Compositio Math. 140 (2004) 1357–1366
DOI: 10.1112/S0010437X04000338

Adhérence de Zariski des groupes de Coxeter

Yves Benoist et Pierre de la Harpe

Abstract

We describe the Zariski closure of the geometric realization of Coxeter groups. When the Coxeter system is irreducible and the Tits form B non-positive and non-degenerate, this Zariski closure is equal to the orthogonal group of B.

1. Réalisation géométrique d'un groupe de Coxeter

Soit (S, M) un *système de Coxeter*, c'est-à-dire un couple formé d'un ensemble S et d'une matrice $M = (m_{s,t})_{s,t\in S}$ à coefficients diagonaux $m_{s,s} = 1$ et à coefficients non diagonaux $m_{s,t} \in \{2, 3, 4, \dots, \infty\}$. Rappelons que ces données déterminent un *groupe de Coxeter* W_S défini par des générateurs $(g_s)_{s\in S}$ et des relations $(g_s g_t)^{m_{s,t}}$ pour $s, t \in S$ tels que $m_{s,t} \neq \infty$.

Notons E_S l'espace vectoriel libre $\mathbb{R}^{(S)}$ sur S et $(e_s)_{s\in S}$ sa base canonique. La *forme de Tits* est la forme bilinéaire symétrique B_S définie sur E_S par

$$B_S(e_s, e_t) = -\cos(\pi/m_{s,t}) \quad \text{pour tous } s, t \in S.$$

Son *noyau* est le sous-espace

$$E_S^0 = \{v \in E_S \mid B(v, w) = 0 \text{ pour tout } w \in E_S\}$$

de E_S et son *groupe orthogonal* est le sous-groupe

$$O(E_S, B_S) = \{g \in GL(E_S) \mid B_S(gv, gw) = B(v, w) \text{ pour tous } v, w \in E_S\}$$

du groupe général linéaire $GL(E_S)$. Il est facile de vérifier que les formules

$$\sigma_S(g_s)v = v - 2B_S(e_s, v)e_s, \quad s \in S,\ v \in, E_S,$$

définissent un homomorphisme de groupes

$$\sigma_S : W_S \longrightarrow O(E_S, B_S)$$

qui est la *représentation géométrique* de W_S, homomorphisme dont l'image est dans le sous-groupe

$$G_S = \{g \in O(E_S, B_S) \mid gv = v \text{ pour tout } v \in E_S^0\}$$

de $O(E_S, B_S)$. Cette représentation est indécomposable si et seulement si le système (S, M) est *irréductible,* c'est à dire s'il n'existe pas de partition non banale $S = U \sqcup V$ telle que $m_{u,v} = 2$ pour tous $u \in U$ et $v \in V$.

Selon un théorème de Tits, cette représentation est fidèle. De plus, si S est fini, alors l'image $\sigma_S(W_S)$ est un sous-groupe discret du groupe de Lie $O(E_S, B_S)$. Pour tout ceci, voir le paragraphe V.4 de [Bou68].

Received 20 February 2003, accepted in final form 17 April 2003.
2000 Mathematics Subject Classification 20F55 (primary), 22E40 (secondary).
Keywords: Coxeter groups, Tits representation, Zariski closure.
Le second auteur remercie le Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique pour son soutien.

2. Enoncé du résultat principal

Nous conservons les notations du numéro précédent, en supposant désormais que l'ensemble S est fini non vide. Il résulte immédiatement des définitions que l'adhérence de Zariski de $\sigma_S(W_S)$ est contenue dans G_S. L'objet de cette note est de montrer le résultat que voici.

Théorème. *Soit (S, M) un système de Coxeter irréductible, avec S fini ; soient W_S, B_S, σ_S et G_S comme plus haut. On suppose que la forme B_S n'est pas positive.*

Alors l'image $\sigma_S(W_S)$ est Zariski dense dans G_S.

En particulier, si la forme B_S est non positive et non dégénérée, alors $\sigma_S(W_S)$ est Zariski dense dans le groupe orthogonal $O(E_S, B_S)$.

Remarques. Soit (S, M) un système de Coxeter irréductible ; on conserve les notations ci-dessus, et on désigne par n_S le cardinal de S.

i) La forme B_S est positive non dégénérée si et seulement si le groupe W_S est fini (voir [Bou68, § V.4, n° 8]). Dans ce cas, $\sigma_S(W_S)$ est un sous-groupe fini (donc Zariski fermé) du groupe compact $O(E_S, B_S)$.

ii) La forme B_S est positive dégénérée si et seulement si le groupe W_S possède un sous-groupe abélien libre infini d'indice fini. Dans ce cas, $\sigma_S(W_S)$ est une extension finie d'un réseau du groupe des translations d'un espace euclidien de dimension $n_S - 1$, et son adhérence de Zariski a donc une composante connexe qui est un espace vectoriel de dimension $n_S - 1$.
De plus, le noyau E_S^0 de B_S est de dimension 1, engendré par un vecteur de la forme $\sum_{s \in S} v_s e_s$ avec $v_s > 0$ pour tout $s \in S$ (voir [Bou68, § V.4, n° 9]).

