

LES EFFETS DE LA REFRACTION ATMOSPHERIQUE SUR LES COORDONNEES
TANGENTIELLES EN ASTROMETRIE (1)

J. Dommanget

Observatoire Royal de Belgique
Uccle, Bruxelles.

ABSTRACT

The astrometric plate reduction needs the knowledge of formulae expressing the transformation of the configuration of stellar positions on the celestial sphere into the corresponding observed figure of the photographic images on the plate. This transformation includes phenomena such as the atmospheric refraction, the optical distortion, the plate position on the instrument, etc. of which the relative importance may vary from one case to another and may lead thus to various formulae.

Among these phenomena, the atmospheric refraction seems to be one of the most important.

In this paper, we give expressions for the refracted tangential coordinates (generalisation of the standard coordinates) under the form :

$$X_r = X + a X_a + R_x ; \quad Y_r = Y + a Y_a + R_y$$

where X , Y are the unrefracted coordinates, a , the coefficient of the term of the first order of the classical expression for the atmospheric refraction, and R_x , R_y , the rests of the developments of X_r and Y_r respectively. The coefficients X_a and Y_a have simple expressions which are easily computed when one knows the celestial coordinates of both the tangential point and the star concerned.

One must first mention that any point of the sky may be chosen as celestial pole and that all formulae remain the same at the condition that pseudo-equatorial coordinates related to that pole are introduced.

Of course, the choice of the zenith as celestial pole introduces many simplifications, not only in the expressions X'_a , Y'_a , R'_x and R'_y of the corresponding expressions : X_a , Y_a , R_x and R_y , but also in these expressions themselves, because they are more easily written as

functions of the zenithal coefficients.

The aim of this study appears when giving finally for each of the above mentioned expressions, their maximum values, for different cases corresponding to given values of the field of the instrument (which may reach 90°) and various values of the zenithal distance of the center of the plate. It is important to show that the rests R_x , R_y , R'_x and R'_y which, in fact, are functions of the coefficients of the expression for the refraction, are generally not sensible to important errors on these coefficients and may thus be computed as constants when one knows approximated values of them. Thus, in the final expressions of the refracted tangential coordinates, only the coefficient a of the first term of the expression for the refraction must be introduced as an unknown. This is of great importance when establishing the formulae to be used in plate reduction. Also important is the knowledge of the order of magnitude of all the terms concerned for a given width of the field and a known zenithal distance. This may help in withdrawing some terms which necessarily appear to be considered as negligible in connection with the expected accuracy of the plate reduction.

I. INTRODUCTION

La réduction des clichés astrographiques implique l'usage de formules de transformation permettant le passage des positions des objets célestes, aux positions de leurs images sur le cliché et vice-versa. Le choix de ces formules peut varier d'un cas à l'autre suivant l'importance des phénomènes concourant à la transformation de la configuration céleste dans celle apparaissant sur le cliché. La connaissance des ordres de grandeur de ces phénomènes et des divers termes de leurs expressions est donc primordiale dans la recherche des formules de réduction à considérer. Parmi ces phénomènes, la réfraction atmosphérique joue un rôle particulièrement important.

Bien que de nombreuses études aient été consacrées aux effets de la réfraction atmosphérique sur la position des astres et sur leurs positions relatives dans tous systèmes de coordonnées tangentielles (2), nous nous proposons de reprendre ici ce problème dans le but de donner pour les coordonnées tangentielles réfractées, des expressions simples, formées de termes dont les ordres de grandeur sont aisément calculables à priori pour des champs de diverses étendues pouvant atteindre jusqu'à 45° autour de leurs centres.

Ce faisant, nous serons amené à discuter les expressions de l'effet de la réfraction dans le plan tangent à la sphère céleste pour diverses sortes de coordonnées tangentielles. Nous examinerons également la sensibilité des termes des développements considérés, à des variations petites des coefficients de la formule donnant la réfraction atmosphérique.

II. EXPRESSIONS DES COORDONNEES TANGENTIELLES (2) :

Nous préciserons avant tout la définition et les expressions des coordonnées tangentielles telles que nous les considérons ici.

Soit P, un point quelconque de la sphère céleste, défini comme pôle d'un système de coordonnées pseudo-équatoriales α, δ (fig. 1);

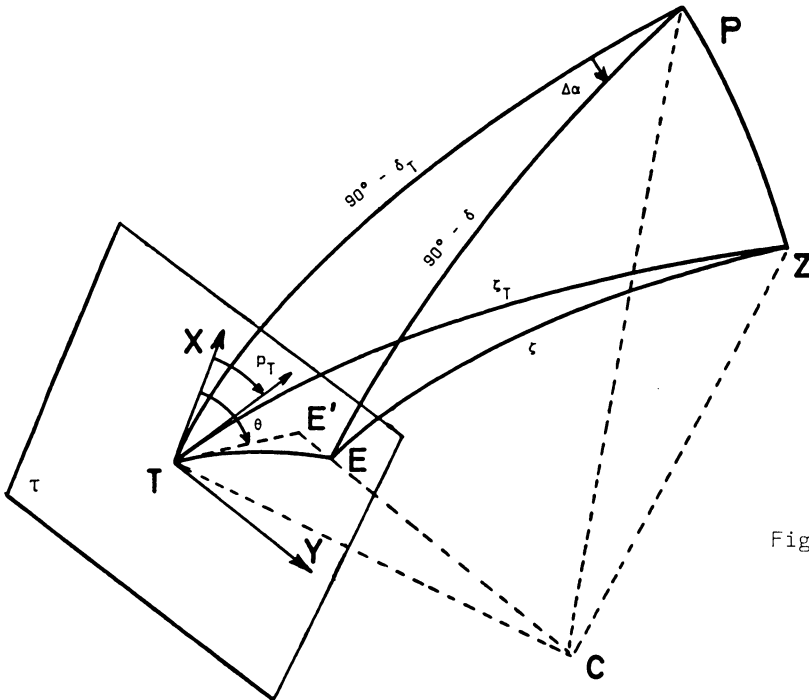


Fig. 1.

soient aussi T, un point de coordonnées (α_T, δ_T) où l'on considère un plan tangent à la sphère céleste et E, la position d'une étoile de coordonnées (α, δ) . Dans ce plan, on définit les coordonnées tangentielles de E comme étant les coordonnées rectangulaires X et Y de la projection de E dans ce plan, depuis le centre de la sphère, par rapport à des axes qui sont respectivement : la trace du plan du grand cercle passant par P et T et celle du plan qui lui est perpendiculaire au point T. Les sens positifs correspondent respectivement, pour l'axe X, à la direction du pôle P et, pour l'axe Y, à celle conférant au système T.XY, le sens direct pour un observateur situé au centre C de la sphère céleste. Ce dernier correspond également au sens croissant de la coordonnée pseudo-équatoriale α .

Si θ est l'angle dièdre des plans de grand cercle passant d'une part par T et E et d'autre part, par T et P, et compté positivement de TX vers TY, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \operatorname{tg} TE \cos \theta = \frac{\sin TE \cos \theta}{\cos TE} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Y = \operatorname{tg} TE \sin \theta = \frac{\sin TE \sin \theta}{\cos TE} \end{array} \right. \quad (2)$$

avec ($\Delta\alpha = \alpha - \alpha_T$) :

$$\cos TE = \sin \delta \sin \delta_T + \cos \delta \cos \delta_T \cos \Delta\alpha \quad (3)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin TE \sin \theta = \cos \delta \sin \Delta\alpha \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin TE \cos \theta = \sin \delta \cos \delta_T - \cos \delta \sin \delta_T \cos \Delta\alpha \end{array} \right. \quad (5)$$

Notons que l'arc TE est essentiellement positif.

