[A a] [D 6 i] [H 12 b α] Le Quatrième Algorithme Naturel.

Par Monsieur E. M. Lémeray.

I. Introduction et définitions.

On est amené à résoudre l'équation aux différences mêlées

$$y'(Cy-1)=\Delta y'-Cy'\Delta y$$

lorsqu'on cherche, en coordonnées rectangulaires, une courbe telle que : M et M′ étant deux de ses points dont les abscisses diffèrent d'une constante, la tangente de l'angle que fait avec OX la tangente en M soit en raison inverse de la sous-tangente en M′.

En posant $y+\Delta y=y_1$, l'équation peut s'écrire

$$(1)\quad y_1' \qquad = cy_1 y'$$

Considérons l'équation générale (2) $y_1'\ y_1^{n-1}=cy'$ qui se réduit à la première pour $n=0$; on peut en trouver une intégrale particulière. En intégrant sans constante arbitraire, on a :

$$y_1^n=ncy_0 \quad \text{puis} \quad y_2^n=ncy_1, \quad y_3^n=ncy_2 \ . \ . \ . \ y_x^n=ncy_{x-1}$$

en éliminant $y_1\ y_2\ .\ .\ .\ y_{x-1}$ entre ces équations, on aura une fonction de la forme

$$y=\mathrm{AB}^{\left(\frac{1}{n}\right)^x}$$

A et B étant des constantes arbitraires. Cette fonction définie pour des valeurs entières et positives de x, a cependant une signification quand x n'est pas un entier positif. Pour $n=1$ ou $n=0$ l'expression ci-dessus ne représente plus une fonction ; dans le premier cas l'équation (2) devient $y_1'=cy'$ et admet comme intégrale particulière la fonction exponentielle

$$y=\mathrm{AC}^x$$

dans le second cas l'équation (2) se réduit à (1). Pour en trouver une intégrale particulière intégrons sans constante arbitraire.

On a $\qquad (3)\quad y_1=a^{y_0}\quad y_2=a^{y_1}\ .\ .\ .\ y_x=a^{y_{x-1}}$

où l'on a posé $e^c=a$. Au lieu de la notation ordinaire p^q des puissances j'emploierai comme équivalente la notation plus commode $p\,.\,q$. Cela r'a pas d'inconvénient car je ne ferai pas usage du point

https://doi.org/10.1017/S0013091500032223 Published online by Cambridge University Press

entre deux lettres pour représenter une multiplication ; il faudra seulement se rappeler que l'on n'a pas $p \, . \, q = q \, . \, p$. Eliminons $y_1, \; y_2, \; . \; . \; . \; y_{x-1}$ entre les équations (3) ; on aura

$$y = a \, . \, a \, . \, a \, . \quad . \quad . \quad . \quad a \, . \, y_0$$

où a est écrit x fois et que je noterai $\left.\begin{matrix} x \\ a \end{matrix}\right| y_0$

Cette fonction est intéressante en ce que l'algorithme qui sert à l'exprimer peut être considéré comme un algorithme naturel. Je veux dire par là qu'on peut trouver une loi faisant dériver l'un de l'autre les trois algorithmes naturels, addition, multiplication, élévation aux puissances, et faisant dériver de ce dernier, l'algorithme dont il est question. En effet de même que la substitution $y_0, \; a + y_0$ effectuée x fois fournit la fonction $y = ax + y_0$, et que la substitution $y_0, \; ay_0$ effectuée x fois fournit la fonction $y = a^x \times y_0$; de même la substitution $y_0, \; a^{y_0}$ effectuée x fois fournit la fonction $y = \left.\begin{matrix} x \\ a \end{matrix}\right| y_0$

On pourrait évidemment continuer ainsi, et engendrer une suite illimitée d'algorithmes naturels directs.

L'idée d'exponentielles superposées n'est pas nouvelle ; ainsi l'on a énoncé cette proposition que les nombres de la suite

$$2 + 1 \qquad 2^2 + 1 \qquad 2^{2^2} + 1 \; . \; . \; .$$

sont premiers. Dans la "Théorie des nombres et Algèbre supérieure" de MM. Borel et Drach, d'après les leçons de M. Tannery, M. Drach dit : "Remarquons . . . . qu'il serait possible de continuer dans la voie où nous nous sommes engagés, et qu'il serait, par exemple, utile d'introduire une nouvelle notation pour représenter les nombres a^b a^{b^b} . . . en mettant en évidence les rôles que jouent a et b, et le nombre des exposants superposés" (Mes premieres études à ce sujet ont été publiées avant l'ouvrage de MM. Borel et Drach) Mais on n'a pas, du moins à ma connaissance, considéré ce nouvel algorithme dans lequel la lettre qui diffère des autres est la lettre supérieure au lieu d'être la base. La distinction est loin d'être sans importance, notre point de vue est au contraire nécessaire pour établir un théorème d'addition et les théorèmes subséquents. Pour éviter de longues périphrases j'emploierai trois néologismes, et aussi des noms de fonctions usuelles en leur adjoignant une lettre spéciale pour désigner les nouvelles fonctions. C'est ainsi que je dénommerai le nouvel algorithme sous le nom de surpuissance, et dans l'expression :

$$p = \overset{b}{\dot{a}}\Big|^{q}$$

j'appellerai a la base de la surpuissance, b son exposant, c l'exposant initial ou plus simplement l'initial.

Dans cette expression nons pouvons considérer deux lettres comme constantes, une comme variable, et la quatrième comme fonction :

p considéré comme fonction de a, b et q étant constants, est la surpuissance,
p considéré comme fonction de b, a et q étant constants, sera la fonction surexponentielle :

Il n'y a pas lieu de considérer p comme fonction de q ; cet algorithme donne naissance à deux fonctions inverses ; nous dirons que a considéré comme fonction de p est la surracine $b^{\text{ième}}$ de p, et que b considéré comme fonction de p est son hyperlogarithme dans le système de base a ; nous adopterons pour ces deux fonctions les symboles

$$a = \sqrt[\dot{b}]{p} \qquad\qquad b = \mathrm{HL}_a p$$

Je considérerai encore d'autres fonctions. Dans l'expression $p = \overset{b}{\dot{a}}\Big|^{q}$ posons $\overset{b}{\dot{a}} = u$, nous regarderons comme équivalente la notation

$$p = u\Big|^{q}$$

en sous-entendant que la base est a. Autrement l'expression n'aurait pas de sens et pour expliciter q en fonction de p et de u, nons écrirons

$$q = \overset{p}{}\Big|_{u}$$

L'expression $\qquad p = u\,|^{u}|^{u}$

où le nombre des u est m sera la puissance $-p$ $m^{\text{ième}}$ de u, nous noterons cette fonction par le symbole

$$p = u^{\widehat{m}}$$

Inversement u sera la racine $-r$ $m^{\text{ième}}$ de p et l'on écrira

$$u = \overset{m}{\mathrm{W}}\overline{p}$$

https://doi.org/10.1017/S0013091500032223 Published online by Cambridge University Press

Enfin m considéré comme fonction de p sera son logarithme $-\,l$, dans le système de base u ; la base de la surpuissance est toujours sous-entendue être a. Ou voit de plus que si $u=a$, la puissance $-\,p$ peut s'écrire $a\,.\,a\,.\,a$ et se réduit ä une surpuissance. Je représenterai le logarithme $-\,l$ par le symbole $m=\mathrm{AL}_u p$.