iii) Notons r_S la dimension du noyau E_S^0 de B_S. La forme bilinéaire symétrique non dégénérée induite par B_S sur E_S/E_S^0 possède une signature que nous notons (p_S, q_S), de sorte que $n_S = p_S + q_S + r_S$. La remarque i se rapporte au cas où $q_S = r_S = 0$ et la remarque ii au cas où $q_S = 0$ et $r_S > 0$.

iv) Si T est un sous-ensemble de S et $M|T$ la sous-matrice $(m_{s,t})_{s,t \in T}$ correspondante, on sait que l'inclusion de T dans S induit un homomorphisme de W_T dans W_S qui est injectif et une injection de E_T dans E_S qui fait de la forme bilinéaire B_T la restriction de B_S. Lorsque $T = \{s, t\}$ a deux éléments, la forme B_T est positive (elle est même positive non dégénérée si $m_{s,t} \neq \infty$). Par suite, $p_S + r_S \geqslant 2$ dès que $n_S \geqslant 2$.
En particulier, si la forme B_S est lorentzienne (c'est à dire si $n_S \geqslant 2$, $r_S = 0$ et si l'un de p_S, q_S est 1), alors $p_S = n_S - 1$ et $q_S = 1$.

v) Les propriétés suivantes sont équivalentes :
   a) la forme B_S est lorentzienne, et B_T est positive pour toute partie propre T de S ;
   b) le groupe $\sigma_S(W_S)$ est un réseau dans $O(E_S, B_S)$.

   On dit dans ce cas que (S, M), ou W_S, est *de type hyperbolique*. (Pour l'équivalence, voir les exercices 12 et 13 du § V.4 dans [Bou68].)
   Lorsque ces propriétés sont satisfaites, la densité de Zariski de $\sigma_S(W_S)$ dans $O(E_S, B_S)$ est également un cas particulier du théorème de densité de Borel.

vi) Les exemples rassemblés au § 5 montrent plusieurs cas possibles de signature (p_S, q_S, r_S) de la forme de Tits : il existe des cas avec q_S/n_S ou r_S/n_S arbitrairement proche de 1. Pour d'autres exemples, voir notamment [HV01] et [Par93].

vii) Le théorème fournit une nouvelle démonstration du fait suivant, démontré récemment par G. Fendler. *Soit (S, M) un système de Coxeter irréductible, avec S fini, dont la forme de Tits est non positive et non dégénérée ; alors la C^*-algèbre réduite du groupe de Coxeter W_S est une*

C^**-algèbre simple à trace unique* [Fen]. En effet, soit d'abord Γ l'intersection de $\sigma_S(W_S)$ avec la composante connexe de G_S pour la topologie séparée ; c'est un sous-groupe d'indice fini de $\sigma_S(W_S)$. Le résultat suivant de [BCH94] s'applique à Γ : la C^*-algèbre réduite d'un sous-groupe Zariski dense et à centre trivial d'un groupe de Lie connexe semisimple sans facteur compact est une C^*-algèbre simple a trace unique. Par ailleurs, dans un groupe (et en particulier dans $\sigma_S(W_S)$) à centre trivial qui est Zariski dense dans un groupe algébrique, toute classe de conjugaison autre que $\{1\}$ est infinie ; il résulte de [BH00] que, comme Γ, le groupe W_S a une C^*-algèbre simple à trace unique.

La § 3 est consacré à la preuve du théorème ci-dessus dans le cas où la forme B_S est lorentzienne, et la § 4 à une preuve du cas général, par réduction à des sous-systèmes lorentziens.

3. Le cas lorentzien

Considérons un entier $n \geqslant 2$, la forme lorentzienne B définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$B(x,y) = \sum_{j=1}^{n-1} x_j y_j - x_n y_n$$

et son groupe orthogonal $O(n-1,1)$. Rappelons que la composante connexe *au sens de Zariski* de $O(n-1,1)$ est le sous-groupe d'indice 2

$$SO(n-1,1) = \{g \in O(n-1,1) \mid \det(g) = 1\}$$

de $O(n-1,1)$; ce groupe $SO(n-1,1)$ a lui-même *deux* composantes connexes pour la topologie séparée. Nous notons $\underline{so}(n-1,1)$ l'algèbre de Lie de $SO(n-1,1)$.

Proposition 1. *Soit Γ un sous-groupe de $O(n-1,1)$ qui est irréductible sur $\mathbb{R}^n$. Alors l'adhérence de Zariski H de Γ contient $SO(n-1,1)$.*

Pour la commodité du lecteur, nous détaillons la démonstration de cette proposition, sans doute bien connue (voir [AVS93]). Avant cela, nous formulons trois lemmes. Pour tout espace vectoriel E et toute sous-algèbre de Lie $\underline{h}$ de $\mathrm{End}(E)$, nous posons

$$E^{\underline{h}} = \{v \in E \mid Xv = 0 \text{ pour tout } X \in \underline{h}\}.$$

Lemme 2. *Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, H un sous-groupe fermé (pour la topologie séparée) de $GL(E)$ et $\underline{h}$ son algèbre de Lie.*

Si H est irréductible sur E, alors l'action de $\underline{h}$ sur E est semisimple. Si de plus $\underline{h} \neq \{0\}$, alors $E^{\underline{h}} = \{0\}$.