Les expressions (1) à (5) sont classiques. Elles sont utilisées pour le calcul des coordonnées tangentielles X et Y.

Pour préciser l'aspect d'un nombre représentant l'une des coordonnées X ou Y, il faut remarquer que si toutes les étoiles sont situées à moins de 45° du point T ($\operatorname{tg} TE \leq 1$), les coordonnées tangentielles X et Y sont inférieures à 1 et si, de plus, les positions sont données avec une précision de 0,01, elles possèdent au maximum sept à huit décimales.

III. FORMULES DE LA REFRACTION

Si on se limite à des distances zénithales ne dépassant pas 75° , l'angle de réfraction r s'exprime par la relation :

$$r = a \operatorname{tg} \zeta + b \operatorname{tg}^3 \zeta \quad (6)$$

avec une précision théorique généralement de l'ordre de 0,01 à 0,02, pour autant que l'on adopte pour a et b , des valeurs correspondant à la pression p (en mm) et à la température t (en degrés Celsius) de l'air au sol, au moment de l'observation et données par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = + 0,024 + 0,079017 p - 0,08260 pt' \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b = + 0,0040 - 0,0001101 p + 0,000028 pt' \end{array} \right. \quad (8)$$

où $t' = \frac{t}{273 + t}$, ainsi que nous l'avons montré ailleurs ⁽³⁾. Quelques

valeurs de a et de b sont rassemblées dans le tableau I.

TABLEAU I

Coefficients a et b de l'expression (6) de la réfraction atmosphérique.

p \ t		-30°	0°	+30°
790mm	a	+70,503	+62,447	+55,987
	b	- 0,0857	- 0,0830	- 0,0808
640mm	a	+57,121	+50,595	+45,361
	b	- 0,0687	- 0,0665	- 0,0647
490mm	a	+43,739	+38,742	—
	b	- 0,0516	- 0,0499	—

Notons que les pressions à considérer sont celles trouvées en apportant aux valeurs observées, d'une part, les corrections de gravité dues à l'altitude et à la latitude du lieu et d'autre part, celles relatives à la température du baromètre, comme indiqué dans la Connaissance des Temps.

Les valeurs extrêmes de a et de b susceptibles d'être rencontrées sont donc respectivement, en valeurs absolues :

$$\left\{ \begin{array}{l} |a| = 71'' = 3,4 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ |b| = 0,086 = 4,2 \cdot 10^{-7} \text{ rad} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} |a| = 39'' = 1,9 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ |b| = 0,050 = 2,4 \cdot 10^{-7} \text{ rad} \end{array} \right.$$

tandis que les valeurs correspondant à la réfraction normale (p = 760 mm et t = 0°) sont de l'ordre de :

$$\left\{ \begin{array}{l} |a| = 60'' = 2,9 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ |b| = 0,080 = 3,9 \cdot 10^{-7} \text{ rad} \end{array} \right.$$

En tenant compte de l'expression (6), on peut développer sin r en série, fonction de a et de b, exprimés en radians. En négligeant ensuite les termes plus petits que $1 \cdot 10^{-8}$ dans les cas extrêmes où $\zeta = 75^\circ$, c'est-à-dire où $\text{tg } \zeta = 3,7$, on a :

$$\sin r = a \text{ tg } \zeta + b \text{ tg}^3 \zeta \tag{9}$$

De même, pour cos r, on trouve :

$$\cos r = 1 - \frac{a^2}{2} \text{ tg}^2 \zeta \tag{10}$$

avec une précision équivalent à celle des relations (6) et (9).

IV. EXPRESSIONS DE QUELQUES LIGNES TRIGONOMETRIQUES RELATIVES AUX POSITIONS REFRACTÉES DES ASTRES :

IV.1. Remarque préliminaire :

Dans ce qui suit, nous serons amené à établir plusieurs fois le développement en série de l'une des fonctions $\sin g_r$ et $\cos g_r$ d'une grandeur angulaire g affectée de la réfraction (g_r), alors que le développement de l'autre est connu. Nous croyons utile de rappeler que si l'on a :

$$\sin g_r = \sin g + a S + R_s$$

où a est le coefficient principal de la réfraction et R_s , le reste du développement, on a nécessairement :

$$\cos g_r = \cos g + a C + R_c$$

avec :

$$C \cos g = - S \sin g \quad (11)$$

et vice-versa. La relation (11) s'établit facilement en égalant à zéro, le coefficient du terme en a de l'expression : $\sin^2 g_r + \cos^2 g_r - 1$, identiquement nulle.

IV.2. Formules générales :

IV.2.1. Cas d'un arc sur la sphère : Soient Z le zénith et A, B , les positions de deux astres sur le ciel (fig. 2). Désignons par A_r et B_r , les positions réfractées de ces astres.

Dans le triangle sphérique $A_r B_r Z$, on a :

$$\cos A_r B_r = \cos(\zeta_A - r_A) \cos(\zeta_B - r_B) + \sin(\zeta_A - r_A) \sin(\zeta_B - r_B) \cos \Delta A$$

Or, en tenant compte des expressions (9) et (10), on trouve d'une part :

$$\begin{aligned} \cos(\zeta - r) &= \cos \zeta \cos r + \sin \zeta \sin r \\ &= \cos \zeta + a \sin \zeta \operatorname{tg} \zeta + (b \sin \zeta \operatorname{tg} \zeta - \frac{a^2 \cos \zeta}{2}) \operatorname{tg}^2 \zeta + \dots \end{aligned}$$

que l'on peut poser :

$$= \cos \zeta + a C + R_c$$

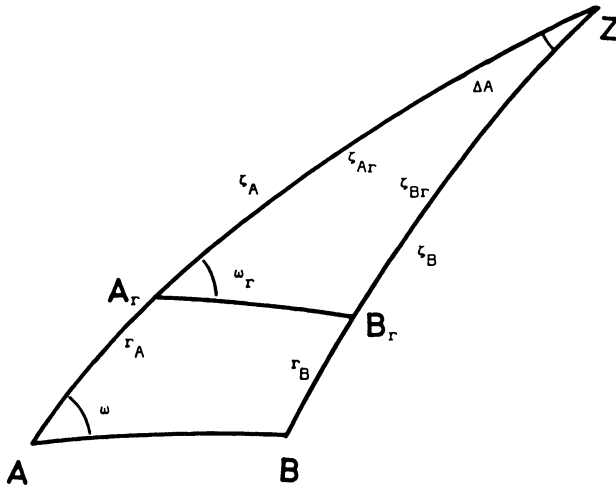


Fig. 2.

