

# SUR L'ENSEMBLE D'ADHERENCE FINE DES FONCTIONS ALGEBROIDES

NOBUSHIGE TODA

## 1. Introduction

Dans ce mémoire, on fera pour les fonctions algébroides des études analogues à ceux des fonctions méromorphes dans  $|z| < \infty$  faits dans Doob [3], Toda [7].

Soit  $g(z)$  une fonction méromorphe dans  $|z| < \infty$  ayant un point singulier essentiel isolé à l'infini. J.L. Doob a obtenu le théorème suivant en utilisant la topologie fine pour  $g(z)$ .

### THÉORÈME DE J.L. DOOB

L'ensemble d'adhérence fine  $\tilde{C}_g(\infty)$  de  $g(z)$  en  $\infty$  est total ou se réduit à un point et dans ce cas  $g(z)$  n'a pas de valeurs exceptionnelles au sens de Picard (Doob [3]).

On définit, d'abord, l'ensemble d'adhérence fine pour les fonctions algébroides aussi et obtient un résultat analogue à celui de J.L. Doob. Et après, on considère quelques aspects des fonctions algébroides caractérisés par des propriétés de l'ensemble.

## 2. Définitions et Notations

1) Fonction algébroïde—On appelle fonction algébroïde méromorphe pour  $|z| < \infty$ , la fonction  $f(z)$  définie par une équation algébrique

$$(1) \quad f^n + a_1(z)f^{n-1} + \dots + a_n(z) = 0$$

où les coefficients  $a_i(z)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) sont des fonctions données de  $z$  méromorphes pour  $|z| < \infty$  et au moins un n'est pas rationnel. On suppose qu'elle ne soit pas réductible. Quand tous les coefficients sont holomorphes, on dit que  $f(z)$  est fonction algébroïde entière.

2) a)  $Z$ : Surface de Riemann définie par  $f(z)$  comme surface de recouvrement du plan fini;

---

Received August 22, 1966.

- b)  $Z_r$ : Partie de  $Z$  sur  $|z| \leq r$ ;
- c)  $n(r, w)$ : Nombre des pôles de  $f(z)$  ou des racines de l'équation  $f(z) - w = 0$  sur  $Z_r$ . On écrit pour  $w = \infty$   $n(r, \infty) = n(r, f)$ ;

d) 
$$N(r, w) = \frac{1}{n} \int_0^r \frac{n(t, w) - n(0, w)}{t} dt + \frac{n(0, w)}{n} \log r,$$

$$N(r, f) = N(r, \infty);$$

e) 
$$m(r, w) = \frac{1}{2n\pi} \int_{\Gamma(r)} \log^+ \left| \frac{1}{f(re^{i\theta}) - w} \right| d\theta \quad w \neq \infty,$$

$$m(r, f) = \frac{1}{2n\pi} \int_{\Gamma(r)} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta \quad w = \infty$$

où  $\Gamma(r)$  est courbe sur  $|z| = r$  de  $Z$ ;

f)  $T(r, f) = m(r, f) + N(r, f), T(r, w) = m(r, w) + N(r, w) \quad (w \neq \infty).$

3) Ensemble d'adhérence fine—Soit  $f(z)$  une fonction algébroïde méromorphe,  $V = (v; \text{voisinage fin de } \infty \text{ dans le plan})$ . On définit l'ensemble d'adhérence fine  $\tilde{C}_f(\infty)$  de  $f(z)$  en  $\infty$  comme suivant:

$$(2) \quad \tilde{C}_f(\infty) = \bigcap_{v \in V} \overline{f(v')}$$

où  $v'$  est l'ensemble le plus grand sur  $Z$  dont la projection sur le plan fini est  $v$  et  $f(v')$  est l'ensemble des points  $f(z')$  dans la sphère de Riemann pour tout  $z'$  de  $v'$ .

$\tilde{C}_f(\infty)$  est non-vidé, compact dans la sphère de Riemann.

### 3. Sur l'ensemble d'adhérence fine des fonctions algébroïdes

On considère quelques propriétés de  $\tilde{C}_f(\infty)$  dans ce paragraphe.

#### LEMME 1

*Les racines de l'équation algébrique*

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

sont les fonctions continues des coefficients (voir Takagi [6]).