Preuve (voir aussi [Bou60], § 6, n$^{\text{o}}$ 4, Proposition 5 et n$^{\text{o}}$ 5, Théorème 4). Soit $\underline{n}$ le radical nilpotent de $\underline{h}$. D'une part, le sous-espace $E^{\underline{n}}$ est non réduit à zéro, par le théorème d'Engel (voir [Bou60, § 4 n$^{\text{o}}$ 2]). D'autre part, $E^{\underline{n}}$ est invariant par H. Il résulte de l'irréductibilité de H que $E^{\underline{n}} = E$, et par suite que $\underline{n} = \{0\}$, de sorte que l'algèbre de Lie $\underline{h}$ est réductive.

Pour montrer que l'action de $\underline{h}$ sur E est semisimple, il suffit donc de montrer que tout élément X du centre $\underline{c}$ de $\underline{h}$ est semisimple. Pour cela, introduisons la décomposition de Jordan $X = X_{\text{ss}} + X_{\text{nilp}}$ de X : les endomorphismes X_{ss} et X_{nilp} de E commutent entre eux, X_{ss} est semisimple et X_{nilp} est nilpotent.[1] L'algèbre de Lie $\underline{u} = \mathbb{R}X_{\text{nilp}}$ commute à $\underline{h}$. Le même argument que ci-dessus montre que $\underline{u} = \{0\}$ et donc que $X_{\text{nilp}} = 0$.

L'espace $E^{\underline{h}}$ est également invariant par H. Si cet espace est non nul, alors $\underline{h} = \{0\}$. □

[1] Noter qu'il est inutile de savoir ici si $X_{\text{ss}} \in \underline{h}$, même si c'est vrai *a posteriori*, en vertu de la semisimplicité de $\underline{h}$ et de la proposition 3 du § 6, n$^{\text{o}}$ 3 de [Bou60].

Lemme 3. *Soit B la forme lorentzienne définie plus haut, H un sous-groupe fermé (pour la topologie séparée) de $O(n-1,1)$ et $\underline{h}$ son algèbre de Lie ; on suppose $n \geqslant 3$.*

Si H est irréductible sur $\mathbb{R}^n$, alors $\underline{h}$ est semisimple.

Preuve. D'après le lemme 2, il suffit de montrer que le centre $\underline{c}$ de $\underline{h}$ est nul. D'après ce même Lemme 2, l'action de $\underline{c}$ sur E est semisimple. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ les poids de l'action de $\underline{c}$ dans le complexifié $\mathbb{C}^n$ et, pour $j = 1, \dots, \ell$,

$$\mathbb{C}^n_{\lambda_j} := \{v \in \mathbb{C}^n \mid Xv = \lambda_j(X)v \text{ pour tout } X \in \underline{c}\}$$

l'espace de poids correspondant. Alors $\mathbb{C}^n = \oplus_{j=1}^{\ell} \mathbb{C}^n_{\lambda_j}$ et, si $B_{\mathbb{C}}$ désigne la forme bilinéaire sur $\mathbb{C}^n$ qui prolonge B, on a les implications :

$$\lambda_j + \lambda_k \neq 0 \Longrightarrow B_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n_{\lambda_j}, \mathbb{C}^n_{\lambda_k}) = 0 \tag{$\sharp$}$$

(voir [Bou75, ch. VII, § 1, n° 3, proposition 9]). Par irréductibilité, le groupe H permute transitivement les λ_i ; par ailleurs, H permute les λ_j réels, de sorte que les λ_j sont ou bien tous réels ou bien tous non réels.

Supposons d'abord que tous ces poids sont non nuls. Il y a *a priori* trois cas possibles :

a) *Les λ_j sont tous réels.* Alors $\mathbb{R}^n = \oplus_{j=1}^{\ell} \mathbb{R}^n_{\lambda_j}$, où $\mathbb{R}^n_{\lambda_j} = \mathbb{C}^n_{\lambda_j} \cap \mathbb{R}^n$. Il résulte de ($\sharp$) que $\mathbb{R}^n_{\lambda_j}$ est un espace isotrope pour B. Comme la forme B est lorentzienne, $\dim(\mathbb{R}^n_{\lambda_j}) = 1$ pour tout $j \in \{1, \dots, \ell\}$. De plus $\ell \leqslant 2$, sinon il existerait deux poids distincts λ_j, λ_k de somme non nulle et, toujours par ($\sharp$), l'espace $\mathbb{R}^n_{\lambda_j} \oplus \mathbb{R}^n_{\lambda_k}$ serait isotrope pour B. Donc $\ell \leqslant 2$ et $\dim(\mathbb{R}^n) \leqslant 2$, ce qui contredit l'hypothèse $n \geqslant 3$.

b) *Les λ_j sont tous imaginaires purs.* Le groupe connexe C d'algèbre de Lie $\underline{c}$ est alors relativement compact. Il est donc conjugué à un sous-groupe de $SO(n-1)$. Ce qui contredit le fait que tous les λ_j sont non nuls.

c) *Les λ_j ne sont pas tous imaginaires purs, et aucun d'entre eux n'est réel.* Il existe au moins un indice j tel que $\lambda_j + \overline{\lambda_j} \neq 0$, donc tel que l'espace vectoriel $(\mathbb{C}^n_{\lambda_j} \oplus \mathbb{C}^n_{\overline{\lambda_j}}) \cap \mathbb{R}^n$ est B-isotrope et de dimension au moins 2. Ceci contredit le fait que la forme B est lorentzienne.

