, on définit deux filtrations croissantes exhaustives sur $H^1(K, \mathbb{Z}/p^{s+1})$: la filtration de Kato notée fil_* , et une variante due à Matsuda, notée fil'_* . Ces filtrations sont les images des filtrations suivantes au niveau des vecteurs de Witt,

$$\begin{aligned} fil_n W_{s+1}(K) &= \{(x_0, \dots, x_s) \in W_{s+1}(K) \mid p^{s-i} v_K(x_i) \geq -n \forall i\}, \\ fil'_n W_{s+1}(K) &= fil_n W_{s+1}(K) + V^{s+1-s'}(fil_{n+1} W_{s'}(K)), \end{aligned}$$

où $s' = \min\{v_p(n + 1), s\}$, et V désigne le Verschiebung. On a $fil_n \subset fil'_n \subset fil_{n+1}$. Ces deux filtrations permettent d'associer à tout caractère $\mathcal{F} \in H^1(K, \mathbb{Z}/p^{s+1})$ deux invariants numériques mesurant sa ramification sauvage :

- (i) le conducteur de Swan défini par Kato : $sw(\mathcal{F}) \in \mathbb{N}$ est le plus petit entier n tel que $\mathcal{F} \in fil_n H^1(K, \mathbb{Z}/p^{s+1})$; et
- (ii) le conducteur de Swan modifié par Matsuda : $sw'(\mathcal{F}) \in \mathbb{N}$ est le plus petit entier n tel que $\mathcal{F} \in fil'_n H^1(K, \mathbb{Z}/p^{s+1})$. On a $sw'(\mathcal{F}) = sw(\mathcal{F})$, ou bien, lorsque la ramification de \mathcal{F} est très féroce, $sw'(\mathcal{F}) = sw(\mathcal{F}) - 1$. Lorsque k est parfait, $sw'(\mathcal{F}) = sw(\mathcal{F})$ est égal au conducteur de Swan classique de \mathcal{F} .

Pour définir des invariants plus fins mesurant la ramification sauvage de \mathcal{F} , on introduit l'opérateur suivant.

$$\begin{aligned} -F^s d : W_{s+1}(K) &\rightarrow \Omega_K^1 \\ (x_0, \dots, x_s) &\mapsto -\sum x_i^{p^{s-i}-1} dx_i \end{aligned}$$

F et d désignant respectivement le Frobenius et la différentielle du complexe de de Rham–Witt. Si l'on munit Ω_K^1 de la filtration croissante $fil_n \Omega_K^1 = m_K^{-n} \Omega_{\mathcal{O}_K}^1(\log)$ (respectivement $fil'_n \Omega_K^1 = m_K^{-n-1} \Omega_{\mathcal{O}_K}^1$), et $W_{s+1}(K)$ de la filtration fil_n (respectivement fil'_n), l'opérateur $-F^s d$ est compatible aux filtrations, et l'on peut montrer que l'application induite sur les gradués se factorise à travers le gradué des caractères (pour la variante de Matsuda, il faut supposer $p > 2$). Posons $H^1(K)[p^\infty] = \varinjlim_s H^1(K, \mathbb{Z}/p^{s+1})$; on obtient deux injections :

$$\begin{array}{ccc} gr_* H^1(K)[p^\infty] & \hookrightarrow & gr_* \Omega_K^1 \\ \mathcal{F} & \mapsto & rsw_{\mathcal{F}} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} gr'_* H^1(K)[p^\infty] & \hookrightarrow & gr'_* \Omega_K^1 \\ \mathcal{F} & \mapsto & rsw'_{\mathcal{F}} \end{array} \quad \text{pour } p > 2.$$

On associe ainsi à tout caractère \mathcal{F} , deux formes différentielles tordues : son conducteur de Swan raffiné $rsw_{\mathcal{F}} \in gr_{sw(\mathcal{F})} \Omega_K^1$ défini par la théorie de Kato, et une variante $rsw'_{\mathcal{F}} \in gr'_{sw'(\mathcal{F})} \Omega_K^1$ définie par la théorie de Matsuda lorsque $p > 2$. On dit que la ramification de \mathcal{F} est de type I si l'on a $sw'(\mathcal{F}) = sw(\mathcal{F}) > 0$, autrement dit si le résidu $res(rsw_{\mathcal{F}}) \neq 0$. On dit que la ramification de \mathcal{F} est de type II dans le cas contraire (i.e. lorsque $sw'(\mathcal{F}) = sw(\mathcal{F}) - 1$, ou encore lorsque $res(rsw_{\mathcal{F}}) = 0$). On peut décrire explicitement les images des deux injections ci-dessus, ce qui fournit une description complète de l'ensemble des caractères de K (cf. [Kat89, Mat97, AS06]).

1.2 La théorie globale

Dans cette partie, on se place au-dessus d'un corps parfait k de caractéristique $p > 2$. Soit X un schéma lisse sur k , $D = \bigcup D_i \subset X$ un diviseur à croisements normaux stricts, $U \subset X$ l'ouvert complémentaire. On fixe un nombre premier $l \neq p$. On considère un faisceau de \mathbb{F}_l -modules \mathcal{F} localement constant fini sur U (pour la topologie étale), de rang un. La ramification sauvage de \mathcal{F} le long de D est décrite, au voisinage de chaque point générique de D , par la théorie locale précédente. On obtient ainsi :

- (i) le diviseur de Swan de \mathcal{F} : $S_{\mathcal{F}} = \sum \text{sw}_{D_i}(\mathcal{F})D_i$ défini par la théorie de Kato ; et
- (ii) la variante de Matsuda : $S'_{\mathcal{F}} = \sum (\text{sw}'_{D_i}(\mathcal{F}) + 1)D_i$.

On note $D_t = \bigcup_{\text{sw}_{D_i}(\mathcal{F})=0} D_i$ le lieu où la ramification de \mathcal{F} est modérée, $D_I = \bigcup_{\text{sw}_{D_i}(\mathcal{F})=\text{sw}'_{D_i}(\mathcal{F})>0} D_i$ le lieu où la ramification est de type I, et $D_{II} = \bigcup_{\text{sw}'_{D_i}(\mathcal{F})=\text{sw}_{D_i}(\mathcal{F})-1} D_i$ le lieu où la ramification est de type II. On montre que les formes différentielles tordues associées à \mathcal{F} se prolongent, se recollent, et s'insèrent dans un diagramme commutatif où :

- (a) tous les faisceaux cohérents sont supportés par le lieu de ramification sauvage de \mathcal{F} noté $D_+ = \sum_{\text{sw}_{D_i}(\mathcal{F})>0} D_i$ (ou noté seulement $+$) ;
- (b) $\text{rsw}_{\mathcal{F}}$ (respectivement $\text{rsw}'_{\mathcal{F}}$) désigne le conducteur de Swan raffiné défini par Kato (respectivement Matsuda), à valeurs dans le cotangent à pôles logarithmiques le long de D (respectivement le cotangent usuel) ; et
- (c) $\text{mrsw}_{\mathcal{F}}$ désigne une variante mixte du conducteur de Swan raffiné définie par Matsuda, à valeurs dans le cotangent à pôles logarithmiques le long de $D_{It} = \sum_{\text{sw}_{D_i}(\mathcal{F})=0 \text{ ou } \text{sw}_{D_i}(\mathcal{F})=\text{sw}'_{D_i}(\mathcal{F})} D_i$, le lieu où la ramification de \mathcal{F} est modérée ou de type I, i.e. pas trop féroce.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{O}(-S'_{\mathcal{F}})|_+ & \longrightarrow & \mathcal{O}(-S_{\mathcal{F}})|_+ & & \\
 \downarrow \text{rsw}'_{\mathcal{F}} & & \downarrow \text{mrsw}_{\mathcal{F}} & \searrow \text{rsw}_{\mathcal{F}} & \\
 \Omega_{X|+} & \longrightarrow & \omega_{(X,D_{It})|+} & \longrightarrow & \omega_{(X,D)|+}
 \end{array}$$

On dit que la ramification de \mathcal{F} est régulière lorsque \mathcal{F} est t -clean au sens de Kato–Matsuda, i.e. vérifie les deux conditions suivantes :

- (1) $\text{rsw}_{\mathcal{F}}$ est partout localement (sur D_+) une injection directe ; et
- (2) pour toute composante $D_i \subset D_+$, le composé $\text{res}_{D_i}(\text{rsw}_{\mathcal{F}}) : \mathcal{O}(-S_{\mathcal{F}})|_{D_i \cap D_t} \rightarrow \omega_{(X,D)}|_{D_i \cap D_t} \rightarrow \mathcal{O}_{D_i \cap D_t}$ est un isomorphisme sur $D_i \cap D_t$ (en particulier $D_{II} \cap D_t = \emptyset$).

Lorsque $\dim(X) = 2$, quitte à éclater X le long de D , on peut toujours supposer que la ramification de \mathcal{F} est régulière (cf. [Kat94a, Mat97]).

Les conducteurs de Swan raffinés de \mathcal{F} sont des invariants différentiels qui contiennent beaucoup d'information sur la ramification sauvage de \mathcal{F} . Par exemple, lorsque la ramification de \mathcal{F} est régulière (t -clean), Kato définit un zéro-cycle supporté par D_+ , appelé classe de Swan de \mathcal{F} [Kat94a] :

$$c_{\mathcal{F}} = \{c^*(\omega_{(X,D)})(1 + S_{\mathcal{F}})^{-1}S_{\mathcal{F}}\}_0 = (-1)^{d-1} \sum \text{sw}_{D_i}(\mathcal{F})c_{d-1}(\text{Coker } \text{rsw}_{\mathcal{F}}) \cap [D_i] \in CH_0(D_+).$$

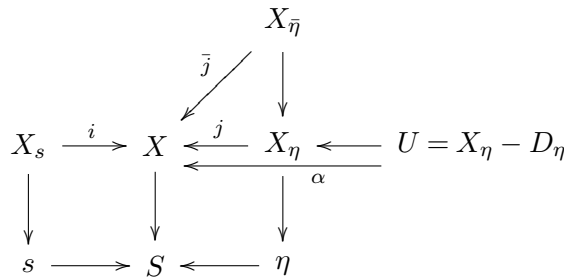
Ci-dessus, c^* désigne la somme alternée des classes de Chern, et $d = \dim(X)$. Lorsque X/k est propre, d'après [AS07] le degré de la classe de Swan de \mathcal{F} mesure la chute de la caractéristique d'Euler :

$$\chi_c(U_{\bar{k}}, \mathcal{F}) - \chi_c(U_{\bar{k}}, \mathbb{F}_l) = -\text{deg}(c_{\mathcal{F}}) \in \mathbb{Z}.$$

Dans la suite de l'article, on travaillera sur un corps local, et l'on définira dans ce cadre une variante localisée de la classe de Swan de \mathcal{F} , dont le degré devrait mesurer la chute du conducteur de Swan de la cohomologie, au lieu de la chute de la caractéristique d'Euler.

2. Énoncé de la formule du conducteur pour un caractère l -adique

Dans cette partie et les suivantes, K désigne le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète complet \mathcal{O}_K , d'égale caractéristique $p > 2$, à corps résiduel k algébriquement clos. On pose $\eta = \text{Spec } K$, $S = \text{Spec } \mathcal{O}_K$, $s = \text{Spec } k$. Soit X/S une courbe relative plate, à fibre générique X_η/η lisse. On se donne un diviseur $D \subset X$ fini et plat sur S , à fibre générique D_η/η étale. On suppose que X est régulier et que le diviseur $D \cup (X_s)_{\text{red}}$ est à croisements normaux stricts. On pose $U = X_\eta - D_\eta$, et l'on note $\alpha : U \hookrightarrow X$ l'inclusion. On fixe un nombre premier $l \neq p$. On considère un faisceau de \mathbb{F}_l -modules \mathcal{F} localement constant fini sur U , de rang un. La situation est représentée sur le diagramme ci-dessous.



Sur la fibre spéciale, les faisceaux de cycles évanescents sont constructibles et naturellement munis d'une action du groupe de Galois de K , noté G_K . Par suite, la cohomologie des cycles évanescents est finie, munie d'une action de Galois, et sa ramification sauvage est mesurée par le conducteur de Swan classique, dont on rappellera la définition plus loin. On souhaiterait une formule calculant la chute du conducteur de Swan de la cohomologie des cycles évanescents de \mathcal{F} , i.e. l'entier

$$\delta = \text{sw } H^*(X_s, R\Phi(\alpha_! \mathcal{F})) - \text{sw } H^*(X_s, R\Phi(\alpha_! \mathbb{F}_l)) \in \mathbb{Z},$$

où :

- (i) $R\Phi\alpha_! = R\Psi\alpha_! = i^* R\bar{j}_* \bar{j}^* \alpha_!$ [SGA73a] ;
- (ii) le conducteur de Swan d'un $\mathbb{F}_l[G_K]$ -module fini V est défini comme suit. L'action de G_K sur V se factorise à travers le groupe de Galois $G_{L/K}$ d'une extension finie L/K . Il existe un unique $\mathbb{Z}_l[G_{L/K}]$ -module projectif $Sw_{L/K}$ dont le caractère est la fonction centrale

$$\text{sw}_{L/K} : G_{L/K} \rightarrow \begin{cases} \mathbb{Z} & \\ - (v_L(\sigma\pi_L - \pi_L) - 1) & \text{si } \sigma \neq 1, \\ - \sum_{\tau \neq 1} \text{sw}_{L/K}(\tau) & \text{si } \sigma = 1, \end{cases}$$

où π_L est une uniformisante de L . On pose $\text{sw}(V) = \text{Hom}_{G_{L/K}}(Sw_{L/K}, V)$, et $\text{sw}(V) = \dim_{\mathbb{F}_l} \text{sw}(V)$. On définit ainsi $\text{sw } H^*(X_s, R\Phi\alpha_!) = \sum (-1)^i \text{sw } H^i(X_s, R\Phi\alpha_!)$ (foncteur à valeurs dans \mathbb{Z}).

On fait les hypothèses (H1), (H2) et (H3) suivantes.

- (H1) Propreté : on suppose qu'il existe un sous-schéma fermé $\Delta \subset X_s$ propre sur s contenant le lieu $(X/S)^{\text{sing}}$ de non lissité de X/S , contenant D_s , et contenant aussi les composantes de X_s où \mathcal{F} est sauvagement ramifié.
- (H2) Régularité : on suppose que la ramification de \mathcal{F} est régulière, i.e. \mathcal{F} est t -clean au sens de Kato–Matsuda relativement à $(X, (X_s)_{\text{red}} \cup D)$. En particulier cette hypothèse assure que le conducteur de Swan raffiné mixte $\text{mrsw}_{\mathcal{F}} : \mathcal{O}(-S_{\mathcal{F}})|_+ \rightarrow \omega_{(X, (X_s)_{\text{red}} \cup D_{\text{It}})|_+}$ à valeurs dans le cotangent à pôles logarithmiques le long de la fibre spéciale et du lieu horizontal où la ramification de \mathcal{F} est modérée ou de type I, est partout localement une injection directe.
- (H3) Transversalité : on suppose que dans $\omega_{(X, (X_s)_{\text{red}} \cup D_{\text{It}})|_+}$ les sections $\text{mrsw}_{\mathcal{F}}$ et $\omega_{(S, s)|_+}$ sont génériquement transverses, autrement dit que l'application naturelle $\omega_{(S, s)|_+} \rightarrow \text{Coker } \text{mrsw}_{\mathcal{F}}$ ne s'annule pas sur D_{η} .

Sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3), on définit la *classe de Swan localisée de \mathcal{F}* comme étant le zéro-cycle supporté par Δ :

$$s_{\mathcal{F}} = \sum_{E \subset \Delta} \text{sw}_E(\mathcal{F}) c_1(\text{Coker } \text{mrsw}_{\mathcal{F}}) \cap [E] + \sum_{D_i \subset D} \text{sw}_{D_i}(\mathcal{F}) c_{1, D_{is}}^{D_i}(\text{Coker } \text{mrsw}_{\mathcal{F}} / \omega_{(S, s)}) \cap [D_i] - \sum_{D_i \subset D_{\text{It}}} c_{1, D_{is}}^{D_i}(\omega_{(D_i, D_{is})} / \omega_{(S, s)}) \cap [D_i] \in CH_0(\Delta).$$

Ci-dessus, $\text{mrsw}_{\mathcal{F}} : \mathcal{O}(-S_{\mathcal{F}})|_+ \rightarrow \omega_{(X, X_s \cup D_{\text{It}})|_+}$ désigne le conducteur de Swan raffiné mixte, à valeurs dans le cotangent à pôles logarithmiques le long de la fibre spéciale et du lieu horizontal où la ramification de \mathcal{F} est modérée ou de type I, et $c_{1, D_{is}}^{D_i}$ désigne la première classe de Chern localisée (à la Fulton–MacPherson, [Ful98]).

On conjecture que le degré de ce zéro-cycle mesure la chute du conducteur de Swan de la cohomologie des cycles évanescents. Plus précisément, on a la conjecture suivante.

CONJECTURE 2.1 (Formule du conducteur). En égale caractéristique $p > 2$, en dimension relative un, et sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3), on a la formule suivante :

$$\delta = \text{sw } H^*(X_s, R\Phi(\alpha_! \mathcal{F})) - \text{sw } H^*(X_s, R\Phi(\alpha_! \mathbb{F}_l)) = -\text{deg } s_{\mathcal{F}} \in \mathbb{Z}.$$

Une conjecture semblable a été énoncée par Matsuda pour calculer la chute du conducteur d'Artin [Mat97]. Le résultat principal de l'article est le Théorème 2.2 ci-dessous, qui affirme que la formule du conducteur est vraie dans deux cas particuliers.

THÉORÈME 2.2 (Formule du conducteur). *La Conjecture 2.1 est vraie dans chacun des deux cas particuliers suivants :*

- (1) \mathcal{F} est un caractère d'ordre np avec $(n, p) = 1$; ou
- (2) \mathcal{F} est un caractère dont la ramification horizontale est totalement non féroce, i.e. \mathcal{F} est trivialisé par un revêtement Y/X tel que Y_{η}/X_{η} ait toutes ses extensions résiduelles séparables.

Remarque. Les hypothèses du Théorème 2.2 assurent que \mathcal{F} est trivialisé par un revêtement Y/X ayant une fibre générique Y_{η}/η lisse ; cette dernière hypothèse est cruciale pour notre démonstration.

