M. Itô.
Nagaya Math. J.
Vol. 44 (1971), 133–164

SUR LES PRINCIPES DIVERS DU MAXIMUM ET LE TYPE POSITIF

MASAYUKI ITO

1. Introduction

Dans la théorie du potentiel par rapport à la noyau-fonction continue (au sens large), les théorèmes de Ninomiya et ceux de Kishi sont très originels (cf. [9] et [7]). Dans cet article, en généralisant la notion du noyau, on se propose de discuter quelques théorèmes analoques.

Soient X un espace localement compact et σ-compact, et ξ une mesure de Radon positive dans X. En fixant X et ξ, on note respectivement E et M la σ-algèbre constituée par tous les ensembles ξ-mesurables de X, et la totalité de fonctions ξ-mesurables, bornées dans X, à valeurs réelles et à support compact. Le sous-ensemble des fonctions non-négatives de M est désigné par M^+.

Un noyau N relatif à X et à ξ est, par définition, une application de $E\times E$ à $[0, +\infty]$ telle que, quel que soit e_0 un ensemble relativement compact de E, les applications

$$E \ni e \to N(e_0, e) \text{ et } E \ni e \to N(e, e_0)$$

soient complètement additives sur E et absolument continues par rapport à ξ. On pose, quels que soient e_1 et e_2 de E, $N(e_1, e_2) = \check{N}(e_2, e_1)$, et alors, $\check{N}$ est un noyau relatif à X et à ξ, qui s'appelle le noyau adjoint de N. Si l'on a $\check{N} = N$, il est dit d'être symétrique.

Soit N un noyau relatif à X et à ξ. Pour une fonction f ξ-mesurable et non-négative dans X, l'intégrale $\int f(y)N(e, dy)$ a un sens. Si l'application

$$E \ni e \to \int f(y)N(e, dy)$$

est complètement additive et absolument continue par rapport à ξ, sa densité s'appelle le potentiel de f par rapport au noyau N et s'écrit Nf. Si, pour

Received February 19, 1971

une fonction f ξ-mesurable et réelle dans X, Nf^+ et Nf^- sont définis, on dit alors que $Nf = Nf^+ - Nf^-$ est le potentiel de f par rapport au noyau N. Il est clair, d'après la définition du noyau, que, pour une fonction f de M, Nf a un sens.

Principe classique du maximum: Un noyau N relatif à X et à ξ satisfait au principe classique du maximum si, quelle que soit f de M^+, l'inégalité $Nf \leqq 1$ est satisfaite pp sur X dès qu'elle l'est pp sur $K(f) = \{x \in X;\ f(x) > 0\}$.

Une propriété a lieu pp sur un ensemble e de E si elle a lieu presque partout pour ξ sur e. On note (M) la totalité des noyaux qui satisfont au principe classique du maximum.

Principe de positivité de masse: Un noyau N relatif à X et à ξ satisfait au principe de positivité de masse si, quelles que soient f et g de M^+, on a

$$Nf \leqq Ng\ pp \text{ sur } X \Longrightarrow \int f d\xi \leqq \int g d\xi,$$

et (PM) est la totalité des noyaux qui satisfont au principe de positivité de masse.

Principe de domination: Un noyau N relatif à X et à ξ satisfait au principe de domination si, quelles que soient f et g de M^+, $Nf \leqq Ng$ pp sur X dès que la même inégalité a lieu pp sur $K(f)$, et leur totalité est désignée par (D).

Principe complet du maximum: Un noyau N relatif à X et à ξ satisfait au principe complet du maximum si, quelles que soient f et g de M^+, l'inégalité $Nf \leqq Ng + 1$ est satisfaite pp sur X dès qu'elle l'est pp sur $K(f)$.

Notons (CM) la totalité des noyaux qui satisfont au principe complet du maximum. On a alors $(CM) \subset (M) \cap (D)$.

On a évidemment, pour deux fonctions f et g de M,

$$\int Nf(x)g(x)d\xi(x) = \int \check{N}g(x)f(x)d\xi(x),$$

et donc, cela peut être écrit $\iint g(x)f(y)N(dx, dy)$ sans confusion.

On dit que N est de type positif si, quelle que soit f de M, on a

$$\iint f(x)f(y)N(dx,\ dy) \geqq 0.$$

On se propose d'abord de montrer les quatre résultats suivants:

(1) Sous une condition additionnelle, $N \in (D)$ et $\check{N} \in (D)$ sont équivalents.

https://doi.org/10.1017/S0027763000014604 Published online by Cambridge University Press

(2) Si N est symétrique et si l'on a $N \in (D)$, N est de type positif.
(3) $N \in (CM) \cap (PM)$ et $\check{N} \in (CM) \cap (PM)$ sont équivalents.
(4) Si l'on a $N \in (CM) \cap (PM)$, N est alors de type positif.

On examinera ensuite le type positif des noyaux mesurables relatifs à X et à ξ, et on obtient une généralisation du théorème de Ninomiya. Un noyau N relatif à X et à ξ est, par definition, mesurable s'il existe une fonction $(\xi \times \xi)$-mesurable $n(x, y)$ dans $X \times X - \Delta$ et telle que, quels que soient e_1 et e_2 de E avec $e_1 \cap e_2 = \phi$,

$$N(e_1, e_2) = \int_{e_1}\int_{e_2} n(x, y) d\xi(y) d\xi(x).$$

En l'appliquant à la théorie du potentiel à la noyau-fonction borélienne, on obtiendra quelques théorèmes correspondant à ceux de Ninomiya, de Kishi et de Durier dans le cas de noyau-fonction continue au sens large.

2. Les noyaux élémentaires et les résolvantes

Soient N_1 et N_2 deux noyaux relatifs à X et à ξ. Alors, quels que soient e_1 et e_2 ensembles relativement compacts de E, l'intégrale

$$\int \check{N}_1 c_1(x) N_2 c_2(x) d\xi(x)$$

a un sens, où c_1 et c_2 sont respectivement les fonctions caractéristiques de e_1 et de e_2, et on écrit

$$\int \check{N}_1 c_1(x) N_2 c_2(x) d\xi(x) = \int N_1(e_1, dy) N_2(dy, e_2).$$

Si l'application

$$(e_1, e_2) \to \int N_1(e_1, dy) N_2(dy, e)$$

peut être prolongée sur $E \times E$ et si ce prolongement est un noyau relatif à X et à ξ, il s'écrit $N_1 \cdot N_2$ et s'appelle la multiplication de N_1 et de N_2. En particulier, on écrit $(N)^n = (N)^{n-1} \cdot (N)$ dès qu'elle a un sens.

Posons, pour une couple (e_1, e_2) de E,

$$U(e_1, e_2) = \xi(e_1 \cap e_2);$$

cela est évidemment un noyau relatif à X et à ξ, qui s'appelle le noyau d'unité. Le potentiel de $f \in M$ par rapport au noyau U est égal à f.

On dit qu'un noyau N relatif à X et à ξ est élémentaire s'il existe une

https://doi.org/10.1017/S0027763000014604 Published online by Cambridge University Press

constante non-négative C et un noyau $\tilde{N}$ relatif à X et à ξ tels que

$$N(e_1, e_2) = C \sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{N})^n (e_1, e_2),$$

où $(\tilde{N})^0 = U$ ou $(\tilde{N})^0 = 0$ d'accord avec $\tilde{N} \neq 0$ ou $\tilde{N} = 0$.

Remarque. Si l'on a

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{N})^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{N}')^n,$$

alors $\tilde{N} = \tilde{N}'$.

En effet, on a

$$U - \tilde{N} = (U - \tilde{N}) \cdot N \cdot (U - \tilde{N}') = U - \tilde{N}'.$$

On dit donc que $\tilde{N}$ est le générateur de N et que N est engendré par $\tilde{N}$.

Remarque. Si N est un noyau élémentaire relatif à X et à ξ, $\check{N}$ l'est aussi. Cela est évident.

On dit qu'un noyau N relatif à X et à ξ est borné s'il existe une constante C telle que, quel que soit e de E, $N(e, X) \leqq C\xi(e)$. En particulier, si l'on peut prendre $C = 1$, N est dit d'être sous-markovien.

Soit e_0 un ensemble de E. Alors, la restriction d'un noyau N relatif à X et à ξ sur e_0 est, par définition,

$$N_{e_0}(e_1, e_2) = N(e_0 \cap e_1, e_0 \cap e_1).$$

Cela est aussi un noyau relatif à X et à ξ.

Proposition 1. *Pour un noyau N relatif à X et à ξ, il existe une suite (K_n) de compacts de X telle que $\check{N}_n$ et N_n soient bornés et que, quels que soient e_1 et e_2 ensembles relativement compacts de E,*

$$\lim_{n \to \infty} N_n(e_1, e_2) = N(e_1, e_2),$$

où N_n est la restriction de N sur K_n.

En effet, soit (K_n') une suite croissante de compacts de X et avec $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n' = X$. On a alors

$$\int N c_n'(x) c_n'(x) d\xi(x) = \int \check{N} c_n'(x) c_n'(x) d\xi(x) < +\infty,$$

où c_n' est la fonction caractéristique de K_n'. Il existe donc un compact K_n

$\subset K'_n$ et telle que $\xi(K'_n - K_n) < 1/n$ et Nc_n et $\check{N}c_n$ soient bornés sur K_n. On peut montrer facilement que la suite (K_n) est ce que nous avons désiré.