Par suite il n'y a qu'un poids, $\lambda = 0$. Le sous-espace propre $\mathbb{C}^n_0$ est invariant par H, donc coïncide avec $\mathbb{C}^n$, de sorte que $\underline{c} = 0$. □

Lemme 4. *Soit $\underline{h}$ une sous-algèbre de Lie de $\underline{so}(n-1,1)$; on suppose que $n \geqslant 3$.*

Si l'action naturelle de $\underline{h}$ sur $\mathbb{R}^n$ est irréductible, alors $\underline{h} = \underline{so}(n-1,1)$.

Preuve. Rappelons que tout endomorphisme semisimple X de $\mathbb{R}^n$ s'écrit canoniquement comme somme d'un *élément elliptique* X_{ell} à valeurs propres imaginaires pures et d'un *élément hyperbolique* X_{hyp} à valeurs propres réelles, qui commutent entre eux.

D'après le lemme 3, l'algèbre de Lie $\underline{h}$ est semisimple. L'algèbre de Lie $\underline{h}$ n'est pas une algèbre de Lie compacte, car, par irréductibilité, elle n'est pas conjuguée à une sous-algèbre de Lie de $\underline{so}(n-1)$. Elle contient donc un élément semisimple hyperbolique X_{hyp}. Par ailleurs, dans l'algèbre de Lie $\underline{g} = \underline{so}(n-1,1)$, qui est de rang réel 1, les droites engendrées par les éléments hyperboliques non nuls sont conjuguées deux à deux (voir dans [Hel78] la proposition III.7.4, le corollaire V.6.3, le corollaire IX.4.2 et la proposition IX.4.6).

On peut donc supposer que $\underline{h}$ contient l'élément

$$H_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X04000338 Published online by Cambridge University Press

de l'algèbre de Lie

$$\underline{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -{}^{\mathrm{t}}\xi & y \\ \xi & X & \eta \\ y & {}^{\mathrm{t}}\eta & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{matrix} \xi, \eta \in \mathbb{R}^{n-2}, & y \in \mathbb{R} \\ X \in M_{n-2}(\mathbb{R}), & {}^{\mathrm{t}}X = -X \end{matrix} \right\},$$

où $M_n(\mathbb{R})$ désigne l'algèbre des matrices réelles de taille n et où ${}^{\mathrm{t}}(\cdot)$ désigne une matrice transposée.

Les valeurs propres de H_0 opérant sur E sont -1, 0, 1 et la décomposition correspondante en espaces propres s'écrit

$$E = E_{-1} \oplus E_0 \oplus E_1$$

avec $\dim E_{-1} = \dim E_1 = 1$ et $\dim E_0 = n-2$. Les valeurs propres de $\mathrm{ad}(H_0)$ opérant sur $\underline{g}$ sont -1, 0, 1 et la décomposition correspondante en espaces propres s'écrit

$$\underline{g} = \underline{g}_{-1} \oplus \underline{g}_0 \oplus \underline{g}_1$$

avec $\dim \underline{g}_{-1} = \dim \underline{g}_1 = n-2$ et $\underline{g}_0 = \mathbb{R}H_0 \oplus \underline{so}(n-2)$ de dimension $1 + \frac{1}{2}(n-2)(n-3)$. De plus

$$\underline{g}_j E_k \subset E_{j+k} \quad \text{pour tous } j, k \in \{-1, 0, 1\}$$

avec $E_{j+k} = 0$ si $j + k \notin \{-1, 0, 1\}$. En posant $\underline{h}_j = \underline{h} \cap \underline{g}_j$ ($j = -1, 0, 1$), on obtient de même

$$\underline{h} = \underline{h}_{-1} \oplus \underline{h}_0 \oplus \underline{h}_1 \quad \text{et} \quad \underline{h}_j E_k \subset E_{j+k}.$$

Si l'espace $\underline{h}_1 E_{-1}$ était strictement contenu dans E_0, le sous-espace strict

$$E_{-1} \oplus \underline{h}_1 E_{-1} \oplus \underline{h}_1 \underline{h}_1 E_{-1}$$

de E serait invariant par $\underline{h}$, contrairement à l'hypothèse d'irréductibilité. Donc $\underline{h}_1 E_{-1} = E_0$ et *a fortiori* $\underline{h}_1$ est de dimension $n-2$; en d'autres termes $\underline{h}_1 = \underline{g}_1$. De même $\underline{h}_{-1} = \underline{g}_{-1}$. Enfin, comme le sous-espace $\underline{g}_1 \oplus \underline{g}_{-1}$ engendre $\underline{g}$ en tant qu'algèbre de Lie, il en résulte que $\underline{h} = \underline{g}$. □

Preuve de la proposition 1. L'assertion est claire pour $n = 2$. Supposons donc $n \geqslant 3$.