J'ai d'abord étudié les propriétés de ces nouveaux algorithmes sans tenir compte du mode de génération par substitutions uniformes ; puis j' ai cherché les propriétés analogues en tenant compte du mode de génération et sans faire d'hypothèses sur le premier algorithme dont on part ; enfin en supposant que ce premier algorithme est l'addition, j'ai appliqué les lois générales précédemment trouvées, et j'ai retrouvé comme cas particuliers des théorèmes comme sur les trois premiers algorithmes naturels et ceux que j'avais démontrés isolément sur la surpuissance. La place dont je dispose étant mesurée, je ne pourrai, à mon regret, donner l'étude générale dont je viens de parler ; je donnerai seulement les théorèmes particuliers au nouvel algorithme ; mais à côté et entre parenthèses je rappellerai les théorèmes analogues relatifs au troisième algorithme.

Théorèmes d'addition et thèorèmes subséquents.

De la définition même il résulte que l'on a

$$\left.\overset{b+b_1}{\dot{a}}\right|^{c} = \left.\overset{b}{\dot{a}}\right|^{\overset{b}{\dot{a}}}\Bigg|^{c} \qquad \left[a^{b+b_1}\times c = a^{b}\times a^{b_1}\times c\right]$$

c'est l'expression $\left.\overset{b}{\dot{a}}\right|^{c}$ dans laquelle l'initial a été remplacé par $\left.\overset{b_1}{\dot{a}}\right|^{c}$.

Exposant différence. On a aussi

$$\left.\overset{b-1}{\dot{a}}\right|^{c} = \log_a \left.\overset{b}{\dot{a}}\right|^{c}, \qquad \left.\overset{b-2}{\dot{a}}\right|^{c} = \log_a \left.\overset{b-1}{\dot{a}}\right|^{c} \;\ldots$$

et en général

$$\left.\overset{b-b_1}{\dot{a}}\right|^{c} = \log_a{}^{(b_1)} \left.\overset{b}{\dot{a}}\right|^{c} \qquad \left[a^{b-b_1}\times c = \left[\left[a^{b}\times c\right]:a\right]:a\;\ldots\right]$$

le symbole $\log_a{}^{(b_1)}$ représentant l'opération qui consiste à prendre b_1 fois de suite dans le système de base a, le logarithme de $\left.\overset{b}{\dot{a}}\right|^{c}$

https://doi.org/10.1017/S0013091500032223 Published online by Cambridge University Press

Exposant zéro. En faisant $b_1 = b$ on a

$$\left.\overset{0}{\dot a}\right|^{c} = \left.\overset{b-b_1}{\dot a}\right|^{c} \quad \log_a^{(b)} \left.\overset{b}{\dot a}\right|^{c} = c \qquad \left[a^{0} \times c = c\right]$$

la surpuissance d'exposant nul est donc égale à son initial.

Exposant négatif. Si b_1 est plus grand que b et égal à $b + b_2$ on a :

$$\left.\overset{-b_2}{\dot a}\right|^{c} = \log_a^{(b_1)} \left.\overset{b}{\dot a}\right|^{c} = \log_a^{(b_1-b)} \left.\overset{0}{\dot a}\right|^{c} = \log_a^{b_2} c \qquad \left[a^{-b_2} \times c = \frac{c}{a^{b}}\right]$$

Si l'on fait $b_2 = 1$ on a :

$$\left.\overset{-1}{\dot a}\right|^{c} = \log_a c \qquad \left[a^{-1} \times c = \frac{c}{a}\right]$$

La comparaison de ces deux relations nous montre que dans l'algorithme de l'élévation aux puissances, l'opération analogue à la division de c par a n'est pas l'extraction d'une racine, mais bien l'opération qui consiste à prendre, dans le système de base a, le logarithme de c.

Permutation de la fonction et de l'initial. Soit la relation

$$p = \left.\overset{-b}{\dot a}\right|^{q}$$

prenons les deux membres de cette égalité pour en faire les initiaux d'une surpuissance de base a et d'exposant b, nous aurons encore une égalité

$$\left.\overset{b}{\dot a}\right|^{p} = \left.\overset{b}{\dot a}\right|^{\left.\overset{-b}{\dot a}\right|^{q}} = \left.\overset{b-b}{\dot a}\right|^{q} = \left.\overset{0}{\dot a}\right|^{q} = q$$

il y a donc équivalence entre les égalitès

$$p = \left.\overset{-b}{\dot a}\right|^{q}, \quad q = \left.\overset{b}{\dot a}\right|^{p} \qquad \left[p = a^{b} \times q, \qquad q = a^{-b} \times p\right]$$

on peut donc permuter le prémier membre et l'initial du second pourvu qu'on change le signe de l'exposant.

Exposant produit. On a évidemment

$$\left.\overset{mb}{\dot a}\right|^{c} = \left.\overset{b}{\dot a}\right|^{\left.\overset{b}{\dot a}\right|^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}\left|^{c}\right.}} = \left(\overset{b}{\dot a}\right)^{\widehat{m}},\ c \qquad \left[a^{mb} \times c = \left(a^{b}\right)^{m} \times c\right]$$

c'est donc une puissance $-p$; on a évidemment

$$\left(\overset{b}{\dot a}\right)^{\widehat{m},\,c} = \overset{mb}{\dot a}\Big|^{c} = \left(\overset{m}{\dot a}\right)^{\widehat{b},\,c} \qquad \left[\left(\overset{b}{a}\right)^{m} \times c = \left(\overset{m}{a}\right)^{b} \times c\right]$$

On peut donc permuter l'exposant de la puissance $-p$ et celui de la surpuissance. On voit aussi que dans le troisième algorithme la puissance est à la fois l'analogue de la surpuissance et l'analogue de la puissance $-p$.