PROPOSITION 2. *Si N est élémentaire, on a alors $N \in (D)$.*

En effet, on peut supposer

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{N})^n,$$

où $\tilde{N}$ est aussi un noyau relatif à X et à ξ. Il suffit de voir que, quelles que soient f et g de M^+, $Nf \leqq Ng$ pp sur X dès que $Nf < Ng$ pp sur $K(f)$, car $Nf > 0$ pp sur $K(f)$. Soit (K_n) une suite croissante de compacts de X et avec $\cup K_n = X$. On pose ensuite

$$N_n = \sum_{m=0}^{\infty} (\tilde{N}_n)^m,$$

où $\tilde{N}_n$ est la restriction de $\tilde{N}$ sur K_n, et alors, quels que soient e_1 et e_2 de E, $N_n(e_1, e_2)$ converge d'une manière croissante vers $N(e_1, e_2)$ avec $n \to \infty$. Soit f_n la restriction de f sur $\{x \in X;\ Nf(x) \leqq N_n g(x)\}$. On a alors $N_n f_n \leqq N_n g$ sur $K(f_n)$. Si l'on admet $N_n f_n \leqq Ng$ pp sur X, alors, faisant $n \to \infty$, on arrive à la conclusion que $Nf \leqq Ng$ pp sur X. On peut donc supposer qu'il existe un compact K de X telle que la restriction de N sur K soit égale à N. D'après $N(X, X) = N(K, K) < +\infty$, il existe une suite croissante (K_n) des compacts $\subset K$ telle que $\xi(K_n) \nearrow \xi(K)$ avec $n \to \infty$ et que $\check{N}_n$ soit borné, où $\check{N}_n$ est la restriction de $\check{N}$ sur K_n. De la même manière que ci-dessus, il suffit de voir $N_n \in (D)$. On peut supposer encore que $\check{N}$ est borné. Supposons que, pour deux fonctions f et g de M^+, $Nf \leqq Ng$ sur $K(f)$, et posons $v = \inf(Nf, Ng)$; on a alors, quel que soit e de E,

$$\int_e v(x) d\xi(x) \geqq \int v(y) \tilde{N}(e, dy),$$

et on a donc, quelle que soit u de M^+,

$$\iint u(x)(Nf(y) - v(y))(U(dx, dy) - \tilde{N}(dx, dy))$$

$$= -\iint u'(x)(Nf(y) - v(y))\tilde{N}(dx, dy) - \iint u''(x) v(y)(U(dx, dy) - \tilde{N}(dx, dy)) \leqq 0,$$

où u' est la restriction de u sur $K(f)$ et $u'' = u - u'$. D'après notre hypothèse, on a, quelle que soit h de M^+, $Nh \in M^+$, et donc

$$0 \geqq \iint Nh(x)(Nf(y) - v(y))(U(dx, dy) - \tilde{N}(dx, dy))$$

$$= \int (Nf(x) - v(x))h(x)d\xi(x) \geqq 0,$$

d'où $Nf = \inf(Nf, Ng) \leqq Ng$ pp sur X. Par conséquent, $N \in (D)$.

Une famille $(N_p)_p$ ($p \geqq 0$ ou $p > 0$) des noyaux relatifs à X et à ξ est, par définition, une résolvante si l'on a, quels que soient $p \geqq 0$ et $q > 0$,

$$N_p - N_q = (q - p)N_p \cdot N_q$$

et si, quels que soient e_1 et e_2 de E, $\lim_{p \to 0} N_p(e_1, e_2) = N_0(e_1, e_2)$ dès que N_0 appartient à cette famille.

L'égalité ci-dessus s'appelle l'équation résolvante.

Remarque. Soient $(N_p)_{p \geq 0}$ et $(N'_p)_{p \geq 0}$ deux resolvantes. S'il existe un nombre p tel que $N_p = N'_p$, alors elles sont égaux.

En effet, d'après l'équation résolvante, on a, quel que soit $q (\neq p)$,

$$(U - (p - q)N_p) \cdot (U - (q - p)N_q) = (U - (p - q)N_p) \cdot (U - (q - p)N'_q) = U.$$

Si $q > p$, les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((q - p)N_q)^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} ((q - p)N'_q)^n$$

convergent, et elles sont noyaux relatifs à X et à ξ. D'après l'égalité ci-dessus, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((q - p)N_q)^n = \sum_{n=0}^{\infty} ((q - p)N'_q)^n,$$

d'où $N_q = N'_q$. Si $q < p$, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((p - q)N_p)^n$$

aussi converge, et on a

$$U - (q - p)N_q = U - (q - p)N'_q,$$

d'où $N_q = N'_q$.

Par conséquent, si, pour un noyau N relatif à X et à ξ, il existe une résolvante $(N_p)_{p \geq 0}$ avec $N_0 = N$, elle est unique. On dit donc que $(N_p)_{p \geq 0}$ la résolvante associée à N et que N est un noyau associé à résolvante. On note (R) la totalité des noyaux relatifs à X et à ξ associés à résolvante. Cela a très proche relation avec (D).

Remarque. Si (N_p) est une résolvante, alors $(\check{N}_p)$ l'est aussi.

Cela resulte du fait que $\check{N}_p \cdot \check{N}_q$ a un sens et que l'on a $\widecheck{N_p \cdot N_q} = \check{N}_p \cdot \check{N}_q$.

PROPOSITION 3. *Soit N un noyau relatif à X et à ξ. Si $N \in (R)$, alors, quel que soit c une constante positive, $N + cU$ est élémentaire. Réciproquement, si N est élémentaire, alors $N \in (R)$.*

En effet, on suppose d'abord $N \in (R)$, et on désigne par $(N_p)_{p \geqq 0}$ la résolvante associée à N. On montra ici que, pour un nombre $p > 0$,

$$N + \frac{1}{p} U = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} (pN_p)^n.$$

De la même manière que dans la remarque ci-dessus, la série $\sum_{n=0}^{\infty} (pN_p)^n$ converge et

$$N \geqq \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} (pN_p)^n (= N').$$

Il suffit donc de voir que, quel que soit $q > 0$, $N' - N_q = qN' \cdot N_q$. La multiplication $N' \cdot N_q$ a un sens et $N' \cdot N_q = N_q \cdot N'$. On a

$$\begin{aligned} N' - N_q &= pN' \cdot N_p - (p-q) N_q \cdot N_p \\ &= pN' \cdot N_q - p(p-q) N' \cdot N_p \cdot N_q + (q-p) N_q \cdot N' + p(p-q) N' \cdot N_p \cdot N_q \\ &= qN' \cdot N_q. \end{aligned}$$

Réciproquement, soit $N = \sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{N})^n$ et posons, pour un nombre $p > 0$,

$$N_p = \frac{1}{1+p} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+p} \tilde{N} \right)^n.$$

On a alors

$$N - N_p = pN_p \cdot N = pN \cdot N_p,$$

et il en résulte alors que la famille $(N_p)_{p \geqq 0}$ vérifie l'équation résolvante.

D'après les propositions 2 et 3, on a le corollaire suivant:

COROLLAIRE 1. *Si $N \in (R)$, alors, quel que soit $c > 0$, $N + cU \in (D)$.*

LEMME 1. *Soit N un noyau borné relatif à X et à ξ. Si l'on a $N \in (D)$, alors $N \in (R)$.*

https://doi.org/10.1017/S0027763000014604 Published online by Cambridge University Press

Sa démonstration est achevée de la même manière que dans le cas de noyau de Hunt (cf. [5] et [8]). On répétra ici la démonstration pour notre noyau. On peut supposer, d'après notre hypothèse, qu'il existe une constante $0 < c < 1$ telle que, quel que soit e de E, $N(e, X) \leqq c\xi(e)$. On pose, pour un nombre p de $[0, 1]$,

$$N_p = \sum_{n=0}^{\infty}(-p)^n(N)^{n+1},$$

et alors, N_p est une différence des deux noyaux relatifs à X et à ξ. On a immédiatement

$$N - N_p = pN \cdot N_p = pN_p \cdot N.$$

Si N_p est un noyau relatif à X et à ξ, alors $N \geqq N_p$. Admettons ici que N_p est un noyau relatif à X et à ξ; alors, quel que soit p de $[1, 2]$, la série

$$N_p = \sum_{n=0}^{\infty}(1 - p)^n(N_1)^{n+1}$$

a un sens et on a

$$N_1 - N_p = (p - 1)N_1 \cdot N_p = (p - 1)N_p \cdot N_1.$$

On a immédiatement

$$N - N_p = pN \cdot N_p = pN_p \cdot N.$$

On peut définir, de la manière inductive, le noyau N_p relatif à X et à ξ pour tout $p > 0$, qui vérifié l'égalité ci-dessus si N_p est un noyau relatif à X et à ξ dès que l'égalité ci-dessus a lieu. Pour que N_p soit un noyau relatif à X et à ξ, il faut et il suffit que, quelle que soit f de M^+, $Nf \leqq Nf_p$ pp sur X, où $f_p = pN_p f$. Cela résulte immédiatement du lemme suivant:

LEMME 2. *Soit N un noyau borné relatif à X et à ξ. Si l'on a $N \in (D)$ (resp. $N \in (CM)$), alors, quelles que soient f et g deux fonctions ξ-mesurables, non-négatives et bornées dans X, l'inégalité $Nf \leqq Ng$ (resp. $Nf \leqq Ng + 1$) est satisfaite pp sur X dès qu'elle l'est pp sur $K(f)$.*

En effet, on peut supposer $Nf > 0$ pp sur $K(f)$, car, d'après $N \in (D)$, $Nf' = 0$ pp sur X, où f' est la restriction de f sur $\{x \in K(f);\ Nf(x) = 0\}$. Par conséquent, il suffit de voir l'implication

$$Nf < Ng \ pp \text{ sur } K(f) \Longrightarrow Nf \leqq Ng \ pp \text{ sur } X.$$

Soient (K_n) une suite croissante de compacts de X et avec $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = X$, g_n la restriction de g sur K_n et f_n la restriction de f sur l'ensemble $\{x \in X; Ng_n(x) \geqq Nf(x)\}$. On a alors, d'après $N \in (D)$, $Nf_n \leqq Ng_n$ pp sur X, d'où $Nf_n(x) \leqq Ng(x)$ pp sur X. On a evidememnt

$$\xi(K(f) \cap \mathscr{C} \bigcup_{n=1}^{\infty} K(f_n)) = 0,$$

et par suite, $Nf \leqq Ng$ pp sur X, d'où notre lemme.