Si le groupe Γ était fini, il aurait un conjugué $g\Gamma g^{-1}$, avec $g \in O(n-1,1)$, qui serait contenu dans le sous-groupe compact maximal $O(n-1) \times \{\pm 1\}$ de $O(n-1,1)$, et qui serait en particulier réductible sur $\mathbb{R}^n$, contrairement à l'hypothèse. Donc Γ est un groupe infini.

Désignons par H son adhérence de Zariski dans $O(n-1,1)$, par $\underline{h}$ l'algèbre de Lie de H, et posons $E = \mathbb{R}^n$; il résulte de ce qui précède que l'algèbre de Lie $\underline{h}$ n'est pas réduite à zéro, qu'elle est semisimple, et que $E^{\underline{h}} = \{0\}$. Les sous-espaces $\underline{h}$-invariants et $\underline{h}$-irréductibles F de E sont donc de dimension au moins 2. Comme B est lorentzienne, la restriction de B à F est non nulle. Par irréductibilité, cette restriction est non dégénérée. L'orthogonal d'un tel sous-espace F est un supplémentaire $\underline{h}$-invariant. Ceci permet de trouver une décomposition de E

$$E = \oplus_{j \in J} E_j \tag{$*$}$$

en somme directe de sous-espaces E_j non réduits à zéro, $\underline{h}$-invariants, $\underline{h}$-irréductibles et deux à deux orthogonaux relativement à B.

Comme H agit irréductiblement sur E, les signatures des restrictions B_j de B à E_j sont égales deux à deux. Il résulte alors de ce que B est lorentzienne que J n'a qu'un élément, et donc que l'action de $\underline{h}$ sur E est irréductible.

Le lemme 4 implique que $\underline{h} = \underline{so}(n-1,1)$, et ceci achève la preuve de la proposition 1. □

Corollaire 5. *Soit (S, M) un système de Coxeter irréductible dont la forme de Tits B_S est lorentzienne. Alors la réalisation géométrique $\sigma_S(W_S)$ du groupe de Coxeter correspondant est Zariski dense dans le groupe orthogonal $O(E_S, B_S)$.*

https://doi.org/10.1112/S0010437X04000338 Published online by Cambridge University Press

Preuve. Vu la proposition 1, il suffit de noter que le groupe $\sigma_S(W_S)$ n'est pas contenu dans $SO(E_S, B_S)$. Mais ceci est évident car $\sigma_S(W_S)$ contient les réflexions $\sigma_S(e_s)$ pour tout $s \in S$. $\square$

4. Le cas général

Lemme 6. *Soit (S, M) un système de Coxeter irréductible dont la forme de Tits B_S n'est pas positive et soit (s, t) une paire d'éléments de S telle que $m_{s,t} \geqslant 3$. Alors il existe une partie T de S contenant s et t telle que la forme bilinéaire B_T est lorentzienne.*

Preuve. L'ensemble des parties irréductibles V de S contenant $\{s, t\}$ et telles que B_V soit positive n'est pas vide, puisqu'il contient la partie $\{s, t\}$. Soit U une telle partie qui soit de plus maximale, et soit T une partie irréductible de S obtenue à partir de U en ajoutant un élément t_0 de $S \setminus U$. Nous affirmons que la forme B_T est lorentzienne.

Si la forme B_U est positive non dégénérée, l'affirmation résulte de la maximalité de U. On peut donc supposer B_U dégénérée. Par la remarque ii du § 2 ci-dessus, le noyau E_U^0 de B_U est engendré par un vecteur $v = \sum_{u \in U} v_u e_u$ tel que $v_u > 0$ pour tout $u \in U$.

Supposons (par l'absurde) que la forme B_T n'est pas lorentzienne ; il existe donc un vecteur $z = z_0 e_{t_0} + \sum_{u \in U} z_u e_u \in E_T$ tel que $B_T(z, z) < 0$. Soit alors $w = w_0 e_{t_0} + \sum_{u \in U} w_u e_u \in E_T^0$; si on avait $w_0 \neq 0$, le vecteur $z' = z - (z_0/w_0) w \in E_U$ serait tel que $B_U(z', z') < 0$, ce qui est impossible ; donc $w_0 = 0$; ceci montre que $E_T^0 \subset E_U^0$. Il en résulte que

$$0 = B_T(e_{t_0}, v) = \sum_{u \in U} v_u B_T(e_{t_0}, e_u).$$

Or $v_u > 0$ et $B_T(e_{t_0}, e_u) \leqslant 0$ pour chaque terme de la somme, de sorte que tous les termes de cette somme sont nuls. Autrement dit, on a $m_{t_0,u} = 2$ pour tout $u \in U$, ce qui est absurde vu l'hypothèse d'irréductibilité faite sur T.

