Compositio Mathematica **138:** 199–231, 2003.

Espace hyperbolique p-adique et dynamique des fonctions rationnelles

(*p-Adic Hyperbolic Space and Dynamics of Rational Maps*)

JUAN RIVERA-LETELIER
Departamento de Matemáticas, Universidad Católica del Norte, Casilla 1280 Antofagasta, Chile. e-mail: rivera-letelier@ucn.cl

(Received: 31 July 2001; accepted in final form: 1 July 2002)

Abstract. We study dynamics of rational maps of degree at least 2 with coefficients in the field $\mathbb{C}_p$, where $p > 1$ is a fixed prime number. The main ingredient is to consider the action of rational maps in p-adic hyperbolic space, denoted $\mathbb{H}_p$. Hyperbolic space $\mathbb{H}_p$ is provided with a natural distance, for which it is connected and one dimensional (an $\mathbb{R}$-tree). These advantages with respect to $\mathbb{C}_p$ give new insight into dynamics. In this paper we prove the following results about periodic points; we give applications to the Fatou/Julia theory over $\mathbb{C}_p$ and to ultrametric analysis in forthcoming papers. We prove that the existence of at least two nonrepelling periodic points implies the existence of infinitely many of them. This is in contrast with the complex setting where a rational map can have at most finitely many nonrepelling periodic points. On the other hand we prove that every rational map has a repelling fixed point, either in the projective line or in hyperbolic space. So the topological expansion of a rational map is detected by some fixed point.

Mathematics Subject Classifications (2000). 11S99, 37F10, 51M10, 37E25.

Key words. hyperbolic space, p-adic fields, periodic points, rational maps.

Introduction

Fixons un nombre premier $p > 1$ et soient $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques et $\mathbb{C}_p$ la plus petite extension complète et algébriquement close de $\mathbb{Q}_p$. Ce travail est dédié à la dynamique des fonctions rationnelles sur la droite projective $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$; voir aussi [Hs], [Ben1, Ben2, R-L1, Y] et [R-L2].

Comme le corps $\mathbb{C}_p$ est algébriquement clos toute fonction rationnelle de degré au moins deux, à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, a une infinité de points périodiques dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$. On classifie ces points comme dans le cas complexe de la manière suivante: à chaque point périodique $z_0 \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ d'une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$, on associe son *multiplicateur* $\lambda = (R^n)'(z_0) \in \mathbb{C}_p$, où $n \geqslant 1$ est la période de z_0. Alors on dit que z_0 est *attractif*, *indifférent* ou *répulsif* selon que $|\lambda| < 1$, $|\lambda| = 1$ ou que $|\lambda| > 1$, respectivement.

THÉORÈME A. *Si une fonction rationnelle de degré supérieur ou égal à deux, à coefficients dans* $\mathbb{C}_p$*, a au moins deux points périodiques non répulsifs* (*comptés avec multiplicité*)*, alors elle en a une infinité.*

https://doi.org/10.1023/A:1026136530383 Published online by Cambridge University Press

On peut comparer ce résultat avec le cas complexe pour lequel on sait qu'une fonction rationnelle de degré $d > 1$, a au plus $2d - 2$ cycles non répulsifs (cf. [Sh] ou [Ep]).

Comme toute fonction rationnelle de degré $d > 1$ a $d + 1 > 2$ points fixes comptés avec multiplicité, le corollaire suivant est immédiat.

COROLLAIRE. *Une fonction rationnelle de degré au moins deux, à coefficients dans* $\mathbb{C}_p$*, qui n'a pas de point fixe répulsif, a une infinité de points périodiques non répulsifs.*

La preuve du Théorème A est basée sur la propriété suivante.

*Chaque fonction rationnelle induit une action sur l'*espace hyperbolique $\mathbb{H}_p$*, fonctoriellement pour la composition.*

En d'autres termes, si R et $Q \in \mathbb{C}_p(z)$ sont deux fonctions rationnelles, et si l'on note R_*, Q_* et $(R \circ Q)_*$ les actions induites sur $\mathbb{H}_p$ par R, Q et $R \circ Q$ respectivement, alors on a

$$R_* \circ Q_* = (R \circ Q)_*.$$

En particulier on a $(R^n)_* = R_*^n$, pour tout entier $n \geqslant 1$. Apparement il n'y a pas de propriétés analogues pour les fonctions rationnelles à coefficients complexes.

