SUR LE THÉORÈME DE LEBESGUE-NIKODYM (V)

JEAN DIEUDONNÉ

Introduction. Soient E un espace compact (par exemple l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$) et μ une mesure de Radon sur E. Une fonction numérique f intégrable pour μ définit une mesure $\nu(A) = \int_A f\, d\mu$ sur l'ensemble des parties mesurables (pour μ) de E. On peut aussi considérer la forme linéaire $g \rightarrow \int gf d\mu$ qu'elle définit sur l'espace C des fonctions numériques *continues* dans E, et cette forme linéaire est continue pour la topologie définie par la norme $||f|| = \sup_{x \in E} |f(x)|$. Si on appelle encore "mesure" une forme linéaire continue sur C, le théorème de Lebesgue-Nikodym classique caractérise celles de ces "mesures" qui sont de la forme $g \rightarrow \int gf\, d\mu$ par une condition de "continuité absolue" par rapport à μ. On définit de même une "mesure vectorielle" comme une application linéaire fortement continue $\mathbf{m}$ de C dans le dual F' d'un espace de Banach F; le problème analogue au précédent consiste à trouver les conditions moyennant lesquelles $\mathbf{m}$ peut s'écrire sous la forme $f \rightarrow \int \mathbf{g} f\, d\mu$, ou $\mathbf{g}$ est une application de E dans F', "faiblement intégrable" pour μ. Le théorème de Dunford-Pettis (voir par exemple [4]) donne une condition *suffisante* pour qu'il en soit ainsi, à savoir que l'on ait $|\mathbf{m}(f)| \leqslant a\int |f| d\mu$ pour toute fonction $f \in C$ (a constante), en supposant en outre F séparable. Nous en déduisons ici (toujours pour F séparable) la condition *nécessaire et suffisante* pour que la mesure vectorielle $\mathbf{m}$ soit de la forme voulue (th. 1).

A l'aide de ce résultat, et moyennant des hypothèses assez strictes (et peut-être superflues) de séparabilité sur E et F, nous avons pu déterminer complètement le *dual* de l'espace de Banach $L^p{}_F$ des fonctions $\mathbf{f}$ à valeurs dans F et telles que $|\mathbf{f}|^{p-1} . \mathbf{f}$ soit intégrable au sens de Bochner (th. 2); la démonstration de ce théorème semble beaucoup plus difficile pour $p > 1$ que pour $p = 1$.

1. Dans tout ce qui suit, E désigne un espace *compact*, μ une mesure de Radon positive sur E. Nous désignerons par C l'espace de Banach des fonctions réelles continues dans E (avec la norme $||f|| = \sup_{x \in E} |f(x)|$); par L^p (pour p fini et $\geqslant 1$) l'espace des classes de fonctions réelles de puissance p-ème intégrable, avec la norme $N_p(f) = (\int |f|^p d\mu)^{1/p}$; par L^∞ l'espace des classes de fonctions mesurables et essentiellement bornées, avec la norme $N_\infty(f) = \operatorname{ess.sup}_{x \in E} |f(x)|$. Nous identifierons d'ordinaire une classe appartenant à un L^p avec une quel-

Reçu le 20 novembre, 1950.

conque des fonctions de cette classe, tout ce qui suit ne faisant intervenir des fonctions que "modulo les ensembles de mesure nulle".[1]

Dans ce qui suit, F désignera un espace de Banach, le plus souvent *séparable*, et F' son dual; pour un vecteur $\mathbf{z} \in F$ (resp. $\mathbf{z}' \in F'$), la norme de $\mathbf{z}$ (resp. $\mathbf{z}'$) sera désignée par $|\mathbf{z}|$ (resp. $|\mathbf{z}'|$). Nous allons surtout nous occuper d'applications de E dans le *dual* F' de F; pour une telle fonction $\mathbf{f}$, la notation $|\mathbf{f}|$ désignera la fonction numérique $x \to |\mathbf{f}(x)|$; pour tout vecteur fixe $\mathbf{z} \in F$, $\langle \mathbf{z}, \mathbf{f} \rangle$ sera la fonction numérique $x \to \langle \mathbf{z}, \mathbf{f}(x) \rangle$; enfin, si $\mathbf{g}$ est une application de E dans F, $\langle \mathbf{g}, \mathbf{f} \rangle$ désignera la fonction numérique $x \to \langle \mathbf{g}(x), \mathbf{f}(x) \rangle$.

On dit qu'une application $\mathbf{f}$ de E dans F' est *faiblement mesurable* si, pour tout $\mathbf{z} \in F$, la fonction numérique $\langle \mathbf{z}, \mathbf{f} \rangle$ est mesurable; nous utiliserons le lemme suivant, dû à R. Godement:

LEMME 1. *Soit F un espace de Banach séparable, et soit* $\mathbf{f}$ *une application faiblement mesurable de E dans F'. Alors*:

1° *la fonction numérique* $|\mathbf{f}|$ *est mesurable*;

2° *pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ensemble compact $K \subset E$ tel que $\mu(E - K) \leqslant \epsilon$ et que la restriction de* $\mathbf{f}$ *à K soit continue pour la topologie faible $\sigma(F', F)$.*

En effet, il existe par hypothèse une suite $(\mathbf{a}_n)$ partout dense dans F. Pour tout $x \in E$, on a $|\mathbf{f}(x)| = \sup_n |\langle \mathbf{a}_n, \mathbf{f}(x) \rangle| / |\mathbf{a}_n|$; la fonction $|\mathbf{f}|$ est donc l'enveloppe supérieure d'une suite de fonctions mesurables, et par suite est mesurable. En vertu du théorème de Lusin, il existe un ensemble compact $K \subset E$ tel que $\mu(E - K) \leqslant \epsilon$ et que les restrictions à K de *toutes* les fonctions mesurables $|\mathbf{f}|$, $\langle \mathbf{a}_n, \mathbf{f} \rangle$ soient continues. Comme la restriction de $|\mathbf{f}|$ à K est bornée, pour tout $\mathbf{a} \in F$, la fonction $\langle \mathbf{a}, \mathbf{f} \rangle$ a une restriction à K qui est limite uniforme des restrictions à K d'une suite de fonctions $\langle \mathbf{a}_n, \mathbf{f} \rangle$; la restriction de $\langle \mathbf{a}, \mathbf{f} \rangle$ à K est donc continue, ce qui achève la démonstration.