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \sin(\zeta - r) &= \sin \zeta \cos r - \cos \zeta \sin r \\ &= \sin \zeta - a \sin \zeta - \left(\frac{a^2}{2} + b\right) \sin \zeta \operatorname{tg}^2 \zeta + \dots \end{aligned}$$

que l'on peut poser :

$$= \sin \zeta + a S + R_S$$

Il vient dès lors :

$$\begin{aligned} \cos A_{r_r} B_{r_r} &= (\cos \zeta_A + a C_A + R_{C_A})(\cos \zeta_B + a C_B + R_{C_B}) + \\ &+ (\sin \zeta_A + a S_A + R_{S_A})(\sin \zeta_B + a S_B + R_{S_B}) \cos \Delta A \end{aligned}$$

que l'on écrira provisoirement sous la forme :

$$\cos A_{r_r} B_{r_r} = \cos AB + a C + R_{C,AB}$$

en posant :

$$\begin{aligned} C &= C_A \cos \zeta_B + C_B \cos \zeta_A + (S_A \sin \zeta_B + S_B \sin \zeta_A) \cos \Delta A \\ &= \frac{\sin^2(\zeta_A - \zeta_B)}{\cos \zeta_A \cos \zeta_B} + 2 \sin \zeta_A \sin \zeta_B (1 - \cos \Delta A) \end{aligned} \tag{12}$$

et

$$R_{C,AB} = a^2 (C_A C_B + S_A S_B \cos \Delta A) + (R_{CA} \cos \zeta_B + R_{CB} \cos \zeta_A) + (R_{SA} \sin \zeta_B + R_{SB} \sin \zeta_A) \cos \Delta A + \dots$$

Remarquons en passant que, sous les conditions $\zeta_A, \zeta_B \leq 75^\circ$, on a

$a C_A$ et $a C_B$	} d'un ordre de grandeur inférieur ou égal respectivement à	}	}	1.10^{-3}
$a S_A$ et $a S_B$		}	}	3.10^{-4}
R_{CA} et R_{CB}		}	}	2.10^{-5}
R_{SA} et R_{SB}		}	}	3.10^{-6}

Dès lors, le terme $a C$ du développement de $\cos A_r B_r$ atteint au plus un ordre de grandeur de 2.10^{-3} tandis que le reste $R_{C,AB}$ - dont l'expression est compliquée, puisque fonction de a^2 , de b et de puissances supérieures - a une valeur qui ne peut dépasser en aucune façon l'ordre de grandeur du maximum de son terme principal, soit : 4.10^{-5} , toujours sous les conditions $\zeta_A, \zeta_B \leq 75^\circ$.

En tenant compte ensuite de la relation

$$\sin \zeta_A \sin \zeta_B \cos \Delta A = \cos AB - \cos \zeta_A \cos \zeta_B,$$

(12) peut s'écrire :

$$C = \frac{\cos^2 \zeta_B + \cos^2 \zeta_A - 2 \cos \zeta_A \cos \zeta_B \cos AB}{\cos \zeta_A \cos \zeta_B}$$

et comme :

$$\cos \zeta_B = \cos \zeta_A \cos AB + \sin \zeta_A \sin AB \cos \omega,$$

il vient finalement après quelques simplifications faciles :

$$C = \frac{\sin^2 AB (1 - \sin^2 \zeta_A \sin^2 \omega)}{\cos \zeta_A \cos \zeta_B}$$

L'expression de $\cos A_{r_r} B_r$ se présente alors comme suit :

$$\cos A_{r_r} B_r = \cos AB + a \frac{\sin^2 AB}{\cos AB} U_{AB} + R_{c,AB} \tag{13}$$

en posant

$$U_{AB} = \frac{\cos AB (1 - \sin^2 \zeta_A \sin^2 \omega)}{\cos \zeta_A \cos \zeta_B} \tag{14}$$

le choix de la forme (13) s'imposant, comme nous aurons l'occasion de le constater, pour des raisons d'homogénéité et de simplification notable des relations que nous établirons par la suite. Remarquons que U_{AB} a le signe de $\cos AB$ et dès lors, que le coefficient de a dans (13), est toujours positif ($AB < 90^\circ$).

Par application de la relation (11), on trouve ensuite :

$$\sin A_{r_r} B_r = \sin AB - a \sin AB \cdot U_{AB} + R_{s,AB} \tag{15}$$

où $R_{s,AB}$ est le reste du développement en série du sinus et comporte, comme $R_{c,AB}$, des termes en a^2 , en b et de puissances supérieures.

Par ailleurs, on établit encore facilement la relation suivante :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} A_{r_r} B_r &= \operatorname{tg} AB (1 - a U_{AB} + \dots) (1 - a U_{AB} \operatorname{tg}^2 AB + \dots) \\ &= \operatorname{tg} AB - a \frac{\operatorname{tg} AB}{\cos^2 AB} U_{AB} + R_{t,AB} \end{aligned} \tag{16}$$

sous la condition que AB soit peu voisin du point de discontinuité $AB = 90^\circ$, de la fonction $\operatorname{tg} AB$.

IV.2.2. Cas d'un angle dièdre : Considérons l'angle ω dont un des côtés passe par Z (fig. 2). On a :

$$\frac{\sin \omega_r}{\sin \zeta_{Br}} = \frac{\sin \Delta A}{\sin A_{r_r} B_r}$$

et

$$\frac{\sin \omega}{\sin \zeta_B} = \frac{\sin \Delta A}{\sin AB}$$

On en déduit :

$$\sin \omega_r = \sin \omega \frac{\sin \zeta_{Br}}{\sin \zeta_B} \cdot \frac{\sin AB}{\sin A_{r_r} B_r}$$

Or, par application de (15) à l'arc BZ et en tenant compte de (14), on a :

$$\sin \zeta_{Br} = \sin \zeta_B (1 - a + \dots)$$

En se servant ensuite de cette expression, ainsi que de l'expression (15) de $\sin A_r B_r$, il vient :

$$\sin \omega_r = \sin \omega - a \sin \omega (1 - U_{AB}) + R_{s,\omega} \quad (17)$$

Par ailleurs, de la relation (11), on déduit l'expression :

$$\cos \omega_r = \cos \omega + a \frac{\sin^2 \omega}{\cos \omega} (1 - U_{AB}) + R_{c,\omega} \quad (18)$$

valable, quel que soit ω , puisque pour $\omega = 90^\circ$, on trouve : $1 - U_{AB} = 0$ et que l'expression $(1 - U_{AB})/\cos \omega$ tend vers : $\sin AB \sin \zeta_A / \cos \zeta_B$.

IV.3. Application à quelques lignes trigonométriques intéressantes pour la présente étude :

Par application de certaines des formules établies ci-dessus, on trouve :

a) pour l'arc TE (supposé $\leq 45^\circ$) :

d'après la formule (16) :

$$\operatorname{tg} T_r E_r = \operatorname{tg} TE - a \frac{\operatorname{tg} TE}{\cos^2 TE} V + R_{t,TE} \quad (19)$$

en posant

$$V = U_{TE} = \frac{\cos TE (1 - \sin^2 \zeta_T \sin^2 \theta')}{\cos \zeta_T \cos \zeta} \quad (20)$$

b) pour l'angle $\theta' = ZTE$:

d'après les formules (17) et (18) :

$$\sin \theta'_r = \sin \theta' - a \sin \theta' (1 - V) + R_{s,\theta'} \quad (21)$$

et

$$\cos \theta'_r = \cos \theta' + a \frac{\sin^2 \theta'}{\cos \theta'} (1 - V) + R_{c,\theta'} \quad (22)$$

c) pour l'angle parallaxique p_T :

d'après les formules (17) et (18) :

$$\sin p_{Tr} = \sin p_T - a \sin p_T (1 - W) + R_{s,p_T} \quad (23)$$

et

$$\cos P_{Tr} = \cos p_T + a \frac{\sin^2 p_T}{\cos p_T} (1 - W) + R_{c,p_T} \tag{24}$$

avec

$$W = U_{TP} = \frac{\sin \delta_T (1 - \sin^2 \zeta_T \sin^2 p_T)}{\cos \zeta_T \cos PZ} \tag{25}$$

d) pour l'angle de position $\theta = p_T + \theta'$:

$$\sin \theta_r = \sin p_{Tr} \cos \theta'_r + \cos p_{Tr} \sin \theta'_r$$

et en tenant compte des relations (21) à (24) :

$$\sin \theta_r = \sin \theta - a \cos \theta \left\{ \text{tg } \theta' (1 - V) + \text{tg } p_T (1 - W) \right\} + R_{s,\theta} \tag{26}$$

De même, on trouve :

$$\cos \theta_r = \cos \theta + a \sin \theta \left\{ \text{tg } \theta' (1 - V) + \text{tg } p_T (1 - W) \right\} + R_{c,\theta} \tag{27}$$

L'expression de V est toujours positive (puisque TE est supposé au plus égal à 45°), tandis que W a le signe de δ_T .