Une majeure partie de ce travail est consacrée à l'espace hyperbolique (p-adique) $\mathbb{H}_p$ et à l'étude de l'action sur $\mathbb{H}_p$ induite par une fonction rationnelle. L'espace hyperbolique $\mathbb{H}_p$ est muni d'une distance pour laquelle c'est un arbre réel (au sens de J. Tits), séparable et complet. La situation est ici analogue au cas complexe puisque d'une part le groupe des automorphismes de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ agit par isométries sur $\mathbb{H}_p$ et d'autre part le bord à l'infini de $\mathbb{H}_p$ est canoniquement identifié à $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$.

Comme nous le verrons ultérieurement, la démonstration du Théorème A revient à montrer qu'il existe un point périodique répulsif dans l'espace hyperbolique; voir Théorème A$'$ ci-dessous.

Il y a des fonctions rationnelles qui n'ont pas de points répulsifs dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$; e.g. le polynôme $z^d \in \mathbb{C}_p[z]$ avec $d \geqslant 1$. Mais on a la propriété suivante.

THÉORÈME B. *Toute fonction rationnelle de degré au moins deux, à coefficients dans* $\mathbb{C}_p$*, a un point fixe répulsif, soit dans* $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$*, soit dans* $\mathbb{H}_p$.

Ce théorème est une contrepartie à la propriété suivante: toute fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$ a un point fixe non répulsif dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$; voir [Ben1]. En effet, si R n'a pas de point fixe avec multiplicateur égal à 1, alors R a exactement $\deg(R) + 1$ points fixes dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ et on a la formule d'indice

$$\frac{1}{1-\lambda_0} + \frac{1}{1-\lambda_1} + \cdots + \frac{1}{1-\lambda_{\deg(R)}} = 1,$$

où les $\lambda_i \in \mathbb{C}_p$ sont les multiplicateurs des points fixes; voir [Ben1] et [Mi]. Par la propriété ultramétrique, on ne peut pas avoir $|\lambda_i| > 1$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant \deg(R)$.

RÉDUCTION D'UNE FONCTION RATIONNELLE ET L'ESPACE HYPERBOLIQUE

Comme nous le verrons par la suite, l'action d'une fonction rationnelle sur l'espace hyperbolique $\mathbb{H}_p$ est étroitement reliée aux différentes réductions que la fonction rationnelle peut avoir; voir Section 5.1 pour une définition de réduction.

Soit $\mathcal{O}_p = \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z| \leqslant 1\}$ l'anneaux des entiers de $\mathbb{C}_p$ et soit $\mathfrak{m}_p = \ z \in \mathbb{C}_p \,||\, z\, |< 1\}$ son idéal maximal. On identifie le corps résiduel $\mathcal{O}_p/\mathfrak{m}_p$ de $\mathbb{C}_p$ à $\bar{\mathbb{F}}_p$ et on note π la projection de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ sur $\mathbb{P}(\bar{\mathbb{F}}_p)$. On identifie aussi le groupe des automorphismes de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ au groupe $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}_p)$.

Fixons une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$. Pour chaque coordonnée de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ il existe une coordonnée à l'arrivée, dans laquelle R a une réduction $\tilde{R} \in \bar{\mathbb{F}}_p(z)$ non triviale (c'est à dire avec $\deg(\tilde{R}) \geqslant 1$); voir Section 5.1 pour une définiton de réduction. Cette coordonnée est unique, sauf post-composition par un élément de $\mathrm{PGL}(2, \mathcal{O}_p)$. Par conséquent la fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$ induit une action

$$R_*\colon \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}_p)/\mathrm{PGL}(2, \mathcal{O}_p) \longrightarrow \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}_p)/\mathrm{PGL}(2, \mathcal{O}_p)^{\star}$$

de telle façon que pour $\mathcal{S} \in \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}_p)/\mathrm{PGL}(2, \mathcal{O}_p)$, $R_*(\mathcal{S})$ *est l'unique élément de* $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}_p)/\mathrm{PGL}(2, \mathcal{O}_p)$ *tel que R a une réduction non triviale en coordonnées représentant $\mathcal{S}$ et $R_*(\mathcal{S})$.*

Il y a une distance naturelle dans $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}_p)/\mathrm{PGL}(2, \mathcal{O}_p)$ et on peut définir l'espace hyperbolique $\mathbb{H}_p$ comme la complétion de cet espace métrique. Alors l'action R_* induite par R s'étend en une action sur $\mathbb{H}_p$, encore notée R_*.