Nous dirons qu'une application $\mathbf{f}$ de E dans F' est *faiblement intégrable* si, pour tout $\mathbf{z} \in F$, la fonction numérique $\langle \mathbf{z}, \mathbf{f} \rangle$ est intégrable; on sait (théorème de Gelfand-Dunford; cf. [8, p. 339]) qu'il existe alors un élément de F', appelé l'intégrale de $\mathbf{f}$ et noté $\int \mathbf{f}\, d\mu$, tel que l'on ait $\int \langle \mathbf{z}, \mathbf{f} \rangle\, d\mu = \langle \mathbf{z}, \int \mathbf{f}\, d\mu \rangle$ pour tout $\mathbf{z} \in F$; il est clair que pour toute fonction numérique $g \in L^\infty$, la fonction $\mathbf{f}g$ est encore faiblement intégrable. On a toujours $|\int \mathbf{f}\, d\mu| \leqslant \int^* |\mathbf{f}|\, d\mu$, le second membre désignant l'intégrale supérieure de $|\mathbf{f}|$, qui peut être infinie.

2. De même que, d'après le théorème classique de F. Riesz, une mesure de Radon sur E peut être définie comme forme linéaire continue sur l'espace de

[1]Au lieu d'une mesure de Radon sur un espace compact E, on pourrait naturellement considérer une mesure "abstraite" μ sur un ensemble quelconque E, telle que $\mu(E) < +\infty$. En raison du fait que les fonctions n'interviennent en réalité que par leurs classes, cette généralisation ne serait qu'apparente, puisqu'on peut alors passer à l'espace compact "de représentation" associé à la mesure μ (et dit "espace de Kakutani" dans [4]). Signalons aussi qu'on peut généraliser les résultats de ce travail au cas où E est un espace localement compact quelconque, et μ une mesure de Radon sur E.

Banach C, nous appellerons *mesure vectorielle* sur E, à valeurs dans F', toute application linéaire continue $\mathbf{m}$ de C dans F', pour la topologie forte de F', c'est-à-dire toute application linéaire satisfaisant à une inégalité de la forme

$$|\mathbf{m}(f)| \leqslant a \,.\, ||f|| \tag{1}$$

pour tout $f \in C$, a étant une constante $\geqslant 0$. Pour tout $\mathbf{z} \in F$, la forme linéaire $f \to \langle \mathbf{z}, \mathbf{m}(f)\rangle$ est continue sur C, donc de la forme $f \to \int f\, d\nu_{\mathbf{z}}$, ou $\nu_{\mathbf{z}}$ est une mesure de Radon sur E.

Nous dirons que $\mathbf{m}$ est *faiblement absolument continue* par rapport à μ si chacune des mesures $\nu_{\mathbf{z}}$ est absolument continue par rapport à μ, c'est-à-dire si $\langle \mathbf{z}, \mathbf{m}(f)\rangle = \int g_{\mathbf{z}} f\, d\mu$, où $g_{\mathbf{z}}$ appartient à L^1. On peut alors prolonger $\mathbf{m}$ à L^∞ par la formule précédente: il suffit en effet de prouver que pour $f \in L^\infty$ l'application $\mathbf{z} \to \int g_{\mathbf{z}} f\, d\mu$ est une forme linéaire continue sur F pour qu'on puisse l'écrire sous la forme $\mathbf{z} \to \langle \mathbf{z}, \mathbf{m}(f)\rangle$, où $\mathbf{m}(f)$ est un élément bien déterminé de F'. Or, pour $f \in C$, on a, d'après (1), l'inégalité

$$|\langle \mathbf{z}, \mathbf{m}(f)\rangle| = |\textstyle\int g_{\mathbf{z}} f\, d\mu| \leqslant a \,.\, ||f|| \,.\, |\mathbf{z}| \tag{2}$$

d'où résulte

$$\int |g_{\mathbf{z}}| d\mu = \sup_{f \in C} |\textstyle\int g_{\mathbf{z}} f\, d\mu| / ||f|| \leqslant a \,.\, |\mathbf{z}|,$$

et par suite on a encore $|\int g_{\mathbf{z}} f\, d\mu| \leqslant a \,.\, N_\infty(f) \,.\, |\mathbf{z}|$ pour toute fonction $f \in L^\infty$, ce qui établit notre assertion et montre en même temps que le prolongement de $\mathbf{m}$ à L^∞ satisfait à l'inégalité

$$|\mathbf{m}(f)| \leqslant a \,.\, N_\infty(f). \tag{3}$$

Nous supposerons toujours désormais que les mesures vectorielles faiblement absolument continues que nous considérerons sont prolongées de cette manière à L^∞. L'exemple le plus important de telles mesures est fourni par les applications de la forme $f \to \int \mathfrak{g} f\, d\mu$, où $\mathfrak{g}$ est une application *faiblement intégrable* de E dans F'; on sait en effet alors que l'application $\mathbf{z} \to \langle \mathbf{z}, \mathfrak{g}\rangle$ de F dans L^1 est continue [8, p. 339], autrement dit qu'on a

$$\int |\langle \mathbf{z}, \mathfrak{g}\rangle|\, d\mu \leqslant b \,.\, |\mathbf{z}| \tag{4}$$