Exposant quotient. Dans la relation précédente posons $mb=p$ d'où $b=\frac{p}{m}$ on aura

$$\overset{p}{\dot a}\Big|^{c} = \left(\overset{\frac{p}{m}}{\dot a}\right)^{\widehat{m},\,c}$$

$\overset{\frac{p}{m}}{\dot a}$ est donc a racine $-r$ $m^{\text{ième}}$ de $\overset{p}{\dot a}\Big|^{c}$ et l'on a

$$\overset{\frac{p}{m}}{\dot a}\Big|^{c} = \overset{m}{\mathbf{W}}\overline{\overset{b}{\dot a}}\,\Big|^{c} \qquad \left[a^{\frac{p}{m}} \times c = \sqrt[m]{a^{p}} \times c\right]$$

Comme dans tout ce qui précède l'exposant de la surpuissance est supposé entier, et alors toutes ces expressions peuvent être calculées ; dans le cas contraire, on éprouve les mêmes difficultés pour vérifier que la valeur trouvée pour lá racine $-r$ répond à la question, que pour vérifier que la racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre qui n'est pas une puissance $n^{\text{ième}}$ exacte élevée à la $n^{\text{ième}}$ puissance reproduit le nombre donné ; c'est par une extension aux nombres quelconques de lois établies pour des nombres entiers que la vérification peut se faire. Par la comparaison des deux dernières relations on voit que dans le troisième algorithme l'analogue de lá racine $-r$ est la racine ; comme celleci elle s'exprime par l'exposant fractionnaire.

L'algorithme $u\,\Big|^{v}$.—La base du système de surpuissances étant choisie une fois pour toutes et sous-entendue ; on a

$$u\,\Big|^{v} = v\,\Big|^{u}$$

en supposant $u=\overset{b}{\dot a}$ $\;v=\overset{b_1}{\dot a}$; comme la multiplication cette opération est commutative ; mais la différence consiste en ce que le produit

https://doi.org/10.1017/S0013091500032223 Published online by Cambridge University Press

$u\times v=v\times u$ conserve la même valeur quelle que soit la base des puissances ; c'est à dire que u et v soient respectivement égaux à $\overset{b}{a}\times$ et à $\overset{b_1}{a}$ ou bien à $\overset{d}{c}$ et $\overset{d_1}{c}$, tandis que $u\,\big|^{v}$ change de valeur quand on change la base des surpuissances. La même restriction est applicable aux théoremes suivants.

Hyperlogarithmes. D'après les definitions précédentes on a d'une manière presque evidente

$$\mathrm{HL}u\,\big|^{v}=\mathrm{HL}v\,\big|^{u}=\mathrm{HL}u+\mathrm{HL}v \qquad \left[\mathrm{Log}(u\times v)=\mathrm{Log}u+\mathrm{Log}v\right]$$

on a aussi

$$\mathrm{HL}^{u}\big|\,v=\mathrm{HL}u-\mathrm{HL}v \qquad \left[\mathrm{Log}\ \frac{u}{v}\ =\mathrm{Log}u-\mathrm{Log}v\right]$$

On verrait facilement que si l'on a

$$p=u\,\big|^{v} \qquad [p=u\times v]$$

on en tire

$$v={}^{p}\big|\,u \quad u={}^{p}\big|\,v \qquad \left[v=\frac{p}{u} \quad u=\frac{p}{v}\right]$$

Hyperlogarithme d'une puissance $-p$ et d'une racine $-r$

On a presque évidemment

$$\mathrm{HL}u^{\widehat{m}}=m\ \mathrm{HL}u \qquad \left[\ \mathrm{Log}\,u^{m}\ =m\mathrm{Log}u\ \right]$$

$$\mathrm{HL}u^{\widehat{\frac{1}{m}}}=\frac{1}{m}\ \mathrm{HL}u \qquad \left[\ \mathrm{Log}\sqrt[m]{u}=\frac{1}{m}\mathrm{Log}u\ \right]$$

Logarithmes $-l$. Soit :

$$p=u^{\widehat{m}}=u_1^{\widehat{m_1}}$$

Si l'on suppose $u=\overset{b}{\dot{a}}$ $u_1=\overset{b_1}{\dot{a}}$ on a :

$$p=\overset{bm}{\dot{a}}=\overset{b_1m_1}{\dot{a}} \quad \text{d'où}\quad bm=b_1m_1 \quad \text{et}\quad \frac{m}{m_1}=\frac{b_1}{b}$$

comme d'autre part, on a :

$$b=\mathrm{HL}_a u \qquad b_1=\mathrm{HL}_a u_1 \qquad m=\mathrm{AL}_u p \qquad m_1=\mathrm{AD}_{u_1}p$$

on a

$$\mathrm{AL}_{u_1}p=\mathrm{AL}_u p\frac{\mathrm{HL}_a u}{\mathrm{HL}_a u_1} \qquad \left[\log_{u_1}p=\log_u p\frac{\log_a u}{\log_a u_1}\right]$$

https://doi.org/10.1017/S0013091500032223 Published online by Cambridge University Press

Donc pour passer d'un système de logarithmes $-l$ dans un autre, il faut multiplier les logarithmes $-l$ du premier système, par le rapport des hyperlogarithmes de la base du premier et de la base du second. Dans le troisième algorithme naturel, le logarithme est donc l'analogue à la fois de l'hyperlogarithmes et du logarithme $-l$. Mais $\frac{\log_a u}{\log_a u_1}$ est indépendant de a, ce qui n'est pas pour les hyperlogarithmes.

II. Expression de quelques fonctions trancendantes.

En analyse, on définit un certain nombre d'algorithmes directs, l'addition la multiplication, l'élévation aux puissances, la dérivation, les puissances d'une substitution, etc. . . . ; et quand on a pu mettre un problème quelconque en équations, on se trouve en présence d'un système de m équations entre $m+n$ variables. Ces équations peuvent contenir ou non des dérivées, des différences finies des puissances de fonctions, etc. . . . Mais on peut arriver à ce qu'il n'y entre que les symboles des algorithmes directs définis précédemment. Parmi les $m+n$ variables désignons n d'entre elles par $x_1\ x_2\ .\ .\ .\ x_n$ et les m autres par $y_1\ y_2\ .\ .\ .\ y_m$. Résoudre le système par rapport aux y, c'est arriver antant que possible à remplacer le premier système par un système équivalent composé de m équations telles que le premier membre de la $i^{\text{ème}}$ équation se réduise à y_i et le deuxième membre à $F_i\ (x_1\ x_2\ .\ .\ .\ x_n)$; la fonction F_i ne contenant que les x et des constantes finies et n'étant construite qu'avec les symboles directs des algorithmes naturels. On dira qu'on a exprimé explicitement les y au moyen des algorithmes naturels directs. Si l'on ne peut obtenir une résolution de cette nature et s'il est nécessaire d'employer certains symboles P, Q, R . . de fonctions inverses, on pourra dire, qu'on a explicité les y au moyen des algorithmes directs naturels avec adjonction des symboles P, Q, R . . . Les expressions obtennes n'auront de valeur que si l'on connait bien les fonctions inverses représentées par les symboles adjoints. Par exemple l'équation $x=a^y$ ne peut être résolue par rapport à y qu'avec adjonction du symbole et la soustraction et du symbole du logarithme

$$y = \log x \times (\log a)^{-1}.$$

Il peut aussi se présenter le cas où l'expression explicite des y_i peut s'obtenir à condition que certaines constantes soient infinies ;