#### THÉOREME 1

*Dans l'équation (1), si tous les coefficients admettent des limites fines finies en  $\infty$ ,  $\tilde{C}_f(\infty)$  se compose d'au plus  $n$  points.*

*Démonstration*

D'après l'hypothèse, il existe un ensemble dont le complémentaire est effilé

en  $\infty$  et sur lequel toutes les fonctions  $a_i(z)(i=1, 2, \dots, n)$  tendent vers ses limites fines finies grâce à un théorème de H. Cartan (voir BreLOT [2]). Soit  $v$  cet ensemble. Quand  $z$  tend vers  $\infty$  dans  $v$ , l'équation (1) devient

$$(1') \quad f^n + A_1 f^{n-1} + \dots + A_n = 0$$

où  $A_i$  est la limite fine de  $a_i(z)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) en  $\infty$ . On applique ici le Lemme 1, c'est-à-dire, les racines de (1) tendent vers les racines de (1') si  $z$  tend vers  $\infty$  dans  $v$ . Cela veut dire que  $\tilde{C}_f(\infty)$  contient les racines de (1') seulement, par conséquent,  $\tilde{C}_f(\infty)$  se compose d'au plus  $n$  points.

**THÉOREME 2**

Soit  $f(z)$  une fonction algébroïde méromorphe définie par l'équation (1). Alors,  $\tilde{C}_f(\infty)$  est total ou se compose d'au plus  $n$  points.

*Démonstration*

Si  $\tilde{C}_f(\infty)$  n'est pas total, on peut supposer que  $f(z)$  soit bornée dans un  $v$  de  $V: |f(z)| < M < +\infty$  dans  $v$ . En vertu des relations entre les racines et les coefficients de l'équation algébrique, on a dans  $v$

$$(3) \quad |a_i(z)| < M_i < +\infty$$

pour tout  $i$ . Alors, d'après le Théorème de J.L. Doob écrit dans l'introduction,  $\tilde{C}_{a_i}(\infty)$  se réduit à un point pour tout  $i$ . L'inégalité (3) entraîne que la limite fine de  $a_i(z)$  est finie pour tout  $i$ , de sorte que, grâce au Théorème 1,  $\tilde{C}_f(\infty)$  se compose d'au plus  $n$  points.

Comme l'inverse du Théorème 1,

**COROLLAIRE 1**

Si  $\tilde{C}_f(\infty)$  ne contient pas l'infini, chaque  $a_i(z)$  admet une limite fine finie en  $\infty$ .

**4. Sur les valeurs exceptionnelles**

D'abord, on considère le nombre des valeurs exceptionnelles au sens de Picard. En général, une fonction algébroïde admet au plus  $2n$  valeurs exceptionnelles (Rémoundos [5]).

**THÉOREME 3**

Soit  $f(z)$  une fonction algébroïde comme dans le Théorème 2. Si  $\tilde{C}_f(\infty)$  n'est pas total,  $f(z)$  n'a pas de valeurs exceptionnelles au sens de Picard.

*Démonstration*

Ce théorème est un corollaire immédiat du Théorème 4, mais on donne ici

une démonstration directe.

On peut supposer que  $\tilde{C}_{f(\infty)}$  ne contient pas l'infini d'après l'hypothèse et la transformation linéaire. D'abord, l'infini n'est pas exceptionnelle, parce que, au moins un coefficient admet un nombre infini de pôles, grâce au Corollaire 1 et au Théorème de J.L. Doob. Pour  $\alpha$  fini, on considère

$$(4) \quad A_\alpha(z) = \prod_{i=1}^n (f_i(z) - \alpha) = \alpha^n + a_i(z)\alpha^{n-1} + \dots + a_n(z)$$

où  $f_i(z)$  est une branche de  $f(z)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ). En vertu du Corollaire 1, chaque  $a_i(z)$  admet une limite fine finie en  $\infty$ , de sorte que  $A_\alpha(z)$  est rationnelle ou non-rationnelle et admet une limite fine en  $\infty$ .

Il est facile de voir qu'il existe au plus  $n-1$  valeurs  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$  telles que  $A_{\alpha_i}(z)$  ( $i=1, 2, \dots, n-1$ ) sont rationnelles.

Quant à  $\alpha$  pour que  $A_\alpha(z)$  n'est pas rationnelle, puisque  $A_\alpha(z)$  admet une limite fine en  $\infty$ , d'après le Théorème de J.L. Doob,  $A_\alpha(z)$  n'a pas de valeurs exceptionnelles au sens de Picard; en particulier, 0 n'est pas valeur exceptionnelle. Cela veut dire que  $\alpha$  n'est pas valeur exceptionnelle au sens de Picard pour  $f(z)$ .