(b constante $\geqslant 0$); on en déduit que pour toute fonction $f \in L^\infty$, on a

$$|\textstyle\int \langle \mathbf{z}, \mathfrak{g} f\rangle d\mu| \leqslant N_\infty(f) \,.\, \int |\langle \mathbf{z}, g\rangle| d\mu \leqslant b \,.\, |\mathbf{z}| \,.\, N_\infty(f),$$

et par suite

$$|\textstyle\int \mathfrak{g} f\, d\mu| \leqslant b \,.\, N_\infty(f). \tag{5}$$

Le problème se pose de *caractériser* les mesures vectorielles qui peuvent se mettre sous la forme $\mathbf{m}(f) = \int \mathfrak{g} f\, d\mu$: c'est une généralisation du problème analogue pour les mesures réelles, dont la solution est donnée par le théorème de Lebesgue-Nikodym. S'inspirant de ce dernier résultat, on peut se demander si la condition cherchée ne serait pas obtenue en exprimant que $\mathbf{m}$ est *forte-*

ment absolument continue: on entend par là que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que les relations $f \in L^\infty$, $|f| \leqslant 1$, $N_1(f) \leqslant \delta$ entraînent $|\mathbf{m}(f)| \leqslant \epsilon$. Mais on connaît des exemples de mesures vectorielles fortement absolument continues et qui ne sont pas de la forme $\int \mathbf{g} f\, d\mu$ [9, p. 303, exemple 9.4], et aussi des exemples de mesures vectorielles de la forme $\int \mathbf{g} f\, d\mu$ qui ne sont pas fortement absolument continues [2, p. 377, exemple 7]. La solution doit donc être cherchée dans une autre direction.

Etant donné un ensemble compact $K \subset E$, nous dirons que la mesure vectorielle $\mathbf{m}$ est *majorée par un multiple de* μ *dans* K s'il existe une constante $a_K \geqslant 0$ telle que, pour toute fonction $f \in L^\infty$, nulle dans $E - K$, on a $|\mathbf{m}(f)| \leqslant a_K \, . \, N_1(f)$.

THÉORÈME 1. *L'espace F étant séparable, pour qu'une mesure vectorielle $\mathbf{m}$, à valeurs dans F', faiblement absolument continue par rapport à μ, soit de la forme $f \to \int \mathbf{g} f\, d\mu$, où $\mathbf{g}$ est faiblement intégrable, il faut et il suffit que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ensemble compact $K \subset E$ tel que $\mu(E - K) \leqslant \epsilon$ et que, dans K, $\mathbf{m}$ soit majorée par un multiple de μ; en outre, la fonction $\mathbf{g}$ telle que $\mathbf{m}(f) = \int \mathbf{g} f\, d\mu$, est déterminée à un ensemble de mesure nulle près.*

La condition est *nécessaire*: en effet, si $\mathbf{m}(f) = \int \mathbf{g} f\, d\mu$, $\mathbf{g}$ est faiblement mesurable, donc il résulte du lemme 1 que $|\mathbf{g}|$ est mesurable et à valeurs finies dans E. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe donc un ensemble compact $K \subset E$ tel que $\mu(E - K) \leqslant \epsilon$, et que $|\mathbf{g}|$ soit bornée dans K. Mais si $|\mathbf{g}(x)| \leqslant a_K$ pour $x \in K$, il est clair que pour toute fonction $f \in L,^\infty$ nulle dans $E - K$, on a

$$|\int \mathbf{g} f\, d\mu| = |\int_K \mathbf{g} f\, d\mu| \leqslant a_K \, . \int_K |f|\, d\mu = a_K \, . \, N_1(f).$$

La condition est *suffisante*. On peut en effet, par hypothèse, trouver une suite croissante d'ensembles compacts $K_n \subset E$ tels que $\mu(E - K_n)$ tende vers 0 et que, dans chaque K_n, $\mathbf{m}$ soit majorée par un multiple de μ. Soit V_n le sous-espace de L^∞ formé des fonctions nulles hors de K_n; il existe donc une constante $a_n \geqslant 0$ telle que, pour toute fonction $f \in V_n$, on ait $|\mathbf{m}(f)| \leqslant a_n \, . \, N_1(f)$. Il résulte alors du théorème de Dunford-Pettis (voir par exemple [4] ou [5]) qu'il existe une fonction $\mathbf{g}_n$ à valeurs dans F', faiblement integrable dans K_n et telle que $\mathbf{m}(f) = \int \mathbf{g}_n f\, d\mu$ pour toute fonction $f \in V_n$. Montrons que $\mathbf{g}_n$ est égale presque partout à la restriction de toute fonction $\mathbf{g}_m$ à K_n pour $m \geqslant n$. En effet, si $(\mathbf{a}_r)$ est une suite d'éléments de F, partout dense dans F, on a pour toute fonction $f \in V_n$ et tout indice r,

$$\langle \mathbf{a}_r, \mathbf{m}(f) \rangle = \int \langle \mathbf{a}_r, \mathbf{g}_n \rangle f\, d\mu = \int \langle \mathbf{a}_r, \mathbf{g}_m \rangle f\, d\mu,$$

ce qui prouve que, dans K_n, $\langle \mathbf{a}_r, \mathbf{g}_n(x) \rangle = \langle \mathbf{a}_r, \mathbf{g}_m(x) \rangle$ presque partout; on en déduit que cette relation a aussi lieu *pour tout* r presque partout dans K_n, ce qui prouve que $\mathbf{g}_m(x) = \mathbf{g}_n(x)$ presque partout dans K_n.