Proposition 4. *Soit N un noyau appartenant à (D). Si $(N)^2$ a un sens, alors $N \in (R)$.*

De la même manière que dans la proposition 2, on peut prendre une suite croissante (K_n) des compacts de X telle que, quel que soit K un compact de X, $\lim_{n\to\infty} (K \cap K_n) = \xi(K)$ et que N_n soit borné, où N_n est la restriction de N sur K_n. On a evidemment $N_n \in (D)$, et par suite, d'apres le lemme 1, il existe la resolvante $(N_{n,p})_{p\geqq 0}$ associée à N_n. Soient n et m deux entiers positifs tels que $n \leqq m$. Alors, quelle que soit f de M^+ et portée par K_n,

$$(pN_n + U)(N_{n,p}f)(x) \leqq (pN_n + U)(N_{m,p}f)(x) \ pp \text{ sur } X,$$

et

$$(pN_n + U)(N_{n,p}f)(x) = (pN_n + U)(N_{m,p}f)(x) \ pp \text{ sur } K_n.$$

On désigne ici par $(pN_n + U)(N_{m,p}f)(x)$ le potentiel de $N_{m,p}f$ par rapport au noyau $pN_n + U$. Le noyau $pN_n + U$ étant élémentaire, on a, en vertu de la méthode utilisée dans la proposition 2, $N_{m,p}f \leqq N_{n,p}f$ sur K_n, d'où, quels que soient e_1 et e_2 de E et appartenant à K_n, $N_{m,p}(e_1, e_2) \leqq N_{n,p}(e_1, e_2)$. Par conséquent, quels que soient e_1 et e_2 ensembles relativement compacts de E, $N_{n,p}(e_1, e_2)$ converge avec $n \to \infty$. Posons

$$N_p(e_1, e_2) = \lim_{n\to\infty} N_{n,p}(e_1, e_2);$$

alors, N_p peut être prolongé sur $E \times E$ et il est un noyau relatif à X et à ξ. Montrons que la famille $(N_p)_{p\geqq 0}$ est une résolvante. Pour cela, il suffit de voir que, quelle que soit f de M^+ et quel que soit $p > 0$,

$$Nf = (pN + U)(N_pf).$$

Soit g une fonction de M^+. On a alors, d'après notre condition,

https://doi.org/10.1017/S0027763000014604 Published online by Cambridge University Press

$\int Nf(x)Ng(x)\,d\xi(x) < +\infty$, et donc, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une comapct K de X tel que

$$\int_{\mathscr{C}K} Nf(x)\check{N}g(x)\,d\xi(x) < \varepsilon$$

et que $\check{N}g$ soit borné sur K. Ayant $N_{n,p} \leqq N_n \leqq N$, on a uniformément

$$\int_{\mathscr{C}K} N_{n,p}f(x)\check{N}_n g(x)\,d\xi(x) < \varepsilon$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\int_K N_{n,p}f(x)\check{N}_n g(x)\,d\xi(x) = \int_K N_p f(x)\check{N}g(x)\,d\xi(x),$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty}\int N_{n,p}f(x)\check{N}_n g(x)\,d\xi(x) = \int N_p f(x)\check{N}g(x)\,d\xi(x).$$

La fonction g étant quelconque et ayant l'égalité $N_n = (pN_n + U)\cdot N_{n,p}$, on a l'égalité que nous avons désiré. D'après $N_p\cdot N \leqq N\cdot N$, on a, quels que soient e_1 et e_2 de E,

$$\lim_{p\to 0} N_p(e_1, e_2) = N(e_1, e_2),$$

d'où $N \in (R)$.

Une résolvante $(N_p)_{p\geq 0}$ est, par définition, sous-markovienne si, quel que soit $p > 0$, pN_p est sous-markovien.

PROPOSITION 5. *Soit N un noyau relatif à X et à ξ appartenant à (R). Alors, $N \in (CM)$ si et seulement si la résolvante associée à N est sous-markovienne.*

On suppose d'abord que la résolvante $(N_p)_{p\geq 0}$ associée à N est sous-markovienne. De la même manière que dans la proposition 2, on obtient le lemme suivant:

LEMME 3. *Soit N un noyau élémentaire dont le générateur est sous-markovien. Alors on a $N \in (CM)$.*

D'après le lemme ci-dessus, il suffit de voir que si, quel que soit c une constante positive, $N + cU \in (CM)$, alors $N \in (CM)$. Si, pour deux fonctions f et g de M^+, $Nf \leqq Ng + 1$ pp sur $K(f)$, alors, pour un nombre positif δ, il existe une constante positive c telle que

$$Nf + cf \leqq Ng + cg + (1 + \delta)$$

pp sur $K(f)$, et donc, la même inégalité a lieu pp sur X. Faisant $\delta \to 0$, on arrive à l'égalité $Nf \leqq Ng + 1$ pp sur X, d'où $N \in (CM)$.

On suppose reciproquement $N \in (CM)$. On a, quelle que soit f de M^+,

$$Nf - N_p f = N(pN_p f).$$

Si l'on a $f \leqq 1$, on a alors

$$N(f - pN_p f)^+ \leqq N(f - pN_p f)^- + \frac{1}{p}$$

pp sur $K((f - pN_p f)^+)$. De la même manière que dans le lemme 2, l'inégalité ci-dessus a lieu pp sur X, d'où

$$N_p f = N(f - pN_p f) \leqq \frac{1}{p}$$

pp sur X. La fonction f ($\leqq 1$) étant arbitraire, pN_p est sous-markovien.

3. Le principe divers du maximum et le type positif

On commencera d'abord avec une hypothèse.

Hypothèse (*): Un noyau N relatif à X et à ξ satisfait à l'hypothèse (*) si, quel que soit e de E, $N(e, X) = 0$ si et seulement si $N(X, e) = 0$.

Si l'on a, quel que soit e de E, $N(X, e) > 0$ et $N(e, X) > 0$ dès que $\xi(e) > 0$, alors N satisfait évidemment à l'hypothèse (*).

LEMME 4. *Soit N un noyau relatif à X et à ξ qui satisfait à l'hypothèse* (*). *Alors, pour que $N \in (D)$, il faut et il suffit que quel que soit $c > 0$, $N + cU \in (D)$.*

On montre d'abord que la condition est nécessaire. Supposons que, pour un nombre positif c et pour deux foncitons f et g de M^+, $Nf + cf \leqq Ng + cg$ pp sur $K(f)$; alors,

$$N(f-g)^+ + c(f-g)^+ \leqq N(f-g)^- + c(f-g)^-$$

pp sur $K((f-g)^+)$, et donc, on peut supposer

$$\xi(K(f) \cap K(g)) = 0.$$

On a alors $Nf \leqq Ng$ pp sur $K(f)$, et d'après $N \in (D)$, $Nf \leqq Ng \leqq Ng + cg$ pp sur X, et par suite, $Nf + cf \leqq Ng + cg$ pp sur X, d'où $N + cU \in (D)$.

On montre réciproquement que la condition est suffisante. On obtient d'abord l'implication

$$Nf < Ng \ pp \text{ sur } K(f) \Longrightarrow Nf \leqq Ng \ pp \text{ sur } X.$$

Soit f_n la restriction de f sur $\left\{x \in K(f);\ Nf(x) \leqq Ng(x) + \frac{1}{n}\right\}$; alors,

$$Nf_n + cf_n \leqq Ng + cg$$

pp sur $K(f_n)$, où c est un nombre positif tel que

$$c(\operatorname*{ess.\,sup}_{x \in X} f(x)) \leqq \frac{1}{n},$$

et donc, la même inégalité a lieu pp sur X. Faisant $c \to 0$, on arrive à l'inégalité $Nf_n \leqq Ng$ pp sur X, et ensuite, faisant $n \to \infty$, on obtient l'égalité $Nf \leqq Ng$ pp sur X. Il en résulte que si $Nf \leqq Ng$ et $Nf > 0$ pp sur $K(f)$, $Nf \leqq Ng$ pp sur X, car, quel que soit $a > 1$, $Nf < aNg$ pp sur $K(f)$. Par conséquent, il suffit de voir que, quelle que soit f de M^+, $Nf = 0$ pp sur X dès que la même égalité a lieu pp sur $K(f)$. Soient f' la restriction de f sur l'ensemble

$$\bigcup_{g \in M^+} \{x \in X;\ Ng(x) > 0\}$$

et $f'' = f - f'$. Il existe alors une suite croissante (g_n) de M^+ et telle que l'on ait

$$\xi(\{x \in X;\ f'(x) > 0,\ Ng_n(x) = 0\}) < \frac{1}{n}.$$

Soit f_n la restriction de f sur l'ensemble $\{x \in X;\ Ng_n(x) > 0\}$. On a alors, quel que soit a une constante positive, $Nf_n < aNg_n$ pp sur $K(f_n)$, et donc, $Nf_n \leqq aNg_n$ pp sur X. Faisant $a \to 0$, $Nf_n = 0$ pp sur X, et ensuite, faisant $n \to \infty$, $Nf' = 0$ pp sur X. D'autre part, quelle que soit g de M, on a

$$\int Ng(x) f''(x) d\xi(x) = \int \check{N} f''(x) g(x) d\xi(x) = 0,$$

et par suite, $\check{N}f'' = 0$ pp sur X. D'après l'hypothèse $(*)$, on a $Nf'' = 0$ pp sur X, d'où $Nf = 0$ pp sur X.

Corollaire 2. *Soit N un noyau relatif à X et à ξ tel que $(N)^2$ ait un sens. Si N satisfait à l'hypothèse $(*)$, alors $N \in (D)$ et $N \in (R)$ sont équivalents.*

Le premier théorème est une généralisation partielle du théorème de Kishi pour les noyau-fonctions continues au sens large (cf. [7]).

Theoreme 1. *Soit N un noyau relatif à X et à ξ; supposons que N satisfait à l'hypothèse $(*)$. Alors les deux énoncés $\check{N} \in (D)$ et $N \in (D)$ sont équivalents.*

Demonstration. Il suffit évidemment de montrer l'implication $N \in (D) \Longrightarrow \check{N} \in (D)$. D'après le lemme 4, $\check{N} \in (D)$ est equivalent à $\check{N} + cU \in (D)$ pour tout $c > 0$. On prend une suite croissante (K_n) des compacts de X telle que, quel que soit K un compact de X, $\lim_{n \to \infty} \xi(K_n \cap K) = \xi(K)$ et que N_n soit borné, où N_n est la restriction de N sur K_n. D'après les propositions 2, 3 et le lemme 1, on a, quel que soit $c > 0$, $\check{N}_n + cU \in (D)$. Supposons que, pour deux fonctions f et g de M^+, $\check{N}f + cf \leqq \check{N}g + cg$ pp sur $K(f)$, et soit $a > 1$. On désigne respectivement par g_n et par f_n la restriction de g sur K_n et la restriction de f sur l'ensemble

$$\{x \in K_n;\ \check{N}f(x) + cf(x) \leqq a\check{N}g_n(x) + acg_n(x)\}.$$

On a alors, d'après $N_n + cU \in (D)$, $\check{N}f_n + cf_n \leqq a\check{N}g_n + acg_n$ pp sur K_n, d'où $\check{N}f_n + cf_n \leqq a\check{N}g + acg$ pp sur K_n. La suite (f_n) converge d'une manière croissante vers f pp sur X, et par suite, $\check{N}f + cf \leqq a\check{N}g + acg$ pp sur X. Faisant $a \to 1$, on arrive à l'égalité $\check{N}f + cf \leqq \check{N}g + cg$ pp sur X, d'où $\check{N} + cU \in (D)$. La démonstration est complète.