V. EXPRESSIONS GENERALES DES COORDONNEES TANGENTIELLES REFRACTEES :

A partir des formules que nous venons d'établir, il est maintenant aisé d'exprimer les coordonnées tangentiellles réfractées en fonction de ces mêmes coordonnées non réfractées et des coefficients de la réfraction.

On trouve :

$$X_r = \text{tg } T_r E_r \cos \theta_r = X + a X_a + R_x \tag{28}$$

avec :

$$X_a = - \frac{\text{tg } TE}{\cos^2 TE} \cos \theta \cdot V + \text{tg } TE \sin \theta \left\{ \text{tg } \theta' (1 - V) + \text{tg } p_T (1 - W) \right\} \tag{29}$$

et

$$R_x = \text{fonction de } a^2, a^3, \dots b; b^2, \dots a^i b^j, \dots$$

ainsi que :

$$Y_r = \text{tg } T_r E_r \sin \theta_r = Y + a Y_a + R_y \tag{30}$$

avec :

$$Y_a = - \frac{\operatorname{tg} TE}{\cos^2 TE} \sin \theta \cdot V - \operatorname{tg} TE \cos \theta \left\{ \operatorname{tg} \theta' (1-V) + \operatorname{tg} p_T (1-W) \right\} \quad (31)$$

et

$$R_y = \text{fonction de } a^2, a^3, \dots, b, b^2, \dots, a^i b^j, \dots$$

VI. COORDONNÉES TANGENTIELLES POLAIRES (Standard) ET ZÉNITHALES :

Telles que nous les avons traitées jusqu'ici, les coordonnées tangentielles X et Y ont un caractère général parce qu'elles sont rapportées à un point P quelconque du ciel auquel on rattache un système de coordonnées (α, δ) pseudo-équatoriales.

Mais il est, bien entendu, deux positions du point P particulièrement intéressantes. Ce sont le pôle céleste et le zénith du lieu d'observation.

Si l'on impose au point P d'être le pôle céleste, on aura, dans l'hémisphère boréal : $PZ = 90^\circ - \phi$ et les coordonnées tangentielles correspondantes pourraient être appelées des coordonnées tangentielles polaires, lesquelles se confondent avec les coordonnées standard lorsque l'on se donne un équinoxe standard.

Dans l'hémisphère austral, on a : $PZ = 90^\circ + \phi$, car le pôle à choisir ne peut plus être le pôle céleste nord, mais bien le pôle céleste sud, le seul visible dans le ciel et auquel il est permis d'appliquer la réfraction atmosphérique (voir VIII).

Pour faciliter la présentation de cette étude, nous poursuivrons d'abord les développements dans le cas d'une latitude boréale, l'autre cas s'en déduisant aisément comme indiqué en X.

Si le point P est confondu avec le zénith Z , les formules établies ci-dessus se simplifient considérablement et permettent même des simplifications des expressions apparaissant dans le cas général comme nous allons le voir. Nous proposons d'appeler ce système, le système de coordonnées tangentielles zénithales.

Dans ce cas, $PZ = 0^\circ$, $p_T = 0^\circ$ (d'où : $\theta = \theta'$) et $\delta = 90^\circ - \zeta$. On trouve alors :

1) coordonnées tangentielles zénithales :

$$X' = \operatorname{tg} TE \cos \theta' \quad (32)$$

$$Y' = \operatorname{tg} TE \sin \theta' \quad (33)$$

2) coordonnées tangentielle zénithales réfractées :

$$X'_r = X' + a X'_a + R'_x \tag{34}$$

avec

$$X'_a = \frac{\text{tg TE}}{\cos^2 \text{TE} \cos \theta'} \left\{ \cos^2 \text{TE} \sin^2 \theta' - V (1 - \sin^2 \theta' \sin^2 \text{TE}) \right\}$$

et en remplaçant V par son expression (20) :

$$X'_a = \frac{\text{tg TE}}{\cos^2 \text{TE} \cos \theta'} \left\{ \begin{aligned} &\cos^2 \text{TE} \sin^2 \theta' + \\ &\frac{\cos \text{TE} (1 - \sin^2 \zeta_T \sin^2 \theta') (1 - \sin^2 \text{TE} \sin^2 \theta')}{\cos \zeta_T \cos \zeta} \end{aligned} \right\}$$

Par réduction au même dénominateur et par simplification du numérateur ainsi formé, en considérant l'expression (fig. 1) :

$$\cos \zeta = \cos \zeta_T \cos \text{TE} + \sin \zeta_T \sin \text{TE} \cos \theta' \tag{35}$$

une première fois, dans le sens d'une substitution de $\cos \zeta$ par son expression et une seconde fois, dans celui - inverse - d'une simplification d'écriture, il vient :

$$X'_a = \frac{\sin \text{TE}}{\cos \zeta_T \cos \zeta \cos^2 \text{TE}} (\cos \zeta \sin \zeta_T \sin \text{TE} \sin^2 \theta' - \cos \theta') \tag{36}$$

En éliminant $\sin \theta'$ et $\cos \theta'$ par l'emploi de (32) et de (33), cette dernière expression s'écrit encore :

$$X'_a = \gamma'^2 \text{tg} \zeta_T - \frac{X'}{\cos \zeta_T \cos \zeta \cos \text{TE}} \tag{37}$$

De même pour l'ordonnée Y', on obtient :

$$Y'_r = Y' + a Y'_a + R'_y \tag{38}$$

avec :

$$Y'_a = - \frac{\text{tg TE} \sin \theta'}{\cos^2 \text{TE}} (\cos^2 \text{TE} + V \sin^2 \text{TE})$$

ou, en remplaçant V par son expression (20), en réduisant au même dénominateur et en se servant de la relation (35) comme pour X'_a :

$$Y'_a = - \frac{\sin \text{TE} \sin \theta'}{\cos \zeta_T \cos \zeta \cos^2 \text{TE}} (\cos^2 \zeta_T + \cos \zeta \sin \zeta_T \sin \text{TE} \cos \theta') \tag{39}$$

En substituant à $\sin \theta'$ et à $\cos \theta'$, leurs expressions tirées de (32) et de (33), Y'_a peut encore s'écrire :

$$Y'_a = - Y' \frac{\cos \zeta_T}{\cos \zeta \cos TE} - X' Y' \operatorname{tg} \zeta_T \quad (40)$$

Remarquons que l'on peut encore remplacer dans (37) et (40), $\cos \zeta$ par :

$$\cos \zeta = \cos TE (\cos \zeta_T + X' \sin \zeta_T)$$

et l'on trouve respectivement :

$$X'_a = Y'^2 \operatorname{tg} \zeta_T - \frac{X'}{\cos^2 TE \cos^2 \zeta_T (1 + X' \operatorname{tg} \zeta_T)} \quad (41)$$

et

$$Y'_a = - \frac{Y'}{\cos^2 TE (1 + X' \operatorname{tg} \zeta_T)} - X' Y' \operatorname{tg} \zeta_T \quad (42)$$

VII. EXPRESSIONS CANONIQUES DES COEFFICIENTS X'_a ET Y'_a :

La considération des relations (32) à (40) relatives aux coordonnées tangentielle zénithales, permet de conférer aux coefficients X'_a et Y'_a , des formes canoniques avantageuses.

On les obtient facilement, soit par voie géométrique, soit par voie algébrique.