Il existe donc une fonction $\mathbf{g}$ à valeurs dans F', définie dans E, et dont la restriction à K_n est presque partout égale à $\mathbf{g}_n$, ce qui prouve que, pour tout $f \in V_n$, $\mathbf{g} f$ est faiblement intégrable et $\mathbf{m}(f) = \int \mathbf{g} f\, d\mu$. Nous allons en déduire que $\mathfrak{g}$ est faiblement intégrable (dans E tout entier) et qu'on a $\mathbf{m}(f) = \int \mathfrak{g} f\, d\mu$ pour toute fonction $f \in L^\infty$. En effet, soit $\mathbf{z}$ quelconque dans F; pour tout entier n, on a

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{m}\ (f\phi_{K_n})\rangle = \int \langle \mathbf{z}, \mathfrak{g}\phi_{K_n}\rangle f\, d\mu.$$

Comme par hypothèse $\mathbf{m}$ est faiblement absolument continue, $\langle \mathbf{z}, \mathbf{m}(f\phi_{K_n})\rangle$ tend vers $\langle \mathbf{z}, \mathbf{m}(f)\rangle$ lorsque n croît indéfiniment. Cela signifie que la suite de fonctions intégrables $\langle \mathbf{z}, \mathfrak{g}_n\rangle = \langle \mathbf{z}, \mathfrak{g}\phi_{K_n}\rangle$ est une *suite de Cauchy* pour la topologie faible dans L^1; on sait qu'une telle suite est faiblement convergente, et comme en outre $\langle \mathbf{z}, \mathfrak{g}_n(x)\rangle$ tend *partout* vers $\langle \mathbf{z}, \mathfrak{g}(x)\rangle$, la suite des $\langle \mathbf{z}, \mathfrak{g}_n\rangle$ est *fortement convergente* vers $\langle \mathbf{z}, \mathfrak{g}\rangle$ dans L^1 (voir par exemple [6]). En passant à la limite, on voit que $\langle \mathbf{z}, \mathfrak{g}\rangle$ est intégrable et que pour tout $f \in L^\infty$,

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{m}(f)\rangle = \int \langle \mathbf{z}, \mathfrak{g} f\rangle d\mu.$$

L'unicité de $\mathfrak{g}$ (à un ensemble de mesure nulle près) se démontre comme ci-dessus le fait que $\mathfrak{g}_m$ et $\mathfrak{g}_n$ sont égales presque partout dans K_n pour $m \geqslant n$.

3. Rappelons qu'une application $\mathbf{f}$ de E dans un espace de Banach G est dite *fortement intégrable* si $|\mathbf{f}|$ est intégrable, et s'il existe une suite $(\mathbf{f}_n)$ de fonctions étagées (fonctions mesurables ne prenant qu'un nombre fini de valeurs) telle que $\int |\mathbf{f} - \mathbf{f}_n| d\mu$ tende vers 0. On pose alors $N_1(\mathbf{f}) = \int |\mathbf{f}| d\mu$, et l'espace vectoriel $L^1{}_G$ des fonctions fortement intégrables (identifiées lorsqu'elles ne diffèrent que sur un ensemble de mesure nulle), muni de la norme $N_1(\mathbf{f})$, est un *espace de Banach.* Pour tout $p > 1$, on définit de même l'espace $L^p{}_G$ comme l'espace des applications $\mathbf{f}$ de E dans G telles que $|\mathbf{f}|^{p-1}.\mathbf{f}$ soit fortement intégrable; muni de la norme $N_p(\mathbf{f}) = (\int |\mathbf{f}|^p d\mu)^{1/p}$, c'est encore un espace de Banach, dans lequel le sous-espace P_G des fonctions étagées est partout dense. On déduit aussitôt de là que si l'espace L^1 (des fonctions intégrables *numériques*) et l'espace G sont tous deux séparables, l'espace $L^p{}_G$ $(1 \leqslant p < +\infty)$ est aussi *séparable.*

Dans ce qui suit, p et q désignent deux exposants conjugués $\geqslant 1$ c'est-à-dire tels que $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Si $\mathbf{f}$ est une fonction de $L^p{}_F$, $\mathfrak{g}$ une fonction de $L^q{}_{F'}$, $\langle \mathbf{f}, \mathfrak{g}\rangle$ est une fonction numérique intégrable et on a l'inégalité de Hölder

$$\int |\langle \mathbf{f}, \mathfrak{g}\rangle| d\mu \leqslant N_p(\mathbf{f}) N_q(\mathfrak{g}). \tag{6}$$

Cette inégalité peut en outre être précisée par le lemme suivant:

LEMME 2. *Pour* $1 < p < +\infty$, *on a les relations*

$$N_p(\mathbf{f}) = \sup_{N_q(\mathfrak{g}) \leqslant 1} \int \langle \mathbf{f}, \mathfrak{g}\rangle d\mu \tag{7}$$

$$N_q(\mathfrak{g}) = \sup_{N_p(\mathbf{f}) \leqslant 1} \int \langle \mathbf{f}, \mathfrak{g}\rangle d\mu. \tag{8}$$

Démontrons par exemple la relation (8). Prenons d'abord le cas particulier où $\mathfrak{g}$ est une fonction étagée, $\mathfrak{g} = \sum_k \mathbf{a}'_k \phi_{A_k}$, où les A_k forment une partition

https://doi.org/10.4153/CJM-1951-015-9 Published online by Cambridge University Press

finie de E en ensembles mesurables; on peut supposer en outre, en multipliant $\mathbf{g}$ par un scalaire, que $N_q(\mathbf{g}) = 1$, c'est-à-dire $\sum_k |\mathbf{a}'_k|^q . \mu(A_k) = 1$. Pour une fonction étagée $\mathbf{f}$ de la forme $\mathbf{f} = \sum_k \mathbf{a}_k \phi_{A_k}$ telle que $N_p(\mathbf{f}) \leqslant 1$, on a $\sum_k |\mathbf{a}_k|^p . \mu(A_k) \leqslant 1$ et

$$\int \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle d\mu = \sum_k \langle \mathbf{a}_k, \mathbf{a}'_k \rangle . \mu(A_k).$$

Or, par définition de la norme dans F', on peut, pour chaque k, trouver $\mathbf{a}_k$ tel que $|\mathbf{a}_k|^p = |\mathbf{a}'_k|^q$ et que $\langle \mathbf{a}_k, \mathbf{a}'_k \rangle$ soit arbitrairement voisin de $|\mathbf{a}'_k|^{1+q/p} = |\mathbf{a}'_k|^q$; la relation (8) est donc vraie dans ce cas.