Remarque. Si l'on ne suppose pas l'hypothèse (*), le résultat ci-dessus n'a pas lieu. On peut fournir facilement un contre-exemple dans le cas où X est un espace fini.

En généralisant le théorème de Ninomiya concernant le type positif (cf. [9]), on obtient le théorème suivant:

THEOREME 2. *Soit N un noyau relatif à X et à ξ appartenant à (R), et soit (N_p) la résolvante associée à N. Si, quel que soit $p > 0$, $N_p \cdot \check{N}_p$ a un sens et si l'on a $N_p \cdot \check{N}_p = \check{N}_p \cdot N_p$, alors N est de type positif.*

On remarque d'abord que $N \in (D)$ n'est pas toujours de type positif et que les noyaux satisfaisant aux conditions du théorème ne sont pas toujours symétriques. En considérant, par exemple, les noyaux de convolution sur un groupe abélien, cela peut être facilement compris.

Remarque. Soient N et (N_p) les même que ci-dessus. Si $N \cdot \check{N}$ a un sens et si $N \cdot \check{N} = \check{N} \cdot N$, les conditions de notre théorème est alors vérifiées.

D'après $N_p \leqq N$, $N_p \cdot \check{N}_p$ a un sens. L'égalité $N_p \cdot \check{N}_p = \check{N}_p \cdot N_p$ résulte de l'égalité $N = \sum_{n=1}^{\infty} (p)^{n-1}(N_p)^n$.

Démonstration du théorème 2. Si, quel que soit $p > 0$, N_p est de type

https://doi.org/10.1017/S0027763000014604 Published online by Cambridge University Press

positif, alors N l'est aussi, et donc, on peut supposer que $N\cdot\check{N}$ a un sens et $N\cdot\check{N}=\check{N}\cdot N$. On pose, quel que soit $c>0$,

$$\tilde{N}_c=\frac{1}{2}(N_c+\check{N}_c),$$

et alors, quel que soit n un entier positif, $(\tilde{N}_c)^n$ a un sens, car, quels que soient m et k entiers positifs,

$$c^{m-1}(\check{N}_c)^m\leqq\check{N}\text{ et }c^{k-1}(N_c)^k\leqq N.$$

On a ensuite

$$N\cdot\check{N}\cdot(c\tilde{N}_c)=\frac{1}{2}(\check{N}-\check{N}_c)\cdot N+\frac{1}{2}(N-N_c)\cdot\check{N}\leqq N\cdot\check{N},$$

et donc, $N\cdot\check{N}\cdot(c\tilde{N}_c)^n$ a un sens et la suite $(N\cdot\check{N}\cdot(c\tilde{N}_c)^n)_{n=1}^{\infty}$ est décroissante. Par conséquent, on a, quel que soit n un entier positif,

$$\frac{1}{c^2}\sum_{k=0}^{n}(c\tilde{N}_c)^k\leqq\frac{1}{c}\Big(\frac{1}{2}(N+\check{N})+\frac{1}{c}U\Big)\cdot\sum_{k=0}^{n}(c\tilde{N}_c)^k$$

$$=\Big(N+\frac{1}{c}U\Big)\cdot\Big(\check{N}+\frac{1}{c}U\Big)\cdot(U-(c\tilde{N}_c)^{n+1})\leqq\Big(N+\frac{1}{c}U\Big)\cdot\Big(\check{N}+\frac{1}{c}U\Big),$$

et par suite, la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(c\tilde{N}_c)^n$ converge et elle est un noyau élémentaire et symétrique. On a donc

$$\frac{1}{2}(N+\check{N})+\frac{1}{c}U=\lim_{n\to\infty}c\Big(N+\frac{1}{c}U\Big)\cdot\Big(\check{N}+\frac{1}{c}U\Big)\cdot\Big(U-(c\tilde{N}_c)^n\Big)\cdot(U-c\tilde{N}_c).$$

Posons, pour un entier positif n,

$$\tilde{N}^{(n)}_{c,1/2}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}-1\Big)\cdots\Big(\frac{1}{2}-m+1\Big)}{m!}((c\tilde{N}_c)^n)^m\,;$$

alors, la série ci-dessus converge et elle est un noyau symétrique relatif à X et à ξ, car la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(c\tilde{N}_c)^n$ converge. On a immédiatement

$$(U-\tilde{N}^{(n)}_{c,1/2})^2=U-(c\tilde{N}_c)^n.$$

Par conséquent, on a

$$\frac{1}{2}(N+\check{N})+\frac{1}{c}U=\lim_{n\to\infty}c\Big(N+\frac{1}{c}U\Big)\cdot\Big(\check{N}+\frac{1}{c}U\Big)\cdot(U-\tilde{N}^{(n)}_{c,1/2})^2\cdot(U-\tilde{N}^{(1)}_{c,1/2})^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}c(U-\tilde{N}^{(n)}_{c,1/2})\cdot(U-\tilde{N}^{(1)}_{c,1/2})\cdot\Big(N+\frac{1}{c}U\Big)\cdot\Big(\check{N}+\frac{1}{c}U\Big)\cdot(U-\tilde{N}^{(n)}_{c,1/2})\cdot(U-\tilde{N}^{(1)}_{c,1/2}).$$

Il en résulte donc que, quelle que soit f de M,

$$\begin{aligned}&\iint f(x)f(y)N(dx,\,dy)+\frac{1}{c}\int|f|^2d\xi\\&=\iint f(x)f(y)\frac{1}{2}(N(dx,\,dy)+\check{N}(dx,\,dy))+\frac{1}{c}\int|f|^2d\xi\\&=\lim_{n\to\infty}c\int\Big|\Big(\check{N}+\frac{1}{c}U\Big)(((U-\check{N}^{(n)}_{c,1/2})\cdot(U-\check{N}^{(1)}_{c,1/2}))f)\Big|^2d\xi\geqq 0,\end{aligned}$$

d'où $N+\frac{1}{c}U$ est de type positif, et faisant $c\to\infty$, on arrive à la conclusion que N est de type positif.

Remarque. Soit N un noyau relatif à X et à ξ. Pour que $N\cdot\check{N}$ ait un sens, il faut et il suffit que, quelle que soit f de M, $\int|\check{N}f|^2d\xi<+\infty$.

Si N est de type positif, alors, quel que soit $p>0$, $N_p\cdot\check{N}_p$ a un sens, car $U-pN_p$ est aussi de type positif. Mais notre condition du théorème 2 n'est pas la meilleure pour que N soit de type positif. Il existe noyaux de type positif et appartenant à (R), qui ne satisfont pas à la condition que, quel que soit $p>0$, $N_p\cdot\check{N}_p=\check{N}_p\cdot N_p$.

COROLLAIRE 3. *Soit N un noyau relatif à X et à ξ. Si $N\in(D)$ et $N\cdot\check{N}=\check{N}\cdot N$, alors N est de type positif.*

Si les multiplications $N\cdot\check{N}$ et $\check{N}\cdot N$ sont définies, alors, $(N)^2$ a aussi un sens. Notre corollaire est un résultat immédiat de la proposition 4 et du théorème 2.

COROLLAIRE 4. *Soit N un noyau symétrique relatif à X et à ξ. Si $N\in(D)$, il est alors de type positif.*

En effet, il existe une suite croissante (N_n) des noyaux bornés, symétriques relatifs à X et à ξ, telle que l'on ait $N_n\in(D)$ et

$$\lim_{n\to\infty}\iint f(x)f(y)N_n(dx,\,dy)=\iint f(x)f(y)N(dx,\,dy).$$

D'après notre théorème, N_n est de type positif, et donc, N est de type positif.

Nous discuterons ensuite le principe complet du maximum pour notre noyau. Le théorème suivant est une généralisation du théorème de Durier (cf. [4]). Il a montré un théorème analogue pour les noyau-fonctions con-

https://doi.org/10.1017/S0027763000014604 Published online by Cambridge University Press

tinues.

THEOREME 3. *Soit N un noyau relatif à X et à ξ. Alors les deux énoncés suivants $N \in (CM) \cap (PM)$ et $\check{N} \in (CM) \cap (PM)$ sont équivalents.*

LEMME 5. *On a $N \in (CM) \cap (PM)$ si et seulement si, quel que soit $c > 0$, $N + cU \in (CM) \cap (PM)$.*

En effet, de la même manière que dans le lemme 4, on peut montrer l'équivalence entre $N \in (CM)$ et $N + cU \in (CM)$ pour tout $c > 0$ sans l'hypothèse $(*)$, car, sous la condition $N \in (CM)$, on a, quelle que soit f de M^+, $Nf = 0$ pp sur X dès que $Nf = 0$ pp sur $K(f)$.

On suppose d'abord que $N \in (PM)$. Soit, pour un nombre positif c et pour deux fonctions f et g de M^+, $Nf + cf \leqq Ng + cg$ pp sur X. Alors,

$$N(f-g)^+ + c(f-g)^+ \leqq N(f-g)^- + c(f-g)^-$$

pp sur X, et donc, $N(f-g)^+ \leqq N(f-g)^-$ pp sur $K((f-g)^+)$. En utilisant $N \in (D)$, on obtient que la même inégalité a lieu pp sur X, et d'après $N \in (PM)$, $\int f d\xi \leqq \int g d\xi$, d'où $N + cU \in (PM)$.

Montrons ensuite son inverse. Supposons que, pour deux fonctions f et g de M^+, $Nf \leqq Ng$ pp sur X. On peut supposer ici $Nf > 0$ pp sur $K(f)$, car, d'après $N \in (M)$, $Nf' = 0$ pp sur X, où f' est la restriction de f sur l'ensemble $\{x \in X;\ Nf(x) = 0\}$. Soit $f_{n,m}$ la restriction de f sur l'ensemble

$$\left\{x \in X;\ Ng(x) - \frac{m-1}{m} Nf(x) \geqq \frac{1}{n}(\operatorname*{ess.\,sup}_{x \in X} f(x))\right\}.$$

On a alors, d'après $N + \frac{1}{n} U \in (D)$,

$$\frac{m-1}{m}\left(Nf_{n,m} + \frac{1}{n} f_{n,m}\right) \leqq Ng + \frac{1}{n} g$$

pp sur X, et donc,

$$\frac{m-1}{m} \int f_{n,m} d\xi \leqq \int g d\xi.$$

Faisant $n \to \infty$, et ensuite, $m \to \infty$, on arrive à l'inégalité $\int f d\xi \leqq \int g d\xi$, d'où $N \in (PM)$.

