CALCUL DES PRIMES ET MARCHANDAGE*

DANIELLE BRIEGLEB ET JEAN LEMAIRE

Université Libre de Bruxelles

PART I

Two premium calculation principles by negotiation. Using, as main tools,
the classical risk exchange model by Borch and
the bargaining models of Nash and Kalai–Smorodinsky,
we define two new premium calculation principles, whose main goal is to take explicitly into account the attitude towards risk of the policy-holders. Those principles are neither additive nor iterative, but they nevertheless possess several important properties: the premium is translation-invariant, it does not depend neither on the reserves nor on the portfolio of the company; it takes into account all the moments of the claim distribution; it is independent of the policy-holder's wealth but increases with his risk aversion.

PART II

Coalition against an insurance company. While computing the core of this risk exchange, we show that it can be of the policy-holder's interest to coalize in order to obtain premium cuts.

PREMIÈRE PARTIE: DEUX PRINCIPES DE CALCUL DES PRIMES PAR NEGOCIATION

Le modèle d'échange de risques de Borch entre plusieurs compagnies d'assurances soucieuses d'améliorer leur situation en formant un pool de réassurance a fait l'objet de très nombreuses publications. Ce n'est que depuis quelques années cependant que l'on semble s'être aperçu que le même modèle pouvait être utilisé pour décrire toute économie d'échange, en particulier le contrat d'assurance simple entre un assuré et sa compagnie. Si l'on suppose que les préférences de l'assuré peuvent être décrites par une fonction d'utilité exponentielle, et que l'assureur est indifférent au risque en première approximation, les contrats Pareto-optimaux consistent en une couverture complète du risque, moyennant le paiement d'une prime que le critère de Pareto-optimalité ne permet pas de déterminer.

Parmi les différents modèles de marchandage présentés en théorie des jeux et en économie mathématique, les plus satisfaisants nous semblent être ceux de Nash et de Kalai–Smorodinsky. Nous allons appliquer ces deux modèles à la

* Presented at the 16th Astin Colloquium, September 27–30, 1982, Liège, Belgium.

négociation que constitue la signature d'un contrat d'assurance. Cela nous permettra de déterminer un traité unique sur la courbe Pareto-optimale. En d'autres termes, les deux modèles de marchandage vont nous permettre de définir deux nouveaux principes de calcul des primes, principes dont nous étudierons les propriétés.

2. LE MODÈLE CLASSIQUE D'ÉCHANGE DE RISQUES

Soient $[J_1, \ldots, J_n]$ n agents économiques soumis à un risque. J_j est caractérisé par

1. sa fonction d'utilité $u_j(x)$, supposée à dérivée première positive et à dérivée seconde non-positive, et
2. sa situation initiale $[R_j, F_j(x_j)]$, où R_j est le montant dont il dispose, et $F_j(x_j)$ est la fonction de répartition des débours à venir.

Les agents vont chercher à améliorer leur situation en concluant un traité d'échange de risques $\bar{y} = [y_1(\bar{x}), \ldots, y_n(\bar{x})]$, avec $\sum_{j=1}^{n} y_j(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} x_j$, où $y_j(\bar{x}) = y_j(x_1, \ldots, x_n)$ est le montant payé par l'agent J_j, après échange, si les débours pour les n participants s'élèvent respectivement à $x_1, \ldots, x_n$. La signature d'un tel traité modifie l'évaluation de la situation de J_j de

$$U_j(x_j) = U_j[R_j, F_j(x_j)] = \int_0^\infty u_j(R_j - x_j)\, dF_j(x_j)$$

en

$$U_j(\bar{y}) = \int_\theta u_j[R_j - y_j(\bar{x})]\, dF(\bar{x})$$

où θ est l'orthant positif de E^n et $F(\bar{x})$ la fonction de répartition de la distribution n-dimensionnelle des débours.

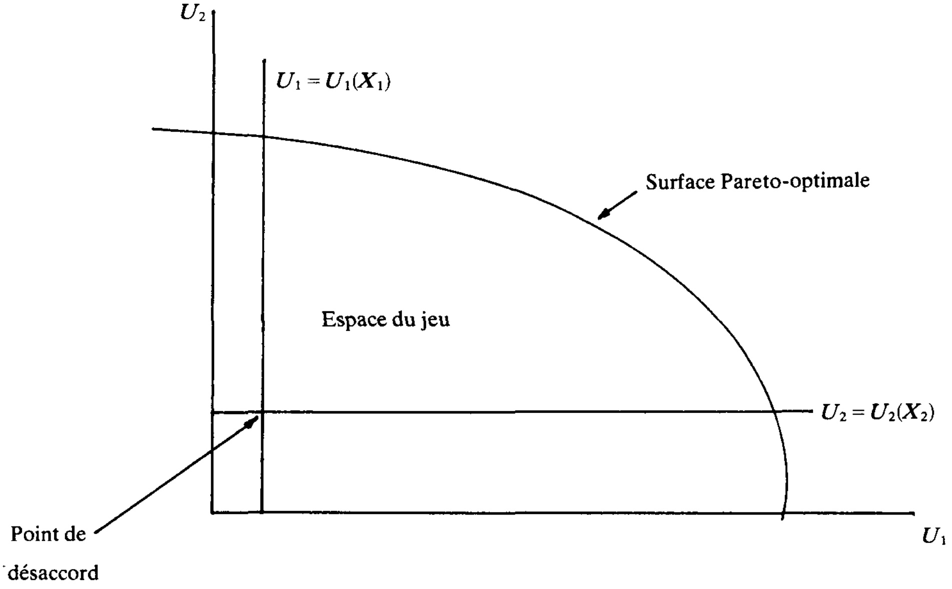
Un traité $\bar{y}$ est dit Pareto-optimal s'il n'existe aucun $\bar{y}'$ qui lui soit préférable, c'est-à-dire tel que $U_j(\bar{y}') \geqslant U_j(\bar{y})$ pour tout j, avec au moins une inégalité stricte. L'ensemble des échanges Pareto-optimaux a été caractérisé par Borch (1960):

THEOREME 1. *$\bar{y}$ est un traité Pareto-optimal ss'il existe n constantes positives $k_1, \ldots, k_n$, telles que, avec une probabilité* 1,

$$k_j u_j'[R_j - y_j(\bar{x})] = k_1 u_1'[R_1 - y_1(\bar{x})] \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Un tel traité est unique lorsque les k_j sont fixés. Sauf cas de dégénérescence des $F_j(x_j)$, il existe une infinité de k_j conduisant à un traité Pareto-optimal, même lorsque l'on impose la condition de rationalité individuelle, qui exige qu'un agent n'accepte jamais un traité qui détériore sa situation initiale: $U_j(\bar{y}) \geqslant U_j(x_j)\ \forall j$.