ainsi la racine réelle de l'équation que nous avons prise pour exemple est la limite de

$$\frac{x^{\frac{1}{m}} - 1}{a^{\frac{1}{m}} - 1} \quad \text{(pour } m \text{ infini)}$$

et celle-ci, après qu'on aura fait disparaitre le symbole inverse division en l'exprimant par la puissance -1, ne contiendra plus que les algorithmes naturels, le symbole inverse—mais elle contiendra l'infini. Dans d'autres cas on ne pourra mettre les y, sous de telles formes, et on sera obligé de se contenter d'une résolution moins complète ; s'il s'agit par exemple d'équations différentielles et qu'on ait ramené, le problème à des quadratures, on aura explicité non plus la fonction mais bien une de ses dérivées ; enfin l'on pourra faute de mieux représenter la fonction inconnue par un développement, série, produit, etc. . . . et l'on arrivera à une notation qui pourra être finie mais au moyen du calcul symbolique. Si l'on a par exemple un développement en série de Maclaurin on pourra écrire

$$y_i = e^{\phi x}$$

en remplaçant après développement ϕ^k par $\left(\frac{d^k y_1'}{dx^k}\right)_0$; la formule n'aura de valeur que si l'on peut ensuite exprimer $\left(\frac{d^k y_1'}{dx^k}\right)_0$ en fonction de K soit en termes finis soit par une formule symbolique et ainsi de suite. Je n'ai pas d'ailleurs à insister sur ce sujet, les remarques que je vieus de rappeler n'ont d'autre but que de montrer l'intérêt qu'il y a à employer l'algorithme naturel de la surpuissance car par son moyen l'on peut expliciter certaines fonctions nouvelles, soit en termes finis, soit comme limites d'expressions directes quand certaines constantes dont elles dépendent tendent vers l'infini.

Expression finie du logarithme—Nous avons vu plus haut que l'on a

$$\log_a c = \overset{-1}{\dot{a}} \Big|^{c}$$

Cette équivalence est tout à fait comparable à la suivante

$$\frac{c}{a} = a^{-1} \times c$$

https://doi.org/10.1017/S0013091500032223 Published online by Cambridge University Press

tant qu'on ne possédait pas l'algorithme de l'élévation aux puissances, on ne pouvait expliciter au moyen des algorithmes naturels directs la racine de l'équation $ax = c$
De même ne possédant pas l'algorithme de la surpuissance, on ne peut actuellement expliciter la racine (ou plutôt les racines) de l'équation $a^x = c$. L'algorithme de la surpuissance atteint ce but.

La loi est d'ailleurs genérale ; si l'on a

$$\overset{x}{\dot{a}} = c$$

on aura $$HL_a c = \overset{-1}{\ddot{a}}\Big\|^{c}$$

ce symbole représentant le cinquième algorithme naturel. Bien entendu, pas plus que $a^{-1} \times c$, l'expression $\overset{-1}{\dot{a}}\Big|^{c}$ ne représente les *calculs* qu'il faut faire sur a et c pour obtenir la valeur *numérique* de x.

Il résulte de là que les fonctions circulaires ou hyperboliques inverses pourront s'expliciter au moyen des algorithmes naturels avec adjonction du seul symbole inverse.—On sait en effet qu'elles se ramènent à des logarithmes népériens de quantités imaginaires ou réelles. Ainsi l'on a :

$$\text{arc tang}\, x = \frac{L(1 + x\sqrt{-1}) - L(1 - x\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$

on pourra par suite écrire

$$\text{arc tang}\, x = \frac{\overset{-1}{\dot{e}}\Big|^{1+x\sqrt{-1}} - \overset{-1}{\dot{e}}\Big|^{1-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

formule qui présente la même symétrie que celle qu'Euler a donnée pour $\sin x$. L'algorithme de la surpuissance permet de faire certains rapprochements curieux. Les expressions générales

$$\frac{\overset{m}{\dot{e}}\Big|^{1+x\sqrt{-1}} + \overset{m}{\dot{e}}\Big|^{1-x\sqrt{-1}}}{2} \qquad \frac{\overset{m}{\dot{e}}\Big|^{1+x\sqrt{-1}} - \overset{m}{\dot{e}}\Big|^{1-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

donnent respectivement, quand on y fait $m = -1$, $m = 0$, $m = 1$, les fonctions

$$L\sqrt{1 + x^2},\quad 1,\quad e^{\cos x} \qquad \text{arc tang}\, x,\quad x,\quad e^{\sin x}$$

qui sont ainsi des cas particuliers d'une fonction plus générale.

https://doi.org/10.1017/S0013091500032223 Published online by Cambridge University Press

Les identités

$$a^x \times a^y = a^{x+y} \qquad a^x : a^y = a^{x-y}$$

$$\log_a x + \log_a y = \log_a (x \times y) \qquad \log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$$

pourront s'écrire

$$\overset{1}{\dot{a}}\Big|^{x} \times \overset{1}{\dot{a}}\Big|^{y} = \overset{1}{\dot{a}}\Big|^{x+y} \qquad \overset{1}{\dot{a}}\Big|^{x} : \overset{1}{\dot{a}}\Big|^{y} = \overset{1}{\dot{a}}\Big|^{x-y}$$

$$\overset{-1}{\dot{a}}\Big|^{x} + \overset{-1}{\dot{a}}\Big|^{y} = \overset{-1}{\dot{a}}\Big|^{x \times y} \qquad \overset{-1}{\dot{a}}\Big|^{x} - \overset{-1}{\dot{a}}\Big|^{y} = \overset{-1}{\dot{a}}\Big|^{x : y}$$

et dans les quatre cas l'exposant de la surpuissance est égal en grandeur et en signe à l'excès de l'ordre de l'algorithme qui relie l'une à l'autre les deux fonctions dans le premier membre, sur l'ordre de l'algorithme qui relie x à y dans l'initial du second, que ces algorithmes soient directs ou inverses.

III. Expression directe des racines des équations $x = a^x$. $\overset{2}{\dot{x}} = a$.

Je me propose de montrer que les racines de ces équations peuvent s'exprimer explicitement comme limites des valeurs que prennent certaines expressions construites seulement au moyen des algorithmes naturels avec adjonction du seul symbole inverse—. Occupons nous d'abord des racines réelles. Construisons en coordonnées rectangulaires les courbes figuratives des fonctions $y = x$, $y = a^x$ leurs intersections auront pour abscisses les racines réelles de l'équation $x = a^x$. Une discussion facile montrerait que l'on obtient :

pour	$a > e^{\frac{1}{e}}$	aucune racine réelle
	$a = e^{\frac{1}{e}}$	une racine double égale à e
	$1 < a < e^{\frac{1}{e}}$	deux racines comprises l'une entre 1 et e, l'autre entre e et ∞
	$1 > a > \left(\frac{1}{e}\right)^e$	une racine réelle comprise entre $\frac{1}{e}$ et 1
	$a = \left(\frac{1}{e}\right)^e$	une racine simple égale à $\frac{1}{e}$
	$\left(\frac{1}{e}\right)^e > a > 0$	une racine réelle comprise entre 0 et $\frac{1}{e}$

J'ai déja démontré * les résultats que je vais rappeler ici. Pour ne

* *Nouvelles Annales* (*Laisant et Antomari*), Décembre 1896, Février 1897.

pas allonger cette note je ne donnerai pas ces démonstrations; mais je les exposerai au moyen d'une représentation géométrique qui aura l'avantage de parler aux yeux.