On termine cette partie en établissant une propriété d'invariance par éclatement pour la classe de Swan localisée d'un caractère.

PROPOSITION 2.3 (Invariance par éclatement). Soit $(X/S, \mathcal{F})$ satisfaisant aux conditions (H1), (H2), (H3) ci-dessus. Soit $f : X' \rightarrow X$ l'éclatement d'un point $x \in X_s$. Alors $(X'/S, \mathcal{F}|_{X'})$ satisfait aux conditions (H1), (H2), (H3), et on a l'égalité dans $CH_0(\Delta)$:

$$s_{\mathcal{F}} = f_* s_{\mathcal{F}|_{X'}} \in CH_0(\Delta).$$

La preuve est calquée sur celle de l'invariance par éclatement de la classe de Swan [Kat94a, 5.4]. On note $P \subset X'$ le diviseur exceptionnel, D'_i (respectivement E') le transformé strict d'une composante $D_i \subset D$ (respectivement $E \subset X_s$). On distingue trois cas :

- (i) si x appartient à deux composantes distinctes de $D_{It} \cup X_s$, alors f est un log éclatement et l'on a des isomorphismes $f^* \omega_{(X, (X_s)_{red} \cup D_{It})} \cong \omega_{(X', (X'_s)_{red} \cup D'_{It})}$, $f^* S_{\mathcal{F}} = S_{\mathcal{F}|_{X'}}$ (voir [Kat94a, 4.9]), et $f^* mrs_{\mathcal{F}} = mrs_{\mathcal{F}|_{X'}}$;
- (ii) si $x \in D_i \subset D_{II}$, on a $f^* S_{\mathcal{F}} = S_{\mathcal{F}|_{X'}}$ (voir [Kat94a, 4.9]), et l'on dispose d'une suite exacte : $0 \rightarrow f^* \omega_{(X, (X_s)_{red} \cup D_{It})} \rightarrow \omega_{(X', (X'_s)_{red} \cup D'_{It})} \rightarrow \omega_{(P, P \cap E')} \cong \mathcal{O}_P(-P \cap E') \rightarrow 0$, où E désigne la composante de X_s qui contient x . Il en résulte une suite exacte $0 \rightarrow (f^* \text{Coker } mrs_{\mathcal{F}})_{D'_i} \rightarrow (\text{Coker } mrs_{\mathcal{F}|_{X'}})_{D'_i} \rightarrow \mathcal{O}_{D'_i \cap P} \rightarrow 0$, d'où l'égalité

$$\begin{aligned} & c_{1, D'_{is}}^{D'_i} (f^* \text{Coker } mrs_{\mathcal{F}} / \omega_{(S, s)}) \cap [D'_i] \\ &= c_{1, D'_{is}}^{D'_i} (\text{Coker } mrs_{\mathcal{F}|_{X'}} / \omega_{(S, s)}) \cap [D'_i] - [P \cap D'_i] \in CH_0(D'_{is}) ; \end{aligned}$$

- (iii) si $x \notin D$, et si x n'appartient qu'à une seule composante de X_s (notée E), on a $S_{\mathcal{F}|_{X'}} = f^* S_{\mathcal{F}} - eP$ avec $e = 0$ ou $e = 1$, et une suite exacte : $0 \rightarrow f^* \omega_{(X, (X_s)_{red} \cup D_{It})} \rightarrow \omega_{(X', (X'_s)_{red} \cup D'_{It})} \rightarrow \omega_{(P, P \cap E')} \cong \mathcal{O}_P(-P \cap E') \rightarrow 0$.

Démonstration. Prouvons la Proposition 2.3. On commence par montrer que $(X'/S, \mathcal{F}|_{X'})$ satisfait aux conditions (H1), (H2), (H3). La condition (H1) est clairement satisfaite, et (H2) découle de [Kat94a, 4.13]. En outre, pour toute composante $D_i \subset D_+$, les applications $(f^* mrs_{\mathcal{F}})_{D'_i}$ et $(mrs_{\mathcal{F}|_{X'}})_{D'_i}$ coïncident sur $D_{i\eta}$, ce qui prouve (H3). Prouvons l'égalité $s_{\mathcal{F}} = f_* s_{\mathcal{F}|_{X'}} \in CH_0(\Delta)$. On distingue les contributions des composantes verticales, horizontales de type I, horizontales de type II, i.e. on écrit $s_{\mathcal{F}} = s_{\mathcal{F},v} + s_{\mathcal{F},I} + s_{\mathcal{F},II}$, où

$$s_{\mathcal{F},v} = \sum_{E \subset \Delta} sw_E(\mathcal{F}) c_1(\text{Coker } mrs_{\mathcal{F}}) \cap [E],$$

$$s_{\mathcal{F},I} = \sum_{D_i \subset D_I} sw_{D_i}(\mathcal{F}) c_{1, D_{is}}^{D_i} (\text{Coker } mrs_{\mathcal{F}} / \omega_{(S, s)}) \cap [D_i]$$

et

$$s_{\mathcal{F},II} = \sum_{D_i \subset D_{II}} sw_{D_i}(\mathcal{F}) c_{1, D_{is}}^{D_i} (\text{Coker } mrs_{\mathcal{F}} / \omega_{(S, s)}) \cap [D_i] - \sum_{D_{II}} c_{1, D_{is}}^{D_i} (\omega_{(D_i, D_{is})} / \omega_{(S, s)}) \cap [D_i],$$

et de même pour $s_{\mathcal{F}|_{X'}}$. D'après ce qui précède, la contribution des composantes horizontales de type I ne change pas, i.e. on a $s_{\mathcal{F},I} - f_* s_{\mathcal{F}|_{X'},I} = 0$. D'après (ii), si $x \in D_i \subset D_{II}$, on a $s_{\mathcal{F},II} - f_* s_{\mathcal{F}|_{X'},II} = -sw_{D_i}(\mathcal{F})[x]$, sinon, si $x \notin D_{II}$ on a $s_{\mathcal{F},II} - f_* s_{\mathcal{F}|_{X'},II} = 0$. Reste à calculer $s_{\mathcal{F},v} - f_* s_{\mathcal{F}|_{X'},v}$. Notons $f^! : CH_0(\Delta) \rightarrow CH_0(\Delta' \cup P)$ le morphisme de Gysin raffiné associé à f par Fulton, $S = S_{\mathcal{F}}$, $S' = S_{\mathcal{F}|_{X'}}$, $S_v = \sum_{E \subset \Delta} sw_E(\mathcal{F})E$, $S'_v = \sum_{E' \subset \Delta'} sw_{E'}(\mathcal{F})E' + sw_P(\mathcal{F})P$, et $C = c^*(\omega_{(X, (X_s)_{red} \cup D_{It})})$ (respectivement $C' = c^*(\omega_{(X', (X'_s)_{red} \cup D'_{It})})$) la somme

alternée des classes de Chern des cotangents. On a $s_{\mathcal{F},v} = -\{C(1+S)^{-1}S_v\}_0 \in CH_0(\Delta)$ (respectivement $s_{\mathcal{F}|X',v} = -\{C'(1+S')^{-1}S'_v\}_0 \in CH_0(\Delta' \cup P)$). On va calculer

$$A = f^!s_{\mathcal{F},v} - s_{\mathcal{F}|X',v} = \{C'(1+S')^{-1}S'_v\}_0 - f^!\{C(1+S)^{-1}S_v\}_0 \in CH_0(\Delta' \cup P).$$

On décompose A en somme de deux termes

$$A = \{C'[(1+S')^{-1}S'_v - (1+f^*S)^{-1}f^*S_v]\}_0 + \{(C' - f^*C)(1+f^*S)^{-1}f^*S_v\}_0.$$

Le second terme est nul car $C' - f^*C$ est supporté par P et $\dim(X) = 2$. Pour calculer le premier terme, on écrit $S' = f^*S - eP$, $S'_v = f^*S_v + (n - e)P$, avec $e = 0$ ou $e = 1$, et $n = 0$ si $x \notin D$, $n = \text{sw}_{D_i}(\mathcal{F})$ si $x \in D_i$. Vu que $\dim(X) = 2$, on obtient $(1+S')^{-1}S'_v - (1+f^*S)^{-1}f^*S_v = (n - e)[eP.P + P]$. On en déduit $A = (n - e)[eP.P - c_1(\omega_{(X',(X'_s)_{\text{red}} \cup D_{I_t})}).P]$. Par suite :

- (i) si x appartient à deux composantes distinctes de $D_{I_t} \cup X_s$, on a $A = 0$;
- (ii) si $x \in D_i \subset D_{II}$, on a $A = \text{sw}_{D_i}(\mathcal{F})[P \cap E']$, d'où $f_*A = \text{sw}_{D_i}(\mathcal{F})[x]$; et
- (iii) si $x \notin D$, et si x n'appartient qu'à une seule composante de X_s (notée E), on a $A = e(e - 1)[P \cap E'] = 0$.

Dans tous les cas, on obtient $s_{\mathcal{F}} - f_*s_{\mathcal{F}|X'} = 0$, ce qui permet de conclure.

3. Une formule de traces

Dans cette partie, on travaille au-dessus d'un trait strictement hensélien d'égale caractéristique $p > 0$. On considère une courbe relative, sur laquelle agit un automorphisme d'ordre fini. Notre résultat principal, le Théorème 3.1, est une formule de traces, qui calcule la trace de l'automorphisme sur le module de Swan de la cohomologie des cycles évanescents, et l'exprime comme étant la caractéristique d'Euler d'un certain complexe de faisceaux cohérents (un complexe conormal d'excès, au sens log). Cette formule est une variante d'une formule de Kato–Saito–Saito [KSS88], qui calculait la trace sur le module dimtot au lieu du module de Swan. Comme le résultat est crucial pour tout le papier (c'est l'ingrédient clé de la démonstration du Théorème 2.2), on en redonne la preuve, calquée sur celle de [KSS88]. L'hypothèse essentielle est que la fibre générique de la courbe relative est lisse au voisinage des schémas des points fixes. Grosso-modo la stratégie de la démonstration est la suivante. On commence par se ramener au cas où la courbe relative est propre. On utilise pour cela un résultat de Laumon permettant de compactifier sans point fixe à l'infini. On construit ensuite une compactification globale, équivariante, en une surface propre sur une courbe propre sur un corps algébriquement clos. Sous nos hypothèses, on peut supposer que le morphisme de fibration a , au voisinage du schéma des points fixes, réduction semi-stable stricte en toutes les fibres différentes de celle dont nous sommes partis. On calcule alors de deux manières différentes la trace de l'automorphisme sur la cohomologie (globale) de la surface. On utilise d'une part la formule de Grothendieck–Ogg–Shafarevich [SGA77], qui fait apparaître la trace sur le module de Swan de la cohomologie des cycles évanescents, et d'autre part la formule de traces pour variétés ouvertes de Kato–Saito [KS08], qui fait apparaître le complexe de faisceaux cohérents (i.e. le complexe conormal d'excès).

THÉORÈME 3.1 (Formule de traces). *Soit S un trait strictement hensélien d'égale caractéristique $p > 0$. On note s son point fermé, η son point générique. On suppose que S est le spectre de l'hensélisé d'une courbe lisse sur s en un point fermé. On se donne une courbe relative plate Y/S , où Y est régulier, et sur lequel un groupe fini G agit par S -automorphismes.*

On note $Y_G = \bigcup_{\sigma \in G, \sigma \neq 1} Y^\sigma$ la réunion des schémas des points fixes, et $(Y/S)^{\text{sing}}$ le lieu de non lissité de Y/S . On fait les hypothèses suivantes.

- (h1) *Propreté* : on suppose que $Y_s \cap (Y_G \cup (Y/S)^{\text{sing}})$ est propre sur s .
- (h2) *Lissité* : on suppose que dans un voisinage du schéma des points fixes Y_G , la fibre générique Y_η/η est lisse, et la fibre spéciale réduite $(Y_s)_{\text{red}}$ est un diviseur à croisements normaux stricts (en particulier on a $(Y/S)^{\text{sing}} \cap Y_G \subset Y_s$).
- (h3) *Régularité de l'action* : on suppose qu'il existe un ouvert dense $U \subset Y$ lisse sur S tel que $U \cap Y_G = \emptyset$; on suppose aussi que $\forall \sigma \in G - \{1\}$, dans un voisinage de Y_G l'action de σ sur $(Y, (Y_s)_{\text{red}})$ est admissible (i.e. pour toute composante irréductible $E \subset (Y_s)_{\text{red}}$, on a $\sigma(E) \cap E = \emptyset$ ou bien $\sigma(E) = E$).

On fixe $\sigma \in G - \{1\}$. On se place dans un voisinage convenable du schéma des points fixes, et l'on munit les schémas de la log structure supportée par la fibre spéciale. On note $\mathcal{I} = \langle \sigma(a) - a, (\sigma(m)/m) - 1 \rangle$ pour $a \in \mathcal{O}_Y$ et $m \in \mathcal{M}_{(Y, (Y_s)_{\text{red}})}$ l'idéal définissant le schéma des points fixes au sens log, et $\psi : \omega_{(Y, (Y_s)_{\text{red}})} \otimes \mathcal{O}_Y/\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ l'application surjective naturelle. On fixe un nombre premier $l \neq p$, on désigne par Λ l'un des anneaux $\mathbb{Q}_l, \mathbb{Z}_l$ ou $\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors on a l'égalité dans Λ :

$$\text{tr}(\sigma, \underline{\text{sw}} H^*(Y_s, R\Phi\Lambda)) = \chi(Y_s, \omega_{(S,s)} \otimes \mathcal{O}_Y/\mathcal{I} \rightarrow \omega_{(Y, (Y_s)_{\text{red}})} \otimes \mathcal{O}_Y/\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \in \Lambda.$$

Ci-dessus $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ est placé en degré 1, et la cohomologie du complexe est supportée par la fibre spéciale.

Remarque. La trace est bien définie car le complexe de Λ -modules $\underline{\text{sw}} H^*(Y_s, R\Phi\Lambda)$ est parfait.

La preuve du Théorème 3.1 est calquée sur celle de [KSS88, 3.1]. On commence par établir les deux cas particuliers 3.2 et 3.3 suivants.

3.2 Le cas où le diviseur Y_s est réduit (et à croisements normaux stricts) au voisinage de $Y_s \cap Y_G$

La formule est vraie car les deux termes sont nuls. En effet, soit $W \subset Y$ un ouvert G -équivariant contenant $Y_s \cap Y_G$, et sur lequel la courbe relative admet réduction semi-stable stricte. On pose $Z = ((Y/S)^{\text{sing}} - (Y/S)^{\text{sing}} \cap W) \cap Y_s$. D'une part, on sait que $R\Gamma_c(W \cap Y_s, R\Phi\Lambda)$ est modéré, de sorte que $\underline{\text{sw}} R\Gamma(Y_s, R\Phi\Lambda) \cong \underline{\text{sw}} R\Gamma(Z, (R\Phi_Y\Lambda)|_Z)$. Mais comme $Z \subset Y - Y_G$, on a d'après [KSS88, Lemme 2.4] un isomorphisme $\underline{\text{sw}} R\Gamma(Z, R\Phi_Y\Lambda) \cong \underline{\text{sw}} R\Gamma(Z/G, R\Phi_{Y/G}\Lambda) \otimes \Lambda[G]$. Il en résulte que $\text{tr}(\sigma, \underline{\text{sw}} R\Gamma(Z, R\Phi_Y\Lambda)) = 0$. D'autre part, on sait qu'au voisinage de Y_G , $\omega_{Y/S}$ est un \mathcal{O}_Y -module localement libre de rang un. Comme on a une application naturelle surjective $\psi : \omega_{Y/S} \otimes \mathcal{O}_Y/\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$, on en déduit que \mathcal{I} est localement principal et que ψ est un isomorphisme, ce qui permet de conclure.

3.3 Le cas où Y est propre sur S

On construit une compactification globale, en une surface propre sur une courbe propre sur k , de la manière suivante. D'après [KSS88, 3.5], il existe une courbe propre et lisse C/k , une courbe relative propre et plate $f : V \rightarrow C$ (où V/k est une surface propre et lisse sur laquelle G agit par C -automorphismes), ainsi qu'un ensemble fini de points fermés $(c_i)_{i \in I}$ de C , vérifiant :

- (1) $\forall i \in I, S$ est isomorphe à l'hensélisé de C en c_i , et $Y \cong V \times_C S_{c_i}$; et
- (2) pour tout point fermé $c \in C - \{c_i, i \in I\}$, la fibre V_c est, au voisinage de $V_G \cap V_c$, un diviseur réduit à croisements normaux.

On choisit ensuite un ouvert $W \subset C - \{c_i, i \in I\}$ vérifiant :

- (3) $Rf_*\Lambda$ est à cohomologie localement constante sur W ; et
- (4) $f_W : V_W \rightarrow W$ est lisse dans un voisinage de $V_G \cap V_W$.

On pose $T = C - W$. Par construction et par hypothèse, $(V_T)_{\text{red}}$ est, au voisinage du schéma des points fixes, un diviseur à croisements normaux. En utilisant la théorie des modèles minimaux à croisements normaux [Sai87, (3.2.2)], on peut éclater V le long de V_T et supposer en outre que :

- (5) le diviseur $(V_T)_{\text{red}}$ est (globalement) à croisements normaux stricts.

Enfin on éclate encore pour que :

- (6) l'action de G sur V soit admissible.