LEMME 6. *Soient N un noyau élémentaire et $\tilde{N}$ son générateur. Pour que $N \in (PM)$, il faut et il suffit que $\check{\tilde{N}}$ soit sous-markovien.*

On suppose d'abord que $N \in (PM)$. On a, quelle que soit f de M^+, $Nf \geqq N(\tilde{N}f)$ pp sur X, et donc, $\int f d\xi \geqq \int f(y)\tilde{N}(X, dy)$, d'où $\check{\tilde{N}}$ est sous-markovien.

Montrons que la condition est suffisante. Si, quelle que soit f de M, $\int |Nf| d\xi < +\infty$, alors on a, quelles que soient f, g de M^+,

$$\int (g-f)d\xi = \iint (Ng(y) - Nf(y))(U(dx, dy) - \tilde{N}(dx, dy))$$

$$\geq \int (Ng(y) - Nf(y))(d\xi(y) - \tilde{N}(X, dy)) \geqq 0$$

dès que $Ng \geqq Nf$ pp sur X. En général, soient (K_n) une suite croissante des compacts de X et avec $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = X$, et $\tilde{N}_n$ la restriction de $\tilde{N}$ sur K_n. Alors, le noyau élémentaire

$$N_n = \sum_{m=0}^{\infty} (\tilde{N}_n)^m$$

appartient à (PM). On suppose que, pour deux fonctions f, g de M^+, $Nf \leqq Ng$ pp sur X. Soit f_n la restriticon de f sur l'ensemble

$$\left\{x \in X;\ N_n g(x) \geqq \frac{n-1}{n} Nf(x)\right\}.$$

Alors, d'après $N_n \in (D)$,

$$\frac{n-1}{n} N_n f_n \leqq N_n g$$

pp sur X, et donc, $\frac{n-1}{n}\int f_n d\xi \leqq \int g d\xi$. Faisant $n \to \infty$, on arrive a l'inégalité $\int f d\xi \leqq \int g d\xi$, d'où $N \in (PM)$.

Démonstration du théorème 3. On montre seulement l'implication $N \in (PM) \cap (CM) \Longrightarrow \check{N} \in (PM) \cap (CM)$. D'après le lemme 5, il suffit de montrer que, quel que soit $c > 0$, $\check{N} + cU \in (CM) \cap (PM)$. De la même mainère que dans le théorème 1, on peut supposer que N est borné. D'après $N \in (CM)$, $N + cU$ est un noyau élémentaire dont le générateur est sous-markovien, et d'après le lemme 6, le générateur de $\check{N} + cU$ est aussi sous-markovien. On a donc $\check{N} + cU \in (PM) \cap (CM)$. La demonstration est ainsi compète.

COROLLAIRE 5. *Pour que* $N \in (PM) \cap (CM)$, *il faut et il suffit que* $N \in (CM)$ *et* $\check{N} \in (CM)$.

On remarque que $\check{N} \in (CM)$ et $N \in (CM)$ ne sont pas équivalents, car on peut facilement fournir exemples.

THEOREME 4. *Si un noyau N appartient à $(PM) \cap (CM)$, N est alors de type positif.*

Démonstration. On peut supposer, d'après la proposition 1, que N et $\check{N}$ sont bornés et encore que, quelle que soit f de M, $\int |Nf|^2 d\xi < +\infty$ et $\int |\check{N}f|^2 d\xi < +\infty$. Il existe alors la résolvante $(N_p)_{p \geq 0}$ associée au noyau N. D'après la proposition 5 et le lemme 6, quel que soit $p > 0$, pN_p et $p\check{N}_p$ sont sous-markoviens. Pour une fonction f de M, Nf et $\check{N}f$ sont bornés et de $L^2(\xi)$, et donc,

$$\begin{aligned}
&\int Nf(x)f(x)d\xi(x) + \frac{1}{p}\int |f|^2 d\xi \\
&= p\iint \Big(Nf(x) + \frac{1}{p}f(x)\Big)\Big(Nf(y) + \frac{1}{p}f(y)\Big)(U(dx, dy) - p\check{N}_p(dx, dy)) \\
&= p\int \Big|Nf + \frac{1}{p}f\Big|^2 \Big(d\xi - \frac{1}{2}pN_p(X, dx) - \frac{1}{2}pN_p(dx, X)\Big) \\
&\quad + \frac{p}{2}\iint \Big|Nf(x) + \frac{1}{p}f(x) - Nf(y) - \frac{1}{p}f(y)\Big|^2 pN_p(dx, dy) \geqq 0.
\end{aligned}$$

On obtient donc que, quel que soit $p > 0$, $N + \frac{1}{p}U$ est de type positif, et faisant $p \to \infty$, on arrive à la conclucsion que N est de type positif. La démonstration est ainsi complète.

Cela est aussi analogue avec le théorème de Durier pour les noyau-fonctions continues (cf. l'article cité ci-dessus).

4. Le type positif des noyaux mesurables et symértiques

Dans ce chapitre, on discutera toujours les noyaux mesurables et symétriques relatifs à X et à ξ. On répéte qu'un noyau mesurable relatif à X et à ξ est, par définition, de la forme

$$N(e_1, e_2) = \int_{e_1}\int_{e_2} n(x, y)d\xi(y)d\xi(x)$$

pour deux ensembles e_1 et e_2 de E avec $\xi(e_1 \cap e_2) = 0$, où n est une fonction localement $(\xi \times \xi)$-sommable dans le complément de l'ensemble diagonal Δ.

PROPOSITION 6. *Soit N un noyau mesurable et symétrique relatif à X et à ξ. S'il existe une constante positive c telle que, quel que soit e de E, $N(e, e) \geqq c\xi(e)$,* *alors, pour une fonction ξ-mesurable, localement bornée et non-négative u dans X et pour un ensemble relativement compact e de E, il existe une fonction f_e de M^+, portée par e et telle que l'on ait $Nf_e \geqq u$ pp sur e et $Nf_e = u$ pp sur $K(f_e)$.*

On désigne par $L^2(\xi)$ l'espace hilbertien des fonctions dont les carrés sont ξ-sommables. On remarque que, pour une suite (f_n) des fonctions non-négatives de $L^2(\xi)$ et qui converge faiblement vers une fonctions f dans $L^2(\xi)$,

$$\varliminf_{n\to\infty} \iint f_n(x)f_n(y)N(dx,\, dy) \geqq \iint f(x)f(y)N(dx,\, dy).$$

D'après notre hypothèse, on a, quelle que soit f de M^+,

$$\int Nf(x)f(x)d\xi(x) \geqq c\int |f|^2 d\xi.$$

Soit $L^2_+(e)$ le sous-ensemble de fonctions non-négatives de $L^2(\xi)$ et portées par e. On considére l'application

$$L^2_+(e) \ni f(\neq 0) \to F_u(f) = \frac{\left(\int uf\, d\xi\right)^2}{\iint f(x)f(y)N(dx,\, dy)}.$$

Posons

$$\alpha = \sup\,\{F_u(f);\; f \in L^2_+(e),\; f \neq 0\}.$$

Alors on a, quelle que soit $f(\neq 0)$ de $L^2_+(e)$et quel que soit $a \neq 0$, $F_u(f) = F_u(af)$, et donc, il existe une suite (f_n) des fonctions de M^+, portées par e et telle que l'on ait $\int |f_n|^2 d\xi = 1$ et $\lim_{n\to\infty} F_u(f) = \alpha$. On peut supposer alors que (f_n) converge faiblement vers une fonction f'_e de $L^2_+(e)$ dans $L^2(\xi)$ avec $n \to \infty$. Si l'on a $\alpha = 0$, $u = 0$ *pp* sur e, et par suite, il suffit de supposer $\alpha > 0$. On a, quelle que soit f de $L^2_+(e)$,

$$F_u(f) \leqq \frac{\int_e |u|^2 d\xi \int |f|^2 d\xi}{c\int |f|^2 d\xi} \leqq \frac{\int_e |u|^2 d\xi}{c}$$

dès que $f \neq 0$, d'où $\alpha < +\infty$. Ayant

$$\lim_{n\to\infty} F_u(f_n) \leqq \lim_{n\to\infty} \frac{\int uf_n d\xi}{c} = \frac{\int uf'_e d\xi}{c},$$

on a $f'_e \neq 0$. D'après la première inégalité ci-dessus, $F_u(f'_e) \geqq \alpha$, d'où $F_u(f'_e) = \alpha$. On a donc, quelle que soit f une fonction de M^+ et portée par e,

https://doi.org/10.1017/S0027763000014604 Published online by Cambridge University Press

et quel que soit a une constante positive, $F_u(f'_e + af) \leqq F_u(f'_e)$. En faisant un calcul élémentaire, on a

$$Nf'_e \geqq \frac{1}{\alpha}\left(\int uf'_e d\xi\right)u$$

pp sur e. D'autre part, quelle que soit f de M^+ et quel que soit $0 < a < 1$, on a $F_u(f'_e - af) \leqq F_u(f'_e)$ dès que $f \leqq f'_e$, et on a donc

$$Nf'_e \leqq \frac{1}{\alpha}\left(\int uf'_e d\xi\right)u$$

pp sur $K(f'_e)$. En posant

$$f_e = \frac{\alpha}{\int uf'_e d\xi} f'_e,$$

On obtient que f_e est la fonction de notre proposition. $f_e \in M^+$ résulte de l'inégalité $cf_e \leqq Nf_e = u$ pp sur $K(f_e)$.

On ne connaît pas si, en général, notre proposition a lieu pour les noyaux symétriques. Dans la discution ci-dessus, il est essentiel que l'application $f \to \int Nf(x)f(x)d\xi(x)$ est semi-continue inférieurement par rapport à la topologie faible de $L^2(\xi)$. Pour cela, il est inévitable que N est mesurable.

Corollaire 5. *Soit N le même que ci-dessus. Si $N \in (M)$, alors, à un ensemble relativement compact e de E, on peut associer une fonction g_e de M^+, portée par e et telle que l'on ait $Ng_e = 1$ pp sur e et $Ng_e \leqq 1$ pp sur X.*

Cela est un résultat immédiat de la proposition 6 et de $N \in (M)$. On dit que g_e est la fonction d'équilibre de e par rapport au noyau N. En ce moment, N est dit de satisfaire au principe d'équilibre.