La multiplicité des solutions provient du fait que dans la définition de la Pareto-optimalité ne figure aucun axiome de partage. La coopération permet d'accroître le bien-être global, mais rien n'est dit quant à la manière de répartir ce bénéfice entre les participants. Chacun a intérêt à obtenir une valeur de k_j la plus grande possible, de manière à payer le moins possible. Nous avons une situation où les intérêts des joueurs sont partiellement complémentaires (globalement, le marché a intérêt à signer un traité Pareto-optimal) et partiellement contradictoires (une fois la surface Pareto-optimale atteinte, tout gain d'utilité pour un agent ne peut se faire qu'au détriment d'un autre).



Ce modèle a fait l'objet de nombreuses études (Bühlmann et Jewell (1979), Gerber (1978), Lemaire (1977), Baton et Lemaire (1981), . . .) dans le cas où les agents économiques sont des compagnies d'assurances désireuses de former un pool de réassurance. Ce n'est que fort récemment (Moffet (1979), Bardola (1981)) que l'on semble s'être aperçu que le même modèle pouvait s'appliquer au marché à deux agents formé par une compagnie d'assurances J_1 et un assuré potentiel J_2.

Gerber (1974*a*, *b*), Leepin (1975) et d'autres auteurs ayant mis en évidence les propriétés fort intéressantes des fonctions d'utilité exponentielles du type

$$u_j(x) = \frac{1}{a}(1 - e^{-ax}),$$

nous nous limiterons à ce cas particulier. De plus, comme il est évident que l'aversion au risque de la compagnie est infiniment plus faible que celle de l'assuré (J_2 raisonne en milliers de francs, J_1 en millions) nous pouvons, en première approximation, représenter le comportement de J_1 par une fonction d'utilité linéaire. Nous avons donc

J_1: assureur. Réserves initiales R_1
Portefeuille existant de fonction de répartition $F_1(x_1)$
Utilité $u_1(x) = x$.

https://doi.org/10.1017/S0515036100004694 Published online by Cambridge University Press

J_2: assuré. Fortune initiale R_2
Risque à assurer de fonction de répartition $F_2(x_2)$
Utilité $u_2(x)=(1/a)(1-e^{-ax})$.

En posant $k_1=1$ (les k_j ne sont définis qu'à une constante multiplicative près), l'application du théorème 1 donne

$$k_2\, e^{-a[R_2-y_2(x_1,x_2)]}=1$$

ou

$$\boxed{y_2(x_1,x_2)=R_2-\frac{1}{a}\log k_2 \quad \text{et} \quad y_1(x_1,x_2)=x_1+x_2-y_2(x_1,x_2).}$$

Par conséquent l'assureur prend à sa charge la totalité du risque moyennant le paiement d'une prime $P(x_2)=y_2(x_1,x_2)$, fixée dès que k_2 est déterminé. L'assuré cède à la compagnie tout son avoir R_2, moins une constante qui dépend de son aversion au risque a: plus celle-ci est grande, plus le montant que J_2 est disposé à céder est élevé. On calcule facilement

l'utilité initiale de la compagnie

$$U_1(x_1)=\int_0^\infty (R_1-x_1)\,dF_1(x_1)=R_1-E(x_1)$$

l'utilité initiale de l'assuré

$$U_2(x_2)=\int_0^\infty \frac{1}{a}(1-e^{-a(R_2-x_2)})\,dF_2(x_2)=\frac{1}{a}[1-e^{-aR_2}M_2(a)]$$

où $M_2(a)$ est la fonction génératrice des moments du risque à assurer calculée au point a. En supposant l'indépendance entre les variables x_1 et x_2 on calcule

l'utilité finale de la compagnie

$$U_1(\bar{y})=\int_0^\infty\int_0^\infty [R_1-y_1(x_1,x_2)]\,dF_1(x)\,dF_2(x_2)$$

$$=R_1+R_2-E(x_1)-E(x_2)-\frac{1}{a}\log k_2$$

l'utilité finale de l'assuré

$$U_2(\bar{y})=\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{a}[1-e^{-a[R_2-y_2(x_1x_2)]}\,dF_1(x_1)\,dF_2(x_2)=\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{k_2}\right)$$

le gain d'utilité pour la compagnie

$$U_1(\bar{y})-U_1(x_1)=R_2-E(x_2)-\frac{1}{a}\log k_2$$

le gain d'utilité pour l'assuré

$$U_2(\bar{y})-U_2(x_2)=\frac{1}{a}\left[e^{-aR_2}M_2(a)-\frac{1}{k_2}\right].$$

https://doi.org/10.1017/S0515036100004694 Published online by Cambridge University Press

Ceci démontre à nouveau l'opposition des intérêts des deux protagonistes: l'assureur va essayer d'obtenir le plus petit k_2 possible, alors que l'assuré poursuit le but inverse. Il va donc s'établir une négociation entre J_1 et J_2 dans le but de se mettre d'accord sur une valeur de k_2. En d'autres termes, les deux agents doivent négocier pour déterminer la prime.