On note V la surface ainsi obtenue. La situation est présentée sur le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \bigsqcup_I V_{c_i} & \longrightarrow & V_T & \longrightarrow & V & \longleftarrow & V_W \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow \\
 \bigsqcup_I c_i & \longrightarrow & T & \longrightarrow & C & \longleftarrow & W
 \end{array}$$

Soit $\sigma \in G - \{1\}$. Au Lemme 3.3.1 ci-dessous, on calcule la trace de σ sur la cohomologie l -adique (globale) de V de deux manières différentes : d'une part en utilisant la formule de Grothendieck–Ogg–Shafarevich [SGA77], et d'autre part en utilisant la formule des traces pour variétés ouvertes de [KS08]. En comparant les résultats obtenus on en déduit l'égalité : $\sum_T a_c = \sum_T b_c$, où $a_c = \text{tr}(\sigma, \underline{\text{sw}} R\Gamma(V_c, R\Phi\Lambda))$, et $b_c = \chi(V_c, \omega_{(C,T)} \otimes \mathcal{O}_V/\mathcal{I} \rightarrow \omega_{(V,(V_T)_{\text{red}})} \otimes \mathcal{O}_V/\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$ (ici, on a $\mathcal{I} = \langle \sigma a - a, (\sigma m/m) - 1 \rangle$ pour $a \in \mathcal{O}_V$, et $m \in \mathcal{M}_V = j_*\mathcal{O}_{V_W}^* \cap \mathcal{O}_V$). Or d'après le cas particulier § 3.2, on a $a_c = b_c = 0$ si $c \notin \{c_i, i \in I\}$. La formule précédente se réécrit donc $|I| \text{tr}(\sigma, \underline{\text{sw}} R\Gamma(Y_s, R\Phi\Lambda)) = |I| \chi(Y_s, \omega_{(S,s)} \otimes \mathcal{O}_Y/\mathcal{I} \rightarrow \omega_{(Y,(Y_s)_{\text{red}})} \otimes \mathcal{O}_Y/\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$, ce qui permet de conclure.

LEMME 3.3.1 (Variante de [KSS88, 3.4]). Soit C/k une courbe propre lisse connexe, $f : V \rightarrow C$ une courbe relative propre plate, où V/k est une surface propre lisse connexe sur laquelle un groupe fini G agit par C -automorphismes. On suppose qu'il existe un ouvert dense $W \subset C$, de complémentaire T , vérifiant :

- (i) le complexe $Rf_*\Lambda|_W$ est à cohomologie localement constante pour la topologie étale sur W ; et
- (ii) le morphisme $f_W : V_W \rightarrow W$ est lisse dans un voisinage de $V_G \cap V_W$;
- (iii) le diviseur $(V_T)_{\text{red}} \subset V$ est à croisements normaux stricts.

Soit $\sigma \in G - \{1\}$, agissant de manière admissible sur $(V, (V_T)_{\text{red}})$. Pour tout point fermé $c \in C$ on pose $a_c = \text{tr}(\sigma, \underline{\text{sw}} R\Gamma(V_c, R\Phi\Lambda))$, et $b_c = \chi(V_c, \omega_{(C,T)} \otimes \mathcal{O}_V/\mathcal{I} \rightarrow \omega_{(V,(V_T)_{\text{red}})} \otimes \mathcal{O}_V/\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$, où l'idéal $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_V$ est engendré par $\sigma a - a$ pour $a \in \mathcal{O}_V$, et $(\sigma m/m) - 1$ pour $m \in \mathcal{M}_V = j_*\mathcal{O}_{V_W}^* \cap \mathcal{O}_V$ (la cohomologie du complexe ci-dessus est supportée par V_T , et b_c représente la caractéristique d'Euler de la partie supportée par V_c). On note η le point générique de C et l'on pose $r = \dim_{k(\eta)} \Gamma(V_\eta, \mathcal{O}_{V_\eta}^\sigma)$. Alors, pour tout $c \in W$ on a $a_c = b_c = 0$, et l'on a en outre les égalités dans Λ :

$$\sum_T a_c = \sum_T b_c = -\text{tr}(\sigma, R\Gamma_c(V_W, \Lambda)) + \chi_c(W)r \in \Lambda.$$

Comme dans [KSS88, 3.4], la démonstration se fait en deux étapes.

(i) On montre que $\sum_T b_c = -\text{tr}(\sigma, R\Gamma_c(V_W, \Lambda)) + \chi_c(W)r$.

Posons $B = \sum_T b_c + \text{tr}(\sigma, R\Gamma_c(V_W, \Lambda))$. Au Lemme 3.3.2 ci-dessous, on calcule $\text{tr}(\sigma, R\Gamma_c(V_W, \Lambda))$ en utilisant la formule des traces pour variétés ouvertes de Kato–Saito ([KS08]). On en déduit l'égalité

$$B = \chi(V, \mathcal{O}_V/\mathcal{I}) - \chi(V, f^*\omega_{(C,T)} \otimes \mathcal{O}_V/\mathcal{I}) = \chi(C, Rf_*\mathcal{O}_V/\mathcal{I}) - \chi(C, \omega_{(C,T)} \otimes Rf_*\mathcal{O}_V/\mathcal{I}).$$

On remplace le dernier terme à l'aide de la suite exacte courte : $0 \rightarrow \Omega_C \rightarrow \omega_{(C,T)} \xrightarrow{\text{res}} \bigoplus_T k(c) \rightarrow 0$. On en déduit que

$$B = \chi(C, Rf_*\mathcal{O}_V/\mathcal{I}) - \chi(C, \Omega_C \otimes Rf_*\mathcal{O}_V/\mathcal{I}) - \sum_T \dim_k(Rf_*\mathcal{O}_V/\mathcal{I}) \otimes^L k(c).$$

Résolvant $Rf_*\mathcal{O}_V/\mathcal{I}$ par un complexe borné à composantes localement libres de type fini, on voit que $r = \text{rg}(Rf_*\mathcal{O}_V/\mathcal{I}) = \dim_k(Rf_*\mathcal{O}_V/\mathcal{I}) \otimes^L k(c)$ pour tout c . Pour finir, on combine le théorème de Riemann–Roch et le théorème de dualité de Serre ; il en résulte que $\chi(C, Rf_*\mathcal{O}_V/\mathcal{I}) - \chi(C, \Omega_C \otimes Rf_*\mathcal{O}_V/\mathcal{I}) = r\chi(C)$, d'où $B = r(\chi(C) - |T|) = r\chi(W)$.

(ii) On montre que $\sum_T a_c = -\text{tr}(\sigma, R\Gamma_c(V_W, \Lambda)) + \chi_c(W)r$.

On a $\text{tr}(\sigma, R\Gamma_c(V_W, \Lambda)) = \text{tr}(\sigma, R\Gamma_c(W, Rf_*\Lambda|_W))$. On considère le complexe $Rf_*\Lambda|_W$ comme un complexe de $\Lambda[T]$ -modules (T agissant comme σ), et on lui applique la formule de Grothendieck–Ogg–Shafarevich de [SGA77, X]. On obtient $\text{tr}(\sigma, R\Gamma_c(W, Rf_*\Lambda|_W)) = \chi_c(W)\text{tr}(\sigma, R\Gamma(V_{\bar{\eta}}, \Lambda)) - \sum_T a_c$. Pour conclure, on applique la formule des traces de Weil à la normalisée de $V_{\bar{\eta}}$ (cf. [KSS88]). On en déduit que $\text{tr}(\sigma, R\Gamma(V_{\bar{\eta}}, \Lambda)) = r$, ce qui termine la preuve du Lemme 3.3.1.

LEMME 3.3.2 (Variante de [KSS88, 3.2]). *Soit V/k une surface propre lisse connexe, et $U \subset V$ un ouvert dense complémentaire d'un diviseur à croisements normaux stricts D . On considère un automorphisme admissible $\sigma \in \text{Aut}_k V$ (i.e. vérifiant $\sigma(U) = U$ et, pour toute composante irréductible $D_i \subset D$, $\sigma(D_i) \cap D_i = \emptyset$ ou $\sigma(D_i) = D_i$). On considère le diagramme cartésien suivant de log schémas fs.*

$$\begin{array}{ccc} V_{\log}^{\sigma} & \xhookrightarrow{i_{\sigma}} & \Gamma_{\sigma, \log} = V \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta_{\log} = V & \xhookrightarrow{\quad} & (V \times_k V)^{\sim} \end{array}$$

Ci-dessus $(V \times_k V)^{\sim}$ désigne le produit logarithmique au sens de [KS08], $\Gamma_{\sigma, \log} \hookrightarrow (V \times_k V)^{\sim}$ est le graphe de σ au sens log, $\Delta_{\log} \hookrightarrow (V \times_k V)^{\sim}$ est l'immersion diagonale au sens log, qui est exacte de conormal $\omega_V := \omega_{(V,D)}$. On note $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_V$ l'idéal engendré par $\sigma a - a$ pour $a \in \mathcal{O}_V$, et $(\sigma m/m) - 1$ pour $m \in \mathcal{M}_V = j_*\mathcal{O}_U^* \cap \mathcal{O}_V$ (de sorte que $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ est le conormal de i_{σ}). Alors on a la formule

$$\text{tr}(\sigma, R\Gamma_c(U, \Lambda)) = \chi(V, \mathcal{O}_V/\mathcal{I}) - \chi(V, \mathcal{I}/\mathcal{I}^2) - \chi(V, \omega_{(V,D)} \otimes \mathcal{O}_V/\mathcal{I}).$$

L'assertion découle de la formule des traces pour variétés ouvertes de [KS08], qui s'écrit

$$\text{tr}(\sigma, R\Gamma_c(U, \Lambda)) = \text{deg}(\Gamma_{\sigma, \log}, \Delta_{\log})_{(V \times_k V)^{\sim}} = \sum (-1)^i \chi(V, \text{tor}_i^{\mathcal{O}_{(V \times_k V)^{\sim}}}(\mathcal{O}_{\Gamma_{\sigma, \log}}, \mathcal{O}_{\Delta_{\log}})).$$

Sous nos hypothèses, on va montrer que $\text{tor}_i = 0$ pour $i \geq 2$, et qu'on a un isomorphisme canonique $\phi : \text{tor}_1 \xrightarrow{\sim} \text{Ker}(\omega_V \otimes \mathcal{O}_V/\mathcal{I} \xrightarrow{g_{\sigma}} \mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$. Cela permettra de conclure. Pour définir ϕ ,

on tensorise par $\otimes_{\mathcal{O}_{(V \times_k V)^\sim}} \mathcal{O}_{\Gamma_{\sigma, \log}}$ la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{I}_{\Delta_{\log}} \rightarrow \mathcal{O}_{(V \times_k V)^\sim} \rightarrow \mathcal{O}_{\Delta_{\log}} \rightarrow 0$. On en déduit une suite exacte $0 \rightarrow \text{tor}_1 \rightarrow \mathcal{I}_{\Delta_{\log}} \otimes_{\mathcal{O}_{(V \times_k V)^\sim}} \mathcal{O}_{\Gamma_{\sigma, \log}} \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow 0$. On tensorise cette dernière par $\otimes_{\mathcal{O}_{\Gamma_{\sigma, \log}}} \mathcal{O}_{V_{\log}^\sigma}$, et la suite exacte longue qui en résulte $\dots \rightarrow \text{tor}_1^{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_V/\mathcal{I}, \mathcal{I}) \rightarrow \text{tor}_1 \rightarrow \omega_V \otimes \mathcal{O}_V/\mathcal{I} \xrightarrow{g_\sigma} \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \rightarrow 0$ permet de définir ϕ (qui est clairement un isomorphisme lorsque \mathcal{I} est localement principal). Les tor_i (respectivement ϕ) étant définis globalement, pour vérifier qu'ils sont nuls (respectivement un isomorphisme) on peut se localiser en un point $x \in V_{\log}^\sigma$. Dans ce cas on peut même travailler avec les anneaux locaux complets $\hat{\mathcal{O}}_{(V \times_k V)^\sim, x}$ et $\hat{\mathcal{O}}_{V, x}$ qui sont factoriels. Selon que x appartient à zéro, une (notée D_1) ou deux (notées D_1 et D_2) composantes irréductibles de D , on choisit un système (t_1, t_2) de paramètres réguliers de $m_{V, x}$ tel que, pour tout $i \in I = \emptyset, \{1\}$ ou $\{1, 2\}$ selon le cas, t_i est une équation locale de D_i . Sous nos hypothèses, pour tout $i \in I$, il existe $h_i \in 1 + m_{V, x}$ tel que $\sigma(t_i) = h_i t_i$. On suppose en outre que pour tout $i \in \{1, 2\}$ on a $\sigma t_i \neq t_i$. Si $I = \emptyset$ on pose $m := \text{pgcd}(\sigma(t_1) - t_1, \sigma(t_2) - t_2)$, si $I = \{1\}$ on pose $m := \text{pgcd}(h_1 - 1, \sigma(t_2) - t_2)$, et si $I = \{1, 2\}$ on pose $m := \text{pgcd}(h_1 - 1, h_2 - 1)$. Les tor_i se calculent par les complexes de Koszul :

(a) si $I = \emptyset$, on a

$$\begin{aligned} \text{tor}_i &= H_i K^{\mathcal{O}_{(V \times_k V)^\sim}}(t_1 \otimes 1 - 1 \otimes t_1, t_2 \otimes 1 - 1 \otimes t_2, \mathcal{O}_{\Gamma_{\sigma, \log}}) \\ &= H_i K^{\mathcal{O}_V}(\sigma(t_1) - t_1, \sigma(t_2) - t_2, \mathcal{O}_V) = H_i(\mathcal{O}_V \rightarrow \mathcal{O}_V^2 \rightarrow \mathcal{O}_V) \end{aligned}$$

(b) si $I = \{1\}$, on a

$$\begin{aligned} \text{tor}_i &= H_i K^{\mathcal{O}_{(V \times_k V)^\sim}}(((t_1 \otimes 1)/(1 \otimes t_1)) - 1, t_2 \otimes 1 - 1 \otimes t_2, \mathcal{O}_{\Gamma_{\sigma, \log}}) \\ &= H_i K^{\mathcal{O}_V}(h_1 - 1, \sigma(t_2) - t_2, \mathcal{O}_V) \end{aligned}$$

(c) si $I = \{1, 2\}$, on a

$$\begin{aligned} \text{tor}_i &= H_i K^{\mathcal{O}_{(V \times_k V)^\sim}}(((t_1 \otimes 1)/(1 \otimes t_1)) - 1, ((t_2 \otimes 1)/(1 \otimes t_2)) - 1, \mathcal{O}_{\Gamma_{\sigma, \log}}) \\ &= H_i K^{\mathcal{O}_V}(h_1 - 1, h_2 - 1, \mathcal{O}_V). \end{aligned}$$

On vérifie alors facilement que les tor_i sont nuls pour $i \geq 2$, et que les applications :

$$\begin{aligned} &\mathcal{O}_V/m \rightarrow \text{tor}_1 \\ &c \mapsto \begin{cases} \frac{\sigma(t_2) - t_2}{m}c, -\frac{\sigma(t_1) - t_1}{m}c & \text{si } I = \emptyset, \\ \frac{\sigma(t_2) - t_2}{m}c, -\frac{h_1 - 1}{m}c & \text{si } I = \{1\}, \\ \frac{h_2 - 1}{m}c, -\frac{h_1 - 1}{m}c & \text{si } I = \{1, 2\}, \end{cases} \\ &\mathcal{O}_V/m \rightarrow \text{Ker } g_\sigma \\ &c \mapsto \begin{cases} \frac{\sigma(t_2) - t_2}{m}c dt_1, -\frac{\sigma(t_1) - t_1}{m}c dt_2 & \text{si } I = \emptyset, \\ \frac{\sigma(t_2) - t_2}{m}c d \log t_1, -\frac{h_1 - 1}{m}c dt_2 & \text{si } I = \{1\}, \\ \frac{h_2 - 1}{m}c d \log t_1, -\frac{h_1 - 1}{m}c d \log t_2 & \text{si } I = \{1, 2\}, \end{cases} \end{aligned}$$

sont des isomorphismes compatibles avec ϕ , ce qui permet de conclure.

3.4 Prouvons Théorème 3.1 dans le cas où Y/S n'est pas propre

On pose $Z := ((Y/S)^{\text{sing}} \cup Y_G) \cap Y_s$. Par hypothèse, Z est propre sur s . On l'écrit comme une réunion disjointe finie de sous-schémas Z_i , où chaque Z_i est la réunion des transformés par G d'une composante connexe de Z . Le membre de gauche (respectivement droite) de l'égalité à prouver est la somme des contributions de chaque Z_i , et il suffit de prouver l'égalité terme à terme. On peut donc remplacer Y par $Y - \bigcup_{j \neq i} Z_j$, et supposer que Z est la réunion des transformés par G de l'une de ses composantes connexes. On applique alors [KSS88, 4.1] pour 'compactifier' Y/S sans point fixe à l'infini. On en déduit une courbe relative propre \bar{Y}/S (avec \bar{Y} régulier sur lequel agit G), un ouvert G -équivariant $Y' \subset \bar{Y}$, et un morphisme étale G -équivariant $h : Y' \rightarrow Y$ tel que $h^{-1}Z \cong \bigsqcup_{\text{finie}} Z$ et $\bar{Y}_G \subset Y'$. La courbe \bar{Y}/S vérifie les hypothèses du cas particulier § 3.3. Notons a (respectivement b) le terme de gauche (respectivement droite) de l'égalité du Théorème 3.1. Il découle de § 3.3 que $a_{\bar{Y}_s} = b_{\bar{Y}_s}$. Or on a $a_{\bar{Y}_s} = [h^{-1}Z : Z]a_{Y_s}$, et $b_{\bar{Y}_s} = [h^{-1}Z : Z]b_{Y_s}$, ce qui permet de conclure.

COROLLAIRE 3.5. *On se place sous les hypothèses du Théorème 3.1. Alors :*

- (i) $\text{tr}(\sigma, \underline{\text{sw}} R\Gamma(Y_s, R\Phi\Lambda))$ est l'image dans Λ d'un entier indépendant de $l \neq p$; et
- (ii) $\text{tr}(\sigma, \underline{\text{sw}} R\Gamma(Y_s, R\Phi\Lambda)) = \text{tr}(\sigma^k, \underline{\text{sw}} R\Gamma(Y_s, R\Phi\Lambda))$ pour tout entier k premier à l'ordre de σ .

La seconde assertion découle de l'égalité $\mathcal{I}(\sigma) = \mathcal{I}(\sigma^k) \subset \mathcal{O}_Y$.

4. Ramification d'un revêtement d'Artin–Schreier

Soit k un corps algébriquement clos d'exposant caractéristique $p > 2$. Soit X/k un schéma lisse, $D = \bigcup D_i \subset X$ un diviseur à croisements normaux stricts, de complémentaire $U \subset X$. On fixe un nombre premier $l \neq p$, on considère un faisceau de \mathbb{F}_l -modules \mathcal{F} localement constant fini sur U , de rang un, d'ordre p . Autrement dit, \mathcal{F} est un caractère d'Artin–Schreier de $\pi_1^{\text{ab}}(U)$, i.e. trivialisé par un revêtement galoisien V/U de groupe \mathbb{F}_p . On suppose que la ramification de \mathcal{F} le long de D est très régulière (i.e. \mathcal{F} est s -clean au sens de Kato–Saito, [Sai91]), i.e.