Par suite la forme B_T est bien lorentzienne. $\square$

Soit (S, M) un système de Coxeter. L'algèbre de Lie du groupe désigné par G_S dans l'introduction est

$$\underline{g}_S = \left\{ X \in \mathrm{End}(E_S) \;\middle|\; \begin{array}{c} B_S(Xu, v) + B_S(u, Xv) = 0 \text{ pour tous } u, v \in E_S \\ \text{et } Xw = 0 \text{ pour tous } w \in E_S^0 \end{array} \right\}.$$

Pour tout $u \in E_S$, notons u^* la forme linéaire $v \longmapsto B_S(u, v)$ sur E_S. Pour $u, v \in E_S$, posons

$$X_{u,v} = u^* \otimes v - v^* \otimes u \in E_S^* \otimes E_S \approx \mathrm{End}(E_S),$$
$$X_{u,v}(w) = B_S(u, w)v - B_S(v, w)u \quad \text{pour tout } w \in E_S.$$

Pour $s, t \in S$, nous écrivons $X_{s,t}$ au lieu de X_{e_s, e_t}. Il est immédiat de vérifier que $X_{u,v} \in \underline{g}_S$ pour tous $u, v \in E_S$.

La forme B_S induit sur le quotient E_S/E_S^0 une forme bilinéaire non dégénérée que nous notons $\underline{B}_S$. Posons

$$\underline{g}_S^0 = \{X \in \mathrm{End}(E_S) \mid X(E_S) \subset E_S^0 \text{ et } X(E_S^0) = \{0\}\};$$

c'est un espace vectoriel canoniquement isomorphe à $\mathrm{Hom}(E_S/E_S^0, E_S^0)$; c'est aussi un idéal commutatif de l'algèbre de Lie $\underline{g}_S$; c'est enfin le noyau de la projection canonique $\pi : \underline{g}_S \longrightarrow \underline{so}(E_S/E_S^0, \underline{B}_S)$.

Lemme 7. *Avec les notations ci-dessus, chacune des familles*

$$(X_{u,v})_{(u,v) \in E_S \times E_S} \quad \text{et} \quad (X_{s,t})_{(s,t) \in S \times S}$$

engendre $\underline{g}_S$ en tant qu'espace vectoriel.

https://doi.org/10.1112/S0010437X04000338 Published online by Cambridge University Press

Preuve. D'une part, pour $u \in E_S$ et $v \in E_S^0$, on a $X_{u,v} = u^* \otimes v$; il est évident que ces opérateurs engendrent $\underline{g}_S^0 \approx \mathrm{Hom}(E_S/E_S^0, E_S^0)$.

D'autre part, si $(u_1, \dots, u_m)$ est une famille de vecteurs de E_S dont les classes modulo E_S^0 constituent une base $\underline{B}_S$-orthogonale de E_S/E_S^0, alors la famille $(\pi(X_{u_j,u_k}))_{1 \leqslant i<j \leqslant m}$ est linéairement indépendante dans $\mathrm{End}(E_S/E_S^0)$; par suite cette famille engendre l'algèbre de Lie $\underline{so}(E_S/E_S^0, \underline{B}_S)$, qui est de dimension $\frac{1}{2}m(m-1)$.

Il en résulte que la famille $(X_{u,v})_{(u,v)\in E_S \times E_S}$ engendre linéairement $\underline{g}_S$, et qu'il en est de même de $(X_{s,t})_{(s,t)\in S\times S}$. $\square$

Preuve du Théorème. Pour toute partie T de S, nous notons $E_{S,T}$ l'orthogonal de E_T dans E_S pour B_S. Si la forme B_T est non dégénérée, on peut identifier les groupes

$$G_T \quad \text{et} \quad \{g \in G_S \mid gv = v \text{ pour tout } v \in E_{S,T}\}.$$

Notons H_S l'adhérence de Zariski de $\sigma_S(W_S)$ et $\underline{h}_S$ son algèbre de Lie. D'après le lemme 7, il suffit de montrer que $X_{s,t} \in \underline{h}_S$ pour tous $s, t \in S$, $s \neq t$. Nous distinguons deux cas.

Premier cas : $m_{s,t} \neq 2$. D'après le lemme 6, il existe une partie T de S qui est irréductible, qui contient s et t, et qui est telle que la forme B_T est lorentzienne. L'inclusion $\underline{g}_T \subset \underline{g}_S$ consiste à prolonger les endomorphismes par 0 sur $E_{S,T}$, et se restreint en une inclusion $\underline{h}_T \subset \underline{h}_S$ (où $\underline{h}_T$, qui est l'algèbre de Lie de l'adhérence de Zariski de $\sigma_T(W_T)$ dans $O(E_T, B_T)$, est une sous-algèbre de Lie de $\underline{g}_T$). Avec cette inclusion, l'élément $X_{s,t}$ peut être vu indifféremment dans $\underline{g}_T$ ou dans $\underline{g}_S$. Or $X_{s,t} \in \underline{h}_T$ par le corollaire 5 ; donc $X_{s,t} \in \underline{h}_S$.

Second cas : $m_{s,t} = 2$. Pour $p, q, r \in S$, on vérifie que

$$[X_{p,q}, X_{q,r}] - B_S(e_p, e_q)X_{q,r} - B_S(e_q, e_r)X_{p,q} = X_{r,p}.$$

Il en résulte que toute sous-algèbre de Lie de $\mathrm{End}(E_S)$, et en particulier $\underline{h}_S$, qui contient $X_{p,q}$ et $X_{q,r}$ contient aussi $X_{p,r}$.