3. MODÈLES DE MARCHANDAGE À DEUX JOUEURS

Un jeu de marchandage à deux joueurs est un couple $(S, \bar{d})$, où

S est un ensemble convexe compact représentant les paiements réalisables dans l'espace Euclidien à deux dimensions E^2 des utilités des joueurs; $\bar{d}$ est le point de désaccord formé par les utilités initiales des joueurs.

Notons B l'ensemble de tous les couples $(S, \bar{d})$.

Une solution est une règle qui associe à tout jeu de marchandage un paiement réalisable; il s'agit donc d'une fonction $f: B \to E^2$ telle que $f(S, \bar{d})$ est un élément $\bar{x} = (x_1, x_2)$ de S pour tout $(S, \bar{d})$ de B: $f_1(S, \bar{d}) = x_1$, $f_2(S, \bar{d}) = x_2$.

Il est évident qu'aucun joueur ne va accepter une solution qui n'est pas rationnelle individuellement. Nous pouvons donc limiter S à l'ensemble des points $\bar{x}$ tels que $x_i \geqslant d_i$, $i = 1, 2$.

Les concepts de solution qui semblent les plus satisfaisants au point de vue axiomatique sont dues, l'un à Nash (1950), l'autre à Kalai et Smorodinsky (1975).

3.1. *Le Modèle de Nash*

AXIOME 1. *Indépendance par rapport aux représentations équivalentes des utilités.*

La solution n'est pas affectée par une transformation linéaire positive effectuée sur les utilités des joueurs. Pour tout $(S, \bar{d})$ et tous nombres réels $a_i > 0$, b_i $(i = 1, 2)$, soit $(S', \bar{d}')$ le jeu défini par $S' = \{\bar{y} \in E^2 | \exists \bar{x} \in S$ tel que $y_i = a_i x_i + b_i\}$ et $d'_i = a_i d_i + b_i$, $i = 1, 2$. Alors $f_i(S', \bar{d}') = a_i f_i(S, \bar{d}) + b_i$, $i = 1, 2$. Cet axiome ne fait que refléter l'information contenue dans les fonctions d'utilité; puisque celles-ci ne sont définies qu'à une transformation linéaire près, il doit en être de même de la solution.

AXIOME 2. *Symétrie*

Tout jeu symétrique a une solution symétrique. Un jeu est symétrique si

(i) $d_1 = d_2$,

(ii) $(x_1, x_2) \in S \Rightarrow (x_2, x_1) \in S$

L'axiome exige que, dans ce cas, $f_1(S, \bar{d}) = f_2(S, \bar{d})$.

Comme la propriété précédente, cet axiome demande que la solution ne dépende que de l'information contenue dans le modèle; si les joueurs ne peuvent être différenciés par les règles du jeu, une permutation ne peut modifier la solution. Si les participants ont même fonction d'utilité, même fortune initiale et si l'espace du jeu est symétrique, la solution doit accorder le même gain en utilité à chacun.

AXIOME 3. *Pareto-optimalité*

$\forall(S, \bar{d}) \in B$, si $\bar{x}$ et $\bar{y} \in S$ sont tels que $y_i > x_i \quad i = 1, 2$, alors $f(S, \bar{d}) \neq \bar{x}$.

AXIOME 4. *Indépendance par rapport aux alternatives non pertinentes*

La solution ne change pas si l'on retire de l'espace du jeu tout point autre que le point de désaccord ou la solution elle-même.

Un énoncé équivalent de l'axiome est le suivant: soient $(S, \bar{d})$ et $(T, \bar{d})$ deux jeux tels que T contient S et que $f(T, \bar{d})$ est un élément de S. Alors $f_i(S, \bar{d}) = f_i(T, \bar{d})$, $i = 1, 2$.

Cet axiome exprime le genre de négociation que le modèle de Nash est censé représenter; il exprime une propriété de structure du processus de marchandage: pendant celui-ci, l'ensemble des points susceptibles d'être choisis se rétrécit progressivement, de telle sorte qu'à la fin du marchandage la solution n'est en compétition qu'avec des points extrêmement voisins, et non avec des alternatives plus éloignées éliminées pendant les premières phases de la négociation.

THEOREME 2. *Il existe une et une seule solution satisfaisant aux 4 axiomes; c'est le point maximisant le produit des gains d'utilité des joueurs. C'est donc la fonction $f = F$ définie par $F(S, \bar{d}) = \bar{x}$, telle que $\bar{x} \geqslant \bar{d}$ et que $(x_1 - d_1)(x_2 - d_2) > (y_1 - d_1)(y_2 - d_2)$ $\forall y \neq x \in S$.*

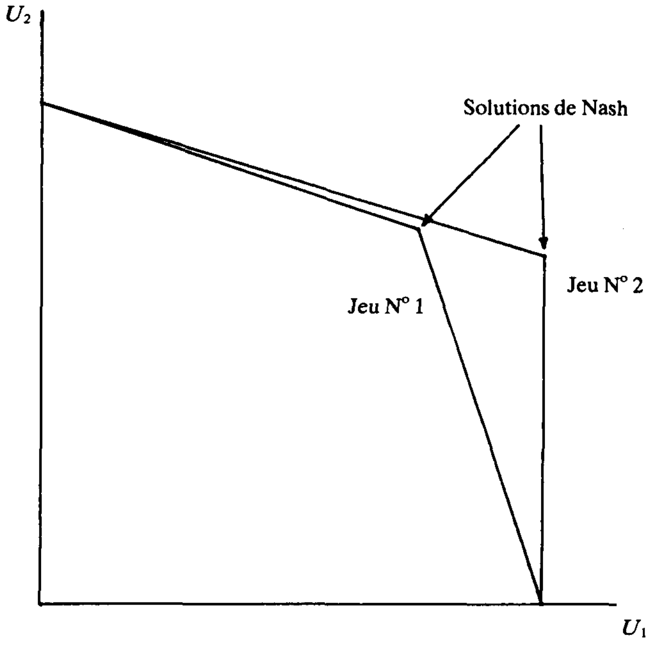
THEOREME 3 (Roth, 1980). *Le gain d'utilité que la solution de Nash accorde à un joueur croît lorsque l'aversion au risque de son adversaire augmente. En d'autres termes $F_i(S', \bar{d}') > F_i(S, \bar{d})$, où $(S', \bar{d}')$ est obtenu à partir de $(S, \bar{d})$ en remplaçant le joueur $J_j \neq J_i$ par quelqu'un qui a plus peur du risque.*

CRITIQUE. Si les trois premiers axiomes ont été épargnés par les critiques, il n'en va pas de même de l'axiome 4. Kalai et Smorodinsky ont résumé ces attaques par l'exemple suivant

Jeu $n°1$: l'espace de marchandage est limité par le polygone reliant les points (0, 0), (0, 1), (0,75, 0,75) et (1, 0).