Figure 1.

Considérons d'abord le cas $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ auquel se rapporte la Fig. 1; les deux racines sont u et U. Soit E le point de la bissectrice des axes ayant une ordonnée égale à e. Suivons le chemin brisé rectangulaire E A B C . . . dont les sommets sont alternativement situés sur la droit $y = x$ et sur la courbe $y = a^x$; calculons les ordonnées des points E B D . . . Pour B l'on a

$$\text{ordonnée B} = \text{ordonnée A} = a^e = a \,.\, e = \left.\overset{1}{\dot{a}}\right|^{e}$$

$$\text{ordonnée D} = \text{ordonnée C} = a \,.\, a \,.\, e = \left.\overset{2}{\dot{a}}\right|^{e} \quad \ldots$$

ces différents points représentant par leurs ordonnées les valeurs successives de $\left.\overset{m}{\dot{a}}\right|^{e}$ quand m prend les valeurs entières 1, 2, 3 . . . Or l'on *voit* que ces points convergent vers l'intersection dont l'abscisse est u; on a ainsi

$$u = \lim \left.\overset{m}{\dot{a}}\right|^{e} \quad \text{pour } m \text{ infini.}$$

Si maintenant l'on suit le chemin E $A_1 B_1 C_1$ . . . on a:

$$\text{ordonnée } B_1 = \log_a \text{ ordonnée } A_1 = \left.\overset{-1}{\dot{a}}\right|^{e}$$

$$\text{ordonnée } D_1 = \log_a \text{ ordonnée } C_1 = \log_a \text{ ordonnée de } B_1 = \left.\overset{-2}{\dot{a}}\right|^{e} \quad \ldots$$

les points B_1 D_1 . . . convergent vers l'intersection d'abscisse U, et l'on a

$$U = \lim \left.\overset{-m}{\dot{a}}\right|^{e}$$

Figure 2.

Considérons maintenant le cas $1 > a > \left(\frac{1}{e}\right)^e$. Un calcul simple montrerait que au point d'intersection a de la bissectrice avec $y = a^x$ la dérivèe a une valeur comprise entre o et -1. Soit E le point de $y = x$ ayant pour abscisse $\frac{1}{e}$. Suivons le chemin

E A B C . . . défini comme précédemment, on a,

$$\text{ordonnée B} = \text{ordonnée A} = a^{\frac{1}{e}} = a \,.\, \frac{1}{e}$$

$$\text{ordonnée D} = \text{ordonnée C} = a \,.\, a \,.\, \frac{1}{e}, \quad \text{etc.} \ldots$$

On voit que les point B, D, . . . situés de par et d'autre de l'intersection s'en approchent de plus en plus ; on a ainsi :

$$a = \lim \overset{m}{\dot{a}} \Big|^{e^{-1}} \quad (\text{pour } m \text{ infini})$$

Considérons enfin le cas où l'on a $\left(\frac{1}{e}\right)^{e} > a > 0$. On verrait facilement qu'alors la dérivée $\frac{da^x}{dx}$ a au point d'intersection une valeur comprise entre -1 et $-\infty$

FIGURE 3.

E ayant encore pour abscisse $\frac{1}{e}$, on a sur le chemin EABC . . .

$$\text{ordonnée B} = \log_a \text{ ordonnée A} = \overset{-1}{\dot{a}} \Big|^{\frac{1}{e}}$$

$$\text{ordonnée D} = \log_a \text{ ordonnée C} = \overset{-2}{\dot{a}} \Big|^{e^{-1}} \quad \text{etc.} \ldots$$

les points B D se rapprochent du point d'intersection et l'on a

$$a = \lim \overset{-m}{\dot{a}} \Big|^{e^{-1}}$$

Il est clair qu'au lieu de partir des points E on aurait pu partir d'autres points de la bissectrice des axes ; ainsi dans le premier cas on pouvait partir d'un point quelconque compris entre les deux intersections, mais celles – ci sont supposées inconnues et les valeurs e et $\frac{1}{e}$ attribuées à l'initial sont les seules qui conviennent *toujours.* En résumé l'on a l'expression générale des racines réelles

$$\lim \overset{\pm m}{\dot{a}} \Big|^{e^{\pm 1}}$$

avec les quatre combinaisons de signes suivantes :

Pour $e^{\frac{1}{e}} > a > 1$ on a deux racines répondant aux combinaisons $\left\{\begin{matrix} + & + \\ - & + \end{matrix}\right.$

$1 > a > \left(\frac{1}{e}\right)^e$ une racine répondant à la combinaison $+ \; -$

$\left(\frac{1}{e}\right)^e > a > 0$ une racine répondant à la combinaison $- \; -$

Passons maintenant aux racines imaginaires. Notre équation revient à

$$a^{u+v\sqrt{-1}} = u + v\sqrt{-1}$$

où $u + v\sqrt{-1}$ est une racine ; elle équivaut aux deux suivantes

$$(1) \qquad u = a^u \cos(v\mathrm{L}a) \qquad v = a^u \sin(v\mathrm{L}a)$$

dans l'une on peut expliciter v, dans l'autre u

$$v = \frac{1}{\mathrm{L}a} \operatorname{arc\,cos} \frac{u}{a^u} \qquad u = \frac{1}{\mathrm{L}a} \mathrm{L} \frac{v}{\sin(v\mathrm{L}a)}$$

on peut donc construire ces courbes dont chaque intersection correspondra à une racine de la proposée. Cela n'offre aucune difficulté et l'on verrait que si a est plus grand que 1, on trouve une intersection et une seule dans l'intervalle compris entre les droites $v = \frac{2\mathrm{K}\pi}{\mathrm{L}a}$ et $v = \frac{(2\mathrm{K}+1)\pi}{\mathrm{L}a}$. Rappelons un théorème connu : Si $f(x)$ désigne une fonction holomorphe dans le voisinage d'un point α supposé être un point racine de l'équation $f(x) - x = 0$ et si le module de la dérivée $\frac{dfx}{dx}$ prend, pour $x = \alpha$, une valeur inférieure à 1 ; la substitution $i, f(i)$ tendra vers une limite égale à α ; pourvu que i soit pris dans une région convenable. Si le module de la dérivée est plus grand que 1, et si l'on sait inverser la fonction $f(x)$; la substitution $i, f^{-1}i$ convergera vers α à condition qu'on ne conserve que les déterminations convenables. (Ce théorème aurait pu nous servir dans le cas des racines réelles.)