- (a) $\text{rsw}_{\mathcal{F}} : \mathcal{O}_X(-S_{\mathcal{F}})|_+ \rightarrow \omega_{(X,D)}|_+$ est partout localement une injection directe ;
- (b) pour toute composante $D_i \subset D_I$ où la ramification est de type I (i.e. $\text{sw}_{D_i}(\mathcal{F}) = \text{sw}'_{D_i}(\mathcal{F}) > 0$) le composé : $\text{res}_{D_i} \circ \text{rsw}_{\mathcal{F}} : \mathcal{O}_X(-S_{\mathcal{F}})|_{D_i} \rightarrow \omega_{(X,D)}|_{D_i} \rightarrow \mathcal{O}_{D_i}$ est un isomorphisme ; et
- (c) $D_t \cap D_{II} = \emptyset$.

On note Y le normalisé de X dans V , $\pi : Y \rightarrow X$ le morphisme de structure, $j : V \rightarrow Y$ l'inclusion, $C = Y - V$. La ramification de Y/X le long de D a été étudiée par Saito [Sai91]. Nous aurons besoin d'une variante de son résultat. Soit D' , vérifiant $D_{It} \subset D' \subset D$, un diviseur à croisements normaux intermédiaire. On pose $U' = X - D'$, $V' = \pi^{-1}U' \subset Y$, $C' = Y - V'$. La situation est représentée sur le diagramme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 C_{It} & \hookrightarrow & C' & \hookrightarrow & C & \hookrightarrow & Y & \longleftarrow & V_{It} & \longleftarrow & V' & \longleftarrow & V \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 D_{It} & \hookrightarrow & D' & \hookrightarrow & D & \hookrightarrow & X & \longleftarrow & U_{It} & \longleftarrow & U' & \longleftarrow & U
 \end{array}$$

PROPOSITION 4.1 (Variante de [Sai91, Lemme 1]). *On se place sous les hypothèses précédentes. On suppose que la ramification de \mathcal{F} est très régulière (i.e. que \mathcal{F} est s -clean). On note $\sigma \in \text{Gal}(V/U) = \mathbb{F}_p$ un générateur. Alors :*

- (1) le log schéma (Y, C') , muni de la log structure $\mathcal{M}_{(Y,C')} = j_*\mathcal{O}_{V'}^* \cap \mathcal{O}_Y \subset \mathcal{O}_Y$ supportée par C' , est log régulier ;
- (2) l'idéal $\mathcal{I}' = \langle \sigma(a) - a, (\sigma(m)/m) - 1 \rangle$ pour $a \in \mathcal{O}_Y$, $m \in \mathcal{M}_{(Y,C')}$, est indépendant de C' (pourvu que $D_{\text{It}} \subset D' \subset D$), localement principal, et l'on a $\mathcal{I}' = \mathcal{O}_Y(-D_\sigma)$ avec $\pi_*D_\sigma = S_{\mathcal{F}}$, $\pi^*S_{\mathcal{F}} = pD_\sigma$; et
- (3) notant

$$\psi' : da \otimes 1 \mapsto \sigma(a) - a, d \log m \otimes 1 \mapsto (\sigma(m)/m) - 1 : \omega_{(Y,C')} \otimes \mathcal{O}_Y/\mathcal{I}' \rightarrow \mathcal{I}'/\mathcal{I}'^2$$

l'application surjective naturelle, et $C_+ \subset Y$ (ou seulement $+$) le lieu de ramification sauvage de Y/X , on a une suite exacte longue :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-S_{\mathcal{F}})|_+ \xrightarrow{\text{mrs}_{\mathcal{F}}} \omega_{(X,D')}|_+ \longrightarrow \omega_{(Y,C')}|_+ \xrightarrow{\psi'} \mathcal{I}'|_+ \longrightarrow 0.$$

Démonstration. Prouvons la Proposition 4.1. Le cas $D = D'$ a été prouvé par Saito. Il suffit donc de montrer qu'au voisinage de tout point $x \in D_{\text{II}}$, on a :

- (1) (Y, C') est log régulier ;
- (2) l'idéal \mathcal{I}' est indépendant de C' ; et
- (3) pour toute composante $D_i \subset D_{\text{II}}$ (d'image inverse réduite $C_i \subset Y$) l'application naturelle sur les conormaux : $\check{\mathcal{N}}_{D_i/X|C_i} \longrightarrow \check{\mathcal{N}}_{C_i/Y}$ est un isomorphisme.

La Proposition 4.1 découle immédiatement de ces trois assertions et du résultat de Saito, étant donné que pour toute composante $D_i \not\subseteq D'$ (d'image inverse réduite $C_i \not\subseteq C'$) on disposera alors d'un diagramme commutatif, où les colonnes et la ligne du bas sont exactes (notons que les composantes irréductibles de D qui ne sont pas contenues dans D_{It} (à fortiori dans D') ne se coupent pas).

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \check{\mathcal{N}}_{D_i/X|C_i} & \xrightarrow{\sim} & \check{\mathcal{N}}_{C_i/Y} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(-S_{\mathcal{F}})|_{C_i} & \xrightarrow{\text{mrs}_{\mathcal{F}}} & \omega_{(X,D')}|_{C_i} & \longrightarrow & \omega_{(Y,C')}|_{C_i} \xrightarrow{\psi'} \mathcal{I}'|_{C_i} \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(-S_{\mathcal{F}})|_{C_i} & \xrightarrow{\text{rsw}_{\mathcal{F}}} & \omega_{(X,D)}|_{C_i} & \longrightarrow & \omega_{(Y,C)}|_{C_i} \xrightarrow{\psi'} \mathcal{I}'|_{C_i} \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & & & \mathcal{O}_{D_i|C_i} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}_{C_i} & & & &
 \end{array}$$

Prouvons les trois assertions ci-dessus. On note $(D_i)_{i \in J}$ les composantes de D contenant x , π_i une équation locale de D_i , $n_i = \text{sw}_{D_i}(\mathcal{F})$. On note $(D_i)_{i \in J'}$ les composantes de D' contenant x . Au voisinage de x , \mathcal{F} est trivialisé par l'équation d'Artin-Schreier $t^p - t = u / (\prod_J \pi_i^{n_i})$ où $u \in \mathcal{O}_{X,x}$. On distingue deux cas.

(i) $x \notin D_{\text{I}}$. Dans ce cas, $p|n_i \forall i \in J$, et du ne s'annule pas dans $\Omega_{\cap J D_i}$. Posant $s = t \prod_J \pi_i^{n_i/p}$, on a donc $Y \cong X[s]/(s^p - \prod_J \pi_i^{(p-1)n_i/p} s - u)$. Par conséquent Y est régulier, π_i est une équation locale de C_i (pour tout $i \in J$), et $C = \bigcup_J C_i$ est un diviseur à croisements normaux. En outre σ agit via $s \mapsto s + \prod_J \pi_i^{n_i/p}$, donc $\mathcal{I}' = \langle \prod_J \pi_i^{n_i/p} \rangle$ est indépendant de C' .

(ii) $x \in D_I$. Dans ce cas, $u \in \mathcal{O}_X^*$ et $p \nmid n_i$ pour un certain $i \in J'$. On reprend les notations de [Sai91, Lemme 1], et l'on pose en outre

$$s' = t^{-1} \left(\prod_{J-J'} \pi_i^{n_i/p} \right)^{-1} = s \left(\prod_{J-J'} \pi_i^{n_i/p} \right)^{-1}.$$

Soit

$$Y'_1 = X[s', w] / \left\langle s'^p w - \prod_{J'} \pi_i^{n_i}, \left(s' \prod_{J-J'} \pi_i^{n_i/p} \right)^{p-1} w - w + u \right\rangle.$$

On a $Y'_1 \times_X U \cong V$, et Y'_1 est fini sur X car w est inversible et satisfait l'équation $w^p - (\prod_{J'} \pi_i^{n_i})^{p-1} w - u = 0$. Soit $Q'_1 \subset \bigoplus_{J'} \mathbb{Q}e_i \oplus \mathbb{Q}e_w$ le sous-monoïde intègre engendré par $(e_i)_{i \in J'}$, $\pm e_w$, et $e_{s'} = 1/p(\sum_{J'} n_i e_i - e_w)$. On considère l'application $k[Q'_1] \rightarrow \mathcal{O}_{Y'_1}$, définie par $e_i \mapsto \pi_i$, $e_w \mapsto w$, $e_{s'} \mapsto s'$. On pose $Q' = (Q'_1)^{\text{sat}}$, $Y'_2 = Y'_1 \otimes_{k[Q'_1]} k[Q']$. Alors Y'_2 , muni de la log structure définie par Q' , est log régulier. En effet,

$$\mathcal{O}_{Y'_2} / \langle Q' - \mathcal{O}_{Y'_2}^* \rangle = \mathcal{O}_{Y'_1} / \langle Q'_1 - \mathcal{O}_{Y'_1}^* \rangle = \mathcal{O}_X / \langle \pi_i, i \in J' \rangle$$

est régulier, et la relation de dimension est clairement vérifiée (cf. [Sai91, Kat94b]). Par suite Y'_2 est normal, donc on a $Y'_2 = Y$, et l'ouvert de trivialité de la log structure coïncide avec V' . Cela prouve (1). De plus, σ agit sur Y'_1 via

$$\frac{\sigma(s')}{s'} = \frac{\sigma(s)}{s} = \frac{1}{(1+s)} = \left(1 + s' \prod_{J-J'} \pi_i^{n_i/p} \right)^{-1},$$

et $\sigma(w) - w = \prod_{J'} \pi_i^{n_i}$. Vu que $s' \mid \prod_{J'} \pi_i^{n_i}$, l'idéal définissant les points fixes de σ sur le log schéma Y'_1 est principal, engendré par $s' \prod_{J-J'} \pi_i^{n_i/p} = s$. Par suite, l'idéal définissant le schéma des points fixes de σ sur le log schéma $Y'_2 = Y'_1 \otimes_{k[\mathcal{M}_{Y'_1}]} k[\mathcal{M}_{Y'_1}^{\text{sat}}] (= (Y, C'))$ est également principal, engendré par $s' \prod_{J-J'} \pi_i^{n_i/p} = s$ (pour $a, b \in \mathcal{M}_{Y'_1}$ on a

$$\frac{\sigma(a)b}{\sigma(b)a} - 1 = \left(\frac{\sigma(a)}{a} - 1 \right) \frac{b}{\sigma(b)} + \left(\frac{b}{\sigma(b)} - 1 \right).$$

Vu que d'après [Sai91], l'idéal définissant les points fixes de σ sur le log schéma (Y, C) est engendré par s , \mathcal{T}' est bien indépendant de C' , ce qui prouve (2). Enfin, pour $D_i \subset D_{\text{II}}$, π_i est une équation locale de D_i et de C_i , ce qui prouve (3).

4.2 Remarques sur la régularité de la ramification en dimension 2

Soit X/\mathbb{F}_p un schéma régulier, excellent, de dimension 2, $U \subset X$ un ouvert complémentaire d'un diviseur à croisements normaux D . Soit \mathcal{F} un \mathbb{F}_l -module localement constant fini sur U , de rang un. Les résultats de Kato–Matsuda–Saito [Kat94a, Mat97, Sai91] assurent que :

(1) Il existe un morphisme propre birationnel composé d'éclatements de points (on dira un éclatement pour abrégé) $\phi : X' \rightarrow X$, tel que la ramification de \mathcal{F} relativement à $(X', (\phi^{-1}D)_{\text{red}})$ soit régulière (i.e. t -clean au sens de Kato–Matsuda). Si \mathcal{F} est d'ordre p , on peut choisir $\phi : X' \rightarrow X$ de sorte que la ramification de \mathcal{F} relativement à $(X', (\phi^{-1}D)_{\text{red}})$ soit très régulière (i.e. s -clean).

(2) Si la ramification de \mathcal{F} relativement à (X, D) est régulière (i.e. t -clean), elle le reste après tout éclatement. Si la ramification de \mathcal{F} relativement à (X, D) est très régulière (i.e. s -clean), elle ne le reste pas nécessairement après éclatement.

5. Formule du conducteur pour un caractère d’Artin–Schreier

PROPOSITION 5.1 (Formule du conducteur). *On se place sous les hypothèses de la Conjecture 2.1. On suppose en outre que \mathcal{F} est un caractère d’Artin–Schreier (i.e. trivialisé par un revêtement V/U galoisien de groupe \mathbb{F}_p). Alors \mathcal{F} vérifie la formule du conducteur, i.e. la conjecture 2.1 est vraie pour \mathcal{F} .*

Démonstration. Prouvons la Proposition 5.1. D’après [Kat94a] et [Sai91], quitte à éclater X , on peut supposer que la ramification de \mathcal{F} est très régulière (i.e. \mathcal{F} est s -clean au sens de Kato–Saito), i.e.

- (i) $\text{rsw}_{\mathcal{F}} : \mathcal{O}_X(-S_{\mathcal{F}})|_+ \rightarrow \omega_{(X, (X_s)_{\text{red}} \cup D)}|_+$ est partout localement une injection directe ;
- (ii) pour toute composante $E \subset (X_s)_{\text{red}} \cup D$ de type I, le composé $\text{res}_E \circ \text{rsw}_{\mathcal{F}} : \mathcal{O}_X(-S_{\mathcal{F}})|_E \rightarrow \omega_{(X, (X_s)_{\text{red}} \cup D)}|_E \rightarrow \mathcal{O}_E$ est un isomorphisme ; et
- (iii) $D_t \cap D_{\text{II}} = \emptyset$.

Comme la classe de Swan localisée est invariante par éclatement d’après la Proposition 2.3, et comme il en est de même de la cohomologie des cycles évanescents, il suffit de prouver la Proposition 5.1 sous l’hypothèse s -clean, que l’on supposera vérifiée par la suite. On note V/U le revêtement galoisien de groupe $G = \mathbb{F}_p = \langle \sigma \rangle$ qui trivialisé \mathcal{F} , Y_1 le normalisé de X dans V . D’après la Proposition 4.1, le log schéma $(Y_1, Y_1 - V)$ est log régulier. Soit $\phi : Y \rightarrow Y_1$ une désingularisation log étale (naturellement G -équivariante, admissible ; cf. [Kat94b, Sai91]). On note $\pi : Y \rightarrow X$ le morphisme de structure, et $C \subset Y$ le transformé strict de l’image inverse réduite de D . La situation est représentée sur le diagramme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccc}
 (Y_s)_{\text{red}} \cup C & \hookrightarrow & Y & \xleftarrow{\alpha} & V \\
 \downarrow & & \downarrow \pi & & \downarrow \\
 (X_s)_{\text{red}} \cup D & \hookrightarrow & X & \xleftarrow{\alpha} & U
 \end{array}$$

Le principe de la démonstration est le suivant. On commence par exprimer δ en fonction de la trace de σ sur le module de Swan de la cohomologie des cycles évanescents de Y . On applique ensuite la formule des traces (Théorème 3.1), qui exprime cette trace comme étant la caractéristique d’Euler d’un certain complexe de faisceaux cohérents (le complexe conormal d’excès au sens log, pour la log structure supportée par la fibre spéciale). On change alors la log structure, en rajoutant des pôles logarithmiques le long du lieu horizontal où la ramification est de type I ou modérée. On introduit le complexe conormal d’excès modifié (relatif à cette nouvelle log structure), et l’on compare les caractéristiques d’Euler de ces deux complexes. Enfin on utilise la variante (Proposition 4.1) d’un résultat de Saito qui relie le nouveau complexe au conducteur de Swan raffiné mixte de \mathcal{F} . Le schéma de la démonstration est présenté ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \delta & \longleftarrow & \text{tr}(\sigma, \underline{\text{sw}} H^*(Y_s, R\Phi\mathbb{Q}_l)) & \longleftarrow & \chi(Y_s, \omega_{(S,s)} \otimes \mathcal{O}_Y/\mathcal{I}) & \rightarrow & \omega_{(Y, (Y_s)_{\text{red}})} \otimes \mathcal{O}_Y/\mathcal{I} \xrightarrow{\psi} \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \\
 & & & & & & \updownarrow \text{change log : log sur } (Y_s)_{\text{red}} \cup C_{\text{It}} \\
 s_{\mathcal{F}} & \longleftrightarrow & \chi(X_s, \omega_{(S,s)}|_+) \rightarrow \text{Coker } \text{mrsw}_{\mathcal{F}|_+} & \longleftrightarrow & \chi(Y_s, \omega_{(S,s)} \otimes \mathcal{O}_Y/\mathcal{I}') & \rightarrow & \omega_{(Y, (Y_s)_{\text{red}} \cup C_{\text{It}})} \otimes \mathcal{O}_Y/\mathcal{I}' \xrightarrow{\psi'} \mathcal{I}'/\mathcal{I}'^2
 \end{array}$$

5.1.1 Prouvons que

$$\delta = -\text{tr}(\sigma, \underline{\text{sw}} H^*(Y_s, R\Phi\mathbb{Q}_l)) + \text{tr}(\sigma, \underline{\text{sw}} H^*(C_s, R\Phi\mathbb{Q}_l)).$$

On désigne par M le $\mathbb{F}_l[G]$ -module de rang un associé à \mathcal{F} . On a des isomorphismes $\text{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ -équivariants :

$$R\Gamma(X_s, R\Phi\alpha_! \mathcal{F}) \cong [R\Gamma(Y_s, R\Phi\alpha_! \mathbb{F}_l) \otimes M]^G \quad \text{et} \quad R\Gamma(X_s, R\Phi\alpha_! \mathbb{F}_l) \cong [R\Gamma(Y_s, R\Phi\alpha_! \mathbb{F}_l)]^G.$$

Il en résulte des isomorphismes analogues au niveau des modules de Swan. Vu que tous les complexes de $\mathbb{F}_l[G]$ -modules sont parfaits, on peut comparer les dimensions par une formule de traces, et on en déduit (ci-dessous tr^B désigne la trace de Brauer) :

$$\delta = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G^{-1}} \text{tr}(g, \underline{\text{sw}} H^*(Y_s, R\Phi\alpha_! \mathbb{Q}_l)) [\text{tr}_M^B(g) - 1].$$

De plus, pour tout $g \in G$, on a par dévissage l'égalité $\text{tr}(g, \underline{\text{sw}} H^*(Y_s, R\Phi\alpha_! \mathbb{Q}_l)) = \text{tr}(g, \underline{\text{sw}} H^*(Y_s, R\Phi\mathbb{Q}_l)) - \text{tr}(g, \underline{\text{sw}} H^*(C_s, R\Phi\mathbb{Q}_l))$. On va montrer que dans cette dernière expression, chaque terme est un entier indépendant de $g \neq 1$ dans G . Cela permettra de conclure. En ce qui concerne le terme $\text{tr}(g, \underline{\text{sw}} H^*(Y_s, R\Phi\mathbb{Q}_l))$, l'indépendance découle du Corollaire 3.5, vu que $g = \sigma^k$ pour $k \in \mathbb{F}_p^*$ (les hypothèses du Théorème 3.1 sont satisfaites d'après §5.1.2 ci-dessous). En ce qui concerne l'autre terme, on peut supposer que C est la réunion par G de l'une de ses composantes irréductibles. Alors $\text{tr}(g, \underline{\text{sw}} H^*(C_s, R\Phi\mathbb{Q}_l))$ vaut respectivement 0, $\text{sw} H^*(D_s, R\Phi\mathbb{Q}_l)$, $-[v_C(g(\pi_C) - \pi_C) - 1]$, selon que C/D est respectivement étale, radiciel, ou sauvagement ramifié. C'est un entier indépendant de $g = \sigma^k$ pour $k \in \mathbb{F}_p^*$. La formule annoncée en résulte aussitôt.