Corollaire 6. *Soit N un noyau mesurable et symétrique relatif à X et à ξ. Si, quelles que soient f et g de M^+, $\int Nf(x)f(x)d\xi(x) \leqq \int Ng(x)g(x)d\xi(x)$ dès que $Nf \leqq Ng$ pp sur $K(f)$, alors N est de type positif.*

On retrouve, d'après le corollaire ci-dessus, que si $N \in (D)$, N est de type positif. On peut supposer ici que N est borné, et il suffit de voir que, quelles que soient f et g de M^+ avec $K(f) \cap K(g) = \phi$,

$$\left(\int Nf(x)g(x)d\xi(x)\right)^2 \leqq \left(\int Nf(x)f(x)d\xi(x)\right)\left(\int Ng(x)g(x)d\xi(x)\right).$$

On peut supposer encore que, quel que soit e de E, $N(e, e) \geqq c\xi(e)$, où c est une constante positive, car N est de type positif si et seulement si, quel que soit $c > 0$, $N + cU$ est de type positif. D'après la proposition 6, il existe une fonction f' de M^+, portée par $K(g)$ et telle que l'on ait $Nf \leqq Nf'$ pp sur $K(g)$ et $Nf = Nf'$ pp sur $K(f')$, et on a alors

$$F_{(Nf)}(f') = \int Nf(x)f'(x)d\xi(x) = \int Nf'(x)f'(x)d\xi(x)$$
$$= \sup\{F_{(Nf)}(h);\ h \in L^2_+(e),\ \neq 0\}.$$

D'après notre condition et l'égalité $Nf = Nf'$ pp sur $K(f')$, on a

$$\int Nf(x)f(x)d\xi(x) \geqq \int Nf'(x)f'(x)d\xi(x) \geqq \frac{\left(\int Nf(x)g(x)d\xi(x)\right)^2}{\int Ng(x)g(x)d\xi(x)},$$

d'où notre corollaire.

THÉORÈME 5. *Soit N un noyau symétrique et mesurable relatif à X et à ξ. Si $N \in (M)$, N est alors de type positif.*

Cela est aussi une généralisation partielle du théorème de Ninomiya pour une noyau-fonction continue (cf. [9]). On préparera d'abord les trois lemmes suivants:

LEMME 7. *Soit N un noyau mesurable et symétrique relatif à X et à ξ qui satisfait à la condition que, quel que soit e de E, $N(e, e) \geqq c\xi(e)$, où $c > 0$, et satisfait encore au principe de maximum, et désignons, pour un ensemble relativement compact e de E, par g_e la fonction d'équilibre de e. Alors on a, quelle que soit f de M^+,*

$$\left(\int Ng_e(x)f(x)d\xi(x)\right)^2 \leqq \left(\int Ng_e(x)g_e(x)d\xi(x)\right)\left(\int Nf(x)f(x)d\xi(x)\right).$$

En effet, d'après la proposition 6, il existe une fonction g' de M^+, portée par $K(f)$ et telle que l'on ait $Ng_e \leqq Ng'$ pp sur $K(f)$ et $Ng_e = Ng'$ pp sur $K(g')$, et on a alors

$$F_{(Ng_e)}(g') = \int Ng_e(x)g'(x)d\xi(x) = \sup\{F_{(Ng_e)}(g);\ g \in L^2_+(K(f)),\ g \neq 0\}.$$

D'après $Ng' = Ng_e \leqq 1$ pp sur $K(g')$, on a $Ng' \leqq 1$ pp sur X, et donc,

$$\int Ng_e(x)g_e(x)d\xi(x) = \int g_e d\xi \geqq \int Ng'(x)g_e(x)d\xi(x) \geqq \frac{\left(\int Nf(x)g_e(x)d\xi(x)\right)^2}{\int Nf(x)f(x)d\xi(x)},$$

d'où notre lemme.

LEMME 8. *Soit N un noyau mesurable et symétrique relatif à X et à ξ, et soient f_1, f_2 et g fonctions* de M. *Si*

$$\left(\int Nf_1(x)g(x)d\xi(x)\right)^2 \leqq \left(\int Nf_1(x)f_1(x)d\xi(x)\right)\left(\int Ng(x)g(x)d\xi(x)\right)$$

et

$$\left(\int Nf_2(x)g(x)d\xi(x)\right)^2 < \left(\int Nf_2(x)f_2(x)d\xi(x)\right)\left(\int Ng(x)g(x)d\xi(x)\right),$$

on a alors

$$\left(\int N(f_1+f_2)(x)g(x)d\xi(x)\right)^2 < \left(\int N(f_1+f_2)(x)(f_1+f_2)(x)d\xi(x)\right)\left(\int Ng(x)g(x)d\xi(x)\right).$$

En effet on peut supposer

$$\left(\int Nf_2(x)f_2(x)d\xi(x)\right)\left(\int Ng(x)g(x)d\xi(x)\right) - \left(\int Nf_2(x)g(x)d\xi(x)\right)^2$$
$$\geqq \left(\int Nf_1(x)f_1(x)d\xi(x)\right)\left(\int Ng(x)g(x)d\xi(x)\right) - \left(\int Nf_1(x)g(x)d\xi(x)\right)^2.$$

On pose, quel que soit t un nombre réel,

$$F(t) = \left(\int N(tf_1+(1-t)f_2)(x)(tf_1+(1-t)f_2)(x)d\xi(x)\right)\left(\int Ng(x)g(x)d\xi(x)\right)$$
$$- \left(\int N(tf_1+(1-t)f_2)(x)g(x)d\xi(x)\right)^2.$$

Alors on a évidemment

$$F(0) = \left(\int Nf_2(x)f_2(x)d\xi(x)\right)\left(\int Ng(x)g(x)d\xi(x)\right) - \left(\int Nf_2(x)g(x)d\xi(x)\right)^2$$

et

$$F(1) = \left(\int Nf_1(x)f_1(x)d\xi(x)\right)\left(\int Ng(x)g(x)d\xi(x)\right) - \left(\int Nf_1(x)g(x)d\xi(x)\right)^2,$$

d'où $F(0) \geqq F(1)$. Supposons

$$\left(\int N(f_1+f_2)(x)g(x)d\xi(x)\right)^2 \geqq \left(\int N(f_1+f_2)(x)(f_1+f_2)(x)d\xi(x)\right)\left(\int Ng(x)g(x)d\xi(x)\right).$$

Alors,

$$\left(\int Nf_1(x)g(x)d\xi(x)\right)\left(\int Nf_2(x)g(x)d\xi(x)\right) - \left(\int Nf_1(x)f_2(x)d\xi(x)\right)\left(\int Ng(x)g(x)d\xi(x)\right)$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000014604 Published online by Cambridge University Press

$$\geqq \frac{1}{2}(F(0)+F(1)) \geqq 0.$$

Posons

$$F_{12} = \left(\int N f_1(x) g(x) d\xi(x)\right)\left(\int N f_2(x) g(x) d\xi(x)\right) - \left(\int N f_1(x) f_2(x) d\xi(x)\right)\left(\int N g(x) g(x) d\xi(x)\right)$$

et écrivons

$$F(t) = a(t-b)^2 + c.$$

Alors

$$a = F(0) + F(1) + 2F_{12} \geqq 2F_{12} > 0$$

et

$$b = \frac{F_{12} - F(0)}{a} < \frac{1}{2},$$

et par suite, $F(0) < F(1)$, mais cela est en contradiction avec notre hypothèse, d'où notre lemme.

D'après le lemme 8, on a le lemme suivant:

Lemme 9. *Soit N le même que ci-dessus. Si l'on a*

$$\left(\int N f_i(x) f_i(x) d\xi(x)\right)\left(\int N g(x) g(x) d\xi(x)\right) \geqq \left(\int N f_i(x) g(x) d\xi(x)\right)^2 \quad (i=1,\ 2),$$

où f_i et g sont fonctions de M, on a alors

$$\left(\int N(f_1+f_2)(x)(f_1+f_2)(x) d\xi(x)\right)\left(\int N g(x) g(x) d\xi(x)\right) \geqq \left(\int N(f_1+f_2)(x) g(x) d\xi(x)\right)^2.$$

En effet, si l'on a

$$\left(\int N(f_1+f_2)(x)(f_1+f_2)(x) d\xi(x)\right)\left(\int N g(x) g(x) d\xi(x)\right) < \left(\int N(f_1+f_2)(x) g(x) d\xi(x)\right)^2,$$

alors,

$$\left(\int N(f_1-f_2)(x)(f_1-f_2)(x) d\xi(x)\right)\left(\int N g(x) g(x) d\xi(x)\right) > \left(\int N(f_1-f_2)(x) g(x) d\xi(x)\right)^2.$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000014604 Published online by Cambridge University Press

En utilisant le lemme 8 pour les fonctions $f_1 - f_2$, f_2 et g,

$$\left(\int Nf_1(x)f_1(x)d\xi(x)\right)\left(\int Ng(x)g(x)d\xi(x)\right) > \left(\int Nf_1(x)g(x)d\xi(x)\right)^2,$$

et par suite, cela est une contradiction, car il suffit de supposer
$\left(\int Nf_1f_1d\xi\right)\left(\int Nggd\xi\right) = \left(\int Nf_1d\xi\right)^2$. (cf. le lemme 8.)

Démonstration du théoreme 5. On peut supposer que, quel que soit e de E, $N(e, e) \geqq c\xi(e)$, où c est une constante positive, car, quel que soit $a > 0$, $N + aU \in (M)$, et pour que N soit de type positif, il faut et il suffit que, quel que soit $a > 0$, $N + aU$ le soit aussi. Soit (FE) la totalité de sommes positivement linéaires des fonctions d'équilibre des ensembles relativement compacts de E. Alors, à une fonction f de M^+, on peut associer une suite (f_n) de (FE) telle que $f_n \leqq f$ et qui converge vers f pp sur X, car on a évidemment

$$f = \sup\{g \in (FE);\ g \leqq f\}.$$

Par conséquent, pour notre théorème, il suffit de voir que, pour deux fonctions $f \in (FE)$ et g de M^+ avec $K(f) \cap K(g) = \phi$,

$$\left(\int Nf(x)f(x)d\xi(x)\right)\left(\int Ng(x)g(x)d\xi(x)\right) \geqq \left(\int Nf(x)g(x)d\xi(x)\right)^2.$$

Cette inégalité résulte des lemmes 7, 9 et de la manière inductive, et la démonstration est ainsi complète.