Par irréductibilité de (S, M), il existe dans le graphe de Dynkin correspondant un chemin

$$s = s_0, s_1, \dots, s_k = t$$

tel que $m_{s_{j-1},s_j} \geqslant 3$ pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$. Comme $\underline{h}_S$ contient X_{s_{j-1},s_j} pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$ par le premier cas, $\underline{h}_S$ contient aussi $X_{s,t}$. $\square$

5. Exemples de signatures de formes de Tits

Décrivons un procédé qui permet de construire de nombreux triplets (p_S, q_S, r_S) associés à des formes de Tits B_S.

Soit $\mathcal{X}$ un graphe fini avec ensemble de sommets S. Nous supposons $\mathcal{X}$ *simple*, c'est-à-dire tel qu'une arête connecte toujours deux sommets distincts (absence de boucle), et que deux sommets soient connectés par au plus une arête (absence d'arête multiple). La *matrice d'adjacence* A de $\mathcal{X}$, dont les lignes et les colonnes sont indexées par S, est définie par $A_{s,t} = 1$ s'il existe dans $\mathcal{X}$ une arête connectant s à t, et par $A_{s,t} = 0$ sinon.

Supposons que $\mathcal{X}$ soit *fortement régulier* de paramètres (n, k, λ, μ), c'est-à-dire que $\mathcal{X}$ est un graphe à n sommets qui est *régulier* de degré k au sens où $\sum_{t\in S} A_{s,t} = k$ pour tout $s \in S$, et tel que

i) l'ensemble $\{t \in S \mid A_{s,t} = 1 \text{ et } A_{t,u} = 1\}$ a λ sommets pour tous $s, u \in S$ tels que $A_{s,u} = 1$,

ii) l'ensemble $\{t \in S \mid A_{s,t} = 1 \text{ et } A_{t,u} = 1\}$ a μ sommets pour tous $s, u \in S$ tels que $s \neq u$ et $A_{s,u} = 0$.

https://doi.org/10.1112/S0010437X04000338 Published online by Cambridge University Press

La matrice d'adjacence de $\mathcal{X}$ satisfait les équations

$$AJ = kJ \quad \text{et} \quad A^2 + (\mu - \lambda)A + (\mu - k)I = \mu J,$$

où J est la matrice dont tous les coefficients $J_{s,t}$ sont égaux à 1. On évite les cas dégénérés en supposant que l'ensemble des arêtes de $\mathcal{X}$ n'est pas vide, c'est-à-dire que $k > 0$, et que $\mathcal{X}$ est connexe, c'est-à-dire que $\mu > 0$.

Un calcul facile et standard (voir par exemple le ch. 21 de [vLW92]) montre alors que les valeurs propres de A sont

$$\begin{aligned} k \quad & \text{de multiplicité} \quad 1, \\ \rho = \frac{1}{2}\{\lambda - \mu + \sqrt{\Delta}\,) \quad & \text{de multiplicité} \quad f = \frac{1}{2}\left\{n - 1 + \frac{(n-1)(\mu-\lambda) - 2k}{\sqrt{\Delta}}\right\}, \\ \sigma = \frac{1}{2}\{\lambda - \mu - \sqrt{\Delta}\,) \quad & \text{de multiplicité} \quad g = \frac{1}{2}\left\{n - 1 - \frac{(n-1)(\mu-\lambda) - 2k}{\sqrt{\Delta}}\right\}, \end{aligned}$$

où $\Delta = (\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)$. On peut montrer que $\sigma \leqslant -1$ et $k > \rho \geqslant 0$.

Remarques. i) Les paramètres n, k, λ et μ d'un graphe fortement régulier $\mathcal{X}$ ne sont pas indépendants. En effet, pour $r \in S$ donné, le nombre de paires (s,t) telles que $r \neq t$ et $A_{r,s} = A_{s,t} = 1$, $A_{r,t} = 0$ s'écrit de deux manières :

$$\begin{aligned} &|\{s \in S \mid A_{r,s} = 1\}||\{t \in S \mid t \neq r, A_{r,t} = 0, A_{s,t} = 1\}| \\ &\quad = |\{t \in S \mid t \neq r, A_{r,t} = 0\}||\{s \in S \mid A_{r,s} = A_{s,t} = 1\}|. \end{aligned}$$

On obtient ainsi l'égalité

$$k(k - \lambda - 1) = (n - k - 1)\mu.$$

ii) Dans les exemples ci-dessous, les valeurs propres sont des entiers. Plus généralement, si les multiplicités f et g sont distinctes, alors les valeurs propres ρ et σ sont des nombres entiers. (Voir par exemple le théorème I.3.1 de [BCN89].)