Pour  $\alpha$  tel que  $A_\alpha(z)$  est rationnelle, on considère comme suivant. A tous les pôles de  $f(z)$  à un nombre fini près,  $A_\alpha(z)$  est fini. L'inégalité (4) entraîne que  $\alpha$  n'est pas valeur exceptionnelle pour  $f(z)$ .

On a le résultat.

On sait le fait que "si  $a(z)$ , méromorphe non rationnelle dans  $|z| < \infty$ , admet une limite fine en  $\infty$ , elle n'a pas de valeurs exceptionnelles au sens de Nevanlinna et de Borel (Toda [7])".

On considère ici si le fait précédent est vrai pour les fonctions algébroides.

#### LEMMA 2

Soit  $f(z)$  une fonction algébroïde définie par (1). Alors, pour tout  $w$

$$(5) \quad T(r, f) = T(r, w) + O(1)$$

(Selberg [4]).

Pour tout  $w$  de la sphère de Riemann, on définit

$$\delta(w) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r, w)}{T(r, f)}$$

qui est égale à

$$1 - \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, w)}{T(r, f)}$$

d'après le Lemme 2 (voir Selberg [4]).

**LEMME 3**

Soit  $f(z)$  une fonction algébroïde définie par (1). Pour tout  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$\frac{1}{n} m(r, a_i) - O(1) \leq m(r, f) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m(r, a_i) + O(1)$$

(voir Selberg [4]).

**LEMME 4**

Soit  $u(z)$  une fonction surharmonique dans un domaine  $D$  tel que le point à l'infini est un point-frontière irrégulier de  $D$ . Si  $u(z)|\log|z|$  est bornée inférieurement dans un voisinage fin de  $\infty$ , alors  $u(z)|\log|z|$  admet une limite fine finie en  $\infty$  (Brelot [1]).

**LEMME 5**

Si un ensemble  $E$  quelconque dans le plan est effilé en  $\infty$ , il existe des circonférences arbitrairement grandes de centre 0 ne rencontrant pas  $E$  (Brelot [2]).

**LEMME 6**

Dans l'équation (1),  $f(z)$  est algébrique si et seulement si

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r, f)}{\log r} < +\infty$$

(voir Selberg [4]).

**THÉORÈME 4**

Soit  $f(z)$  une fonction algébroïde définie par (1). Si  $\tilde{C}_f(\infty)$  n'est pas total, pour tout  $w$  de la sphère de Riemann,  $\delta(w) = 0$ : il n'y a pas de valeurs exceptionnelles au sens de Nevanlinna pour  $f(z)$ .

*Démonstration*

On peut supposer que  $\tilde{C}_f(\infty)$  ne contient pas  $\infty$ . D'après le Théorème 2,  $\tilde{C}_f(\infty) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ . Grâce au Corollaire 1, soit  $A_i$  une limite fine finie de  $a_i(z)$  en  $\infty$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

- 1) le cas où  $w \neq \beta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

Comme dans la démonstration du Théorème 2, il y a un  $v$  de  $V$  tel que  $a_i(z)$  tend vers  $A_i$  pour tout  $i$  et l'ensemble d'adhérence ordinaire de  $f(z)$  sur  $v$  en  $\infty$  est  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ . Grâce au Lemme 5, il existe une suite de nombres

positifs  $(r_n)$  telle que  $r_n \nearrow +\infty$ ,  $(|z|=r_n) \cap Cv = \phi$  pour tout  $n$  et  $f_i(r_n e^{i\theta})$  tend vers  $\beta_i (i=1, 2, \dots, n)$  uniformément par rapport à  $\theta$ , de sorte que l'on a

$$m(r_n, w) = O(1) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Notre fonction  $f(z)$  n'est pas algébrique, en conséquence, d'après le Lemme 6,

$$\delta(w) = 0.$$

2) le cas où  $w = \beta_i (i=1, 2, \dots, n)$

Soit  $\beta$  un des  $\beta_i (i=1, 2, \dots, n)$  et  $F(z) = 1/(f(z) - \beta)$ . On applique le Lemme 3 pour  $F(z)$ . Alors, pour tout  $k (0 \leq k \leq n-1)$

$$(6) \quad \frac{1}{n} m(r, b_k/b_n) - O(1) \leq m(r, \beta) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} m(r, b_k/b_n) + O(1)$$

où chaque  $b_k$  est forme linéaire de  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  et  $b_0 \equiv 1, b_n \neq 0$ . Chaque  $b_k$  admet une limite fine finie en  $\infty$ . Soit  $B_k$  la limite fine de  $b_k (k=1, 2, \dots, n)$ .