5.1.2 On montre que Y/S muni de l'action de G satisfait aux hypothèses du Théorème 3.1. On en déduit l'égalité

$$\delta = -\chi(Y_s, \omega_{(S,s)} \otimes \mathcal{O}_Y/\mathcal{I} \rightarrow \omega_{(Y,(Y_s)_{\text{red}})} \otimes \mathcal{O}_Y/\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2) + \text{tr}(\sigma, \underline{\text{sw}} H^*(C_s, R\Phi\mathbb{Q}_l))$$

où $\mathcal{I} = \langle \sigma(a) - a, (\sigma(m)/m) - 1 \rangle$ pour $a \in \mathcal{O}_Y$ et $m \in \mathcal{M}_{(Y,(Y_s)_{\text{red}})}$. En effet :

- (h₁) découle de l'hypothèse de propreté (H_1) : $Y_s \cap (Y_G \cup (Y/S)^{\text{sing}})$ est un sous-schéma fermé de $\pi^{-1}\Delta$ donc propre sur s .
- (h₂) résulte de l'hypothèse de transversalité (H_3) : d'après la Proposition 4.1, on dispose d'une suite exacte longue :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-S_{\mathcal{F}})|_+ \xrightarrow{\text{mrs}\omega_{\mathcal{F}}} \omega_{(X,(X_s)_{\text{red}} \cup D_{\text{It}})}|_+ \rightarrow \omega_{(Y,(Y_s)_{\text{red}} \cup C_{\text{It}})}|_+ \rightarrow \mathcal{I}'|_+ \rightarrow 0.$$

Par suite, l'application naturelle $\omega_{(S,s)}|_+ \rightarrow \omega_{(Y,(Y_s)_{\text{red}} \cup C_{\text{It}})}|_+$ se factorise en :

$$\omega_{(S,s)}|_+ \rightarrow \text{Coker mrs}\omega_{\mathcal{F}}|_+ \rightarrow \omega_{(Y,(Y_s)_{\text{red}} \cup C_{\text{It}})}|_+$$

où la deuxième flèche est une injection directe, et (H_3) assure que la première ne s'annule pas sur D_{η} . Il en résulte que la fibre générique Y_{η}/η est lisse.

(h₃) est vérifiée par construction.

5.1.3 On montre que l'idéal $\mathcal{I} = \langle \sigma(a) - a, (\sigma(m)/m) - 1 \rangle$ pour $a \in \mathcal{O}_Y$, $m \in \mathcal{M}_{(Y,(Y_s)_{\text{red}})}$ est localement principal, et qu'on a un isomorphisme $\mathcal{I} \cong \mathcal{O}_Y(-\phi^* D_{\sigma} - \sum_{C_1} C_i) \cong \mathcal{I}'(-\sum_{C_1} C_i)$, où $\mathcal{I}' = \langle \sigma(a) - a, (\sigma(m)/m) - 1 \rangle$ pour $a \in \mathcal{O}_Y$, $m \in \mathcal{M}_{(Y,(Y_s)_{\text{red}} \cup C_{\text{It}})}$. Il suffit de vérifier l'assertion en un point $y \in C_1 \cap Y_s$ d'image $x \in D_1 \cap X_s$. Montrons qu'on peut choisir un système de paramètres

réguliers de $\mathcal{O}_{Y,y}$ du type (t_1, t_2) , où t_1 (respectivement t_2) est une équation locale de C (respectivement $(Y_s)_{\text{red}}$), et $t_2 \in \mathcal{O}_{X,x}$. En effet soit (e_1, e_2) (respectivement (e'_1, e'_2)) une base de $\bar{\mathcal{M}}_{(X, (X_s)_{\text{red}} \cup D), x} = \mathbb{N}^2$ (respectivement $\bar{\mathcal{M}}_{(Y, (Y_s)_{\text{red}} \cup C), y} = \mathbb{N}^2$) telle que e_1 (respectivement e_2, e'_1, e'_2) engendre D (respectivement $(X_s)_{\text{red}}, C, (Y_s)_{\text{red}}$). Alors le morphisme naturel $\bar{\mathcal{M}}_{(X, (X_s)_{\text{red}} \cup D), x} = \mathbb{N}^2 \rightarrow \bar{\mathcal{M}}_{(Y, (Y_s)_{\text{red}} \cup C), y} = \mathbb{N}^2$ est donné par une matrice du type $\begin{pmatrix} p & c \\ a & b \end{pmatrix}$ où $c = 0$ car $C \not\subseteq Y_s$, et $b = 1$ car $\begin{vmatrix} p & 0 \\ a & b \end{vmatrix} = pb = |\bar{\mathcal{M}}_{(Y, (Y_s)_{\text{red}} \cup C), y}^{\text{gp}} / \bar{\mathcal{M}}_{(X, (X_s)_{\text{red}} \cup D), x}^{\text{gp}}| = p$. Dans ce cas, il est clair que $\mathcal{I} = \langle \sigma(t_1) - t_1 \rangle$ est principal. Puisqu'en outre $\mathcal{I}' = \langle (\sigma(t_1)/t_1) - 1 \rangle = \mathcal{O}_Y(-\phi^*D_\sigma)$, on a bien $\mathcal{I} = \mathcal{I}'(-C_1)$, ce qui permet de conclure.

5.1.4 Posant $\phi^*D_\sigma = \sum_{\pi^{-1}\Delta} m_E E + \sum_C m_i C_i$, et notant $\psi : \omega_{(Y, (Y_s)_{\text{red}})} \otimes \mathcal{O}_Y/\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ l'application naturelle, on a la formule :

$$\delta = - \sum_{\pi^{-1}\Delta} m_E \deg c_1(\text{Ker } \psi|_E) \cap [E] - \sum_{C_1} (m_i + 1) \deg c_{1, C_{i_s}}^{C_i}(\text{Ker } \psi|_{C_i} / \omega_{(S, s)}|_{C_i}) \cap [C_i] - \sum_{C_{II}} m_i \deg c_{1, C_{i_s}}^{C_i}(\text{Ker } \psi|_{C_i} / \omega_{(S, s)}|_{C_i}) \cap [C_i] + \text{tr}(\sigma, \underline{\text{sw}}H^*(C_s, R\Phi\mathbb{Q}_l)).$$

Il s'agit de calculer $A = \chi(Y_s, \omega_{(S, s)} \otimes \mathcal{O}_Y/\mathcal{I} \xrightarrow{d} \text{Ker } \psi)$, où le complexe est acyclique sur la fibre générique, placé en degrés -1 et 0 , et ses composantes sont des $\mathcal{O}_Y/\mathcal{I}$ -modules localement libres de rang un. On choisit une filtration $\mathcal{I} = \mathcal{I}_N \subset \mathcal{I}_{N-1} \subset \dots \subset \mathcal{I}_0 = \mathcal{O}_Y$, où chaque \mathcal{I}_n est localement principal, et $\mathcal{I}_n/\mathcal{I}_{n+1}$ est un \mathcal{O}_E (pour $E \subset \pi^{-1}\Delta$) ou \mathcal{O}_{C_i} -module localement libre de rang un. Posant $A_n = \chi(Y_s, \omega_{(S, s)} \otimes \mathcal{I}_n/\mathcal{I}_{n+1} \xrightarrow{d \otimes \mathcal{I}_n} \text{Ker } \psi \otimes \mathcal{I}_n/\mathcal{I}_{n+1})$, on obtient $A = \sum A_n$.

(i) Si $\mathcal{I}_n/\mathcal{I}_{n+1}$ est un \mathcal{O}_E -module libre de rang un, avec $E \subset \pi^{-1}\Delta$, alors

$$A_n = \chi(E, \omega_{(S, s)} \otimes \mathcal{I}_n|_E \rightarrow \text{Ker } \psi \otimes \mathcal{I}_n|_E) = \deg[c_1(\text{Ker } \psi \otimes \mathcal{I}_n|_E) - c_1(\omega_{(S, s)} \otimes \mathcal{I}_n|_E)] \cap [E] = \deg c_1(\text{Ker } \psi|_E) \cap [E], \text{ car } \omega_{(S, s)}|_E \cong \mathcal{O}_E.$$

(ii) Si $\mathcal{I}_n/\mathcal{I}_{n+1}$ est un \mathcal{O}_{C_i} -module libre de rang un, alors

$$A_n = \chi(C_i, \omega_{(S, s)} \otimes \mathcal{I}_n|_{C_i} \rightarrow \text{Ker } \psi \otimes \mathcal{I}_n|_{C_i}) = \text{lg}(\text{Ker } \psi|_{C_i} / \omega_{(S, s)}|_{C_i}) = \deg c_{1, C_{i_s}}^{C_i}(\text{Ker } \psi|_{C_i} / \omega_{(S, s)}|_{C_i}) \cap [C_i].$$

Vu que

$$\mathcal{I} = \mathcal{O}_Y \left(- \sum_{\pi^{-1}\Delta} m_E E - \sum_{C_1} (m_i + 1) C_i - \sum_{C_{II}} m_i C_i \right),$$

la formule annoncée s'en déduit aussitôt.

LEMME 5.1.5. On note $\omega_{(Y, (Y_s)_{\text{red}})} \otimes \mathcal{O}_Y/\mathcal{I} \xrightarrow{\psi} \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ et $\omega_{(Y, (Y_s)_{\text{red}} \cup C_{It})} \otimes \mathcal{O}_Y/\mathcal{I}' \xrightarrow{\psi'} \mathcal{I}'/\mathcal{I}'^2$ les applications naturelles. Alors :

- (i) pour $E \subset \pi^{-1}\Delta$, on a une suite exacte $0 \rightarrow \text{Ker } \psi|_E \rightarrow \text{Ker } \psi'|_E \rightarrow \mathcal{O}_{C_i \cap E} \rightarrow 0$;
- (ii) pour $C_i \subset C_1$, on a un isomorphisme $\text{Ker } \psi|_{C_i} \cong \text{Ker } \psi'|_{C_i}$; et
- (iii) pour $C_i \subset C_{II}$, on a un isomorphisme $\text{Ker } \psi|_{C_i} \cong \text{Ker } \psi'|_{C_i}$.

Prouvons (i). Il suffit de contempler le diagramme commutatif ci-dessous à lignes et colonnes exactes.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \star & \longrightarrow & \mathcal{O}_{C_t \cap E} & \longrightarrow & \mathcal{I}' \otimes \mathcal{O}_{C_t \cap E} \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Ker } \psi'|_E & \longrightarrow & \omega_{(Y, (Y_s)_{\text{red}} \cup C_t) | E} & \xrightarrow{\psi'} & \mathcal{I}'|_E \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Ker } \psi|_E & \longrightarrow & \omega_{(Y, (Y_s)_{\text{red}}) | E} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{I}|_E \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Prouvons (ii). On applique le lemme du serpent au diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \star_2 & \xrightarrow{(2)} & \mathcal{O}_{C_i} & \xrightarrow{(1)} & \mathcal{I}'|_{C_i} \\
 & & \uparrow & & \uparrow \text{res} & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & \text{Ker } \psi'|_{C_i} & \longrightarrow & \omega_{(Y, (Y_s)_{\text{red}} \cup C_i) | C_i} & \xrightarrow{\psi'} & \mathcal{I}'|_{C_i} \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow 0 \\
 0 & \longrightarrow & \text{Ker } \psi|_{C_i} & \longrightarrow & \omega_{(Y, (Y_s)_{\text{red}}) | C_i} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{I}|_{C_i} \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\
 & & \star_1 & \xrightarrow{(3)} & \tilde{\mathcal{N}}_{C_i/Y} & \xrightarrow{(3)} & \mathcal{I}|_{C_i}
 \end{array}$$

La flèche (1) est un isomorphisme, car surjective entre \mathcal{O}_{C_i} -modules libres de rang un. Par suite (2) = 0, et (3) = (1) $\otimes_{\mathcal{O}_{C_i}}$ $\tilde{\mathcal{N}}_{C_i/Y}$ est un isomorphisme. Il en résulte que $\star_1 = \star_2 = 0$.

Enfin l'assertion (iii) est immédiate, vu que $\psi|_{C_i} = \psi'|_{C_i}$ (on a $C_i \cap C_j = \emptyset$ pour tous $i \neq j$).

5.1.6 Prouvons l'égalité

$$\begin{aligned}
 \delta &= - \sum_{\Delta} \text{sw}_{E_X}(\mathcal{F}) \text{deg}[c_1(\text{Coker } \text{mrsw}_{\mathcal{F}|E_X} - D_t) \cap [E_X]] \\
 &\quad - \sum_{D_I} (\text{sw}_{D_i}(\mathcal{F}) + 1) \text{deg } c_{1, D_{is}}^{D_i}(\text{Coker } \text{mrsw}_{\mathcal{F}|D_i} / \omega_{(S,s)|D_i}) \cap [D_i] \\
 &\quad - \sum_{D_{II}} \text{sw}_{D_i}(\mathcal{F}) \times \text{deg } c_{1, D_{is}}^{D_i}(\text{Coker } \text{mrsw}_{\mathcal{F}|D_i} / \omega_{(S,s)|D_i}) \cap [D_i] + \text{tr}(\sigma, \text{sw } H^*(C_s, R\Phi Q_l)).
 \end{aligned}$$

On combine le paragraphe 5.1.4 et le Lemme 5.1.5. On en déduit l'égalité

$$\begin{aligned}
 \delta &= - \sum_{\pi^{-1}\Delta} m_E \text{deg}[c_1(\text{Ker } \psi'|_E - C_t) \cap [E]] - \sum_{C_I} (m_i + 1) \text{deg } c_{1, C_{is}}^{C_i}(\text{Ker } \psi'|_{C_i} / \omega_{(S,s)|C_i}) \cap [C_i] \\
 &\quad - \sum_{C_{II}} m_i \text{deg } c_{1, C_{is}}^{C_i}(\text{Ker } \psi'|_{C_i} / \omega_{(S,s)|C_i}) \cap [C_i] + \text{tr}(\sigma, H^*(C_s, R\Phi Q_l)).
 \end{aligned}$$

Pour exprimer δ en fonction du conducteur de Swan raffiné mixte de \mathcal{F} , on utilise l'isomorphisme de la Proposition 4.1 : $\pi^* \text{Coker } \text{mrsw}_{\mathcal{F}|+} \cong \text{Ker } \psi'|_+$. En outre, on a $C_t = \pi^* D_t$. On en déduit les égalités $\pi_*(c_1(\text{Ker } \psi') \cap [E]) = c_1(\text{Coker } \text{mrsw}_{\mathcal{F}} \cap \pi_*[E])$, $\pi_*(C_t \cap [E]) = D_t \cap \pi_*[E]$, et $\pi_*(c_{1, C_{is}}^{C_i}(\text{Ker } \psi'|_{C_i} / \omega_{(S,s)|C_i}) \cap [C_i]) = c_{1, D_{is}}^{D_i}(\text{Coker } \text{mrsw}_{\mathcal{F}|D_i} / \omega_{(S,s)|D_i}) \cap \pi_*[C_i]$ dans $CH_0(\Delta)$. Par suite :

- (i) pour $E \subset \pi^{-1}\Delta$ exceptionnelle, d'image $\pi(E) = x$ (un point), la contribution à δ est nulle ;
- (ii) pour $E \subset \pi^{-1}\Delta_I$, d'image $\pi(E) = E_X \in \Delta_I$, on a $\pi_*[E] = [E_X]$, $m_E = \text{sw}_{E_X}(\mathcal{F})$, et la contribution à δ vaut $-\text{sw}_{E_X}(\mathcal{F}) \deg[c_1(\text{Coker mrs}_{\mathcal{F}|E_X} - D_t) \cap [E_X]]$;
- (iii) pour $E \subset \pi^{-1}\Delta_{II}$, d'image $\pi(E) = E_X \in \Delta_{II}$, on a $\pi_*[E] = p[E_X]$, $m_E = \text{sw}_{E_X}(\mathcal{F})/p$, et la contribution à δ vaut $-\text{sw}_{E_X}(\mathcal{F}) \deg[c_1(\text{Coker mrs}_{\mathcal{F}|E_X} - D_t) \cap [E_X]]$;
- (iv) pour $C_i \subset C_I$ d'image $D_i \subset D_I$, on a $\pi_*[C_i] = [D_i]$, $m_i = \text{sw}_{D_i}(\mathcal{F})$, et la contribution vaut $-(\text{sw}_{D_i}(\mathcal{F}) + 1) \deg c_{1,D_{is}}^{D_i}(\text{Coker mrs}_{\mathcal{F}|D_i}/\omega_{(S,s)|D_i}) \cap [D_i]$; et
- (v) pour $C_i \subset C_{II}$ d'image $D_i \subset D_{II}$, on a $\pi_*[C_i] = p[D_i]$, $m_i = \text{sw}_{D_i}(\mathcal{F})/p$, et la contribution vaut $-\text{sw}_{D_i}(\mathcal{F}) \deg c_{1,D_{is}}^{D_i}(\text{Coker mrs}_{\mathcal{F}|D_i}/\omega_{(S,s)|D_i}) \cap [D_i]$.