Par exemple la propriété pour $R \in \mathbb{C}_p(z)$ d'avoir une réduction $\tilde{R} \in \bar{\mathbb{F}}_p(z)$ non triviale, se traduit par le fait que l'action R_* sur $\mathbb{H}_p$ fixe le point de $\mathbb{H}_p$ correspondant à la coordonnée usuelle de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$. On note ce point $\mathcal{S}_{\mathrm{can}}$ et on l'appelle *point canonique* de $\mathbb{H}_p$. C'est à dire qu'une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$ a une réduction non triviale si et seulement si le point $\mathcal{S}_{\mathrm{can}}$ est fixé par R_*. Dans ce cas R est semi-conjuguée à $\tilde{R}$ par la projection $\pi\colon \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) \longrightarrow \mathbb{P}(\bar{\mathbb{F}}_p)$, sauf en un ensemble fini de classes résiduelles. Autrement dit il existe un ensemble fini $\Xi \subset \mathbb{P}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ tel que l'on ait le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - \pi^{-1}(\Xi) & \xrightarrow{\tilde{R}} & \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) \\ \pi \big\downarrow & & \big\downarrow \pi \\ \mathbb{P}(\bar{\mathbb{F}}_p) - \Xi & \xrightarrow[\tilde{R}]{} & \mathbb{P}(\bar{\mathbb{F}}_p) \end{array}$$

Alors les différentes propriétés dynamiques de $\tilde{R}$ se traduisent en propriétés dynamiques de R. Par exemple il n'est pas difficile de montrer que toute fonction rationnelle $\tilde{R} \in \bar{\mathbb{F}}_p(z)$ de degré au moins 1 a une infinité de points périodiques; cf. Section 5.1. Dans le cas où $\deg(\tilde{R}) > 1$, ces points périodiques (sauf un nombre fini d'entre eux) se relèvent en des points périodiques non répulsifs de R dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$.

*On remarque que $\mathrm{PGL}(2, \mathcal{O}_p)$ n'est pas un sous-goupe normal de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}_p)$; ici l'application R_* n'est qu'une application des classes à droite modulo $\mathrm{PGL}(2, \mathcal{O}_p)$.

https://doi.org/10.1023/A:1026136530383 Published online by Cambridge University Press

La condition $\deg(\tilde{R}) > 1$ est équivalente à ce que le point fixe $\mathcal{S}_{\text{can}} \in \mathbb{H}_p$ de R_* soit *répulsif*. En général *l'existence d'un point périodique répulsif de R_* dans $\mathbb{H}_p$, implique l'existence d'une infinité de points périodiques non répulsifs de R dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$*; cf. Corollaire 5.6. Donc le Théorème A suit de l'assertion suivante.

THÉORÈME A′. *Si une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$ a au moins deux points périodiques non répulsifs dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, alors R_* a un point périodique répulsif dans $\mathbb{H}_p$.*

REMARQUES SUR L'ESPACE HYPERBOLIQUE

L'espace métrique $\mathbb{H}_p$ est un objet assez naturel et il apparaît dans la littérature sous diverses formes. Notamment il est un cas très particulier des immeubles de Bruhat–Tits (celui associé à $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}_p)$); voir [BT, T] et l'Appendice. L'analogie avec l'espace hyperbolique complexe et le plan hyperbolique est déjà explicite dans [Mu].

Il est aussi relié à l'espace analytique de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, au sens de V.G. Berkovich; voir [Ber] (Remark 4.2.4(v) et Chapter 5) et l'Appendice. On peut voir aussi [BHM] et [Es2]. Le fait qu'une fonction rationnelle induit une action sur cet espace suit de [Ber], on peut voir aussi [Bou] et [R-L1].

On considère ici un traitement différent, qui convient mieux à l'étude de l'action d'une fonction rationnelle; voir aussi la remarque dans la Section 1.2.2 de [R-L1].

PLAN DE L'ARTICLE

La Section 1 est consacrée à quelques rappels sur le corps $\mathbb{C}_p$.

Dans la Section 2 on définit l'espace hyperbolique: on introduit les bouts (Section 2.1), on décrit les points de l'espace hyperbolique (Section 2.2) et on considère la propriété de *séparation* (Sections 2.3 et 2.4); on peut comparer avec [R-L1].

Dans la Section 3 on introduit la distance d sur $\mathbb{H}_p$. On montre que l'espace métrique $(\mathbb{H}_p, d)$ est complet (Proposition 3.2) et qu'il est un arbre réel au sens de J. Tits (Proposition 3.9).

Dans la Section 4 on montre que chaque fonction rationnelle induit une action sur l'espace hyperbolique et on montre des propriétés locales de cette action. En particulier elle est lipschitzienne, avec constante égale au degré de la fonction rationnelle (Corollaire 4.7).