Passons au cas général, et supposons encore que $N_q(\mathbf{g}) = 1$. Il existe alors une fonction étagée $\mathbf{g}_1$ telle que $N_q(\mathbf{g} - \mathbf{g}_1) \leqslant \epsilon$, d'où en particulier $N_q(\mathbf{g}_1) \geqslant 1 - \epsilon$; d'après la première partie de la démonstration, il existe une fonction $\mathbf{f} \in L^p{}_F$ telle que $N_p(\mathbf{f}) \leqslant 1$ et

$$\int \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_1 \rangle d\mu \geqslant N_q(\mathbf{g}_1) - \epsilon \geqslant 1 - 2\epsilon;$$

mais d'autre part, on a, d'après (6)

$$\left| \int \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} - \mathbf{g}_1 \rangle d\mu \right| \leqslant N_p(\mathbf{f}) N_q(\mathbf{g} - \mathbf{g}_1) \leqslant \epsilon,$$

d'où $\int \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle d\mu \geqslant 1 - 3\epsilon$, ce qui achève de démontrer le lemme (le raisonnement étant tout à fait analogue pour (7)).

Les relations (6) et (8) prouvent que l'application $\mathbf{f} \to \int \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle d\mu$ est une *forme linéaire continue* sur l'espace de Banach $L^p{}_F$, et que la norme de cette forme linéaire est égale à $N_q(\mathbf{g})$. On peut donc identifier $L^q{}_{F'}$ à un sous-espace (fortement fermé) du dual $(L^p{}_F)'$ de $L^p{}_F$.

4. Nous allons maintenant déterminer complètement le dual de $L^p{}_F$ moyennant des hypothèses supplémentaires de séparabilité.

THÉORÈME 2. *Les espaces de Banach F et L^1 étant supposés séparables, toute forme linéaire continue sur $L^p{}_F$ $(1 < p < +\infty)$ peut s'écrire $\mathbf{f} \to \int \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle d\mu$, où $\mathbf{g}$ est faiblement mesurable et telle que $N_q(|\mathbf{g}|) < +\infty$; $\mathbf{g}$ est en outre déterminée à un ensemble de mesure nulle près. Inversement, pour toute fonction $\mathbf{g}$ ayant ces propriétés, $\mathbf{f} \to \int \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle d\mu$ est une forme linéaire continue sur $L^p{}_F$, dont la norme est égale à $N_q(|\mathbf{g}|)$.*

J'ai démontré un théorème analogue pour le cas $p = 1$, en supposant seulement F séparable [4 et 5]; nous allons suivre la même méthode, mais son application sera beaucoup plus délicate que pour $p = 1$.

Soit θ une forme linéaire continue sur $L^p{}_F$, et soit a sa norme; on a donc

$$|\theta(\mathbf{f})| \leqslant a . N_p(\mathbf{f}) \tag{9}$$

pour tout $\mathbf{f} \in L^p{}_F$. Pour tout vecteur $\mathbf{z} \in F$, et toute fonction numérique $f \in L^p$, $\mathbf{z} \to \theta(f\mathbf{z})$ est une forme linéaire sur F, telle que

$$|\theta(f\mathbf{z})| \leqslant a . |\mathbf{z}| . N_p(f). \tag{10}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1951-015-9 Published online by Cambridge University Press

Autrement dit, cette forme linéaire est continue, et on peut écrire $\theta(f\mathbf{z}) = \langle \mathbf{z}, \mathbf{m}(f)\rangle$, où $\mathbf{m}(f) \in F'$ et est telle que

$$(11) \qquad |\mathbf{m}(f)| \leqslant a \,.\, N_p(f)$$

pour toute fonction $f \in L^p$. Il résulte de là que $\mathbf{m}$, restreinte à L^∞, est une mesure vectorielle à valeurs dans F', faiblement absolument continue par rapport à μ. Mais tandis que, pour $p = 1$, l'inégalité (11) permet aussitôt d'appliquer à $\mathbf{m}$ le théorème de Dunford-Pettis, et de montrer que $\mathbf{m}(f)$ est de la forme $\int \mathbf{g} f \, d\mu$, il n'en est plus de même pour $p > 1$; on connaît en effet des exemples de mesures vectorielles qui satisfont à une inégalité telle que (11) et qui ne sont pas de la forme $\int \mathbf{g} f\, d\mu$, lorsque $p > 1$ [9, p. 303, exemple 9.4]. Nous allons chercher à appliquer à $\mathbf{m}$ le théorème 1, en précisant la nature de la forme linéaire θ.