Dans notre cas il est facile le voir qu'en un point racine quelconque le module de la dérivée $\frac{da^x}{dx}$ est toujours plus grand que 1. Posons

$$(2) \qquad u = \rho\cos\theta \qquad v = \rho\sin\theta$$

le module cherché est $\quad a^u \mathrm{L}a = \rho \mathrm{L}a = \mathrm{M}$

https://doi.org/10.1017/S0013091500032223 Published online by Cambridge University Press

Comme en un point racine quelconque on doit vérifier les équations

$$\rho = a^u \qquad \theta = v\mathrm{L}a$$

qu'on déduit en combinant les systèmes (1) et (2), on en tire $\mathrm{M} = \frac{\theta}{\sin\theta}$ rapport toujours supérieur à 1, sauf pour $\theta = 0$ (racines réelles). La substitution x, a^x ne convergera donc jamais vers a quel que soit l'initial ; mais sous la restriction mentionnée la substitution inverse $x, \ \overset{-1}{\dot{a}} \,\Big|\, x$ $\left(\text{c'est à dire dans les notations usuelles } x, \ \frac{\mathrm{Log}x}{\mathrm{Log}a}\right)$ convergera vers a.

Soit $\rho_0 e^{\theta_0\sqrt{-1}}$ une valeur quelconque fournie par la substitution ; cherchons à figurer celle qui est fournie par la substitution répétée une fois de plus.

Si $u_1 + v_1\sqrt{-1}$ est cette valeur on devra avoir

$$\text{(A)} \qquad \mathrm{L}\rho_0 = u_1\mathrm{L}a \qquad \theta_0 = v_1\mathrm{L}a$$

on peut donc calculer u_1 et v_1 puis ρ_1 et θ ; ce calcul correspond à la construction suivante. Dans le système de coordonnées rectangulaires u, v traçons les courbes $v = a^u$, $u = \cos(v\mathrm{L}a)$ et le cercle $\rho = 1$.

FIGURE 4.

Soit p l'affixe de $u_0 + v_0\sqrt{-1}$; suivons les chemins $p\mathrm{LM}z$ et $p\mathrm{L}_1\mathrm{M}_1z_1$ formés : le premier d'un arc de cercle de centre O, d'une paralèlle à ou, et d'une parallèle à ov ; le second d'une droite passant à l'origine, d'une parallèle à ov, et d'une parallèle à ou ; les derniers éléments de ces chemins se coupent en q, ce point est l'affixe de $u_1 + v_1\sqrt{-1}$. En effet l'on a

$$\text{absc.}q = \text{absc.M} = \log_a(\text{ord.M}) = \log_a \overline{\mathrm{OL}} = \log_a op = \log_a \rho_o$$

$$\text{ord. } q = \text{ord. } \mathrm{M}_1 = \frac{1}{\mathrm{L}a}\,\text{arc}(\cos = \text{absc.M}_1) = \frac{1}{\mathrm{L}a}\text{arc}(\cos = \text{absc.L}_1 = \frac{1}{\mathrm{L}a}\theta_o$$

Pour abréger je dirai que q est le logarithme le p. Cela posé, prenons pour initial la quantité $\sqrt{-1}$. En calculant $u_1 + v_1\sqrt{-1}$ ou en le construisant géométriquement on obtiendra tous les points situés sur l'axe ov et ayant pour ordonnées $(4j \pm 1)\frac{\pi}{2\mathrm{L}a}$, j étant

https://doi.org/10.1017/S0013091500032223 Published online by Cambridge University Press

entier. Si l'on veut obtenir la racine α_k comprise entre les droites $\frac{2k\pi}{La}$ et $2(k+1)\frac{\pi}{La}$ il faut avoir

$$4k < 4j \pm 1 < 4(k+1)$$

il faudra donc faire $j=k$ et ne pas tenir compte du signe $-$ qui fournirait des racines étrangères. Soit R_1 le point obtenu; en continuant ainsi, on obtiendra un point R_2 comme logarithme de R_1, et qui sera situé à l'intersection de la droite $v=(4k+1)\frac{\pi}{2La}$ et de la courbe $v=a^u$, et ainsi de suite. En vertu du théorème rappelé plus haut on convergera vers α_k; j'ai cru bon d'indiquer cette représentation géométrique qui, si on la dessine complètement fera voir que les points R_1, R_2, . . . ainsi obtenus s'approchent de plus en plus du point R intersection des courbes definies par les équations (A), et supposées tracées. En résumé, sous la restriction mentionnée plus haut, les racines imaginaires seront les limites de l'expression

$$\left.\overset{-m}{\dot{a}}\right|^{\pm\sqrt{-1}} \qquad \text{(pour } m \text{ infini)}$$

Quand a est plus petit que 1 et égal à $\frac{1}{b}$; les mêmes considérations sont applicables à part cette différence que les racines de la proposée sont comprises entre les droites

$$v=(2k-1)\frac{\pi}{La} \quad \text{et} \quad v=2\frac{k\pi}{La};$$

il faudra alors dans le facteur $4j \pm 1$ prendre le signe inférieur à l'exclusion de l'autre.

Ces racines peuvent être mises sous la forme $\lambda+\mu\sqrt{-1}$; pour cela posons $a=e^z$ et

$$U(z)+\sqrt{-1}\,V(z)=\left.\overset{-m}{\dot{e}^z}\right|^{+\sqrt{-1}} \qquad U(z)-\sqrt{-1}\,V(z)=\left.\overset{-m}{\dot{e}^z}\right|^{-\sqrt{-1}}$$

d'où

$$U(z)=\frac{\left.\overset{-m}{\dot{e}^z}\right|^{\sqrt{-1}}+\left.\overset{-m}{\dot{e}^z}\right|^{-\sqrt{-1}}}{2} \qquad V(z)=\frac{\left.\overset{-m}{\dot{e}^z}\right|^{\sqrt{-1}}-\left.\overset{-m}{\dot{e}^z}\right|^{-\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

En faisant $m=-1$ ces fonctions deviennent $\cos z$ et $\sin z$.; si l'on appelle $u(z)$ et $v(z)$ ce quelles deviennent pour m infini, la quantité $u(z) \pm v(z)\sqrt{-1}$

sera racine de l'équation $e^{zx} - x = 0$. Quand on élimine z entre les équations $u = \cos z$ $v = \sin z$ on trouve le cercle $\rho = 1$. De même si l'on élimine z entre les équations

$$\lambda = u(z) \qquad \mu = v(z)$$

on obtient la courbe

$$(\mathrm{B}) \qquad \rho = e^{\frac{\theta}{\operatorname{tang}\theta}}$$

qui joue ainsi le même rôle que le cercle pour les fonctions circulaires.