Jeu $n°2$: l'espace de marchandage est limité par le polygone reliant les points (0, 0), (0, 1), (1, 0,7) et (1, 0).

On constate que, quel que soit le gain de J_1, J_2 peut obtenir plus dans le jeu $n°2$ que dans le jeu $n°1$. J_2 a donc de bonnes raisons de réclamer un montant plus élevé dans le jeu $n°2$. Or, la solution de Nash est (0,75, 0,75) dans le jeu $n°1$, et (1, 0,7) dans le jeu $n°2$, ce qui ne satisfait pas à la demande de J_2.



3.2. *Le modèle de Kalai–Smorodinsky*

Ces deux auteurs ont présenté un autre modèle, qui reprend les axiomes 1 à 3, mais remplace le 4ème axiome par le suivant.

AXIOME 5. *Monotonie*

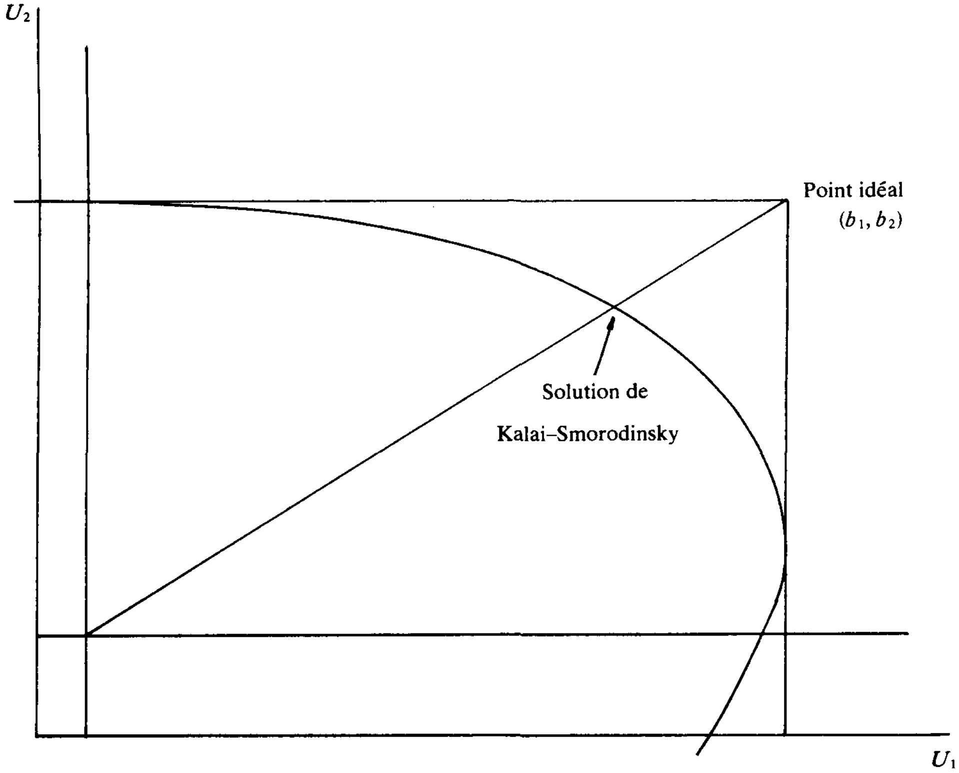
Si, quelle que soit la demande de son adversaire, les règles du jeu sont telles qu'un joueur reçoit plus dans un jeu que dans un autre, la solution lui accorde un gain supérieur dans le premier jeu.

Désignons par $\bar{b}(S)=(b_1, b_2)$ le point "idéal" formé par les demandes maximales des joueurs: $b_i = \max\{x_i | (x_1, x_2) \in S\}$. L'axiome peut alors s'énoncer sous la forme suivante: si $(T, \bar{d})$ et $(S, \bar{d})$ sont deux jeux tels que T contient S et $\bar{b}(S)=\bar{b}(T)$, alors $f(T, \bar{d}) \geqslant f(S, \bar{d})$.

Soit $G(S, \bar{d})$ la solution qui consiste à chercher le point d'intersection entre la courbe Pareto-optimale et la droite joignant $\bar{d}$ à $\bar{b}$. Donc $G(S, \bar{d})=\bar{x}$ tel que $\bar{x} \in S$, $(x_1-d_1)/(x_2-d_2)=(b_1-d_1)/(b_2-d_2)$ et $\bar{x} \geqslant \bar{y}$ pour tout $\bar{y} \in S$ tel que $(y_1-d_1)/(y_2-d_2)=(b_1-d_1)/(b_2-d_2)$.

THEOREME 4. *Il existe une et une seule solution satisfaisant aux axiomes* 1, 2, 3 *et* 5: *c'est* $G(S, \bar{d})$.

THEOREME 5 (Roth, 1980). *Le gain d'utilité que la solution de Kalai–Smorodinsky accorde à un joueur croît lorsque l'aversion au risque de son adversaire augmente.*



La solution de Kalai–Smorodinsky ne satisfait pas bien sûr à l'axiome 4, puisque $G(S, \bar{d})$ dépend non seulement du point de désaccord mais aussi du point idéal. On peut cependant montrer que $G(S, \bar{d})$ est indépendant des alternatives qui ne déterminent pas le point idéal. Donc $G(S, \bar{d})$ (tout comme d'ailleurs $F(S, \bar{d})$) satisfait à l'axiome 6.