La formule annoncée en découle aussitôt.

5.1.7 Montrons qu'on a l'égalité

$$\begin{aligned} \delta = -\deg s_{\mathcal{F}} = & - \sum_{\Delta} \text{sw}_{E_X}(\mathcal{F}) \deg c_1(\text{Coker mrs}_{\mathcal{F}|E_X}) \cap [E_X] \\ & - \sum_D \text{sw}_{D_i}(\mathcal{F}) \deg c_{1,D_{is}}^{D_i}(\text{Coker mrs}_{\mathcal{F}|D_i}/\omega_{(S,s)|D_i}) \cap [D_i] \\ & + \sum_{D_{II}} \deg c_{1,D_{is}}^{D_i}(\omega_{(D_i,D_{is})}/\omega_{(S,s)|D_i}) \cap [D_i]. \end{aligned}$$

Il suffit de prouver l'égalité

$$\begin{aligned} \text{tr}(\sigma, \underline{\text{sw}} H^*(C_s, R\Phi\mathbb{Q}_l)) = & \sum_{D_{II}} \deg c_{1,D_{is}}^{D_i}(\omega_{(D_i,D_{is})}/\omega_{(S,s)|D_i}) \cap [D_i] \\ & + \sum_{D_I} \deg c_{1,D_{is}}^{D_i}(\text{Coker mrs}_{\mathcal{F}|D_i}/\omega_{(S,s)|D_i}) \cap [D_i] \\ & - \deg[D_t] \cap \left(\sum_{\Delta} \text{sw}_E(\mathcal{F})[E] \right). \end{aligned}$$

- (i) Calculons la contribution de C_+ . On a les égalités

$$\begin{aligned} \text{tr}(\sigma, \underline{\text{sw}} H^*(C_{+s}, R\Phi\mathbb{Q}_l)) = & \text{sw } H^*(C_{+s}, R\Phi\mathbb{Q}_l) \\ = & \text{sw } H^*(D_{+s}, R\Phi\mathbb{Q}_l) = \sum_{D_+} \deg c_{1,D_{is}}^{D_i}(\omega_{(D_i,D_{is})}/\omega_{(S,s)|D_i}) \cap [D_i], \end{aligned}$$

la dernière égalité résultant de la formule du conducteur de Bloch. En outre, pour $D_i \subset D_I$, on a un isomorphisme $\omega_{(D_i,D_{is})} \cong \text{Coker mrs}_{\mathcal{F}|D_i}$ (car \mathcal{F} est s -clean). Cela permet de conclure.

- (ii) Calculons la contribution de C_t . On a les égalités

$$\text{tr}(\sigma, \underline{\text{sw}} H^*(C_{ts}, R\Phi\mathbb{Q}_l)) = \text{tr}(\sigma, \underline{\text{sw}} H^*(C_{t\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_l)) = \sum_{D_i \subset D_t} \text{sw}_{G_{C_{i\bar{\eta}}/D_{i\bar{\eta}}}}(\sigma) = - \sum_{D_i \subset D_t} \text{sw}(\mathcal{F}|_{D_i}).$$

Or l'hypothèse t -clean assure que

$$\text{sw}(\mathcal{F}|_{D_i}) = \deg S_{\mathcal{F}} \cap [D_i] = \deg D_i \cap \left(\sum_{\Delta} \text{sw}_E(\mathcal{F})[E] \right).$$

Cela termine la démonstration de § 5.1.7, et donc celle de la Proposition 5.1.

6. Formule du conducteur pour un caractère d'ordre p^e , à ramification horizontale totalement non féroce

THÉORÈME 6.1 (Formule du conducteur). *On se place sous les hypothèses de la Conjecture 2.1. On suppose en outre que \mathcal{F} est un caractère d'ordre p^e (pour $e \in \mathbb{N}$), à ramification horizontale totalement non féroce. Autrement dit, \mathcal{F} est trivialisé par un revêtement de X ayant toutes ses extensions résiduelles séparables au-dessus de X_η . Alors \mathcal{F} vérifie la formule du conducteur, i.e. la Conjecture 2.1 est vraie pour \mathcal{F} .*

Remarque. L'absence de ramification féroce le long de la fibre générique assure que \mathcal{F} est trivialisé par un revêtement Y/X ayant une fibre générique Y_η/η lisse. En outre, on a dans ce cas $D = D_{\text{It}}$, et $\text{mrsw}_{\mathcal{F}} = \text{rsw}_{\mathcal{F}}$ est égal au conducteur de Swan raffiné de Kato, à valeurs dans le cotangent à pôles logarithmiques le long de $(X_s)_{\text{red}} \cup D$.

Démonstration. Prouvons le Théorème 6.1. On procède par récurrence sur l'exposant e qui apparaît dans l'ordre de \mathcal{F} . Le cas $e = 1$ a été traité à la Proposition 5.1. On peut donc supposer que \mathcal{F} est d'ordre p^e avec $e \geq 2$, et que la formule du conducteur est vraie pour tout caractère d'ordre p^m , avec $m \leq e - 1$, satisfaisant aux hypothèses du Théorème 6.1. On introduit le caractère d'ordre p sur U : $\theta = \mathcal{F}^{\otimes p^{e-1}}$. Quitte à remplacer X par un éclatement convenable, on peut supposer que θ vérifie les hypothèses du Théorème 6.1, et que sa ramification est très régulière (i.e. θ est s -clean au sens de Kato–Saito). On note Y le normalisé de X dans le revêtement d'Artin–Schreier de U qui trivialisent θ . Soit $\phi : X' \rightarrow Y$ un éclatement convenable, tel que la paire $(X', (X'_s)_{\text{red}} \cup D')$ soit régulière à croisements normaux stricts ($D' \subset X'$ désignant le transformé strict de l'image inverse réduite de D), et tel que $\mathcal{F}|_{X'}$ satisfasse aux hypothèses du Théorème 6.1. On note $\pi : X' \rightarrow X$ le morphisme naturel. Le principe de la récurrence est le suivant. On étudie comment varie, après restriction au revêtement X'/X , d'une part le conducteur de Swan de la cohomologie des cycles évanescents de \mathcal{F} , et d'autre part la classe de Swan localisée de \mathcal{F} . Puis on applique l'hypothèse de récurrence à $\mathcal{F}|_{X'}$, ainsi qu'au caractère θ trivialisé par X'/X . Pour étudier comment varie le conducteur de Swan de la cohomologie des cycles évanescents lorsqu'on remplace X par le revêtement X'/X , on utilise les résultats d'intégralité tirés de la formule de traces (Théorème 3.1 et Corollaire 3.5). Ces résultats ainsi que ceux des corollaires sont exposés au Lemme 6.2. L'autre ingrédient de la preuve est une formule de transitivité pour la classe de Swan localisée. C'est une variante de la formule de transitivité de Saito [Sai91], qui exprime la classe de Swan de la restriction de \mathcal{F} à un revêtement X'/X , en fonction de la classe de Swan de \mathcal{F} sur X , et de la différentielle du revêtement. Notre formule de transitivité est prouvée au Lemme 6.3.

Montrons, sous les hypothèses précédentes, et en admettant provisoirement les Lemmes 6.2 et 6.3, que \mathcal{F} vérifie la formule du conducteur. On commence par appliquer l'hypothèse de récurrence au caractère $\mathcal{F}|_{X'}$ qui est d'ordre p^{e-1} . On obtient l'égalité :

$$(*) \quad \text{sw } H^*(X'_s, R\Phi_{X'\alpha_l}\mathcal{F}) - \text{sw } H^*(X'_s, R\Phi_{X'\alpha_l}\mathbb{F}_l) = -\text{deg } s_{\mathcal{F}|_{X'}}.$$

On applique ensuite les résultats d'intégralité et de comparaison du Lemme 6.2 ci-dessous. On en déduit les égalités :

$$\begin{aligned} \text{sw } H^*(X'_s, R\Phi_{X'\alpha_l}\mathcal{F}) &= p \text{sw } H^*(X_s, R\Phi_{X\alpha_l}\mathcal{F}), \\ \text{sw } H^*(X'_s, R\Phi_{X'\alpha_l}\mathbb{F}_l) &= (p - 1) \text{sw } H^*(X_s, R\Phi_{X\alpha_l}\theta) + \text{sw } H^*(X_s, R\Phi_{X\alpha_l}\mathbb{F}_l). \end{aligned}$$

On remplace ces termes dans l'égalité (*). On en déduit :

$$p \text{sw } H^*(X_s, R\Phi_{X\alpha_l}\mathcal{F}) - (p - 1) \text{sw } H^*(X_s, R\Phi_{X\alpha_l}\theta) - \text{sw } H^*(X_s, R\Phi_{X\alpha_l}\mathbb{F}_l) = -\text{deg } s_{\mathcal{F}|_{X'}}$$

qui se réécrit encore

$$p[\text{sw } H^*(X_s, R\Phi_X \alpha_! \mathcal{F}) - \text{sw } H^*(X_s, R\Phi_X \alpha_! \mathbb{F}_l)] \\ = (p - 1)[\text{sw } H^*(X_s, R\Phi_X \alpha_! \theta) - \text{sw } H^*(X_s, R\Phi_X \alpha_! \mathbb{F}_l)] - \text{deg } s_{\mathcal{F}|X'}.$$

On applique ensuite l’hypothèse de récurrence à θ , qui est d’ordre p . On en déduit :

$$p[\text{sw } H^*(X_s, R\Phi_X \alpha_! \mathcal{F}) - \text{sw } H^*(X_s, R\Phi_X \alpha_! \mathbb{F}_l)] = -(p - 1)\text{deg } s_\theta - \text{deg } s_{\mathcal{F}|X'}.$$

Pour conclure, il reste à prouver l’égalité :

$$ps_{\mathcal{F}} = (p - 1)s_\theta + \pi_* s_{\mathcal{F}|X'} \in CH_0(\Delta).$$

Cette dernière découle du Lemme 6.3 ci-dessous. Cela termine la preuve du Théorème 6.1.

LEMME 6.2 (Intégralité). *Soit $(X/S, \mathcal{F})$ satisfaisant aux hypothèses du Théorème 6.1. On suppose en outre que la ramification de $\theta = \mathcal{F}^{\otimes p^{e-1}}$ est très régulière (s -clean). Soit Y le normalisé de X dans le revêtement d’Artin–Schreier U'/U qui trivialisent θ , $X' \rightarrow Y$ un éclatement $\text{Gal}(U'/U)$ -équivariant tel que $(X'/S, \mathcal{F}|_{X'})$ satisfasse aux hypothèses du Théorème 6.1. Par ailleurs, on note W/U le revêtement étale galoisien de groupe $G = \mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}$ qui trivialisent \mathcal{F} , Z_1 le normalisé de X' dans W , $Z \rightarrow Z_1$ un éclatement G -équivariant tel que Z soit régulier, et $(Z_s)_{\text{red}} \cup C$ un diviseur à croisements normaux (C désignant l’image inverse réduite de D). On note $\alpha : W \rightarrow Z$ (respectivement $\alpha : U' \rightarrow X'$, $\alpha : U \rightarrow X$) l’inclusion naturelle. On désigne par Λ l’un des anneaux $\mathbb{Q}_l, \mathbb{Z}_l$, ou $\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$. Alors :*

- (1) pour tout $g \in G = \mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}$, $\text{tr}(g, \text{sw } H^*(Z_s, R\Phi \alpha_! \Lambda))$ est l’image dans Λ d’un entier (de \mathbb{Z}) indépendant de $l \neq p$;
- (2) on a l’égalité $\text{sw } H^*(X'_s, R\Phi_{X'} \alpha_! \mathcal{F}) = p \text{sw } H^*(X_s, R\Phi_X \alpha_! \mathcal{F})$;
- (3) pour tout $g \in \text{Gal}(U'/U) = G' = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\text{tr}(g, \text{sw } H^*(X'_s, R\Phi \alpha_! \Lambda))$ est l’image dans Λ d’un entier (de \mathbb{Z}) indépendant de $l \neq p$; et
- (4) on a l’égalité $\text{sw } H^*(X'_s, R\Phi_{X'} \alpha_! \mathbb{F}_l) = (p - 1)\text{sw } H^*(X_s, R\Phi_X \alpha_! \theta) + \text{sw } H^*(X_s, R\Phi_X \alpha_! \mathbb{F}_l)$.

Démonstration. Prouvons le Lemme 6.2(1). D’après la remarque suivant le Théorème 6.1, le schéma Z/S muni de l’action de G satisfait aux hypothèses de la formule de traces (Théorème 3.1). Par conséquent, pour tout $g \in G = \mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}$, $\text{tr}(g, \text{sw } H^*(Z_s, R\Phi \Lambda))$ est l’image dans Λ d’un entier (de \mathbb{Z}) indépendant de $l \neq p$. Par ailleurs, des arguments analogues à ceux des §§ 5.1.1 et 5.1.7 assurent que pour tout $g \in G = \mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}$, $\text{tr}(g, \text{sw } H^*(C_s, R\Phi \Lambda))$ est également l’image dans Λ d’un entier (de \mathbb{Z}) indépendant de $l \neq p$. L’assertion (1) en résulte immédiatement par dévissage.

Prouvons le Lemme 6.2(2). On note $H \subset G$ le sous-groupe d’ordre p^{e-1} ($H = \text{Gal}(W/U')$). On note M le $\mathbb{F}_l[G]$ -module galoisien associé à \mathcal{F} . On dispose d’isomorphismes G_η -équivariants :

$$H^*(X_s, R\Phi \alpha_! \mathcal{F}) = [H^*(Z_s, R\Phi \alpha_! \mathbb{F}_l) \otimes M]^G \text{ et } H^*(X'_s, R\Phi \alpha_! \mathcal{F}|_{X'}) = [H^*(Z_s, R\Phi \alpha_! \mathbb{F}_l) \otimes M]^H.$$

Il en résulte des isomorphismes analogues au niveau des modules de Swan :

$$\text{sw } H^*(X_s, R\Phi \alpha_! \mathcal{F}) = [\text{sw } H^*(Z_s, R\Phi \alpha_! \mathbb{F}_l) \otimes M]^G \text{ et } \text{sw } H^*(X'_s, R\Phi \alpha_! \mathcal{F}|_{X'}) \\ = [\text{sw } H^*(Z_s, R\Phi \alpha_! \mathbb{F}_l) \otimes M]^H.$$

Vu que tous les complexes de $\mathbb{F}_l[G]$ -modules sont parfaits, on en déduit les égalités :

$$\begin{aligned} \text{sw } H^*(X_s, R\Phi_{\alpha!}\mathcal{F}) &\stackrel{(i)}{=} \frac{1}{|G|} \sum_G \text{tr}(g, \underline{\text{sw}} H^*(Z_s, R\Phi_{\alpha!}\mathbb{Q}_l)) \text{tr}_M^B(g), \\ \text{sw } H^*(X'_s, R\Phi_{\alpha!}\mathcal{F}) &\stackrel{(ii)}{=} \frac{1}{|H|} \sum_H \text{tr}(g, \underline{\text{sw}} H^*(Z_s, R\Phi_{\alpha!}\mathbb{Q}_l)) \text{tr}_M^B(g). \end{aligned}$$

Soit τ une racine primitive p^e -ième de l'unité. On applique l'opérateur $T = \text{tr}_{\mathbb{Q}(\tau)/\mathbb{Q}(\tau^p)}$ aux deux membres de l'égalité (i). Utilisant le résultat d'intégralité 6.2(1), on en déduit la formule :

$$p \text{ sw } H^*(X_s, R\Phi_{\alpha!}\mathcal{F}) = \frac{p}{|G|} \sum_H \text{tr}(g, \underline{\text{sw}} H^*(Z_s, R\Phi_{\alpha!}\mathbb{Q}_l)) \text{tr}_M^B(g) \stackrel{(ii)}{=} \text{sw} H^*(X'_s, R\Phi_{\alpha!}\mathcal{F}).$$

Cela permet de conclure.

La preuve du Lemme 6.2(3) est tout à fait analogue à celle de 6.2(1).

Prouvons le Lemme 6.2(4) On note L le $\mathbb{F}_l[G']$ -module galoisien associé à θ . On dispose des isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned} \underline{\text{sw}} H^*(X_s, R\Phi_{\alpha!}\theta) &= [\underline{\text{sw}} H^*(X'_s, R\Phi_{\alpha!}\mathbb{F}_l) \otimes L]^{G'} \text{ et } \underline{\text{sw}} H^*(X_s, R\Phi_{\alpha!}\mathbb{F}_l) \\ &= [\underline{\text{sw}} H^*(X'_s, R\Phi_{\alpha!}\mathbb{F}_l)]^{G'}. \end{aligned}$$

On en déduit les égalités :

$$\begin{aligned} \text{sw } H^*(X_s, R\Phi_{\alpha!}\theta) &\stackrel{(i)}{=} \frac{1}{|G'|} \sum_{G'} \text{tr}(g, \underline{\text{sw}} H^*(X'_s, R\Phi_{\alpha!}\mathbb{Q}_l)) \text{tr}_L^B(g), \\ \text{sw } H^*(X_s, R\Phi_{\alpha!}\mathbb{F}_l) &\stackrel{(ii)}{=} \frac{1}{|G'|} \sum_{G'} \text{tr}(g, \underline{\text{sw}} H^*(X'_s, R\Phi_{\alpha!}\mathbb{Q}_l)). \end{aligned}$$

Soit τ une racine primitive p -ième de l'unité. On applique l'opérateur $T = \text{tr}_{\mathbb{Q}(\tau)/\mathbb{Q}}$ aux deux membres de l'égalité (i). On utilise le résultat d'intégralité 6.2(3), et le fait que $T(\text{tr}_L^B(g)) = p - 1$ si $g = id$, et $T(\text{tr}_L^B(g)) = -1$ sinon. On obtient l'égalité :

$$\begin{aligned} (p - 1) \text{ sw } H^*(X_s, R\Phi_{\alpha!}\theta) &= \frac{1}{|G'|} [(p - 1) \text{ sw } H^*(X'_s, R\Phi_{\alpha!}\mathbb{F}_l) - \sum_{g \neq id} \text{tr}(g, \underline{\text{sw}} H^*(X'_s, R\Phi_{\alpha!}\mathbb{Q}_l))] \\ &= \frac{1}{|G'|} [p \text{ sw } H^*(X'_s, R\Phi_{\alpha!}\mathbb{F}_l) - \sum_{G'} \text{tr}(g, \underline{\text{sw}} H^*(X'_s, R\Phi_{\alpha!}\mathbb{Q}_l))] \\ &\stackrel{(ii)}{=} \text{sw } H^*(X'_s, R\Phi_{\alpha!}\mathbb{F}_l) - \text{sw } H^*(X_s, R\Phi_{\alpha!}\mathbb{F}_l). \end{aligned}$$

Cela permet de conclure.