1) Par voie géométrique, on remarquera tout d'abord (fig. 3) que l'on a, pour la coordonnée X ⁽⁴⁾ :

$$X_r = X'_r \cos p_{Tr} - Y'_r \sin p_{Tr}$$

Ensuite, par les relations (34) et (37) d'une part, et (24) et (23) d'autre part, il vient pour le coefficient X'_a :

$$X'_a = (X'_a \cos p_T - Y'_a \sin p_T) + \operatorname{tg} p_T (1 - W) (X' \sin p_T + Y' \cos p_T)$$

En remplaçant d'abord W par son expression (25), puis en considérant pour $\cos PZ$, son expression (fig. 1) :

$$\cos PZ = \cos \zeta_T \sin \delta_T + \sin \zeta_T \cos \delta_T \cos p_T \quad (43)$$

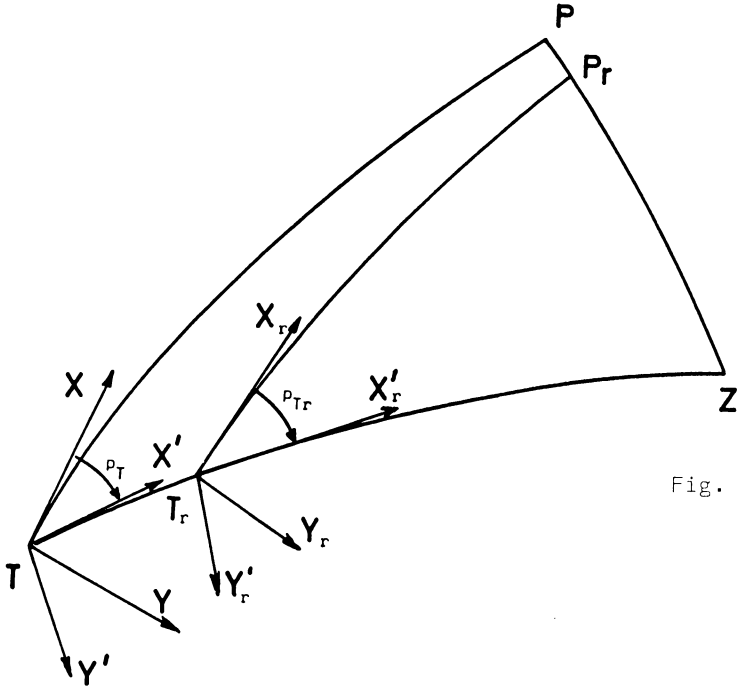


Fig. 3.

et en posant enfin :

$$K = - \cos \zeta_T \cos \delta_T + \sin \zeta_T \sin \delta_T \cos p_T \tag{44}$$

il vient :

$$X_a = (X'_a \cos p_T - Y'_a \sin p_T) - \sin p_T \operatorname{tg} \zeta_T \frac{K}{\cos PZ} (X' \sin p_T + Y' \cos p_T) \tag{45}$$

De même, on trouve pour Y_a :

$$Y_a = (X'_a \sin p_T + Y'_a \cos p_T) + \sin p_T \operatorname{tg} \zeta_T \frac{K}{\cos PZ} (X' \cos p_T - Y' \sin p_T) \tag{46}$$

2) Ces relations s'établissent algébriquement, en remplaçant dans les expressions (29) et (31), θ par $\theta' + p_T$.

VIII. CHOIX DES COORDONNEES TANGENTIELLES CONVENANT LE MIEUX A LA
 REDUCTION DES CLICHES - ORDRES DE GRANDEUR DE X'_a , Y'_a , R'_x ET R'_y
 ET DE X_a , Y_a , R_x ET R_y :

VIII.1. Considérations générales :

Le choix des formules de réduction des clichés astrographiques dépend des termes que leurs ordres de grandeur obligent à retenir dans les développements en série exprimant les effets des phénomènes à prendre en considération. Il est donc indispensable dans chaque cas, de prévoir ces ordres de grandeur, lesquels varient d'un cliché à l'autre en fonction de l'instrument utilisé (champ, distorsion), de la zone céleste photographiée (distance zénithale) et du lieu d'observation (position du pôle). En particulier, en ce qui concerne la réfraction atmosphérique, il y a donc lieu de connaître les ordres de grandeur des coefficients X_a et Y_a et des restes R_x et R_y , des expressions (28) et (30).

Or, à l'examen des expressions canoniques (45) et (46) de X_a et de Y_a , il apparaît que ces coefficients peuvent devenir relativement grands dans certains cas particuliers. En effet, pour un point T donné et une valeur maximale imposée de TE, correspondant à l'importance du champ instrumental, X_a et Y_a varient non seulement en fonction de θ , mais aussi en fonction de la position du pôle (ρ_T et δ_T) laquelle peut conduire à des valeurs de $\cos PZ$ voisines de zéro.

A ce sujet, une remarque importante paraît devoir être faite ici : elle concerne la définition même du système des coordonnées tangentielles réfractées. En effet, ces coordonnées dépendent essentiellement de la définition de l'orientation de l'axe X_T , laquelle peut se faire relativement, soit au pôle non réfracté, soit au pôle réfracté.

Dans le premier cas, le pôle réfracté est un élément commun à tous les systèmes de coordonnées tangentielles réfractées, mais il y apparaît comme un point de discontinuité particulièrement gênant lors de réductions de clichés pris dans ses environs, car les développements en séries considérés dans le problème, y perdent toute leur signification.

Dans le second cas, - uniquement considéré ici - cet inconvénient est éliminé, mais il apparaît alors que, dans les régions équatoriales où le pôle céleste, sud ou nord, peut être situé à moins de 15° de l'horizon, PZ est supérieur à 75° et la relation (6) donnant la réfraction, n'est plus applicable au pôle, dans les conditions où nous avons développé la présente étude. Mathématiquement d'ailleurs, on obtient alors des valeurs tendant vers l' ∞ , pour les seconds termes de (45) et de (46) - termes que l'on pourrait appeler les termes polaires - et dès lors aussi, pour X_a et Y_a .

Aussi, devant l'impossibilité de généralisation totale dans un cas comme dans l'autre, c'est la considération du système de coordonnées

tangentielles zénithales - où le pôle, confondu avec le zénith, ne subit plus aucun effet dû à la réfraction - qui s'impose en premier lieu. Elle exigera chaque fois, bien entendu, une transformation de coordonnées (X,Y) en (X',Y') avant de procéder à la réduction d'un cliché, puis une transformation inverse pour revenir au système des coordonnées équatoriales de départ.

Ce sont alors les expressions (34) et (38) qu'il y a lieu de retenir ainsi que les ordres de grandeur des plus grandes valeurs de X'_a et de Y'_a et aussi de R'_x et de R'_y , qu'il y a lieu de connaître.

VIII.2. Maximums de X'_a et de Y'_a :

L'expression du maximum de X'_a , pour toutes valeurs données de ζ_t et de TE, s'établit facilement. En effet, d'après (36), on a :

$$\frac{\partial X'_a}{\partial \theta'} = \frac{\sin TE}{\cos \zeta_T \cos^2 TE} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta'} \left[\sin \zeta_T \sin TE \sin^2 \theta' - \frac{\cos \theta'}{\cos \zeta} \right] \right\}$$

et, en tenant compte de (35) :

$$= \frac{\sin TE \sin \theta'}{\cos \zeta_T \cos^2 TE} \cdot \frac{2 \sin TE \sin \zeta_T \cos \theta' \cos^2 \zeta + \cos \zeta_T \cos TE}{\cos^2 \zeta} \tag{47}$$

Or, le numérateur du second facteur de (47) est positif dans tout l'intervalle de variation de ζ , de $\zeta_T - TE$ à $\zeta_T + TE$, bornes comprises, et ne s'y annule donc pas.