Ajoutons que pour étudier la répartition dans le plan des racines imaginaires pour une valeur donnée de a ; les courbes definies par les équations (A) sont peu commodes ; elles ont l'une et l'autre une infinité de branches ; il vaudra mieux prendre la courbe (B) qui est invariante et la courbe $\rho = a^u$ qui n'a qu'une seule branche infinie. Mais on introduit ainsi des racines étrangères dontil ne faudra pas tenir compte.

Equation $x^x = a$. En posant $x = \dfrac{1}{y}$, $a = \dfrac{1}{a}$ elle devient $y = a^y$. On a donc

$$\sqrt[2]{a} = \lim\left(\begin{array}{c|c} \pm m & e^{\pm 1} \\ \dot{a}^{-1} & \end{array}\right) - 1 \qquad \text{et} \qquad \sqrt[2]{a} = \lim\left(\begin{array}{c|c} -m & \pm\sqrt{-1} \\ \dot{a}^{-1} & \end{array}\right) - 1$$

pour les racines réelles — pour les racines imaginaires

IV. Applications diverses.

Expressions des racines de quelques équations trancendantes. Intégration d'une équation aux différences mêlées. Applications diverses.

La surracine deuxième pouvant s'exprimer au moyen des algorithmes naturels, il en sera de même des fonctions qui peuvent s'y ramener.

Tel est le cas des racines de quelques équations trancendantes ; il nous suffira de ramener ces equations à l'un on à l'autre des types

$$x = a^x \qquad x^x = a$$

Equation $x^{x^m} = a$

Elevant les deux membres à la puissance m et posant $x^m = y$, $a^m = b$ elle devient

$$y^y = b$$

On a donc

$$x^m = \sqrt[\overset{2}{\vdots}]{a^m} \qquad \text{puis} \qquad x = \left(\sqrt[\overset{2}{\vdots}]{a^m}\right)^{\frac{1}{m}}$$

Equation $xa^x = b$

Elevons a aux puissances exprimées par les deux membres, on a

$$\left(a^{\overset{2}{\vdots}\,x}\right) = a^{b}$$

d'où

$$a^x = \sqrt[\overset{2}{\vdots}]{a^b} = \frac{b}{x} \qquad \text{puis} \qquad x = \frac{b}{\sqrt[\overset{2}{\vdots}]{a^b}}$$

Equation $a^x = kx$.

Elle se ramène à la précédente, en l'écrivant

$$x(a^{-1})^x = k^{-1}$$

Equation $a^x = x + b$.

Elle se ramène à la précédente si on l'écrit

$$a^{x+b} = a^b(x+b)$$

et si l'on pose $\qquad x + b = y.$

On peut également réduire des équations un peu plus générales

$$(ax)^{bx^c} = m, \qquad (ax)^p\, b^{(qx)^c} = m \qquad (x+k)^m\, a^{px+q} = b$$

Pour la première posons, $ax = y$ élevons les deux membres de l'équation à la puissance $b^{-1}ca^c$ posant ensuite $y^c = z$ et $m^{b^{-1}ca^c} = n$, elle devient

$$\overset{\overset{2}{\vdots}}{z} = n$$

Pour la deuxième posons encore $ax = y$. Elevons à la puissance $p^{-1}c$ on est ramené à la forme $\qquad zA^z = B$

La troisième se ramène au même type, en posant $x + k = y$.

En résolvant ces équations, il faut d'une part ne pas tenir compte des solutions étrangères, de l'autre constater que l'on a obtenu toutes les racines de la proposée.

FIGURE 5.

Cherchons, par exemple, les intersections réelles des courbes

$$y = a^x \qquad y = bx^2$$

en supposant $a > 1$ $b > 0$. La Fig. 5 montre qu'on a toujours une racine réelle négative; il peut aussi exister deux racines positives égales ou inégales. On a à resoudre l'équation

$$a^x = bx^2$$

https://doi.org/10.1017/S0013091500032223 Published online by Cambridge University Press

on peut l'écrire $\qquad (\sqrt{a})^x = \sqrt{b}\, x$

et l'on a :

$$a = \frac{1}{\sqrt{b}} \left(\sqrt[2]{\sqrt{a}^{-\frac{1}{\sqrt{b}}}} \right)^{-1}$$

Pour que les deux racines positives soient égales, il faut avoir :

$$\sqrt[2]{\sqrt{a}^{-\frac{1}{\sqrt{b}}}} = \frac{1}{e} \quad \text{ou} \quad \sqrt{a}^{-\frac{1}{\sqrt{b}}} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$$

C'est à dire
$$a = e^{\frac{2\sqrt{b}}{e}}$$

Si a est plus petit que cette valeur, on a deux racines réelles inégales. Il est clair qu'il faut prendre $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ avec le seul signe $+$. Pour obtenir la racine négative on changera x en $-x$, et l'on est ramené à l'équation $bx^2 = \frac{1}{a^x}$ qu'on peut encore écrire

$$x\sqrt{a}^{x} = \frac{1}{\sqrt{b}} \quad \text{et l'on a}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{b}} \left(\sqrt[2]{\sqrt{a}^{\frac{-1}{\sqrt{b}}}} \right)^{-1}$$

qu'il faudra changer de signe. Ainsi les 3 racines réelles possibles sont données par la même formule, $\sqrt{a}$ étant toujours positif, et $\sqrt{b}$ étant postitif pour les deux racines positives, et negatif pour la racine négative.

Fonction $\quad y = \sqrt{a^{2x} - x^2}$.

Nous avons rencontré cette fonction en étudiant la répartition des racines imaginaires de l'équation

$$z = a^z.$$

En coordonnées polaires l'équation de cette courbe est $\rho = a^{\rho\cos\omega}$ En coordonnées semi-polaires, abscisse et rayon vecteur, elle est $\rho = a^x$. Pour $a > 1$, elle peut présenter trois formes suivant que, a est plus petit que $e^{\frac{1}{e}}$, égal à $e^{\frac{1}{e}}$ ou plus grand que $e^{\frac{1}{e}}$. On trouve facilement que pour x infini et positif elle est asymptote à

$y = \pm a^{x}$ qu'elle est tangente à ces courbes pour $x = o$; qu'en chacun des points réels où elle coupe ox, elle a une tangent eparallèle à oy. Cherchons les abscisses de ces points d'intersection.

FIGURES 6, 7, 8.