AXIOME 6. *Indépendance par rapport aux alternatives autres que le point de désaccord et le point idéal.*

Si $(S, \bar{d})$ et $(T, \bar{d})$ sont deux jeux tels que T contient S, $\bar{b}(S) = \bar{b}(T)$ et $f(T, \bar{d})$ est un élément de S, alors $f(S, \bar{d}) = f(T, \bar{d})$.

Si la solution de Kalai–Smorodinsky a l'avantage de satisfaire à l'axiome de monotonie, elle n'est cependant pas exempte de critiques. On peut par exemple montrer (Roth, 1980) qu'il est impossible de généraliser ce concept à un jeu à plus de deux joueurs, alors que le modèle de Nash a déjà fait l'objet de telles extensions (voir par exemple Lemaire (1973)).

THEOREME 6. *Pour un jeu de marchandage à 3 joueurs ou plus, il n'existe aucune solution Pareto-optimale, symétrique et monotone.*

On constate une propriété de dualité entre les deux solutions proposées: le point sélectionné par le modèle de Nash correspond au rectangle de plus grande surface à l'intérieur de S, tandis que le point isolé par Kalai–Smorodinsky correspond au rectangle de plus petite surface à l'extérieur de S.

On trouve d'autres concepts de solution en théorie des jeux. Ils ne nous paraissent cependant pas adaptés à notre problème. Par exemple les solutions qui consistent à sélectionner le traité le plus "proche" du point idéal, au sens d'une certaine norme, ne peuvent nous convenir car elles ne sont pas indépendantes d'une transformation linéaire effectuée sur les utilités des joueurs.

4. CALCUL DES PRIMES

Les deux modèles de marchandage décrits en Section 3 nous permettent d'isoler un point sur la courbe Pareto-optimale, c'est-à-dire de déterminer k_2 et la prime.

4.1. *Solution de Nash*

Nous devons maximiser le produit

$$\frac{1}{a}\left[R_2-E_2(x_2)-\frac{1}{a}\log k_2\right]\left[e^{-aR_2}M_2(a)-\frac{1}{k_2}\right].$$

Posons

$$A=R_2-E_2(x_2)$$

$$B=e^{-aR_2}M_2(a)$$

$$\psi=\left(A-\frac{1}{a}\log k_2\right)\left(B-\frac{1}{k_2}\right)$$

$$\frac{d\psi}{dk_2}=0\Leftrightarrow A-\frac{1}{a}\log k_2-\frac{B}{a}k_2+\frac{1}{a}=0.$$

Cette équation détermine k_2, et donc la prime $P(x_2)$, en fonction des constantes A, B et de l'aversion au risque a.

4.2. *Solution de Kalai–Smorodinsky*

On vérifie que

$$b_1=R_1-E_1(x_1)-E_2(x_2)+\frac{1}{a}\log M_2(a)$$

$$b_2=\frac{1}{a}[1-e^{-a[R_2-E_2(x_2)]}].$$

L'équation de la droite reliant le point de désaccord et le point (b_1, b_2) est

$$\frac{u_1-(R_1-E_1(x_1))}{\frac{1}{a}\log M_2(a)-E_2(x_2)}=\frac{u_2-\frac{1}{a}(1-e^{-aR_2}M_2(a))}{\frac{1}{a}e^{-aR_2}[M_2(a)-e^{aE_2(x_2)}]}.$$

Les équations paramétriques de la courbe Pareto-optimale sont

$$u_1=R_1-E_1(x_1)-E_2(x_2)-\frac{1}{a}\log k_2+R_2$$

$$u_2=\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{k_2}\right).$$

Après remplacement et calculs, on obtient

$$\left(A-\frac{1}{a}\log k_2\right)(B-e^{-aA})-\left(A+\frac{1}{a}\log B\right)\left(B-\frac{1}{k_2}\right)=0,$$

équation qui détermine implicitement k_2 et la prime $P(x_2)$.

5. PROPRIÉTÉS

En déterminant un traité d'assurance unique, nous avons en fait défini deux nouveaux principes de calcul des primes: le principe de Nash et le principe de Kalai–Smorodinsky. Quelles sont les propriétés de ces principes?

1. *La prime contient un chargement de sécurité.*
La prime pure vaut $E_2(x_2)$, la prime effective $P(x_2)=y_2(x_1, x_2)$.

$$P(x_2)-E_2(x_2)=R_2-\frac{1}{a}\log k_2-E_2(x_2).$$

Le second membre est le gain d'utilité que la compagnie obtient par le traité. Comme les deux modèles considérés conduisent à une solution individuellement rationnelle, $P(x_2)$ est bien une prime chargée.

2. *La prime ne peut dépasser le montant maximum des sinistres* (*no ripoff condition*)
Cette propriété résulte du fait que le contrat conduit nécessairement à un gain d'utilité pour l'assuré.

3. *La prime fait intervenir tous les moments de la distribution des sinistres* (de par le présence de la fonction génératrice des moments).

4. *La prime est indépendante des réserves R_1 et du portefeuille de la compagnie d'assurance.*

5. *La prime est indépendante de la fortune R_2 de l'assuré.*

Démontrons cette propriété pour le principe de Nash.