En effet :

a) pour $\zeta = \zeta_T - TE$ ($\theta' = 0^\circ$) :

ce numérateur vaut :

$$2 \sin TE \sin \zeta_T \cos^2 (\zeta_T - TE) + \cos \zeta_T \cos TE$$

et est toujours positif, puisque tous les éléments qui le composent le sont (TE essentiellement positif), et :

pour $\zeta = \zeta_T + TE$ ($\theta' = \pm 180^\circ$) :

il vaut :

$$- 2 \sin TE \sin \zeta_T \cos^2 (\zeta_T + TE) + \cos \zeta_T \cos TE$$

et est également toujours positif. En effet, on a d'une part :

$$2 \sin TE \cos TE \leq 1 \quad (\text{si } TE \leq 45^\circ)$$

d'où :

$$2 \sin TE \sin \zeta_T \cos TE \cos \zeta_T \leq 1$$

et d'autre part :

$$\cos (\zeta_T + TE) < \cos \zeta_T \cos TE$$

(puisque $\sin \zeta_T \sin TE > 0$). Ces deux dernières inégalités permettent ensuite d'écrire la suivante :

$$2 \sin TE \sin \zeta_T \cos (\zeta_T + TE) < 1$$

d'où, par multiplication membre à membre avec la seconde, l'on tire :

$$2 \sin TE \sin \zeta_T \cos^2 (\zeta_T + TE) < \cos \zeta_T \cos TE$$

b) le numérateur dont il est question, est régulièrement décroissant de $\zeta = \zeta_T - TE$ à $\zeta = \zeta_T + TE$, comme le sont les fonctions $\cos \theta'$ et $\cos^2 \zeta$.

L'expression (47) s'annule donc seulement pour :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta' = 0^\circ \\ \text{et pour} \\ \theta' = \pm 180^\circ \end{array} \right. \quad \text{et donc pour :} \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta = \zeta_T - TE \\ \text{et pour} \\ \zeta = \zeta_T + TE \end{array} \right. \quad (48)$$

c'est-à-dire lorsque le point E se trouve sur le grand cercle vertical passant par T.

On trouve alors à partir de (36), pour extremums de X'_a , l'expression :

$$X'_a = \frac{\mp \sin TE}{\cos \zeta_T \cos (\zeta_T \mp TE) \cos^2 TE}$$

De ces deux extremums, c'est le maximum - algébriquement parlant - qui l'emporte en valeur absolue et l'on a finalement :

$$\left| X'_a \right|_{\max} = \frac{\sin TE}{\cos \zeta_T \cos (\zeta_T + TE) \cos^2 TE} \quad (49)$$

Les valeurs de cette expression sont données dans le tableau II pour diverses valeurs de ζ_T et de TE (avec $\zeta_T + TE \leq 75^\circ$).

Quant au maximum de $|Y'_a|$, il est solution d'une équation assez compliquée du quatrième degré en $\cos \theta'$, solution dont nous n'avons pu

TABLEAU II
 Maximums de $|X'_a|$

ζ_T TE	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	74°
1°	0,017	0,018	0,020	0,024	0,030	0,043	0,072	0,16	0,24
5°	0,088	0,092	0,10	0,12	0,16	0,24	0,42	0,99	
10°	0,18	0,19	0,22	0,27	0,36	0,56	1,0		
15°	0,29	0,31	0,36	0,45	0,63	1,0	2,1		
20°	0,41	0,45	0,54	0,70	1,0	1,8			
25°	0,57	0,64	0,77	1,0	1,6	3,1			
30°	0,77	0,88	1,1	1,5	2,5				
35°	1,0	1,2	1,6	2,3	4,3				
40°	1,4	1,7	2,3	3,7					
45°	2,0	2,5	3,6	6,3					

$\zeta_T + TE > 75^\circ$

TABLEAU III
 Maximums de $|Y'_a|$

ζ_T TE	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	74°
1°	0,017	0,017	0,017	0,017	0,017	0,017	0,017	0,017	0,017
5°	0,088	0,088	0,088	0,088	0,088	0,088	0,088	0,088	
10°	0,18	0,18	0,18	0,18	0,18	0,18	0,18		
15°	0,29	0,29	0,29	0,29	0,29	0,29	0,29		
20°	0,41	0,41	0,41	0,41	0,41	0,41			
25°	0,57	0,57	0,57	0,57	0,57	0,58			
30°	0,77	0,77	0,77	0,77	0,78				
35°	1,0	1,0	1,0	1,1	1,1				
40°	1,4	1,4	1,4	1,5					
45°	2,0	2,0	2,0	2,2					

$\zeta_T + TE > 75^\circ$

établir l'expression. Les maximums donnés dans le tableau III ont été obtenus en calculant à l'aide d'un ordinateur, les valeurs de Y'_a pour toutes valeurs de θ' de 10° en 10° , comprises entre 0° et 180° (Y'_a change simplement de signe pour θ' compris entre 180° et 360°).

On constate que :

$$|Y'_a|_{\max} \leq |X'_a|_{\max} \quad (50)$$

pour toutes valeurs tabulées de TE et de ζ_T .

VIII.3. Maximums de R'_x et de R'_y :

Les restes R'_x et R'_y ont des expressions compliquées et celles de leurs extrémums ne le sont pas moins. Aussi, la seule façon pratique d'en connaître les ordres de grandeur, est de procéder à l'aide d'un ordinateur, au calcul de diverses valeurs de ces restes, comme indiqué ci-dessus pour Y'_a , pour des valeurs convenablement échelonnées de ζ_T , de TE et de θ' . Ainsi, en faisant varier θ' de 10° en 10° , nous avons pu établir les tableaux IV et V pour des valeurs de ζ_T et de TE identiques à celles considérées dans les tableaux II et III.

Mais comme on ne possède pas les expressions de ces restes, on les calcule par les relations (34) et (38), mises sous les formes :

$$R'_x = X'_r - X' - a X'_a \quad (51)$$

$$R'_y = Y'_r - Y' - a Y'_a \quad (52)$$

où X'_r et Y'_r sont calculées comme X' et Y' , par les relations (1) à (5), mais après correction des coordonnées de T et de E, par application de la formule de réfraction (6) et en adoptant pour a et b, les valeurs correspondant à la réfraction normale ($p = 760$ mm; $t = 0^\circ$). Pour des valeurs différentes, celles de R'_x et de R'_y changent peu et comme ce sont ici des ordres de grandeur que l'on cherche, les tableaux IV et V reflètent correctement la situation. Nous discuterons plus loin la sensibilité des restes R'_x et R'_y , aux variations admissibles de a et de b et sa signification quant à l'intérêt des formules proposées.

On constate aussi que l'on a :

$$|R'_y|_{\max} \leq |R'_x|_{\max} \quad (53)$$

pour toutes valeurs tabulées de TE et de ζ_T ;

VIII.4. Remarques :

Lorsque le pôle céleste n'est pas trop éloigné du zénith, c'est-à-dire sous des latitudes relativement élevées, les ordres de grandeur des

TABLEAU IV

Maximums de $|R_x'| \cdot 10^7$, calculés pour une réfraction normale correspondant à : $a = + 0,00029$ rad. et $b = - 3,9 \cdot 10^{-7}$ rad.