Comme dans le cas 1) il existe une suite  $(r_n)$  telle que  $r_n \nearrow +\infty$ ,  $(|z|=r_n) \cap Cv = \phi$  pour tout  $n$  où  $v$  est le voisinage fin défini dans 1) et  $b_k(r_n e^{i\theta})$  tend vers  $B_k$  uniformément par rapport à  $\theta$  quand  $n$  tend vers  $\infty$ . Pour cette suite, on a de (6)

$$m(r_n, \beta) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} m(r_n, b_k) + m(r_n, 1/b_n) + O(1).$$

On a

$$m(r_n, b_k) = O(1) \quad (k=1, 2, \dots, n-1)$$

et, d'après le Lemme 4,

$$m(r_n, 1/b_n) = O(\log r_n),$$

de sorte que

$$m(r_n, \beta) = O(\log r_n).$$

En appliquant le Lemme 6, on obtient

$$\delta(\beta) = 0.$$

Par 1) et 2) on a le résultat.

N.B. Il est facile de voir que le Théorème 3 est un corollaire immédiat de ce théorème.

On dira que  $w$  est valeur exceptionnelle au sens de Borel pour  $f(z)$  si

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log N(r, w)}{\log r} < \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r} .$$

**THÉOREME 5**

Soit  $f(z)$  une fonction algèbroïde définie par (1). Si  $\tilde{C}_f(\infty)$  n'est pas total, il n'y a pas de valeurs exceptionnelles au sens de Borel pour  $f(z)$ .

*Démonstration*

On peut supposer que  $\tilde{C}_f(\infty)$  ne contient pas l'infini. Alors grâce au Théorème 2,  $\tilde{C}_f(\infty) = (B_1, B_2, \dots, B_n)$ , où chaque  $B_i$  est fini. Soit  $A_i$  la limite fine de  $a_i(z)$  en  $\infty$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Comme dans la démonstration du Théorème 3 (Toda [7]), il existe  $v_i$  de  $V$  tel que la frontière de  $v_i$  est analytique et sur lequel  $a_i(z)$  tend vers  $A_i$ . Pour  $v = \bigcap_{i=1}^n v_i$  et  $w \neq B_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), on applique la méthode du cas où  $f(z)$  est méromorphe (voir Toda [7]), alors, on obtient tout de suite que

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log N(r, w)}{\log r} = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r} .$$

Soient  $b_k(z)$  les fonctions définies comme dans la démonstration du Théorème 4,  $u_k$  de  $V$  tel que la frontière de  $u_k$  est analytique et sur lequel  $b_k(z)$  tend vers  $B_k$  en  $\infty$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ) et

$$u_n = (z; \log |1/b_n(z)| / \log |z| < \delta_n + \varepsilon)$$

où  $\delta_n$  est la limite fine de  $\log |1/b_n(z)| / \log |z|$  en  $\infty$  et  $\varepsilon$  est un nombre positif quelconque.

Pour  $u = \bigcap_{k=1}^n u_k$  et  $\beta$ , on applique la méthode du cas de fonction méromorphe (voir Toda [7]), et on a

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r} = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log N(r, \beta)}{\log r} .$$

On peut prendre comme  $\beta, B_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), par conséquent, on a le résultat. N.B. On peut donner facilement un exemple d'une fonction algèbroïde tel que  $\tilde{C}_f(\infty)$  n'est pas total.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Brelot: Etude générale des fonctions harmoniques ou surharmoniques positives au voisinage d'un point-frontière irrégulier, *Ann. Univ. Grenoble* **22** (1946), 201–219.
- [2] M. Brelot: *Eléments de la théorie classique du potentiel*, 3<sup>e</sup> édition C.D.U. Paris 1965.
- [3] J.L. Doob: Some classical function theory theorems and their modern versions, *Ann. Inst. Fourier* **15** (1965), 113–135.
- [4] H. Selberg: *Algebroiden Funktionen und Umkehrfunktionen Abelscher Integrale*, Oslo 1934.
- [5] G.I. Rémoundos: Extension aux fonctions algébroides multiformes du théorème de M. Picard et de ses généralisations, *Mémorial des Sc. Math.* **23**.
- [6] T. Takagi: *Leçon sur l'algèbre* (en japonais), Kyoritsu Tokyo 1957.
- [7] N. Toda: Sur l'allure des fonctions méromorphes, *Nagoya Math. J.* **26** (1966), 173–181.

*Institut de Mathématiques, Université de Nagoya*