Pour cela, remarquons que, d'après ce qui a été vu au n° 3, $L^q{}_{F'}$ est un sous-espace de $(L^p{}_F)'$; en outre, pour toute fonction $\mathbf{f} \in L^p{}_F$, il résulte du lemme 2 que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction $\mathbf{g} \in L^q{}_{F'}$ telle que $N_q(\mathbf{g}) = 1$ et $\int \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle d\mu \geqslant (1 - \epsilon) N_p(\mathbf{f})$. Comme $L^p{}_F$ est *séparable* en vertu des hypothèses, un théorème de Banach, précisé par J. Dixmier [7, th. 1 et 7] montre qu'il existe une suite $(\mathbf{g}_n)$ de fonctions de $L^q{}_{F'}$, telles que $N_q(\mathbf{g}_n) \leqslant a$ pour tout n, et que la suite des formes linéaires $\mathbf{f} \to \int \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_n\rangle d\mu$ tende *faiblement* vers θ, c'est-à-dire que pour toute fonction $\mathbf{f} \in L^p{}_F$, $\int \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_n\rangle d\mu$ tend vers $\theta(\mathbf{f})$.

Nous allons chercher à modifier la suite $(\mathbf{g}_n)$ de façon à "améliorer" cette convergence, tout en gardant les propriétés précédentes. Considérons la suite des fonctions numériques $|\mathbf{g}_n|$; elles appartiennent à L^q, et on a $N_q(|\mathbf{g}_n|) \leqslant a$. Comme l'espace L^q est réflexif, la boule $N_q(g) \leqslant a$ est faiblement compacte dans L^q; en outre, L^p étant séparable, la topologie faible sur cette boule est métrisable, donc on peut extraire de la suite $(|\mathbf{g}_n|)$ une suite qui est *faiblement convergente* vers une fonction h; nous supposerons cette extraction déjà faite. Un théorème de Banach et Mazur [1, p. 246] montre alors qu'il existe une suite de fonctions

$$h_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk} |\mathbf{g}_{n+k}|$$

où les c_{nk} sont des nombres $\geqslant 0$, nuls sauf pour un nombre fini d'indices k (dépendant de n), et tels que $\sum_k c_{nk} = 1$, qu'on peut choisir de sorte que la suite (h_n) *converge fortement*[2] dans L^q vers h. Nous allons alors remplacer $\mathbf{g}_n$ par la fonction

$$\mathbf{g}'_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk} \mathbf{g}_{n+k}$$

[2] L'énoncé que nous utilisons ici étant un peu plus précis que celui que cite Banach (*loc. cit.*), rappelons-en rapidement la démonstration. Comme h est faiblement adhérente à l'enveloppe convexe des $|\mathbf{g}_{n+k}|$ $(k \geqslant 0)$, elle est aussi fortement adhérente à cette enveloppe convexe; autrement dit, on peut déterminer les c_{nk} de sorte que $N_q(h - h_n) \leqslant 1/n$, d'où la proposition.

pour tout n; comme $\int \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}'_n \rangle d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk} \int \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_{n+k} \rangle d\mu$, la suite $(\mathbf{g}'_n)$ est encore faiblement convergente vers θ dans $(L^p{}_F)'$; en outre on a $|\mathbf{g}'_n| \leqslant h_n$, d'où $N_q(\mathbf{g}'_n) \leqslant N_q(h_n) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk} N_q(\mathbf{g}_{n+k}) \leqslant a$.

Cela étant, il existe une suite extraite de (h_n) et qui converge *presque partout* vers h dans E; nous supposerons encore qu'on ait fait cette extraction. En vertu du théorème d'Egoroff, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ensemble compact $K \subset E$ tel que $\mu(E - K) \leqslant \epsilon$ et que la suite (h_n) converge *uniformément* vers h dans K; on peut supposer en outre que la restriction à K des h_n et de h est continue (théorème de Lusin), d'où résulte que les fonctions h_n sont *uniformément bornées* dans K. En d'autres termes, il existe une constante b_K telle que $h_n(x) \leqslant b_K$ dans K, et par suite $|\mathbf{g}'_n(x)| \leqslant b_K$ dans K; pour tout $\mathbf{z} \in F$ et toute $f \in L^\infty$ nulle dans $E - K$, on a donc

$$|\langle \mathbf{z}, \int \mathbf{g}'_n f \, d\mu \rangle| \leqslant b_K \,.\, |\mathbf{z}| \,.\, N_1(f)$$

d'où, en passant à la limite

$$|\langle \mathbf{z}, \mathbf{m}(f) \rangle| \leqslant b_K \,.\, |\mathbf{z}| \,.\, N_1(f)$$

ce qui donne $|\mathbf{m}(f)| \leqslant b_K \,.\, N_1(f)$. En d'autres termes, nous avons prouvé que la mesure vectorielle $\mathbf{m}$ satisfait aux hypothèses du th. 1, d'où l'existence et l'unicité (à un ensemble de mesure nulle près) d'une fonction faiblement intégrable $\mathbf{g}$ à valeurs dans F', telle que $\mathbf{m}(f) = \int \mathbf{g} f \, d\mu$.

Il n'est pas évident que les fonctions $\mathbf{g}'_n$ tendent presque partout faiblement (c'est-à-dire pour la topologie faible $\sigma(F', F)$) vers $\mathbf{g}$; mais nous allons voir qu'on peut aussi réaliser cette "amélioration" par une nouvelle modification de la suite $(\mathbf{g}'_n)$. Soit $(\mathbf{a}_m)$ une suite partout dense dans la boule $|\mathbf{z}| \leqslant 1$ de F. Pour tout m et toute fonction $f \in L^p$, $\int \langle \mathbf{a}_m, \mathbf{g}'_n \rangle f \, d\mu$ tend par hypothèse vers $\langle \mathbf{a}_m, \mathbf{m}(f) \rangle$; comme dans L^q, toute suite de Cauchy pour la topologie faible est faiblement convergente, cela signifie que dans L^q, la suite des fonctions $\langle \mathbf{a}_m, \mathbf{g}'_n \rangle$ est faiblement convergente. En outre, sa limite n'est autre que $\langle \mathbf{a}_m, \mathbf{g} \rangle$ car pour toute fonction $f \in L^\infty$, $\int \langle \mathbf{a}_m, \mathbf{g}'_n \rangle f \, d\mu$ tend vers $\int \langle \mathbf{a}_m, \mathbf{g} \rangle f \, d\mu$, et L^∞ est dense dans L^p pour la topologie forte de L^p.