PROPOSITION 7. *Supposons qu'un noyau mesurable et symétrique N relatif à X et à ξ est de la form*

$$N(e_1, e_2) = \int_{e_1}\int_{e_2} n(x, y)d\xi(y)d\xi(x)$$

si $e_1 \cap e_2 = \phi$, où n est une fonction définie dans $X \times X - \Delta$ et dont le carré est localement $(\xi \times \xi)$-sommable. Alors N est de type positif si et seulement si, quelle que soient f et g de M^+,

$$\xi(\{x \in K(g);\ Ng(x) \geqq Nf(x)\}) > 0$$

dès que $Nf \leqq Ng$ pp sur $K(f)$ et $g \neq 0$.

Si N est de type positif et si $Nf \leqq Ng$ pp sur $K(f)$, alors

$$\left(\int Nf(x)g(x)d\xi(x)\right)^2 \leqq \left(\int Nf(x)f(x)d\xi(x)\right)\left(\int Ng(x)g(x)d\xi(x)\right)$$

et donc,

https://doi.org/10.1017/S0027763000014604 Published online by Cambridge University Press

$$\int Nf(x)g(x)d\xi(x) \leqq \int Ng(x)g(x)d\xi(x),$$

d'où

$$\xi(\{x \in K(g);\ Ng(x) \geqq Nf(x)\}) > 0.$$

Réciproquement, il suffit de voir que, quelles que soient $f \neq 0$ et $g \neq 0$ de M^+ et avec $\overline{K(f)} \cap \overline{K(g)} = \phi$,

$$\left(\int Nf(x)g(x)d\xi(x)\right)^2 \leqq \left(\int Nf(x)f(x)d\xi(x)\right)\left(\int Ng(x)g(x)d\xi(x)\right).$$

On peut supposer encore qu'il existe une constants positive c telle que l'on ait $N(e, e) \geqq c\xi(e)$. Soient $e_1 = K(f)$ et $e_2 = K(g)$, et utilisons la même notation $L^2_+(e_\iota)$ que dans la proposition 6. Alors l'application

$$F:\ (L^2_+(e_1) - \{0\}) \times (L^2_+(e_1) - \{0\}) \ni (f_1, f_2)$$
$$\to \frac{\left(\int Nf_1(x)f_2(x)d\xi(x)\right)^2}{\left(\int Nf_1(x)f_1(x)d\xi(x)\right)\left(\int Nf_2(x)f_2(x)d\xi(x)\right)}$$

est semi-continue supérieurement par rapport à la topologie faible de $L^2(\xi)$. Il existe donc une couple (f_1, f_2) de $L^2_+(e_1) \times L^2_+(e_2)$ telle que l'on ait $f_1 \neq 0$, $f_2 \neq 0$ et

$$F(f_1, f_2) = \sup \{F(g_1, g_2);\ (g_1, g_2) \in L^2_+(e_1) \times L^2_+(e_2)\},$$

et on a $0 < F(f_1, f_2) < +\infty$ (cf. notre hypothèse pour $n(x, y)$). Par conséquent, on peut montrer, de la même manière que dans [9], l'inégalité que nous avons désiré.

Nous discutons finalement la relation entre le noyau symétrique de type positif et l'espace fonctionnel relatif à X et à ξ. Pour la définition de l'espace fonctionnel, voir [3].

Proposition 8. *A un noyau symétriuqe N de type positif (resp. un espace fonctionnel H à noyau positif), on peut associer un espace fonctionnel H à noyau positif (resp. un noyau symetrique N de type positif), et un seul tel que, quel que soit f de M, le potentiel de f dans H soit égal à Nf.*

Pour la définition du potentiel dans H, voir aussi [3]. On dit que H est à noyau positif si, quelle que soit f de M^+, le potentiel de f dans H est non-négatif.

Montrons la proposition 8. Soit N un noyau symétrique de type positif, et posons $H' = \{Nf;\ f \in M\}$; alors H' est un espace pré-hilbertien par la norme

$$\|Nf\| = \left(\int Nf(x) f(x) d\xi(x)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit K un compact de X. Alors, quelle que soit f de M,

$$\left(\int_K |Nf| d\xi\right)^2 \leqq (N(K_1, K_1) + N(K_2, K_2))\|Nf\|^2 \leqq 2N(K, K)\|Nf\|^2,$$

où $K = \{x \in K;\ Nf(x) > 0\}$ et $K = \{x \in K;\ Nf(x) < 0\}$, et donc, la complété H de H' par la norme ci-dessus est un espace hilbertien dont l'élément est une fonctin localement ξ-sommable dans X. On a, quelle que soit u de H,

$$\int_K |u| d\xi \leqq (2N(K, K))^{\frac{1}{2}} \|u\|,$$

d'où H est un espace fonctionnel, et il est évident que, quelle que soit f de M, le potentiel de f dans H est égal à Nf.

Réciproquement, soit H un espace fonctionnel relatif à X et à ξ. En posant, quels que soient e_1, e_2 de E,

$$N(e_1, e_2) = (u_{c_1}, u_{c_2}),$$

dès que u_{c_i} est défini $(i = 1, 2)$, où c_i est la fonction caractéristique de e_i, u_{c_i} est le potentiel de c_i dans H et $(\cdot, \cdot)$ est le produit scalaire dans H, N est alors un noyau symétrique relatif à X et à ξ, et il est évidemment de type positif. On peut voir facilement que, quelle que soit f de M, le potentiel de f dans est H égal à Nf.

En combinant le théorème 2, la proposition 8 et le théorème de J. Deny (cf. [3]), on obtient le corollaire suivant:

Corollaire. *Un noyau symétrique $N \in (D)$ (resp. $N \in (CM)$) est caractérisé par un noyau d'espace fonctionnel dans lequel la contraction module opére. (resp. les contractions normales opérent.)*

On dit que la contraction module opére dans un espace fonctionnel H si, quelle que soit u de H, $|u| \in H$ et sa norme est $\leqq \|u\|$. Les contractions normales opérent dans H si, quelle que soit u de H et quelle que soit T une contraction normale de la droite réelle, $T \cdot u \in H$ et $\|T \cdot u\| \leqq \|u\|$.

4. Les principes divers du maximum et le type positif pour les noyau-fonctions

Une noyau-fonction G sur X est, par définition, une fonction borélienne et non-négative dans l'espace produit $X \times X$, et le noyau adjoint $\check{G}$ de G est défini par $\check{G}(x, y) = G(y, x)$. Soit μ une mesure de Radon réelle dans X. Alors, le potentiel de μ par rapport au noyau G est, par définition,

$$G\mu(x) = \int G(x, y)d\mu(y) = \int G(x, y)d\mu^+(y) - \int G(x, y)d\mu^-(y)$$

dès que l'intégrale a un sens, et l'énergie de μ (par rapport au noyau G) est la quantité $\int G\mu d\mu$.

Le principe de positivité de masse: On a, quelles que soient μ, ν mesures de Radon positives dans X, d'énergie finie et à support compact, $\int d\mu \leqq \int d\nu$ dès que $G\mu \leqq G\nu$ G-ppp sur X.

Le principe de domination: On a, quelles que soient μ, ν mesures de Radon positives dans X, d'énergie finie et à support compact, $G\mu \leqq G\nu$ G-ppp sur X dès que $G\mu \leqq G\nu$ G-ppp sur le support $S\mu$ de μ.

Le principe complet du maximum: On a, quelles que soient μ, ν mesures de Radon positives dans X, d'énergie finie et à support compact, $G\mu \leqq G\nu + 1$ G-ppp sur X dès que la même inégalité a lieu G-ppp sur $S\mu$.

Le principe classique du maximum: On a, quelle que soit μ une mesure de Radon positive dans X, d'énergie finie et à support compact, $G\mu \leqq 1$ G-ppp sur X dès que la même inégalité a lieu G-ppp sur $S\mu$.

Une propriété a lieu G-ppp sur l'ensemble A de X si, quelle que soit μ une mesure de Radon positive dans X, d'énergie finie et à support compact $\subset A$, elle a lieu presque partout pour μ.

LEMME 10. *Soit G une noyau-fonction sur X. Pour que G satisfasse au principe de domination, il faut et il suffit que, quelles que soient μ, ν mesures de Radon positives dans X d'énergie finie et à support compact, $G\mu \leqq G\nu$ G-ppp sur X dès que la même inégalité a lieu presque partout pour μ.*

La condition est évidemment suffisante, et on montre donc que la condition est nécessaire. Supposons que, pour deux mesures de Radon positives μ et ν dans X, d'énergie finie et à support compact, $G\mu \leqq G\nu$ presque partout

https://doi.org/10.1017/S0027763000014604 Published online by Cambridge University Press

pour μ, il existe alors une suite croissante (K_n) de compacts de X et telle que l'on ait $G\mu_n \leqq G\nu$ sur $S\mu_n$ et $\mu(\mathscr{C}K_n) \leqq \frac{1}{n}$, où μ_n est la restriction de μ sur K_n. On a donc $G\mu_n \leqq G\nu$ G-ppp sur X, et faisant $n \to \infty$, on arrive a l'inegalite $G\mu \leqq G\nu$ G-ppp sur X.

De la même manière, on obtient l'équivalence analoque pour le principe complet du maximum et pour le principe classique de maximum.

THEOREME 6. *Soit G une noyau-fonction sur X, et supposons $G > 0$ sur $X \times X$. Pour que G satisfasse au principe de domination, il faut et il suffit que $\check{G}$ y satisfasse aussi.*

LEMME 11. *Soit G la même que ci-dessus, et on suppose que G satisfait au principe de domination. Si, pour trois mesures de Radon positives μ_1, μ_2 et μ_3 dans X et à support compact, $\int G\mu_i d\mu_j < +\infty$ $(i, j = 1, 2, 3)$ et $\check{G}\mu_1 \leqq \check{G}\mu_2$ G-ppp sur $S\mu_1$, on a alors $\check{G}\mu_1 \leqq \check{G}\mu_2$ presque partout pour μ_3.*

On pose $\xi = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ et

$$N(e_1, e) = \int_{e_1}\int_{e_2} G(x, y)d\xi(y)d\xi(x),$$

où e_1 et e_2 sont ensembles ξ-mesurables de X, et alors, N est un noyau relatif à X et à ξ, qui satisfait à l'hypothèse $(*)$, car $\int G\xi d\xi < +\infty$ et $G > 0$ sur $X \times X$. D'après le lemme 10, $N \in (D)$, et, en utilisant le théorème 1, $\check{N} \in (D)$. On a donc $\check{G}\mu_1 \leqq \check{G}\mu_2$ presque partout pour ξ, d'où $\check{G}\mu_1 \leqq \check{G}\mu_2$ presque partout pour μ_3.