LEMME 6.3 (Transitivité). Soit $(X/S, \mathcal{F})$ satisfaisant aux hypothèses du Théorème 6.1. On suppose en outre que la ramification de $\theta = \mathcal{F}^{\otimes p^{e-1}}$ est très régulière (s -clean). On note Y le normalisé de X dans le revêtement étale galoisien U'/U d'ordre p qui trivialise θ , et $\phi : X' \rightarrow Y$ un éclatement $\text{Gal}(U'/U)$ -équivariant tel que $(X'/S, \mathcal{F}_{|X'})$ satisfasse aux hypothèses du Théorème 6.1. Alors on a l'égalité dans $CH_0(\Delta)$:

$$ps_{\mathcal{F}} = (p - 1)s_{\theta} + \pi_* s_{\mathcal{F}|X'} \in CH_0(\Delta).$$

Cette formule est une variante localisée de la formule de transitivité de Saito pour les classes de Swan [Sai91, Lemme 2]. La preuve est semblable. Quitte à remplacer X par un éclatement convenable, on peut supposer en outre que $\phi : X' \rightarrow Y$ est une résolution log

étale (un log éclatement). On note $\Delta' \subset X'$ (respectivement $D' \subset X'$) le transformé strict de $(Y \times_X \Delta)_{\text{red}}$ (respectivement $(Y \times_X D)_{\text{red}}$), et $F \subset X'$ le lieu exceptionnel. On fixe un générateur $\sigma \in \text{Gal}(U'/U) = G' = \mathbb{F}_p$. On désigne par $D_\sigma \subset X'$ le diviseur du schéma des points fixes de σ (au sens log) ; on pose $D_{X'/X} = (p-1)D_\sigma$. On note S (respectivement S', S_θ) le diviseur de Swan de \mathcal{F} (respectivement $\mathcal{F}|_{X'}, \theta$). On désigne par $C = c^*(\omega_{(X, (X_s)_{\text{red}} \cup D)})$ (respectivement $C' = c^*(\omega_{(X', (X'_s)_{\text{red}} \cup D')})$) la somme alternée des classes de Chern du cotangent logarithmique. D'après [Sai91, Lemme 1(3)] on a l'égalité $C' = \pi^*C(1 + D_\sigma)(1 + pD_\sigma)^{-1}$. On décompose chaque diviseur considéré plus haut en somme de sa partie verticale (supportée par la fibre spéciale) et de sa partie horizontale (supportée par D ou D'). Par exemple on écrit $S = S_v + S_h$ où $S_v = \sum_{\Delta} \text{sw}_E(\mathcal{F})E$, $S_h = \sum_D \text{sw}_{D_i}(\mathcal{F})D_i$. On introduit le zero cycle supporté par $\Delta' \cup F$:

$$s_\sigma = -\{C'(1 + D_\sigma)^{-1}D_{\sigma,v}\}_0 + \sum_D \text{sw}_{D_i}(\theta)c_{1, D'_i}^{D'_i}(\text{Coker } \text{rsw}_\theta/\omega_{(S,S)}) \cap [D'_i] \in CH_0(\Delta' \cup F).$$

On vérifie facilement la relation $\pi_*s_\sigma = s_\theta \in CH_0(\Delta)$.

Pour prouver le Lemme 6.3, il suffit d'établir l'égalité :

$$(*) \quad \pi^!s_{\mathcal{F}} = (p-1)s_\sigma + s_{\mathcal{F}|_{X'}} \in CH_0(\Delta' \cup F)$$

Le principe de la démonstration est le suivant. On calcule $A = \pi^!s_{\mathcal{F}} - (p-1)s_\sigma - s_{\mathcal{F}|_{X'}}$ en décomposant chaque zéro cycle en somme de sa partie verticale et de sa partie horizontale. On écrit donc $s_{\mathcal{F}} = s_{\mathcal{F},v} + s_{\mathcal{F},h}$, avec $s_{\mathcal{F},h} = -\{C(1 + S)^{-1}S_v\}_0$, et $s_{\mathcal{F},h} = \sum_D \text{sw}_{D_i}(\mathcal{F})c_{1, D_i}^{D_i}(\text{Coker } \text{rsw}_{\mathcal{F}}/\omega_{(S,S)}) \cap [D_i]$. On procède de même avec $s_{\mathcal{F}|_{X'}}$ et s_σ . On a donc $A = A_v + A_h$, où $A_v = \pi^!s_{\mathcal{F},v} - (p-1)s_{\sigma,v} - s_{\mathcal{F}|_{X'},v}$, et $A_h = \pi^!s_{\mathcal{F},h} - (p-1)s_{\sigma,h} - s_{\mathcal{F}|_{X'},h}$. On calcule séparément A_v et A_h , puis on additionne le tout pour conclure. On utilisera de manière essentielle les résultats de Saito [Sai91, Lemme 3], rappelés ci-dessous dans notre contexte particulier.

LEMME 6.3.1 (Saito [Sai91, Lemme 3]). *On se place sous les hypothèses du Lemme 6.3. On suppose en outre que $\phi : X' \rightarrow Y$ est log étale.*

- (1) *On a $S' \leq \pi^*S$. En une composante $E' \subset X'$ où $S' < \pi^*S$, on a $\pi^*S_\theta > 0$ et une suite exacte : $0 \rightarrow \pi^*\mathcal{O}(-S)|_{E'} \xrightarrow{\text{rsw}_{\mathcal{F}}} \pi^*\omega_{(X, (X_s)_{\text{red}} \cup D)}|_{E'} \rightarrow \omega_{(X', (X'_s)_{\text{red}} \cup D')}|_{E'}$.*
- (2) *On a $\pi^*S \leq S' + D_{X'/X}$. En une composante $E' \subset X'$ où $\pi^*S < S' + D_{X'/X}$, on a $\pi^*S_\theta > 0$ et une suite exacte : $0 \rightarrow \mathcal{O}(-S')|_{E'} \xrightarrow{\text{rsw}_{\mathcal{F}|_{X'}}} \omega_{(X', (X'_s)_{\text{red}} \cup D')}|_{E'} \xrightarrow{\psi'} \mathcal{O}(-D_\sigma)|_{E'} \rightarrow 0$.*

COROLLAIRE 6.3.2. *On se place sous les hypothèses du Lemme 6.3. On suppose en outre que $\phi : X' \rightarrow Y$ est log étale.*

- (1) *On a les égalités dans $CH_0(\Delta' \cup F)$:*

$$(\pi^*S - \pi^*S_\theta)(\pi^*S - S')_v = 0, \\ \{C'(1 + D_\sigma)^{-1}(1 + S')^{-1}(\pi^*S - S' - D_{X'/X})_v\}_0 = 0.$$

- (2) *Sous l'hypothèse de ramification horizontale totalement non féroce, on a l'égalité dans $Z_1(X')$:*

$$(\pi^*S - S' - D_{X'/X})_h = 0.$$

Prouvons le Corollaire 6.3.2(2). Soit $D'_i \subset D'$ une composante où $\pi^*S < S' + D_{X'/X}$. D'après le Corollaire 6.3.1(2), on a $\psi'(\text{rsw}_{\mathcal{F}|_{X'}}) = 0$. Or, vu que la ramification horizontale de θ est non

féroce et très régulière, ψ' se factorise en

$$\omega_{(X', (X'_s)_{\text{red}} \cup D')|D'_i} \xrightarrow{\text{res}_{D'_i}} \mathcal{O}_{D'_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(-D_\sigma)|_{D'_i}.$$

On en déduit que $\text{res}_{D'_i}(\text{rsw}_{\mathcal{F}|X'}) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse que la ramification horizontale de $\mathcal{F}|_{X'}$ est totalement non féroce.

6.3.3 *Montrons que $A_v = (S' + D_{X'/X} - \pi^*S)_v S'_h \in CH_0(\Delta' \cup F)$.* Par définition, on a

$$A_v = \{C'(1 + S')^{-1}S'_v + C'(1 + D_\sigma)^{-1}D_{X'/X,v} - \pi^*C(1 + \pi^*S)^{-1}\pi^*S_v\}_0.$$

On remplace π^*S_v par $(\pi^*S)_v$ (car la différence est supportée par F), et π^*C par $C'(1 + pD_\sigma) \times (1 + D_\sigma)^{-1}$. On obtient

$$A_v = \{C'[(1 + S')^{-1}S'_v + (1 + D_\sigma)^{-1}D_{X'/X,v} - (1 + pD_\sigma)(1 + D_\sigma)^{-1}(1 + \pi^*S)^{-1}(\pi^*S)_v]\}_0.$$

On retranche à A_v le terme $C'(1 + D_\sigma)^{-1}(1 + S')^{-1}(S'_v + D_{X'/X,v} - (\pi^*S)_v)$, qui est nul d'après le Corollaire 6.3.2(1). Vu que $\dim(X) = 2$, on obtient après calculs (en posant $\pi^*S_\theta = D_{X'/X} + D_\sigma = pD_\sigma$) :

$$A_v = (\pi^*S - \pi^*S_\theta)(\pi^*S)_v + D_\sigma S'_v + S'D_{X'/X,v} - S'(\pi^*S)_v.$$

On remplace $(\pi^*S - \pi^*S_\theta)(\pi^*S)_v$ par $(\pi^*S - \pi^*S_\theta)S'_v$, qui lui est égal d'après le Corollaire 6.3.2(1). On en déduit

$$A_v = \pi^*SS'_v - S'(\pi^*S)_v + S'D_{X'/X,v} - D_{X'/X}S'_v.$$

On décompose les diviseurs en somme de leur partie verticale et de leur partie horizontale. Les doubles termes verticaux s'éliminent. On obtient

$$A_v = S'_v(\pi^*S - D_{X'/X})_h + S'_h(D_{X'/X} - \pi^*S)_v.$$

On remplace $(\pi^*S - D_{X'/X})_h$ par S'_h , qui lui est égal d'après le Corollaire 6.3.2(2). L'égalité annoncée en découle aussitôt.

LEMME 6.3.4. *On se place sous les hypothèses du Lemme 6.3, en supposant en outre que $\phi : X' \rightarrow Y$ est log étale.*

(1) *Pour toute composante horizontale $D_i \subset D$ vérifiant $\text{sw}_{D_i}(\theta) > 0$, on a*

$$(S' + D_{X'/X} - \pi^*S)_v D'_i = c_{1,D'_i}^{D'_i}(\text{Coker } \text{rsw}_{\mathcal{F}|X'} / \omega_{(D'_i, D'_{is})}) \cap [D'_i] \in CH_0(\Delta' \cup F).$$

(2) *Pour toute composante horizontale $D_i \subset D$ vérifiant $\text{sw}_{D_i}(\theta) = 0$ et $\text{sw}_{D_i}(\mathcal{F}) > 0$, on a*

$$(S' + D_{X'/X} - \pi^*S)_v D'_i = c_{1,D'_i}^{D'_i}(\text{Coker } \text{rsw}_{\mathcal{F}|X'} / \text{Coker } \text{rsw}_{\mathcal{F}}) \cap [D'_i] \in CH_0(\Delta' \cup F).$$

(3) *On a l'égalité dans $CH_0(\Delta' \cup F)$:*

$$\begin{aligned} A_v &= \sum_{\text{sw}_{D_i}(\theta) > 0} \text{sw}_{D'_i}(\mathcal{F}|_{X'}) c_{1,D'_i}^{D'_i}(\text{Coker } \text{rsw}_{\mathcal{F}|X'} / \omega_{(D'_i, D'_{is})}) \cap [D'_i] \\ &+ \sum_{\text{sw}_{D_i}(\theta) = 0} \text{sw}_{D'_i}(\mathcal{F}|_{X'}) c_{1,D'_i}^{D'_i}(\text{Coker } \text{rsw}_{\mathcal{F}|X'} / \text{Coker } \text{rsw}_{\mathcal{F}}) \cap [D'_i]. \end{aligned}$$

Démonstration. Prouvons le Lemme 6.3.4(1). D'après le Corollaire 6.3.2(2), il revient au même de calculer $(S' + D_{X'/X} - \pi^*S)D'_i$. Montrons que $(D_{X'/X} - \pi^*S)D'_i = 0$. D'après le Corollaire 6.3.2(2), on a $\pi^*S = S' + D_{X'/X} < S'$ en D'_i . Par suite, le Lemme 6.3.1(1) assure

que $\text{rsw}_{\mathcal{F}|D_i} = \text{rsw}_{\theta|D_i}$. Or comme θ est s -clean et non féroce­ment ramifié le long de D_i , le composé $\text{res}_{D_i} \circ \text{rsw}_{\theta|D_i} : \mathcal{O}(-S_{\theta})|_{D_i} \rightarrow \mathcal{O}_{D_i}$ est un isomorphisme. On en déduit que le composé $\text{res}_{D_i} \circ \text{rsw}_{\mathcal{F}|D_i} : \mathcal{O}(-S)|_{D_i} \rightarrow \mathcal{O}_{D_i}$ est également un isomorphisme. Par conséquent, on a $SD_i = 0$ et $\pi^*SD'_i = 0$. De plus, l'application naturelle surjective $\psi' : \omega_{(X',(X'_s)_{\text{red}} \cup D')|D'_i} \rightarrow \mathcal{O}(-D_{\sigma})|_{D'_i}$ se factorise à travers $\text{res}_{D'_i}$ et fournit un isomorphisme $\mathcal{O}_{D'_i} \cong \mathcal{O}(-D_{\sigma})|_{D'_i}$. On en déduit que $D_{X'/X}D'_i = 0$. Pour conclure, il reste à calculer $S'D'_i$. La formule annoncée découle immédiatement du diagramme suivant, à lignes et colonnes exactes.

$$\begin{array}{ccccc}
 \omega_{(D'_i, D'_{is})} & \xlongequal{\hspace{2cm}} & \omega_{(D'_i, D'_{is})} & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 \mathcal{O}(-S')|_{D'_i} \hookrightarrow & \omega_{(X', (X'_s)_{\text{red}} \cup D')|D'_i} \twoheadrightarrow & (\text{Coker } \text{rsw}_{\mathcal{F}|X'})|_{D'_i} & & \\
 \parallel & \downarrow \text{res} & \downarrow & & \\
 \mathcal{O}(-S')|_{D'_i} \hookrightarrow & \mathcal{O}_{D'_i} \twoheadrightarrow & \star_1 & &
 \end{array}$$

Prouvons le Lemme 6.3.4(2). D'après le Corollaire 6.3.2(2), il s'agit de calculer $(S' + D_{X'/X} - \pi^*S)D'_i$. D'une part, la Proposition 4.1 fournit un isomorphisme $\omega_{(X',(X'_s)_{\text{red}} \cup D')}/\omega_{(X,(X_s)_{\text{red}} \cup D)} \cong \mathcal{O}(-D_{\sigma}) \otimes \mathcal{O}_{X'}/\mathcal{O}(-D_{X'/X})$ et, au voisinage de D'_i , ce faisceau est supporté par la fibre spéciale. On en déduit l'égalité :

$$D_{X'/X}D'_i = c_{1,D'_i}^{D'_i}(\omega_{(X',(X'_s)_{\text{red}} \cup D')}/\omega_{(X,(X_s)_{\text{red}} \cup D)}) \cap [D'_i] \in CH_0(\Delta' \cup F).$$

D'autre part, on a l'égalité $(\pi^*S - S')D'_i = c_{1,D'_i}^{D'_i}(\mathcal{O}(-S')/\mathcal{O}(-\pi^*S)) \cap [D'_i]$. Pour terminer la preuve du Lemme 6.3.4(2), il reste donc à établir la formule :

$$\begin{aligned}
 & [c_{1,D'_i}^{D'_i}(\omega_{(X',(X'_s)_{\text{red}} \cup D')}/\omega_{(X,(X_s)_{\text{red}} \cup D)}) \\
 & - c_{1,D'_i}^{D'_i}(\mathcal{O}(-S')/\mathcal{O}(-\pi^*S)) - c_{1,D'_i}^{D'_i}(\text{Coker } \text{rsw}_{\mathcal{F}|X'}/\text{Coker } \text{rsw}_{\mathcal{F}})] \cap [D'_i] = 0.
 \end{aligned}$$

Cette égalité découle du diagramme ci-dessous, à lignes et colonnes exactes.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{O}(-\pi^*S)|_{D'_i} \hookrightarrow & \mathcal{O}(-S')|_{D'_i} \twoheadrightarrow & \star_1 & & \\
 \downarrow \text{rsw}_{\mathcal{F}} & \downarrow \text{rsw}_{\mathcal{F}|X'} & \downarrow & & \\
 \omega_{(X,(X_s)_{\text{red}} \cup D)}|_{D'_i} \hookrightarrow & \omega_{(X',(X'_s)_{\text{red}} \cup D')|D'_i} \twoheadrightarrow & \omega_{(X',(X'_s)_{\text{red}} \cup D')|D'_i}/\omega_{(X,(X_s)_{\text{red}} \cup D)}|_{D'_i} & & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
 (\text{Coker } \text{rsw}_{\mathcal{F}})|_{D'_i} \hookrightarrow & (\text{Coker } \text{rsw}_{\mathcal{F}|X'})|_{D'_i} \twoheadrightarrow & \star_2 & &
 \end{array}$$

Enfin, le Lemme 6.3.4(3) découle immédiatement du § 6.3.3, et du Lemme 6.3.4(1) et (2).