Pour $y = o$ il faut avoir $a^{x} = x$ ou $a^{-x} = x$; les deux racines réelles positives sont les deux valeurs réelles de $(\sqrt[2]{a})^{-1}$ égales si $a = e^{\frac{1}{e}}$, inégales si $a < e^{\frac{1}{e}}$ la racine négative est $(\sqrt[2]{a^{-1}})^{-1}$. Cherchons les abscisses des points pour lesquels la courbe a des tangentes horizontales. On a :

$$y' = \pm \frac{a^{2x} \mathrm{L}a - x}{\sqrt{a^{2x} - x^{2}}}$$

les racines du numérateur s'obtiendront en posant $x = \dfrac{\mathrm{L}a}{z}$ il vient

$$a^{2\mathrm{L}a} = \frac{1}{z^{2}}$$

par suite

$$z = \sqrt[2]{a^{-2\mathrm{L}a}} \qquad \text{et} \qquad x = \mathrm{L}a\left(\sqrt[2]{a^{-2\mathrm{L}a}}\right)^{-1}$$

les deux valeurs seront distinctes si l'on a $1 < a^{2\mathrm{L}a} < e^{\frac{1}{e}}$; elles seront égales et on aura un point stationnaire si l'on a

$$a^{2\mathrm{L}a} = e^{\frac{1}{e}} \qquad \text{ou} \qquad 2(\mathrm{L}a)^{2} = \frac{1}{e} \qquad \text{c'est à dire} \qquad \mathrm{L}a = \frac{1}{\sqrt{2e}}$$

l'abscisse et l'ordonnée ont alors la valeur commune $\sqrt{\dfrac{e}{2}}$

Autre appplication.

Comme exemple d'équations qu'on intégre en les différentiant M. H. Laurent *

cite l'équation (1) $x = e^{y'} + y'$

En différentiant on a : $dx = e^{y'} dy' + dy'$

en multipliant par y' $dy = y'(e^{y'} + 1) dy'$

d'où $y = \int y'(e^{y'} + 1) dy' + \mathrm{C}^{te}$

C'est a dire (2) $y = e^{y'}(y' - 1) + \frac{1}{2}q'^{2} + \mathrm{C}^{te}$

* *Traité d'analyse.* Tome V.

https://doi.org/10.1017/S0013091500032223 Published online by Cambridge University Press

On peut éliminer entre (1) et (2) y' et il reste une relation implicite entre x et y. L'algorithme de la surpuissance permet d'expliciter y ; en effet (1) peut s'écrire

$$(x-y') = e^{y'} \qquad \text{ou} \qquad (x-y')e^{x-y'} = e^{x}$$

Elevons e aux puissances indiquées par les deux membres ; on a

$$\left(e^{x-y'}\right)^{\dot{2}} = \overset{\dot{2}}{e} \,\Big|\, x$$

On a donc

$$e^{x-y'} = \sqrt[\dot{2}]{\overset{\dot{2}}{e} \,\Big|\, x} \qquad e^{y'} = e^{x}\left[\sqrt[\dot{2}]{\overset{\dot{2}}{e} \,\Big|\, x}\right]^{\dot{-}1} \qquad y' = x - e^{x}\left[\sqrt[\dot{2}]{\overset{\dot{2}}{e} \,\Big|\, x}\right]^{-1}$$

Remplaçant y' et $e^{y'}$ par leurs valeurs dans (2), on aura explicité y.

Intégration de l'équation aux différences mêlées

$$y^{(m+p)} + \triangle y^{(m+p)} = ay^{(m)}$$

On peut l'écrire $\qquad y_1^{(m+p)} - ay^{(m)} = 0$

ou encore $\qquad y^{(m+p)} - ay_{-1}^{(m)} = 0$

y_1 y_{-1} désignant la valeur de la fonction quand x est changé en $x+1$, ou en $x-1$ comme l'on a

$$y_{-1}^{(m)} = y^{(m)} - \frac{1}{1!}y^{(m+1)} + \frac{1}{2!}y^{(m+2)} - \ \ldots$$

On a à résoudre l'équation linéaire à coefficients constants

$$o = y^{(m+p)} - a\left(y^{(m)} - \frac{1}{1!}y^{(m+1)} + \ \ldots\right)$$

L'équation caractéristique peut s'écrire

$$r^{m+p} - ar^{m}e^{-r} = o$$

Elle admet les m recines $r=o$; ce qui donne un polynôme de degré m, il reste $r^{p} = ae^{-r}$.

Pour la résoudre élevons a la puissance $\dfrac{1}{p}$

$$ra^{-p^{-1}} = \left(e^{-p^{-1}}\right)^{r}$$

ce qui la ramène à la forme $Ar = B^r$ et les racines seront

$$r = \pm a^{p^{-1}\left(\sqrt[2]{e^{p^{-1}a^{p^{-1}}}}\right) - 1}$$

Suivant les valeurs attribuées à a et à p il pourra exister une ou trois racines réelles P, R, S * que fournissent trois intégrales particulières

$$y = C_{m+1}e^{P_x} \qquad y = C_{m+2}e^{R_x} \qquad y = C_{m+3}e^{S_x}$$

Pour les racines imaginaires que sont conjuguées deux à deux et d'ordre simple, on aura

$$r = a^{p^{-1}}\left\{u\left(-p^{-1}a^{p^{-1}}\right) + \sqrt{-1}\,v\left(-p^{-1}a^{p^{-1}}\right)\right\}$$

u et v étant les fonctions définies au paragraphe III. En ne tenant pas compte des racines étrangères que l'on reconnaitra facilement il restera une infinité d'intégrales particulières de la forme

$$y = e^{a^{p^{-1}}u(z)x}\left\{A\cos\left(a^{p^{-1}}v(z)x\right) + B\sin\left(a^{p^{-1}}v(z)x\right)\right\}$$

où l'on a posé $-p^{-1}a^{p^{-1}} = z$

et où A et B sont des constantes arbitraires.

En ce qui concerne l'expression des hyperlogarithmes comme limites d'expressions directes propres à représenter leur calcul, et le développement de la fonction surexponentielle en série quand l'exposant n'est pas un nombre entier je suis arrivé à des résultats qui ne pourraient trouver place ici sans allonger de beaucoup cette note ; j'en ferai l'objet d'une communication ultérieure.

Notes bibliographiques sur la convergence des substitutions uniformes

Koenigs : Sur certaines équations fonctionnelles (*Annales de l'Ecole. Normale*, 1887.)

Korkine : Sur un problème d'interpolation (*Bulletin des Sc. Math.*, 1882.)

Je n'ai trouvé aucun renseignement bibliographique sur le quatrième algorithme naturel.

* Deux racines pourraint être égales.

https://doi.org/10.1017/S0013091500032223 Published online by Cambridge University Press

Un correspondant de St Pétersbourg m'a appris qu'Euler avait donné les racines réelles, mais non les racines imaginaires de l'équation $x = a^x$ par des expressions qui ont le même sens que celles que je donne ici) son mémoire a paru dans les "Acta Ac. Sc. Petropolitanae pro anno MDCCLXXVII.; je n'ai pu encore me procurer ce recueil.

Une partie des résultats consignés dans cette note a èté publiée dans :

Association française pour l'Avancement des Sciences, Bordeaux, 1895.

Nouvelles Annales de Mathématiques. Laisant et Antomari, Décembre 1896, et Février 1897.