Cela étant, nous allons définir une suite double $\mathbf{g}_n{}^{(m)}$ de fonctions de $L^q{}_F{}'$, par la récurrence suivante:

$$\mathbf{g}_n{}^{(0)} = \mathbf{g}'_n \quad \text{et} \quad \mathbf{g}_n{}^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk}{}^{(m)} \mathbf{g}_{n+k}{}^{(m-1)}$$

ou les $c_{nk}{}^{(m)}$ sont des nombres $\geqslant 0$, nuls sauf pour un nombre fini d'indices k (dépendant de m et n), et tels que $\sum_{k=0}^{\infty} c_{nk}{}^{(m)} = 1$, choisis de sorte que la suite des fonctions $\langle \mathbf{a}_m, \mathbf{g}_n{}^{(m)} \rangle$ converge *fortement* dans L^q vers $\langle \mathbf{a}_m, \mathbf{g} \rangle$. Pour prouver que ce choix est possible, il suffit, en vertu du théorème de Banach-

Mazur rappelé plus haut, de prouver que la suite $\langle \mathbf{a}_m, \mathfrak{g}_n^{(m-1)}\rangle$ converge *faiblement* dans L^q vers $\langle \mathbf{a}_m, \mathfrak{g}\rangle$. Or, il est immédiat, par récurrence sur m, que $\mathfrak{g}_n^{(m-1)}$ appartient à l'enveloppe convexe des $\mathfrak{g}'_{n+k}$ $(k \geqslant 0)$, d'où la propriété cherchée.

Considérons maintenant la suite "diagonale" $\mathfrak{g}''_n = \mathfrak{g}_n^{(n)}$; il est clair que, pour tout indice m, $\mathfrak{g}''_n$ appartient à l'enveloppe convexe des $\mathfrak{g}_{n+k}^{(m)}$ $(k \geqslant 0)$ pour tout $n \geqslant m$; la suite $\langle \mathbf{a}_m, \mathfrak{g}''_n\rangle$ converge donc *fortement* vers $\langle \mathbf{a}_m, \mathfrak{g}\rangle$ dans L^q pour *tout* indice m. Par extraction répétée de suites et utilisation du procédé diagonal, on peut supposer en outre qu'il existe un ensemble de mesure nulle H tel que pour tout $x \in E-H$ et *tout* m, la suite $\langle \mathbf{a}_m, \mathfrak{g}''_n(x)\rangle$ converge vers $\langle \mathbf{a}_m, \mathfrak{g}(x)\rangle$. Mais $|\mathfrak{g}''_n(x)|$ est borné par un nombre de l'enveloppe convexe des nombres $|\mathfrak{g}'_{n+k}(x)|$ $(k \geqslant 0)$; d'après ce qu'on a vu ci-dessus, on peut toujours supposer (en agrandissant au besoin H) que l'ensemble H est tel que pour tout $x \in E - H$ la suite des $|\mathfrak{g}''_n(x)|$ soit *bornée*. Comme les $\mathbf{a}_m$ forment un ensemble dense dans la boule $|\mathbf{z}| \leqslant 1$ de F, on conclut de là que, pour tout $x \in E - H$, la suite $(\mathfrak{g}''_n(x))$ tend faiblement vers $\mathfrak{g}(x)$. On a par suite presque partout

$$|\mathfrak{g}(x)| \leqslant \liminf_{n\to\infty} |\mathfrak{g}''_n(x)|;$$

mais on vient de voir que

$$|\mathfrak{g}''_n(x)| \leqslant \sup_{k\geqq 0} |\mathfrak{g}'_{n+k}(x)| \leqslant \sup_{k\geqq 0} h_{n+k}(x),$$

et par suite

$$\liminf_{n\to\infty} |\mathfrak{g}''_n(x)| \leqslant \limsup_{n\to\infty} h_n(x) = h(x).$$

On a ainsi prouvé que $|\mathfrak{g}(x)| \leqslant h(x)$ presque partout, d'où $N_q(|\mathfrak{g}|) \leqslant N_q(h) \leqslant a$.

Donnons-nous inversement une fonction $\mathfrak{g}$ à valeurs dans F', faiblement intégrable et telle que $N_q(|\mathfrak{g}|) < +\infty$. Pour toute fonction $\mathbf{f} \in L^p_F$, $\langle \mathbf{f}, \mathfrak{g}\rangle$ est une fonction numérique mesurable: en effet il résulte du lemme 1 et du théorème de Lusin que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ensemble compact $K \subset E$ tel que $\mu(E - K) \leqslant \epsilon$ et que la restriction de $\mathbf{f}$ à K soit fortement continue, et la restriction de $\mathfrak{g}$ à K faiblement continue; on en déduit aussitôt que la restriction de $\langle \mathbf{f}, \mathfrak{g}\rangle$ à K est continue, donc que $\langle \mathbf{f}, \mathfrak{g}\rangle$ est mesurable.[3] En outre, on a $|\langle \mathbf{f}, \mathfrak{g}\rangle| \leqslant |\mathbf{f}| \,.\, |\mathfrak{g}|$, d'où, par l'inégalité de Hölder,

$$\int^* |\langle \mathbf{f}, \mathfrak{g}\rangle|\, d\mu \leqslant N_p(\mathbf{f}) N_q(|\mathfrak{g}|),$$

ce qui prouve que $\langle \mathbf{f}, \mathfrak{g}\rangle$ est intégrable et que l'application $\mathbf{f} \to \int \langle \mathbf{f}, \mathfrak{g}\rangle d\mu$ de L^p_F dans $\mathbf{R}$ est une forme linéaire continue de norme $\leqslant N_q(|\mathfrak{g}|)$. Si nous revenons alors à la détermination de la forme linéaire θ, pour toute fonction $\mathbf{f} \in L^p_F$ de