Considérons un graphe fortement régulier de paramètres (n, k, λ, μ) avec $0 < \mu < k$ et le système de Coxeter (S, M) pour lequel

$$m_{s,t} = \begin{cases} \infty & \text{si } A_{s,t} = 0 \text{ et } s \neq t, \\ 2 & \text{si } A_{s,t} = 1, \\ 1 & \text{si } s = t. \end{cases}$$

Alors

$$B_S = A + 2I - J$$

et les valeurs propres de B_S sont

$$\begin{aligned} k + 2 - n \quad & \text{de multiplicité} \quad 1, \\ \rho + 2 \quad & \text{de multiplicité} \quad f, \\ \sigma + 2 \quad & \text{de multiplicité} \quad g. \end{aligned}$$

Exemple 1 (Graphes de Johnson). Etant donné un entier $m \geqslant 5$, soit $\mathcal{J}_{2,m}$ le graphe de Johnson dont les sommets sont les sous-ensembles à deux éléments de $\{1, \ldots, m\}$, dans lequel deux sommets sont connectés par une arête si leur intersection est constituée d'exactement un élément de $\{1, \ldots, m\}$. Alors $\mathcal{J}_{2,m}$ est un graphe fortement régulier de paramètres

$$n = \binom{m}{2}, \quad k = 2(m-2), \quad \lambda = m - 2, \quad \mu = 4.$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X04000338 Published online by Cambridge University Press

Les valeurs propres de la matrice d'adjacence du graphe $\mathcal{J}_{2,m}$ sont donc

$$\begin{aligned} k &= 2(m-2) \quad \text{de multiplicité} \quad 1,\\ \rho &= m-4 \quad \text{de multiplicité} \quad m-1,\\ \sigma &= -2 \quad \text{de multiplicité} \quad \frac{m(m-3)}{2}, \end{aligned}$$

de sorte que les signes des valeurs propres de B_S sont donnés par

$$(p_S, q_S, r_S) = \left(m-1, 1, \frac{m(m-3)}{2}\right)$$

(pour le calcul du spectre de A, voir [BCN89, p. 255]).

Exemple 2 (Graphes de Grassmann). Etant donné une puissance q d'un nombre premier et un entier $d \geqslant 3$, soit $\mathcal{G}_{2,d}^{(q)}$ le graphe de Grassmann dont les sommets sont les 2-plans de $\mathbb{F}_q^d$, dans lequel deux sommets sont connectés par une arête si leur intersection est une droite de $\mathbb{F}_q^d$. Alors $\mathcal{G}_{2,d}^{(q)}$ est un graphe fortement régulier de paramètres

$$n = \frac{(q^d-1)(q^{d-1}-1)}{(q^2-1)(q-1)}, \quad k = q\frac{(q+1)(q^{d-2}-1)}{q-1},$$
$$\lambda = \frac{q^{d-1}-1}{q-1} - 2 + q^2, \quad \mu = (q+1)^2.$$

Les valeurs propres de la matrice d'adjacence du graphe $\mathcal{G}_{2,d}^{(q)}$ sont donc

$$\begin{aligned} k &= q\frac{(q+1)(q^{d-2}-1)}{q-1} \quad \text{de multiplicité} \quad 1,\\ \rho &= \frac{q^{d-1}-q^2-q+1}{q-1} \quad \text{de multiplicité} \quad q\frac{q^{d-1}-1}{q-1},\\ \sigma &= -q-1 \quad \text{de multiplicité} \quad \frac{(q^{d-1}-1)(q^d-q^3+q-1)}{(q^2-1)(q-1)} - 1, \end{aligned}$$

de sorte que les signes des valeurs propres de B_S sont donnés par

$$(p_S, q_S, r_S) = \left(q\frac{q^{d-1}-1}{q-1}, \frac{(q^{d-1}-1)(q^d-q^3+q-1)}{(q^2-1)(q-1)}, 0\right).$$

On remarque que $r_S = 0$ et que q_S/p_S est de l'ordre de q^{d-3} (voir [BCN89, p. 268]).

Le livre [BCN89] contient de très nombreux autres exemples.

Bibliographie

AVS93 D. Alekseevskij, D. Vinberg et A. Solodovnikov, *Geometry of spaces of constant curvature*, Encyclopaedia Math. Sci. **29** (1993), 1–138.

BCH94 M. Bekka, M. Cowling et P. de la Harpe, *Some groups whose reduced C^*-algebra is simple*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **80** (1994), 117–134.

BH00 M. Bekka et P. de la Harpe, *Groups with simple reduced C^*-algebras*, Expo. Math. **18** (2000), 215–230.

Bou60 N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie* (Hermann, Paris, 1960), ch. 1.

Bou68 N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie* (Hermann, Paris, 1968), ch. 4, 5 et 6.

Bou75 N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie* (Hermann, Paris, 1975), ch. 7 et 8.

BCN89 A. E. Brouwer, A. M. Cohen et A. Neumaier, *Distance-regular graphs*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), vol. 18 (Springer, Berlin, 1989).

Fen G. Fendler, *Simplicity of the reduced C^*-algebra of certain Coxeter groups*, Prépublication.

HV01 P. de la Harpe et B. Venkov, *Groupes engendrés par des réflexions, designs sphériques et réseau de Leech*, C. R. Acad. Sci. Paris **333** (2001), 745–750.

Hel78 S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces* (Academic Press, 1978).

Par93 L. Paris, *Minimal nonstandard Coxeter trees*, J. Algebra **156** (1993), 76–107.

vLW92 J. H. van Lint et R. M. Wilson, *A course in combinatorics* (Cambridge University Press, 1992).

Yves Benoist benoist@dma.ens.fr
École Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris, France

Pierre de la Harpe Pierre.delaHarpe@math.unige.ch
Section de Mathématiques, Université de Genève, C.P. 240, CH-1211 Genève 24, Switzerland

https://doi.org/10.1112/S0010437X04000338 Published online by Cambridge University Press