Démonstration du théorème 6. On suppose que G satisfait au principe de domination. Il suffit de montrer que si, pour deux mesures de Radon positives μ_1 et μ_2 dans X, d'énergie finie et à support compact, $\check{G}\mu_1 < \check{G}\mu_2$ G-ppp sur $S\mu_1$, on a, quelle que soit ν une mesure de Radon positive dans X, d'énergie finie et à support compact, $G\mu_1 \leqq G\mu_2$ presque partout pour ν, car $G\mu_1 > 0$ dès que $\mu_1 \neq 0$. On peut supposer évidemment que $\mu_1 \neq 0$. On peut supposer encore que $G\nu$ et $\check{G}\nu$ sont bornés presque partout pour ν et qu'il existe une constante $a > 0$ telle que $\inf(G\mu_1, G\mu_2) \geqq a$ presque partout pour ν, car, d'après $\int G\nu d\nu = \int \check{G}\nu d\nu < +\infty$, il existe une suite croissante (K_n) des compacts de X, telle que $\nu(\mathscr{C}K_n) \leqq \frac{1}{n}$ et que $G\nu$ et $\check{G}\nu$ soient bornés sur K_n, et, d'après $G > 0$ sur $X \times X$ et $\mu_i \neq 0$ $(i = 1, 2)$, $\inf(G\mu_1, G\mu_2) > 0$, et par suite, (ν_m) converge d'une manière croissante vers ν avec $m \to \infty$, où ν_m est la restriction de ν sur $\left\{x \in X;\ \inf(G\mu_1(x),\ G\mu_2(x)) \geqq \frac{1}{m}\right\}$. Soit $(K_{i,n})$ $(i = 1, 2)$ une suite croissante des compacts de X, telle que $\mu_i(\mathscr{C}K_{i,n}) < \frac{1}{n}$ et que $G\mu_i$ et $\check{G}\mu_i$ soient bornés sur $K_{i,n}$. On désigne par $\mu_{2,n}$ la restriction de μ_2 sur

$$K_{2,n} \cap \left\{x \in X;\ \inf(G\mu_1(x),\ G\nu(x)) \geqq \frac{1}{n}\right\}$$

et par $\mu_{1,n}$ la restriction de μ_1 sur

$$K_{1,n} \cap \{x \in X;\ \check{G}\mu_{2,n}(x) \geqq \check{G}\mu_1(x)\} \cap \left\{x \in X;\ \inf(G\mu_2(x),\ G\nu(x)) \geqq \frac{1}{n}\right\}.$$

On a alors $\check{G}\mu_{1,n} \leqq \check{G}\mu_{2,n}$ presque partout pour $\mu_{1,n}$. De la même manière que dans le lemme 10, on peut supposer que $G\mu_{1,n} \leqq G\mu_{2,n}$ sur $S\mu_{1,n}$. On a ensuite

$$\int G\mu_{1,n}d\mu_{2,n} < +\infty,\ \int G\mu_{2,n}d\mu_{1,n} < +\infty,$$

$$\int G\mu_{1,n}d\nu < +\infty,\ \int G\nu d\mu_{1,n} < +\infty,$$

$$\int G\mu_{2,n}d\nu < +\infty,\ \int G\nu d\mu_{2,n} < +\infty.$$

En effet, $G\mu_{1,2}$ est borné presque partout pour $\mu_{1,n}$ et on a $G\mu_2 \geqq \frac{1}{n}$ presque partout pour $\mu_{1,n}$. Il existe donc une constante $a_n > 0$ telle que $G\mu_{1,n} \leqq a_n G\mu_2$ presque partout pour $\mu_{1,n}$. D'après le lemme 10, $G\mu_{1,n} \leqq a_n G\mu_2$ G-*ppp* sur X, et par suite,

$$\int G\mu_{1,n}d\mu_{2,n} \leqq a_n \int G\mu_2 d\mu_{2,n} \leqq a_n \int G\mu_2 d\mu_2 < +\infty.$$

On peut montrer, de la même manière, les autres inégalités. En utilisant le lemme 11, on obtient

$$\check{G}\mu_{1,n} \leqq \check{G}\mu_{2,n} \leqq \check{G}\mu_2$$

presque partout pour ν. Faisant $n \to \infty$, on arrive à l'inégalité $G\mu_1 \leqq G\mu_2$ presque partout pour ν sur X. La démonstration est ainsi complète.

En correspondant au théorème 3, on obtient le théorème suivant:

THEOREME 7. *Soit G une noyau-fonction sur X. Alors, pour que G satisfasse au principe complet du maximum et au principe de positivité de masse, il faut et il suffit que $\check{G}$ y satisfasse aussi.*

La démonstration est réalisée de la même manière que dans le théorème 6, en utilisant le théorème 3 et le lemme suivant:

LEMME 12. *Soit G une noyau-fonction sur X qui satisfait au principe classique du maximum. Si, quelles que soient μ_1 et μ_2 mesures de Radon positives dans X et à support compact, $G\mu_i$ est borné presque partout pour μ_i $(i = 1, 2)$, on a alors $\int G\mu_i d\mu_j < +\infty$ $(i, j = 1, 2)$.*

En effet, il existe deux constantes positives c_1 et c_2 telles que $G\mu_i \leqq c_i$ presque partout pour μ_i $(i = 1, 2)$. On a donc $G\mu_i \leqq c_i$ G-ppp sur X, et par suite, $\int G\mu_i d\mu_j < +\infty$.

On dit qu'une noyau-fonction G sur X est de type positif si, quelle que soit μ une mesure de Radon réelle dans X, $\int G\mu d\mu \geqq 0$ dès que l'énergie de $|\mu|$ est finie.

THEOREME 8. *Soit G une noyau-fonction symétrique sur X. Si G satisfait au principe de domination ou au principe classique du maximum, elle est alors de type positif.*

Démonstration. Soit μ une mesure de Radon réelle sur X et d'énergie finie, et soit E la σ-algèbre constituée par tous les ensembles $|\mu|$-mesurables de X. On pose, quels que soient e_1 et e_2 de E,

$$N(e_1, e_2) = \int_{e_1}\int_{e_2} G(x, y) d|\mu|(y) d|\mu|(x),$$

et alors, N est un noyau mesurable et symétrique relatif à X et à $|\mu|$. D'après le lemme 10, on a $N \in (D) \cup (M)$, et par suite, quel que soit K un compact de X,

$$\int G\mu_K d\mu_K \geqq 0,$$

où μ_k est la restriction de μ sur K, d'où

$$\int G\mu d\mu = \lim_{K \uparrow X} \int G\mu_K d\mu_K \geqq 0.$$

La démonstration est complète.

THEOREME 9. *Soit G une noyau-fonction sur X. Si G et $\check{G}$ satisfont au principe complet du maximum, G est de type positif.*

On remarque que, pour montrer notre théorème, il suffit de voir que, quelles que soient μ et ν mesures de Radon positives dans X, à support compact et telles que $G\mu$ et $G\nu$ soient bornés, $G\mu \leqq G\nu + 1$ μ-pp sur X implique $G\mu \leqq G\nu + 1$ G-ppp sur X. Cela resulte de la même manière que ci-dessus, en utilisant le théorème 4.

5. Appendice

En particulier, soient X un groupe abélien localement compact et ξ sa mesure de Haar. Pour une mesure de Radon positive κ sur X, on pose

$$N(e_1, e_2) = \int \check{c}_1 * c_2(x) d\kappa(x),$$

où c_i $(i = 1, 2)$ est la fonction caractéristique de e_i, N est alors un noyau relatif à X et à ξ. Quelle que soit f de M^+, le potentiel de f par rapport au noyau N est égal à la densité de la convolution $\kappa * f$. En ce moment, N est un noyau de convolution sur X. Il est caractérisé par le fait que, quels que soient e_1 et e_2 de E et quel que soit x de X, $N(U_x e_1, e_2) = N(e_1, U_{-x} e_2)$, où $U_x e_1$ est l'ensemble obtenu de e_1 par la translation x. Pour deux mesures de Radon positives κ_1 et κ_2 dans X, si la convolution $\kappa_1 * \kappa_2$ est définie, $N_1 \cdot N_2$ a un sens et

$$N_1 \cdot N_2(e_1, e_2) = \int \check{c}_1 * c_2 d\kappa_1 * \kappa_2,$$

où $N_i(e_1, e_2) = \int \check{c}_1 * c_2 d\kappa_1$ $(i = 1, 2)$ et c_i est aussi la fonction caractéristique de e_i $(i = 1, 2)$. D'après la discution ci-dessus, on a évidemment la proposition suivante:

PROPOSITION 9. Soit N un noyau de convolution sur X; alors, on a $N \in (D) \Longleftrightarrow \check{N} \in (D)$ et $N \in (CM) \Longleftrightarrow \check{N} \in (CM)$.

On fournira finalement un exemple de noyau de convolution $N \in (D)$ qui n'est pas de type positif. Soit X la droite réelle, et posons $\kappa_a = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \varepsilon_n$ $(a > 0)$, où ε_n la mesure de Dirac au point n; alors, le noyau de convolution N_a associé à κ_a est élémentaire. Mais, N_a est de type positif si et seulement si $0 \leqq a \leqq 1$.

REFERENCES

[1] G. Choquet et J. Deny, Aspect linéaire de la théorie du potentiel, théorème de dualité et applications, C.R. acad Sc. Paris, t. **243,** 1956, p. 764–767.

[2] ——————, Aspect linéaire de la théorie du potentiel, noyaux de composition

satisfaisant au principe du balayage sur tout ouvert, ibid, t. **250,** 1960, p. 4260–4262.
[3] J. Deny, Principe complet du maximum et contractions, Ann Inst. Fourier (Grenoble), t. **15,** 1965, p. 259–272.
[4] R. Durier, Thèse, Faculté des Sciences d'Orsay, Université de Paris, 1969.
[5] G. Hunt, Makov processes and potentials II, Illinois J. Math., t. **1,** 1957, p. 316–369.
[6] M. Itô, Note sur contractions et principes du maximum, Osaka J. Math., t. **4,** 1967, p. 217–226.
[7] M. Kishi, Maximum principles in the potential theory, Nagoya Math. J., t. **23,** 1963, p. 165–187.
[8] P–A. Meyer, Probablité et potentiel, Hemann, 1966.
[9] N. Ninomiya, Etude sur la théorie du potentiel pris par rapport au noyau symétrique, J. Inst. Polytechnics, Osaka City Univ., t. **8,** 1957, p. 147–179.

Institut Mathématique
Université de Nagoya