THEOREME 7. *La prime, calculée selon le principe de Nash, ne dépend pas de R_2.*

DÉMONSTRATION. La prime vaut $P(x_2) = R_2 - (1/a) \log k_2$, avec

$$R_2 - E_2(x_2) + \frac{1}{a} - \frac{k_2\, e^{-aR_2} M_2(a)}{a} - \frac{1}{a} \log k_2 = 0. \tag{1}$$

Ajoutons à R_2 une quantité arbitraire α et vérifions que $P(x_2)$ ne change pas.

$$P'(x_2) = R_2 + \alpha - \frac{1}{a} \log k'_2,$$

où

$$R_2 + \alpha - E_2(x_2) + \frac{1}{a} - \frac{k'_2\, e^{-a(R_2+\alpha)} M_2(a)}{a} - \frac{1}{a} \log k'_2 = 0. \tag{2}$$

k_2 et k'_2 sont liés par la relation $k'_2 = k_2\, e^{a\alpha}$ (il suffit pour s'en convaincre d'effectuer le remplacement dans (2), qui se réduit alors à (1). Par conséquent

$$\begin{aligned} P'(x_2) &= R_2 + \alpha - \frac{1}{a} \log (k_2\, e^{a\alpha}) \\ &= R_2 + \alpha - \frac{1}{a} \log k_2 - \alpha \\ &= P(x_2). \end{aligned}$$

En fait les propriétés 3 et 4 résultent du fait qu'une modification de R_1 ou R_2 entraîne une transformation linéaire d'une fonction d'utilité exponentielle.

6. *La prime croît avec l'aversion au risque de l'assuré*

Cette propriété est une conséquence immédiate des théorèmes 3 et 5 et du fait que le chargement de sécurité de l'assureur n'est rien d'autre que son gain d'utilité.

7. *La prime est invariante par translation $P(x_2 + c) = P(x_2) + c$*

La démonstration de cette propriété est fort semblable à celle de la propriété 4, en posant cette fois $k'_2 = k_2\, e^{-ac}$.

Par contre de nombreux contre-exemples permettent de vérifier que les deux principes de calcul des primes ici définis ne satisfont ni à la propriété d'additivité ni à celle d'itérativité.

8. *Exemple*

Nous reprenons ici les données utilisées par Moffet (1979).

Distribution du coût des sinistres pour l'assuré

x_2	0	1	2	3	4	5	7	10	15	20
Prob.	0,3	0,05	0,06	0,08	0,1	0,13	0,15	0,07	0,04	0,02

La prime pure vaut 4,21.

https://doi.org/10.1017/S0515036100004694 Published online by Cambridge University Press

Nous devons, pour obtenir la prime, résoudre les équations suivantes:

1. Principe de Nash: $35{,}79-\dfrac{1}{a}\log k_2-e^{-40a}M_2(a)+\dfrac{1}{a}=0.$

2. Principe de Kalai–Smorodinsky:

$$\left(35{,}79-\frac{1}{a}\log k_2\right)(e^{-40a}M_2(a)-e^{-35{,}79a})-(35{,}79-40\,M_2(a))$$
$$\times\left(e^{-40a}M_2(a)-\frac{1}{k_2}\right)=0.$$

La résolution de ces deux équations pour différentes valeurs de a conduit aux résultats repris ci-dessous. Le tableau indique la prime ainsi que les gains en utilité des deux joueurs.

	NASH			KALAI–SMORODINSKY		
a	P	u_1	u_2	P	u_1	u_2
0,01	4,259	0,05	$3{,}42\times10^{-2}$	4,259	0,05	$3{,}42\times10^{-2}$
0,05	4,482	0,27	$4{,}60\times10^{-2}$	4,482	0,27	$4{,}60\times10^{-2}$
0,1	4,824	0,61	$1{,}82\times10^{-2}$	4,824	0,61	$1{,}82\times10^{-2}$
0,25	6,425	2,21	$5{,}01\times10^{-4}$	6,442	2,23	$4{,}97\times10^{-4}$
0,5	9,866	5,66	$1{,}62\times10^{-6}$	10,142	5,93	$1{,}53\times10^{-6}$
1	13,747	9,54	$3{,}73\times10^{-11}$	14,230	10,02	$3{,}48\times10^{-11}$

Lorsque l'aversion au risque de l'assuré est faible, le jeu est presque symétrique; la prime ne dépasse que de peu la prime pure. Le principe de Kalai–Smorodinsky est plus avantageux pour l'assureur que le principe de Nash: la prime est légèrement plus élevée.

6. CONCLUSIONS

La science actuarielle a connu ces dernières années, avec l'étude de nombreux principes de calcul des primes, une évolution fort intéressante. Le pilier principal de l'actuariat traditionnel, le principe d'équivalence—que l'on appelle aujourd'hui le principe de l'espérance mathématique—a perdu un peu de son rôle central suite à l'introduction de principes de plus en plus sophistiqués. L'on a commencé par introduire des paramètres de la distribution des sinistres autres que la moyenne (variance, écart-type, coefficient d'asymétrie, semi-variance, . . .). Puis des concepts en provenance de l'économie mathématique ont fait irruption en actuariat et les principes les plus récents introduisent la situation du marché et les préférences de comportement des protagonistes. Les deux principes de calcul présentés ici vont encore plus loin: nous avons déterminé des primes par marchandage, en nous basant uniquement sur l'attitude des agents économiques en présence de risques, en faisant totalement abstraction du principe d'équivalence et de la prime pure.

Si l'on pensera sans doute à juste titre que nous sommes allés trop loin, il n'empêche que nos deux principes vérifient un ensemble de propriétés satisfaisant: la prime contient un chargement de sécurité, elle ne peut dépasser le montant maximum des sinistres, elle ne dépend ni des réserves de l'assureur, ni de la fortune de l'assuré, ni du portefeuille de la compagnie. Elle fait intervenir tous les moments de la distribution des sinistres et est invariante par translation. Bien sûr cet ensemble de propriétés ne peut soutenir la comparaison avec celles vérifiées par le principe de l'utilité nulle, par exemple. Néanmoins cela ne doit pas nous faire perdre de vue la qualité à notre sens fondamentale des deux principes ici présentés, à savoir le fait d'introduire explicitement dans le calcul des primes le comportement de l'assuré. Les principes de calcul des primes introduits précédemment semblent avoir fait la part un peu trop belle aux compagnies en oubliant que dans tout contrat d'assurance il y a une autre partie tout aussi importante: l'assuré. Nous avons tenté ici de rétablir l'équilibre en introduisant dans le raisonnement l'attitude vis-à-vis du risque de ce dernier.