[3]Ce résultat et sa démonstration sont dûs à R. Godement.

la forme $\mathbf{f} = \sum_k \mathbf{c}_k f_k$, ou les $\mathbf{c}_k \in F$ et les $f_k \in L^p$, on a

$$\theta(\mathbf{f}) = \sum_k \theta(\mathbf{c}_k f_k) = \sum_k \langle \mathbf{c}_k, \mathbf{m}(f_k)\rangle = \sum_k \langle \mathbf{c}_k, \int \mathbf{g} f_k d\mu\rangle$$
$$= \int \langle \sum_k \mathbf{c}_k f_k, \mathbf{g}\rangle d\mu = \int \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle \, d\mu.$$

Or, les combinaisons linéaires de fonctions de L^p à coefficients dans F forment un ensemble partout dense dans $L^p{}_F$; comme les deux membres extrêmes des égalités précédentes sont fonctions continues dans $L^p{}_F$ et sont identiques dans cet ensemble partout dense, on a $\theta(\mathbf{f}) = \int \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle d\mu$ pour toute fonction $\mathbf{f} \in L^p{}_F$; en outre, on a $a \leqslant N_q(|\mathbf{g}|)$; mais comme nous avons démontré l'inégalité opposée, on a bien $a = N_q(|\mathbf{g}|)$ et le théorème 2 est complètement démontré.

5. Avec les mêmes hypothèses de séparabilité que dans le th. 2, supposons en outre que l'espace F soit *réflexif*. Alors F', dont le dual F est séparable, est lui-même séparable [1, p. 189]; il résulte d'un théorème de Pettis [9, p. 278] que la fonction $\mathbf{g}$ du th. 2 est (fortement) mesurable, et par suite que $\mathbf{g} \in L^q{}_{F'}$; en d'autres termes, l'espace $L^p{}_F$ est alors *réflexif* et a pour dual $L^q{}_{F'}$; ce résultat était connu dans le cas où F est supposé *uniformément convexe*, et même alors sans hypothèse de séparabilité [3] sur F ou L^1.

Lorsque F n'est pas réflexif, en général le dual de $L^p{}_F$ n'est pas identique à $L^q{}_{F'}$: il suffit en effet de considérer les cas où il existe une fonction $\mathbf{g}$ à valeurs dans F' faiblement mesurable, essentiellement bornée et non fortement mesurable; alors la forme linéaire $\mathbf{f} \rightarrow \int \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle d\mu$ sera continue dans chacun des $L^p{}_F$, mais n'appartiendra à aucun des $L^q{}_{F'}$. On a un tel exemple en prenant pour E l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$, pour μ la mesure de Lebesgue sur E, pour F l'espace $(l^{(1)})$ de Banach (espaces des séries absolument convergentes), dont le dual est l'espace (m) des suites bornées; à tout $x \in E$ on fait alors correspondre la suite $\mathbf{g}(x)$ des chiffres du *développement dyadique propre* de x. On a évidemment $|\mathbf{g}(x)| \leqslant 1$ et on vérifie facilement que $\mathbf{g}$ est faiblement mesurable; mais $\mathbf{g}$ n'est pas fortement mesurable, car la relation $x \neq y$ entraîne $|\mathbf{g}(x) - \mathbf{g}(y)| = 1$ et par suite l'image par $\mathbf{g}$ d'une partie non dénombrable quelconque de E n'est jamais contenue dans un sous-espace séparable de F'.

Je signale à cette occasion un lapsus dans mon article *Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym* (II) (Bull. Soc. Math. de France, t. 72 (1944), p. 193-239); la raison invoquée dans les lignes 9 et 10 à partir du bas de la p. 219 n'est bien entendu pas correcte. Il faut dire que l'application $u \rightarrow u^2$ est continue dans toute partie de $L(\Omega)$ formée des classes de fonctions intégrables u telles que $|u| \leqslant v$, où v est une fonction intégrable ainsi que v^2; en effet, $|\int (u^2 - u_0{}^2) d\mu| \leqslant 2\int v|u - u_0| d\mu$; or, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier n tel que dans l'ensemble A des points où $v(x) \geqslant n$, on ait $\int_A v^2 d\mu \leqslant \epsilon$; on en déduit que $|\int (u^2 - u_0{}^2) d\mu| \leqslant 2\epsilon + 2n \int |u - u_0| d\mu$, d'où la proposition.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires* (Warszawa, 1932).

[2] G. Birkhoff, *Integration of functions with values in a Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc., t.38 (1935), 357-378.

[3] M. Day, *Some uniformly convex spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., t.47 (1941), 504-507.

[4] J. Dieudonné, *Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym* (III), Annales de l'Université de Grenoble, t.23 (1947-48), 25-53.

[5] ——— *Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym* (IV), J. Indian Math. Soc., 1951.

[6] ——— *Sur les espaces de Köthe*, Journal d'Analyse mathématique, 1951.

[7] J. Dixmier, *Sur un théorème de Banach*, Duke Math, J., t.15 (1948), 1057-1071.

[8] N. Dunford, *Uniformity in linear spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., t.44 (1938),305-356.

[9] B. J. Pettis, *On integration in vector spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., t.44 (1938), 277-304.

Université de Nancy