La Section 5 est dédiée aux Théorèmes A et B. On montre d'abord que tout point périodique répulsif dans $\mathbb{H}_p$ est rationnel (Proposition 5.5) et que l'existence d'un point périodique répulsif dans $\mathbb{H}_p$ implique celle d'une infinité de points périodiques non répulsifs (Corollaire 5.6). La preuve des Théorèmes A et B est dans la Section 6.

Dans l'*Appendice* on fait quelques remarques sur l'espace hyperbolique. En particulier on considère son bord à l'infini et ces relations avec l'immeuble de Bruhat–Tits de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}_p)$ et avec l'espace analytique de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, au sens de Berkovich.

1. Préliminaires

Soit $p > 1$ un nombre premier, $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques et soit $\mathbb{C}_p$ la plus petite extension complète et algébriquement close de $\mathbb{Q}_p$. On note $|\cdot|$ la norme sur $\mathbb{C}_p$ et $\mathbb{C}_p^* = \mathbb{C}_p - \{0\}$ le groupe multiplicatif de $\mathbb{C}_p$. On appelle

$$\begin{aligned}|\mathbb{C}_p^*| &= \{|z| \mid z \in \mathbb{C}_p^*\}\\ &= \{r > 0 \mid \log_p r \text{ est rationnel}\}.\end{aligned}$$

le *groupe de valuation* de $\mathbb{C}_p^*$.

On note $\mathcal{O}_p = \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z| \leqslant 1\}$ l'*anneau des entiers*. Alors $\mathfrak{m}_p = \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z| < 1\}$ est un idéal maximal de $\mathcal{O}_p$. Le corps $\tilde{\mathbb{C}}_p = \mathcal{O}_p/\mathfrak{m}_p$ est appelé le *corps résiduel de* $\mathbb{C}_p$, qui est isomorphe à la fermeture algébrique $\bar{\mathbb{F}}_p$ du corps fini $\mathbb{F}_p$. On identifie $\tilde{\mathbb{C}}_p$ à $\bar{\mathbb{F}}_p$.

Pour $z \in \mathcal{O}_p$ on note $\tilde{z}$ la projection de z dans $\bar{\mathbb{F}}_p$. Pour $\zeta \in \bar{\mathbb{F}}_p$ on pose $B(\zeta) = \{\tilde{z} = \zeta\}$. Donc on a la partition,

$$\mathcal{O}_p = \bigsqcup_{\bar{\mathbb{F}}_p} B(\zeta).$$

1.1. LA DROITE PROJECTIVE

On considère la droite projective $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, qui est l'ensemble des droites dans $\mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p$ passant par $(0,0)$. Pour $(x,y) \in \mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p - \{(0,0)\}$, on note $[x,y] \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ le point correspondant à la droite $\{(\lambda x, \lambda y) \mid \lambda \in \mathbb{C}_p\}$. On note ∞ le point $[1,0] \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ et on identifie $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - \{\infty\}$ avec $\mathbb{C}_p$, par l'application $[\lambda, 1] \longrightarrow \lambda$.

On étend la projection de $\mathbb{C}_p$ à $\bar{\mathbb{F}}_p$ à une projection de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) = \mathbb{C}_p \cup \{\infty\}$ à $\mathbb{P}(\bar{\mathbb{F}}_p) = \bar{\mathbb{F}}_p \cup \{\infty\}$, par $\tilde{z} = \infty \in \bar{\mathbb{F}}_p$, pour $z \in \{|z| > 1\} \cup \{\infty\}$. On pose $B(\infty) = \{\tilde{z} = \infty\} = \{|z| > 1\} \cup \{\infty\}$ et alors on a la *partition canonique*

$$\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) = \bigsqcup_{\mathbb{P}(\bar{\mathbb{F}}_p)} B(\zeta). \tag{1}$$

Le groupe des automorphismes de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ est isomorphe au groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}_p)$: $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}_p)$ correspond à l'automorphisme de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ donné en coordonnées homogènes par $[x,y] \longrightarrow [ax + by, cx + dy]$.

Le sous-groupe $\mathrm{PGL}(2, \mathcal{O}_p)$ de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}_p)$ correspond aux automorphismes qui préservent la partition (1). De plus l'automorphisme de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ associé à $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{PGL}(2, \mathcal{O}_p)$ préserve *chaque* élément de la partition (1), si et seulement si $|a - 1| < 1$, $|d - 1| < 1$, $|b| < 1$ et $|c| < 1$.