DEUXIÈME PARTIE: COALITION CONTRE UNE COMPAGNIE D'ASSURANCES

Dans ce qui précède, nous avons appliqué le théorème de Borch à un micro-marché formé par un assuré et un assureur. Rien ne nous empêche bien sûr d'ajouter des joueurs au raisonnement. Dans ce qui suit, nous allons introduire un troisième joueur, J_3, un assuré caractérisé par sa situation $[R_3, F_3(x_3)]$ et sa fonction d'utilité $u_3(x)$, que nous supposons également exponentielle, de paramètre b. Nous supposons l'indépendance entre les risques des 3 joueurs.

Par application du théorème de Borch, nous obtenons que l'assureur J_1 va reprendre la totalité des risques de ses partenaires, moyennant le paiement de primes $P(x_2)$ et $P(x_3)$.

$$y_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - P(x_2) - P(x_3)$$

$$y_2(x_1, x_2, x_3) = P(x_2) = R_2 - \frac{1}{a} \log k_2$$

$$y_3(x_1, x_2, x_3) = P(x_3) = R_3 - \frac{1}{b} \log k_3.$$

L'introduction d'un deuxième assuré permet d'ajouter une dimension au problème. En effet les assurés disposent maintenant d'une alternative à l'assurance pure et simple: ils peuvent s'échanger leurs risques sans nécessairement passer par l'assureur. Ils peuvent également utiliser cette possibilité supplémentaire comme menace dans le but d'obtenir des primes moins élevées. C'est ce que nous allons démontrer en calculant le coeur du marché.

Définitions

1. Soit $N = \{J_1, \ldots, J_n\}$ les agents du marché d'échange de risques, et $S \subset N$ toute coalition de joueurs. Un traité $\bar{y}'$ domine $\bar{y}$ par raport à S si $\bar{y}'$ est réalisable pour S et si $u_j(\bar{y}') \geq u_j(\bar{y})\ \forall j \in S$ (avec au moins une inégalité stricte).

2. $\bar{y}'$ domine $\bar{y}$ s'il existe une coalition S telle que $\bar{y}'$ domine $\bar{y}$ par rapport à cette coalition.

3. Le coeur du marché est l'ensemble des traités non dominés.

Le coeur est donc un ensemble stable, puisqu'aucune coalition n'a intérêt à quitter le marché.

Le coeur d'un marché d'échange de risques a été caractérisé récemment par Baton–Lemaire (1981) dans le cas particulier où tous les agents utilisent une fonction d'utilité exponentielle (de paramètre c_j pour J_j).

THEOREME 9. *Un traité appartient au coeur d'un marché d'échange de risques à utilités exponentielles si et seulement si*

$$y_j(x_1, \ldots, x_n) = q_j(x_1 + \cdots + x_n) + y_j(0),$$

avec

$$q_j = \frac{1/c_j}{\sum_{i=1}^{n} 1/c_i}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j(0) = 0$$

$$\sum_{j \in S} y_j(0) \leq \sum_{j \in S} (P_j^S - P_j^N) \quad \forall S \subset N, \quad S \neq \varnothing,$$

où

$$P_j^S = \frac{1}{c_j} \sum_{k \in S} \log M_k \left(\frac{1}{\sum_{j \in S} 1/c_j} \right)$$

est la prime qu'appliquerait J_j dans la coalition S s'il utilisait le principe de l'utilité exponentielle.

Dans le cas de notre marché à 3 joueurs, le théorème est d'application car les fonctions d'utilité linéaires peuvent être considérées comme un cas particulier des fonctions exponentielles.

Nous avons

$$q_1 = 1, \qquad q_2 = q_3 = 0$$

$$y_1(0) = -P(x_2) - P(x_3), \qquad y_2(0) = P(x_2), \qquad y_3(0) = P(x_3).$$

Nous pouvons par conséquent calculer

Coalition	Primes
{1}	$P_1^{\{1\}} = E(x_1)$
{2}	$P_2^{\{2\}} = \frac{1}{a} \log M_2(a)$
{3}	$P_3^{\{3\}} = \frac{1}{b} \log M_3(b)$

Coalition	Primes	
{1 2 3}	$P_1^{\{123\}}=E(x_1)+E(x_2)+E(x_3)$	$P_2^{\{123\}}=P_3^{\{123\}}=0$
{1 2}	$P_1^{\{12\}}=E_1(x_1)+E_2(x_2)$	$P_2^{\{12\}}=0$
{1 3}	$P_1^{\{13\}}=E_1(x_1)+E_3(x_3)$	$P_3^{\{13\}}=0$
{2 3}	Dans cette coalition, J_2 et J_3 se passent des services de l'assureur. J_2 prend à sa charge une fraction $(1/a)/(1/a+1/b)$ des deux risques, et J_3 la fraction complémentaire $(1/b)/(1/a+1/b)$. Donc $P_2^{\{23\}}=\frac{1}{a}\left[\log M_2\left(\frac{1}{1/a+1/b}\right)+\log M_3\left(\frac{1}{1/a+1/b}\right)\right]$ $P_3^{\{23\}}=\frac{1}{b}\left[\log M_3\left(\frac{1}{1/a+1/b}\right)+\log M_3\left(\frac{1}{1/a+1/b}\right)\right].$	

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire les 6 conditions d'existence du coeur.

1. $S=\{1\}$. La condition $y_1(0)\leqslant P_1^{\{1\}}-P_1^N$ s'écrit

$$P(x_2)+P(x_3)\geqslant E_2(x_2)+E_3(x_3)$$

ou

$$R_2+R_3-\frac{1}{a}\log k_2-\frac{1}{b}\log k_3\geqslant E_2(x_2)+E_3(x_3).$$

Il s'agit de la condition de rationalité individuelle pour l'assureur, qui n'acceptera le marché que si la prime totale perçue est au moins égale à la prime pure.