TE \ ζ_T	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	74°
1°	0,0	0,0	0,0	0,1	0,3	0,7	2,6	14,6	37,3
5°	0,0	0,1	0,2	0,6	1,6	4,8	18,3	122,	
10°	0,0	0,2	0,6	1,6	4,4	14,1	62,6		
15°	0,1	0,4	1,3	3,4	9,8	34,3	196,		
20°	0,3	0,9	2,5	6,8	20,6	84,9			
25°	0,6	1,7	4,7	13,2	44,8	241,			
30°	1,2	3,3	9,0	26,8	107,				
35°	2,4	6,4	17,6	58,3	305,				
40°	4,8	12,4	36,4	142,					
45°	9,5	25,2	81,8	420,					

$\zeta_T + TE > 75^\circ$

TABLEAU V

Maximums de $|R_y'| \cdot 10^7$, calculés pour une réfraction normale correspondant à : $a = + 0,00029$ rad. et $b = - 3,9 \cdot 10^{-7}$ rad.

TE \ ζ_T	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	74°
1°	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,2	0,5	0,8
5°	0,0	0,0	0,0	0,1	0,2	0,5	1,0	2,9	
10°	0,0	0,1	0,1	0,3	0,6	1,2	3,0		
15°	0,1	0,2	0,3	0,7	1,3	3,0	9,2		
20°	0,3	0,4	0,7	1,4	2,8	7,2			
25°	0,6	0,8	1,4	2,7	6,2	20,3			
30°	1,2	1,6	2,8	5,6	14,5				
35°	2,4	3,2	5,5	12,0	39,4				
40°	4,8	6,2	11,3	28,2					
45°	9,5	12,5	24,9	78,0					

$\zeta_T + TE > 75^\circ$

coefficients X_a et Y_a ne diffèrent pas beaucoup de ceux de X'_a et de Y'_a . Il y a alors intérêt - après s'être assuré de ce fait - à conserver le système de coordonnées tangentielles polaires (X, Y) pour la réduction des clichés : cela évite la transformation des (X, Y) en (X', Y') et vice-versa.

Toutefois, devant la complexité des formules à considérer pour établir les maximums des fonctions X_a et Y_a - ainsi que ceux de R_x et de R_y -, il apparaît avantageux de déterminer une fois pour toutes ces maximums, ici encore, à l'aide d'un ordinateur, pour le lieu d'observation considéré et pour le champ de l'instrument utilisé. On procédera pour R_x et R_y , comme indiqué plus haut pour R'_x et R'_y . On n'omettra cependant pas de faire varier dans ce cas, l'angle θ de 0° à 360° , car la symétrie axée sur TX' ne se retrouve pas dans le système $T.XY$.

Ainsi, pour la latitude de l'Observatoire Royal de Belgique, les calculs ont été faits pour deux cas distincts :

$TE = 5^\circ$, voisin de celui représenté par l'Astrographe Double dont le champ est de 8° ($TE = 4^\circ$);

$TE = 15^\circ$, voisin de celui représenté par la Camera Balistique IGN dont le champ est de 35° ($TE = 17;5$).

Les résultats en sont donnés dans le tableau VI. Leur comparaison

TABLEAU VI

Maximums de X_a , Y_a , R_x et R_y pour la latitude d'Uccle et pour deux valeurs de TE

ζ_T	$TE = 5^\circ$				$TE = 15^\circ$			
	X_a	Y_a	$R_x \cdot 10^{-7}$	$R_y \cdot 10^{-7}$	X_a	Y_a	$R_x \cdot 10^{-7}$	$R_y \cdot 10^{-7}$
0°	0,088	0,088	0,0	0,0	0,29	0,29	0,1	0,1
10°	0,092	0,093	0,1	0,1	0,31	0,31	0,4	0,5
20°	0,10	0,10	0,3	0,3	0,36	0,37	1,3	1,4
30°	0,12	0,13	0,6	0,6	0,45	0,46	3,4	3,5
40°	0,16	0,16	1,6	1,6	0,63	0,62	9,8	9,6
50°	0,24	0,20	4,8	3,8	1,0	0,86	34,	28
60°	0,42	0,31	18,	13,	2,1	1,6	196,	142
70°	0,99	0,67	123,	81,	—	—	—	—

avec ceux donnés pour $TE = 5^\circ$ et $TE = 15^\circ$ dans les tableaux II à V, est instructive. Ainsi, on notera par exemple, pour $TE = 15^\circ$ et $\zeta_T = 20^\circ$, que les maximums correspondants sont de :

$$\begin{array}{cccc}
 X'_a = 0,36 & R'_x = 1,3 \cdot 10^{-7} & Y'_a = 0,29 & R'_y = 0,3 \cdot 10^{-7} \\
 X_a = 0,36 & R_x = 1,3 \cdot 10^{-7} & Y_a = 0,37 & R_y = 1,4 \cdot 10^{-7}
 \end{array}$$

c'est-à-dire que les coefficients X_a , Y_a et les restes R_x et R_y relatifs au système de coordonnées tangentielles polaires, ont des maximums du même ordre que leurs correspondants X'_a , Y'_a , R'_x et R'_y dans le système de coordonnées tangentielles zénithales et dès lors, que l'étude de clichés pris à la latitude d'Uccle, peut être menée avec autant de facilité dans l'un comme dans l'autre système, du point de vue des effets de la réfraction atmosphérique.

IX. CONCLUSION :

Nous avons ainsi finalement établi des expressions rigoureuses des coordonnées tangentielles réfractées polaires X_r et Y_r , et zénithales X'_r et Y'_r , aucun terme de leurs développements n'ayant été négligé. Nous avons précisé par ailleurs, les ordres de grandeur de chacun de ces termes, pour tous les cas pouvant se présenter en pratique, tant en position du centre du cliché sur le ciel ($\zeta_T \leq 75^\circ$) qu'en grandeur du champ instrumental ($TE \leq 45^\circ$).

Il convient maintenant de préciser les avantages de l'emploi de ces expressions dans l'établissement des formules de réduction des clichés destinés à l'astrométrie.

La loi (6) n'est jamais qu'une loi moyenne à laquelle des écarts sensibles locaux s'observent couramment. Aussi est-il préférable de définir expérimentalement - autant que faire se peut - les paramètres a et b permettant de représenter au mieux les effets de la réfraction atmosphérique, pour chaque observation et pour la région du ciel couverte par le cliché photographique et donc, de définir ces paramètres à partir des constantes mêmes du cliché, plutôt que d'introduire leurs valeurs calculées a priori à l'aide des formules (7) et (8). Nous allons voir que la forme des expressions (34) et (38) s'y prête parfaitement et, par la même occasion, dans quelle mesure il convient d'appliquer ce principe.

Pour préciser les idées, notons d'abord que les anomalies de réfraction ne peuvent généralement dépasser ni même sans doute atteindre celles correspondant, par l'emploi des relations (7) et (8), à des variations de la température de $\pm 10^\circ$ et de la pression, de ± 10 mm. Dans ces conditions extrêmes, les erreurs sur a et sur b sont, en moyenne, de l'ordre de :

	<u>avec $\Delta t = \pm 10^\circ$</u>	<u>avec $\Delta p = \pm 10$ mm</u>
pour a :	de ± 4 %	de ± 1 à 2 %
pour b :	de ± 1 %	de ± 1 à 2 %

TABLEAU VII
 Variations de $R'_x \cdot 10^7$ et de $R'_y \cdot 10^7$ dues à des variations de a et de b de 10 %