LEMME 6.3.5. *On se place sous les hypothèses du Lemme 6.3, en supposant en outre que $\phi : X' \rightarrow Y$ est log étale. On a l'égalité dans $CH_0(\Delta' \cup F)$:*

$$A_h = - \sum_{\text{sw}_{D'_i}(\theta) > 0} \text{sw}_{D'_i}(\mathcal{F}|_{X'}) c_{1,D'_i}^{D'_i} (\text{Coker rsw}_{\mathcal{F}|_{X'}} / \omega_{(D'_i, D'_{i,s})}) \cap [D'_i] \\ - \sum_{\text{sw}_{D'_i}(\theta) = 0} \text{sw}_{D'_i}(\mathcal{F}|_{X'}) c_{1,D'_i}^{D'_i} (\text{Coker rsw}_{\mathcal{F}|_{X'}} / \text{Coker rsw}_{\mathcal{F}}) \cap [D'_i].$$

Par définition, on a $A_h = \pi^! s_h - (p-1)s_{\sigma,h} - s_{\mathcal{F}|_{X',h}}$. On distingue les contributions des composantes horizontales $D_i \subset D$, selon que $\text{sw}_{D_i}(\theta) > 0$ ou bien que $\text{sw}_{D_i}(\theta) = 0$. On écrit :

$$A_h = \sum_{\text{sw}_{D'_i}(\theta) > 0} [\text{sw}_{D'_i}(\mathcal{F}) c_{1,D'_i}^{D'_i} (\text{Coker rsw}_{\mathcal{F}} / \omega_{(S,s)}) - (p-1)\text{sw}_{D'_i}(\theta) c_{1,D'_i}^{D'_i} (\text{Coker rsw}_{\theta} / \omega_{(S,s)})] \\ - \text{sw}_{D'_i}(\mathcal{F}|_{X'}) c_{1,D'_i}^{D'_i} (\text{Coker rsw}_{\mathcal{F}|_{X'}} / \omega_{(S,s)}) \cap [D'_i] \\ + \sum_{\text{sw}_{D'_i}(\theta) = 0} [\text{sw}_{D'_i}(\mathcal{F}) c_{1,D'_i}^{D'_i} (\text{Coker rsw}_{\mathcal{F}} / \omega_{(S,s)}) \\ - \text{sw}_{D'_i}(\mathcal{F}|_{X'}) c_{1,D'_i}^{D'_i} (\text{Coker rsw}_{\mathcal{F}|_{X'}} / \omega_{(S,s)})] \cap [D'_i].$$

En une composante $D_i \subset D$ où $\text{sw}_{D_i}(\theta) > 0$, on a, d'après le Corollaire 6.3.2(2), $\text{sw}_{D'_i}(\mathcal{F}) - (p-1)\text{sw}_{D'_i}(\theta) = \text{sw}_{D'_i}(\mathcal{F}|_{X'})$. En outre, d'après le Lemme 6.3.1(1), en une telle composante $\text{rsw}_{\mathcal{F}}$ et rsw_{θ} coïncident, ce qui fournit des isomorphismes : $(\text{Coker rsw}_{\mathcal{F}})|_{D'_i} \cong (\text{Coker rsw}_{\theta})|_{D'_i} \cong \omega_{(D_i, D_{i,s})}|_{D'_i} \cong \omega_{(D'_i, D'_{i,s})}$. La contribution de la composante à A_h vaut donc comme annoncé :

$$\text{sw}_{D'_i}(\mathcal{F}|_{X'}) [c_{1,D'_i}^{D'_i} (\omega_{(D'_i, D'_{i,s})} / \omega_{(S,s)}) - c_{1,D'_i}^{D'_i} (\text{Coker rsw}_{\mathcal{F}|_{X'}} / \omega_{(S,s)})] \cap [D'_i] \\ = -\text{sw}_{D'_i}(\mathcal{F}|_{X'}) c_{1,D'_i}^{D'_i} (\text{Coker rsw}_{\mathcal{F}|_{X'}} / \omega_{(D'_i, D'_{i,s})}) \cap [D'_i].$$

En une composante $D_i \subset D$ où $\text{sw}_{D_i}(\theta) = 0$, on a $\text{sw}_{D'_i}(\mathcal{F}) = \text{sw}_{D'_i}(\mathcal{F}|_{X'})$, et la contribution à A_h vaut $-\text{sw}_{D'_i}(\mathcal{F}|_{X'}) c_{1,D'_i}^{D'_i} (\text{Coker rsw}_{\mathcal{F}|_{X'}} / \text{Coker rsw}_{\mathcal{F}}) \cap [D'_i]$. Cela permet de conclure.

La formule de transitivité (Lemme 6.3) résulte immédiatement des Lemmes 6.3.4 et 6.3.5. Cela achève la démonstration du Lemme 6.3, et donc celle du Théorème 6.1.

7. Fin de la preuve de la formule du conducteur

Prouvons le Théorème 2.2. Soit \mathcal{F} un caractère l -adique satisfaisant aux hypothèses du Théorème 2.2. On note np^e (avec $(n, p) = 1$) son ordre. On a donc soit $e \leq 1$, soit $e \geq 2$ auquel cas la ramification horizontale de \mathcal{F} est totalement non féroce. On écrit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{L}$, où \mathcal{F}_0 est un caractère d'ordre p^e , et \mathcal{L} est un caractère d'ordre n . Vu que \mathcal{L} est modéré, les conducteurs de Swan (respectivement les conducteurs de Swan raffinés mixtes) de \mathcal{F} et \mathcal{F}_0 coïncident. On en déduit que \mathcal{F}_0 satisfait aux hypothèses du Théorème 2.2, et qu'on a l'égalité $s_{\mathcal{F}} = s_{\mathcal{F}_0}$ dans $CH_0(\Delta)$. Pour conclure, il reste donc à prouver la Proposition 7.1 ci-dessous. La formule du conducteur pour \mathcal{F} se déduira alors de la formule du conducteur pour \mathcal{F}_0 , prouvée à la Proposition 5.1 et au Théorème 6.1.

PROPOSITION 7.1. *Sous les hypothèses et avec les notations précédentes, on a l'égalité :*

$$\text{sw } H^*(X_s, R\Phi_{\alpha_l}\mathcal{F}) = \text{sw } H^*(X_s, R\Phi_{\alpha_l}\mathcal{F}_0) \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration. Prouvons la Proposition 7.1. Soit V/U (respectivement W/U) le revêtement galoisien de groupe $P = \mathbb{Z}/p^e$ (respectivement $G = \mathbb{Z}/np^e$) qui trivialise \mathcal{F}_0 (respectivement \mathcal{F}). On note Y_1 le normalisé de X dans V , $Y \rightarrow Y_1$ un éclatement convenable P -équivariant tel que la paire $(Y, (Y_s)_{\text{red}} \cup D_Y)$ soit régulière à croisements normaux ($D_Y \subset Y$ désignant le transformé strict de l'image inverse réduite de $D \subset X$). Soit Z_1 le normalisé de Y dans W . Le revêtement Z_1/Y est modéré. Par conséquent, d'après [III02], Z_1 , muni de la log structure $\mathcal{O}_W^* \cap \mathcal{O}_{Z_1} \subset \mathcal{O}_{Z_1}$, est log régulier, et le morphisme de log schémas $p : (Z_1, Z_1 - V) \rightarrow (Y, (Y_s)_{\text{red}} \cup D_Y)$ est un revêtement Kummer étale galoisien de groupe $H = \mathbb{Z}/n$. Soit $\pi : Z \rightarrow Z_1$ une désingularisation par log éclatement (G -équivariante), telle que la paire $(Z, (Z_s)_{\text{red}} \cup D_Z)$ soit régulière à croisements normaux stricts. On fixe les notations par le diagramme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} (Z, (Z_s)_{\text{red}} \cup D_Z) & \xleftarrow{\alpha} & W \\ \downarrow \pi & & \parallel \\ (Z_1, Z_1 - V) & \xleftarrow{\alpha} & W \\ \downarrow p & & \downarrow \mathbb{Z}/n \\ (Y, (Y_s)_{\text{red}} \cup D_Y) & \xleftarrow{\alpha} & V \\ \downarrow & & \downarrow \mathbb{Z}/p^e \\ (X, (X_s)_{\text{red}} \cup D) & \xleftarrow{\alpha} & U \end{array}$$

Soit M (respectivement L) le $\mathbb{F}_l[G]$ -module galoisien associé à \mathcal{F}_0 (respectivement \mathcal{L}). On a des isomorphismes :

$$\begin{aligned} \text{sw } H^*(X_s, R\Phi_{\alpha_l}(\mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{L})) &\cong [\text{sw } H^*(Z_s, R\Phi_{\alpha_l}\mathbb{F}_l) \otimes M \otimes L]^G, \\ \text{sw } H^*(X_s, R\Phi_{\alpha_l}\mathcal{F}_0) &\cong [\text{sw } H^*(Z_s, R\Phi_{\alpha_l}\mathbb{F}_l) \otimes M]^G. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 7.2 ci-dessous, le complexe de $\mathbb{F}_l[G]$ -modules $\text{sw } H^*(Z_s, R\Phi_{\alpha_l}\mathbb{F}_l)$ est parfait. On en déduit les formules :

$$\begin{aligned} \text{sw } H^*(X_s, R\Phi_{\alpha_l}(\mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{L})) &= \frac{1}{|G|} \sum_{G_{l\text{-reg}}} \text{tr}(g, \text{sw } H^*(Z_s, R\Phi_{\alpha_l}\mathbb{Q}_l)) \text{tr}_M^{\text{B}}(g) \text{tr}_L^{\text{B}}(g), \\ \text{sw } H^*(X_s, R\Phi_{\alpha_l}\mathcal{F}_0) &= \frac{1}{|G|} \sum_{G_{l\text{-reg}}} \text{tr}(g, \text{sw } H^*(Z_s, R\Phi_{\alpha_l}\mathbb{Q}_l)) \text{tr}_M^{\text{B}}(g). \end{aligned}$$

Par ailleurs, les hypothèses du Théorème 2.2 assurent que Z/S muni de l'action de G satisfait aux hypothèses de la formule de traces du Théorème 3.1. Il en résulte que $\text{tr}(g, \text{sw } H^*(Z_s, R\Phi_{\alpha_l}\mathbb{Q}_l))$ est un entier indépendant de $l \neq p$. Il en est de même de $\text{tr}(g, \text{sw } H^*(D_{Z,s}, R\Phi_{\alpha_l}\mathbb{Q}_l))$ par des arguments semblables à ceux des §§ 5.1.1 et 5.1.7. On en déduit que $\text{tr}(g, \text{sw } H^*(Z_s, R\Phi_{\alpha_l}\mathbb{Q}_l))$ est un entier indépendant de $l \neq p$, donc nul si l'ordre de g n'est pas une puissance de p , d'après le lemme

de perfection (Lemme 7.2) ci-dessous. Notant $P \subset G$ le p -Sylow, les formules précédentes se réécrivent donc :

$$\begin{aligned} \text{sw } H^*(X_s, R\Phi_{\alpha_1}(\mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{L})) &= \frac{1}{|G|} \sum_P \text{tr}(g, \underline{\text{sw}} H^*(Z_s, R\Phi_{\alpha_1}\mathbb{Q}_l)) \text{tr}_M^B(g) \text{tr}_L^B(g), \\ \text{sw } H^*(X_s, R\Phi_{\alpha_1}\mathcal{F}_0) &= \frac{1}{|G|} \sum_P \text{tr}(g, \underline{\text{sw}} H^*(Z_s, R\Phi_{\alpha_1}\mathbb{Q}_l)) \text{tr}_M^B(g). \end{aligned}$$

Vu que $\text{tr}_L^B(g) = 1$ pour tout $g \in P$, cela termine la preuve de la Proposition 7.1.

LEMME 7.2 (Perfection). *Dans le groupe de Grothendieck des $\mathbb{F}_l[G]$ -modules modulo twists à la Tate, la classe du complexe $\underline{\text{sw}} H^*(Z_s, R\Phi_{\alpha_1}\mathbb{F}_l)$ est celle d'un complexe parfait.*

Démonstration. Prouvons le Lemme 7.2. Il suffit de montrer que dans le groupe de Grothendieck des $\mathbb{F}_l[H]$ -modules modulo twists, la classe de $H^*(Z_{1s}, R\Phi_{\alpha_1}\mathbb{F}_l)$ est celle d'un complexe parfait. Comme le morphisme de log-schémas fs $p : (Z_1, Z_1 - V) \rightarrow (Y, (Y_s)_{\text{red}} \cup D_Y)$ est galoisien de groupe H , le complexe de $\mathbb{F}_l[H]$ -modules $p_*R\Phi_{(Z_1, Z_1 - V)}^{\text{log}}\mathbb{F}_l$ est parfait ($R\Phi^{\text{log}}$ désignant les cycles évanescents logarithmiques, cf. [III02]). Notant ϵ le morphisme d'oubli de la log structure, on en déduit que le complexe de $\mathbb{F}_l[H]$ -modules $R\epsilon_*p_*R\Phi_{(Z_1, Z_1 - V)}^{\text{log}}\mathbb{F}_l = p_*R\Phi_{Z_1}R\epsilon_*\mathbb{F}_l$ est parfait. Or dans le groupe de Grothendieck des $\mathbb{F}_l[H]$ -modules sur Z_1 modulo twists, on a l'égalité des classes $[R\epsilon_*\mathbb{F}_l] = [\alpha_1\mathbb{F}_l]$. En effet, cela est vrai sur Z par pureté, ce qui induit sur Z_1 les égalités : $[\alpha_1\mathbb{F}_l] = [R\pi_*R\epsilon_*\mathbb{F}_l] = [R\epsilon_*R\pi_*^{\text{log}}\mathbb{F}_l] = [R\epsilon_*\mathbb{F}_l]$ (on a $\mathbb{F}_l \cong R\pi_*^{\text{log}}\mathbb{F}_l$ car π^{log} est un log éclatement, cf. [III02]). Il en résulte que la classe de $p_*R\Phi_{Z_1}\alpha_1\mathbb{F}_l$ est celle d'un complexe parfait, ce qui permet de conclure [SGA73b, Del77].

Remerciements

Ce travail a été effectué lors d'un post-doc à l'université de Nagoya financé par le programme COE. Je tiens à remercier ces institutions pour m'avoir offert d'excellentes conditions de travail, ainsi que les membres de l'université pour leur accueil chaleureux. Je remercie aussi très vivement A. Abbes, K. Fujiwara, L. Illusie, K. Kato et T. Saito pour de nombreuses discussions qui ont été très stimulantes pour moi. Enfin, je tiens à remercier tout spécialement K. Fujiwara pour sa très grande générosité.

REFERENCES

AS06 A. Abbes and T. Saito, *Analyse micro-locale l -adique en caractéristique $p > 0$: le cas d'un trait*. Preprint, 2006, Publ. Res. Inst. Math. Sci., to appear.

AS07 A. Abbes and T. Saito, *The characteristic class and ramification of an l -adic étale sheaf*, Invent. Math. **168** (2007), 567–612.

Blo87 S. Bloch, *Cycles on arithmetic schemes and Euler characteristics of curves*, in *Algebraic geometry*, Bowdoin, Brunswick, ME, 1985 (American Mathematical Society, Providence, RI, 1987), 421–450.

Del77 P. Deligne, *Cohomologie étale*, in *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie (SGA 4(1/2))*, Avec la collaboration de J. F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J. L. Verdier, Lecture Notes in Mathematics, vol. 569 (Springer, Berlin, 1977).

Ful98 W. Fulton, *Intersection theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3rd Series, A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 2 (Springer, Berlin, 1998).

- Ill02 L. Illusie, *An overview of the work of K. Fujiwara, K. Kato, and C. Nakayama on logarithmic étale cohomology*, *Astérisque* **279** (2002), 271–322 (Cohomologies p -adiques et applications arithmétiques, II).
- Kat89 K. Kato, *Swan conductors for characters of degree one in the imperfect residue field case*, in *Algebraic K-theory and algebraic number theory*, Honolulu, HI, 1987, Contemporary Mathematics, vol. 83 (American Mathematical Society, Providence, RI, 1989), 101–131.
- Kat94a K. Kato, *Class field theory, D -modules, and ramification on higher-dimensional schemes. I*, *Amer. J. Math.* **116**(4) (1994), 757–784.
- Kat94b K. Kato, *Toric singularities*, *Amer. J. Math.* **116** (1994), 1073–1099.
- KS04 K. Kato and T. Saito, *On the conductor formula of Bloch*, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (2004), 5–151.
- KS06 K. Kato and T. Saito, *Ramification theory of schemes over a local field*, Talk (2006).
- KS08 K. Kato and T. Saito, *Ramification theory for varieties over a perfect field*, *Ann. of Math.* (2) **168**(2) (2008), 33–96.
- KSS88 K. Kato, S. Saito and T. Saito, *Artin characters for algebraic surfaces*, *Amer. J. Math.* **110** (1988), 49–75.
- Mat97 S. Matsuda, *On the Swan conductor in positive characteristic*, *Amer. J. Math.* **119** (1997), 705–739.
- Sai87 T. Saito, *Vanishing cycles and geometry of curves over a discrete valuation ring*, *Amer. J. Math.* **109** (1987), 1043–1085.
- Sai91 T. Saito, *The Euler numbers of l -adic sheaves of rank 1 in positive characteristic*, in *Algebraic geometry and analytic geometry*, Tokyo, 1990, ICM-90 Satellite Conf. Proc. (Springer, Tokyo, 1991), 165–181.
- SGA73a *Groupes de monodromie en géométrie algébrique. II*, in *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1967–1969* (SGA 7 II), Dirigé par P. Deligne et N. Katz, Lecture Notes in Mathematics, vol. 340 (Springer, Berlin, 1973).
- SGA73b *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, vol. 3*, in *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1963–1964* (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier, Avec la collaboration de P. Deligne et B. Saint-Donat, Lecture Notes in Mathematics, vol. 305 (Springer, Berlin, 1973).
- SGA77 *Cohomologie l -adique et fonctions L* , in *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1965–1966* (SGA 5), Edité par Luc Illusie, Lecture Notes in Mathematics, vol. 589 (Springer, Berlin, 1977).
- Tsu07 T. Tsushima, *Localized GOS formula and conductor formula*. Preprint, 2007.
- Vid07 I. Vidal, *Formule de torsion pour le facteur epsilon d'un caractère sur une surface*. Preprint, 2007, Manuscripta Math., to appear.

Isabelle Vidal ividal@math.univ-paris13.fr

LAGA-Institut Galilée, Université Paris 13, 99 av. J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse, France