2. $S=\{2\}$.

$$y_2(0)\leqslant P_2^{\{2\}}-P_2^N$$

$$\Leftrightarrow P(x_2)\leqslant\frac{1}{a}\log M_2(a)-0$$

$$\Leftrightarrow R_2-\frac{1}{a}\log k_2\leqslant\frac{1}{a}\log M_2(a).$$

C'est la condition de rationalité individuelle pour J_2, qui n'acceptera pas une prime trop élevée.

3. $S=\{3\}$.

$$R_3-\frac{1}{b}\log k_3\leqslant\frac{1}{b}\log M_3(b)$$

(condition de rationalité individuelle pour J_3).

4. $S=\{1,2\}$.

$$y_1(0)+y_2(0)\leqslant[P_1^{\{12\}}-P_1^N]+[P_2^{\{12\}}-P_2^N]$$

$$\Leftrightarrow R_3-\frac{1}{b}\log k_3\geqslant E(x_3).$$

https://doi.org/10.1017/S0515036100004694 Published online by Cambridge University Press

Cette condition de rationalité collective pour la coalition {1,2} exige que J_3 paye une prime chargée, faute de quoi il sera plus intéressant pour J_1 et J_2 de se séparer de J_3.

5. $S=\{1,3\}$

$$R_2-\frac{1}{a}\log k_2 \geqslant E_2(x_2)$$

(condition de rationalité collective pour {1, 3}).

Remarquons que les conditions 4 et 5 rendent la première superflue.

6. $S=\{2,3\}$

$$y_2(0)+y_3(0) \leqslant [P_2^{\{23\}}-P_2^N]+[P_3^{\{23\}}-P_3^N]$$

$$\Leftrightarrow P(x_2)+P(x_3)=R_2-\frac{1}{a}\log k_2+R_3-\frac{1}{b}\log k_3$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left[\log M_2\left(\frac{1}{1/a+1/b}\right)+\log M_3\left(\frac{1}{1/a+1/b}\right)\right].$$

Cette condition de rationalité collective pour la coalition formée par les deux assurés représente l'élément nouveau: si la prime réclamée par l'assureur est trop forte, il est préférable pour J_2 et J_3 de ne pas traiter avec lui, et de partager leurs risques.

La condition 6 restreint effectivement l'ensemble des solutions admissibles en faveur de J_2 et J_3. En effet, comme $1/(1/a+1/b) \leqslant a$ nous avons

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\log M_2\left(\frac{1}{1/a+1/b}\right) \leqslant \frac{1}{a}\log M_2(a),$$

Gerber (1974*a*) ayant démontré que $(1/c)\log M(c)$ est une fonction non-décroissante de c. Par symétrie

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\log M_3\left(\frac{1}{1/a+1/b}\right) \leqslant \frac{1}{b}\log M_3(b)$$

et par sommation,

$$R_2+R_3-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left[\log M_2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\log M_3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]$$

$$\geqslant R_2+R_3-\frac{1}{a}\log M_2(a)-\frac{1}{b}\log M_3(b).$$

Or, en sommant les conditions 2 et 3, nous obtenons

$$R_2+R_3-\frac{1}{a}\log M_2(a)-\frac{1}{b}\log M_3(b) \leqslant \frac{1}{a}\log k_2+\frac{1}{b}\log k_3.$$

Par conséquent la condition 6 est plus restrictive que la somme des conditions 2 et 3; elle conduit à des valeurs de k_2 et k_3 plus élevées, donc plus profitables pour J_2 et J_3.

EXEMPLE. Supposons que les deux assurés soient soumis au même risque, distribué selon un loi Γ, de moyenne 1,2 et de variance 1,25 (Baton–Lemaire (1981)). Supposons que $R_2 = 10$, $R_3 = 5$, $a = 0{,}4$, $b = 0{,}8$. On vérifie que le coeur du marché est déterminé par les conditions

$$1{,}2 \leq P(x_2) \leq 1{,}6$$

$$1{,}2 \leq P(x_3) \leq 2{,}6$$

$$2{,}4 \leq P(x_2) + P(x_3) \leq 2{,}8.$$

J_2 est prêt à payer une prime allant jusque 1,6. J_3, ayant plus peur du risque, est même disposé à aller jusque 2,6. En se coalisant, cependant, J_2 et J_3 peuvent limiter la somme de leurs primes à 2,8.

BIBLIOGRAPHIE

BARDOLA, J. (1981) Optimaler Risikoaustausch als Anwendung für den Versicherungsvertrag. *MVSV*, 41–66.

BATON, B. et LEMAIRE, J. (1981) The Core of a Reinsurance Market. *ASTIN Bulletin* **12**, 57–71.

BORCH, K. (1962) Equilibrium in a Reinsurance Market. *Econometrica* **30**, 424–444.

BÜHLMANN, H. et JEWELL, W. (1979) Optimal Risk Exchanges. *ASTIN Bulletin* **10**, 243–262.

GERBER, H. (1974*a*) On Additive Premium Calculation Principles. *ASTIN Bulletin* **7**, 215–222.

GERBER, H. (1974*b*) On Iterative Premium Calculation Principles. *MVSV*, 163–172.

GERBER, H. (1978) Pareto-Optimal Risk Exchange and Related Decision Problems. *ASTIN Bulletin* **10**, 25–33.

KALAI, E. et SMORODINSKY, M. (1975) Other Solutions to the Nash Bargaining Problem. *Econometrica* **43**, 513–518.

LEEPIN, P. (1975) Uber die Wahl von Nutzenfunktionen für die Bestimmung von Versicherungsprämien. *MVSV*, 27–45.

LEMAIRE, J. (1973) A New Concept of Value for Games Without Transferable Utilities. *Int. J. of Game Theory* **2**, 205–214.

MOFFET, D. (1979) The Risk Sharing Problem. *Geneva Papers* **11**, 5–13.

NASH, J. (1950) The Bargaining Problem. *Econometrica* **18**, 155–162.

ROTH, A. (1980) *Axiomatic Models of Bargaining*. Springer.

https://doi.org/10.1017/S0515036100004694 Published online by Cambridge University Press