ζ_T		0°		10°		20°		30°		40°		50°		60°		70°		74°		
		R'_x	R'_y	R'_x	R'_y	R'_x	R'_y	R'_x	R'_y	R'_x	R'_y	R'_x	R'_y	R'_x	R'_y	R'_x	R'_y	R'_x	R'_y	
1°	da	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
	db	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0	0,3	0,0	1,5	0,0	3,7	0,1
5°	da	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	db	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0	0,2	0,0	0,5	0,1	1,8	0,1	12,3	0,3			
10°	da	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	db	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,2	0,0	0,4	0,1	1,4	0,1	6,2	0,3					
15°	da	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	db	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0	0,3	0,1	1,0	0,1	3,4	0,3	19,6	1,0					
20°	da	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0	0,2	0,1							
	db	0,0	0,0	0,1	0,0	0,2	0,1	0,7	0,1	2,0	0,3	8,4	0,8							
25°	da	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0	0,2	0,0	0,6	0,1							
	db	0,0	0,0	0,2	0,1	0,4	0,1	1,3	0,3	4,4	0,6	23,9	2,1							
30°	da	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0	0,2	0,0	0,5	0,0									
	db	0,1	0,1	0,3	0,1	0,8	0,3	2,6	0,6	10,5	1,4									
35°	da	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,1	0,4	0,1	1,5	0,1									
	db	0,2	0,2	0,6	0,3	1,7	0,5	5,6	1,2	29,8	3,9									
40°	da	0,2	0,2	0,3	0,2	0,5	0,2	1,2	0,2											
	db	0,4	0,4	1,1	0,5	3,4	1,1	13,6	2,7											
45°	da	0,4	0,4	0,6	0,4	1,1	0,4	3,4	0,6											
	db	0,8	0,8	2,3	1,1	7,6	2,3	40,3	7,5											

TE > 15°

ce qui indique, d'après la table VII donnant les variations de R'_x et de R'_y calculées pour des variations de a et de b de 10 %, que ces restes sont insensibles à 1.10^{-7} (= 0,02) près, à des écarts : $\Delta t = \pm 10^\circ$ et $\Delta p = \pm 10$ mm, sauf peut-être pour des valeurs extrêmes de ζ_T et de TE , auxquels cas d'ailleurs, la précision des réductions est nécessairement moins bonne et atteint difficilement 1.10^{-6} , voire 1.10^{-5} .

On en conclut donc que les restes R'_x et R'_y peuvent être calculés à priori dans chaque cas, avec toute la précision désirée, à l'aide des formules (51) et (52), en utilisant les meilleures valeurs des coefficients a et b définis sur base des informations disponibles concernant la température et la pression atmosphérique au sol au moment de l'observation.

Par contre, en ce qui concerne les termes aX'_r et aY'_r figurant dans les expressions (34) et (38) de X'_r et de Y'_r , il ne peuvent être connus à priori avec la même précision que R'_x et R'_y , puisqu'une erreur de 1 % sur a entraîne - d'après les valeurs de X'_a et de Y'_a figurant dans les tableaux II et III - des erreurs pouvant atteindre plusieurs secondes de degré dans certaines régions de clichés couvrant des champs d'étendue moyenne et pris à des distances zénithales pas tellement grandes.

Aussi, dans les expressions (34) et (38) de X'_r et de Y'_r , on aura intérêt à laisser au coefficient a le caractère d'un paramètre à définir parmi les constantes du cliché, mais à se servir des valeurs approchées de a et de b , pour calculer par (52) et (53), les restes R'_x et R'_y avec toute la précision désirable.

Après réduction du cliché, on vérifiera si la concordance est suffisante entre la valeur approchée de a adoptée pour le calcul des restes R'_x et R'_y et celle trouvée par les constantes du cliché. Une discordance trop grande entraînant des écarts sensibles sur les valeurs calculées de R'_x et de R'_y pourrait alors - exceptionnellement sans doute - inciter à procéder à une nouvelle réduction générale du cliché à partir de la valeur améliorée de a .

Il en va de même pour les restes R_x et R_y lorsque la réduction est effectuée directement dans le système T.XY.

X. CAS DES OBSERVATIONS EFFECTUEES DANS L'HEMISPHERE AUSTRAL :

Les relations établies ici pour les coordonnées tangentiellles polaires l'ont été en faisant référence au pôle céleste nord.

Il est évident que dans l'hémisphère austral où seul le pôle céleste sud est visible dans le ciel, c'est à celui-ci qu'il faut rattacher le système de coordonnées tangentiellles polaires, puisqu'ainsi que nous l'avons montré au paragraphe VII., c'est au pôle réfracté que l'on rattache le système réfracté correspondant et que dès lors, des deux pôles célestes, seul le pôle sud, de par sa position au dessus de l'horizon, peut être pris en considération.

Toutefois, toutes les expressions établies ici restent valables dans ce cas, si l'on remplace α par $-\alpha$, δ par $-\delta$ et ϕ par $-\phi$, et l'on se souvient que dans ces conditions, la coordonnée X est dirigée vers le pôle céleste sud, et la coordonnée Y, dans le sens du mouvement diurne, c'est-à-dire, dans le sens opposé à celui des ascensions droites croissantes.

Cette étude a nécessité de nombreux calculs et de délicates programmations pour l'ordinateur IBM 1620 dont nous disposions à l'époque de la réalisation de ce travail. M. O. NYS, Calculateur à l'Observatoire, s'est acquitté du travail avec maîtrise : nous lui sommes reconnaissant pour sa collaboration sûre et efficace.

-
- (1) Ce travail a été présenté respectivement :
- 1) devant la section d'Astronomie et de Mécanique Céleste du Congrès de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences, tenu à Besançon en juillet 1969 ("Sciences", tome I, n°4, 1970, p. 205);
 - 2) lors du Symposium n° 61 de l'Union Astronomique Internationale, intitulé "New Problems in Astrometry", tenu à Perth (Australie) en août 1973 (D. Reidel Publishing Cy.).
- (2) Les coordonnées tangentielles dont il est question ici ne peuvent être confondues avec celles considérées en géométrie analytique. Nous avons préféré la présente terminologie à celle de "coordonnées standard" car notre travail porte sur des coordonnées rectangulaires à caractère tout-à-fait général situées dans le plan tangent à la sphère céleste en un point choisi pour origine du système de coordonnées. Ce n'est que dans certaines conditions particulières, qu'elles se confondent avec les coordonnées standard telles qu'elles ont été définies par l'Union Astronomique Internationale (Transactions, VI, 1938, p. 347).
- (3) J. DOMMANGET et O. NYS.- Expressions de la réfraction atmosphérique dans le cas d'une distance zénithale inférieure à 75° .- Bulletin astronomique de l'Observatoire Royal de Belgique, VII, fasc. 2, 1970, p. 89 (N.B. : Une erreur typographique systématique s'est glissée dans cette publication : la lettre ξ doit être remplacée partout par la lettre ζ , utilisée couramment pour désigner la distance zénithale, comme nous le faisons ici).
- (4) Il est à remarquer que les angles parallactiques p_I et p_{I_R} sont les angles de position du zénith dans les systèmes respectifs $I.XY$ et $I_R.X_RY_R$. Dans l'hémisphère nord où l'on choisira pour système de coordonnées tangentielles polaires, celui rattaché au pôle céleste nord, ces angles sont donc compris entre 0° et 180° , pour des positions de I et de I_R situées à l'Ouest, et entre 180° et 360° , pour des positions de I et de I_R situées à l'Est. Dans l'hémisphère austral, où l'on choisira le pôle céleste sud comme pôle du système de coordonnées tangentielles, c'est l'inverse qui se passe.

DISCUSSION

G. Teleki: Do you have the possibility to correct your calculations of coordinates for possible influence of anomalous refraction if you observe at great zenith distances (at which the differential measurements can also be influenced by the anomalous refraction)?

J. Dommaget: answered that he uses the normal refraction formulae which are adjusted for the observed astrographic field by the plate reduction. This may give information on the local departure from a mean representation of the refraction effect on a more extended field in zenith distance. Anyway, usually no observation at very great zenith distance.

D.G. Currie: asked for the definition of the normal and anomalous refraction.

G. Teleki: repeated the definition of these values mentioned in his paper "Investigation of Astronomical Refraction - Today and Tomorrow", which he presented during the first session.