1.2. BOULES ET COURONNES

Etant donné $r \in |\mathbb{C}_p^*|$ et $a \in \mathbb{C}_p$ on appelle

$$\{z \in \mathbb{C}_p \mid |z - a| < r\} \quad \text{et} \quad \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z - a| \leqslant r\}$$

boule ouverte de $\mathbb{C}_p$ et *boule fermée de* $\mathbb{C}_p$, respectivement. Si $r \notin |\mathbb{C}_p^*|$ alors ces deux ensembles coïncident et on l'appelle *boule irrationnelle de* $\mathbb{C}_p$. Notons que par définition une boule B de $\mathbb{C}_p$ est irrationnelle si et seulement si $\mathrm{diam}(B) \notin |\mathbb{C}_p^*|$; en particulier *si B est ouverte ou fermée alors* $\mathrm{diam}(B) \in |\mathbb{C}_p^*|$.

Etant donnés deux boules B et B' de $\mathbb{C}_p$ qui s'intersectent, il y a deux possibilités: soit $B \subset B'$, soit $B' \subset B$.

L'image d'une boule ouverte (resp. fermée, irrationnelle) par un automorphisme de $\mathbb{C}_p$ est une boule de même nature.

Une boule ouverte (resp. fermée, irrationnelle) de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ est soit une boule de $\mathbb{C}_p$ de même nature, soit le complémentaire d'une boule fermée (resp. ouverte, resp. irrationnelle) de $\mathbb{C}_p$. *Pour ce qui suit le mot boule dénotera une boule de* $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$.

Etant donnés deux boules B et B' de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ qui s'intersectent, il y a trois possibilités: soit $B \subset B'$, soit $B' \subset B$, soit $B \cup B' = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$. Dans ce dernier cas les complémentaires de B et B' sont disjoints; si de plus B et B' ne sont pas fermées alors on dit que $B \cap B'$ est une *couronne*. Après changement de coordonnée, on peut supposer $B = \{|z| < r\}$ et $B' = \{|z| > r'\} \cup \{\infty\}$ avec $r' < r$; alors

$$B \cap B' = \{z \in \mathbb{C}_p \mid r' < |z| < r\}.$$

On note $\mathrm{mod}(B \cap B') = \log_p r - \log_p r' > 0$, qui ne dépend pas du choix de coordonnée, et on l'appelle le *module* de la couronne $B \cap B'$.

L'image d'une boule ouverte (resp. fermée, irrationnelle) par un automorphisme de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ est une boule de même nature.

2. Bouts et points de $\mathbb{H}_p$

Dans cette section on définit les bouts (Section 2.1) et les points de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}_p$ (Section 2.2) et on étudie la propriété de séparation (Sections 2.3 et 2.4). Les bouts et les points rationnels ont été considérés dans [R-L1], où les points rationnels ont été appelés 'systèmes projectifs'.

2.1. BOUTS

Soit $\{B_i\}_{i \geqslant 0}$ une suite croissante de boules fermées ou irrationnelles tel que $B = \bigcup_{i \geqslant 0} B_i$ soit une boule ouverte ou irrationnelle, ou soit égale à $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$. Alors $\{B - B_i\}_{i \geqslant 0}$ est soit une suite décroissante de couronnes, soit une suite décroissante de boules, respectivement. On appelle $\{B - B_i\}_{i \geqslant 0}$ *chaine évanescente*. Notons qu'on a $\bigcap_{i \geqslant 0}(B - B_i) = \emptyset$ et par conséquent $B - B_i \subset \mathbb{C}_p$, pour i assez grand. De plus $\mathrm{diam}(B - B_i)$ converge vers un nombre positif lorsque $i \to \infty$.

On dit que deux chaines évanescentes $\{B - B_i\}_{i \geqslant 0}$ et $\{B' - B'_i\}_{i \geqslant 0}$ sont *équivalentes* si pour tout $N \geqslant 0$ il existe $n \geqslant N$ tel que $B_N \subset B'_n$ et $B'_N \subset B_n$. Dans ce cas $B = B'$.

DÉFINITION 2.1. Un *bout* est une classe d'équivalence de chaines évanescentes.

Soit $\mathcal{P}$ un bout et $\{B - B_i\}_{i \geqslant 0}$ une chaine évanescente définissant $\mathcal{P}$. Alors B dépend seulement de $\mathcal{P}$ et on note $B_{\mathcal{P}} = B$.

Si $B_{\mathcal{P}} = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, alors on dit que $\mathcal{P}$ est un *bout singulier*. Sinon $B_{\mathcal{P}}$ est une boule ouverte ou irrationnelle qui détermine $\mathcal{P}$. Si $B_{\mathcal{P}}$ est une boule ouverte (resp.

https://doi.org/10.1023/A:1026136530383 Published online by Cambridge University Press

irrationnelle) alors on dit que $\mathcal{P}$ est *rationnel* (resp. *irrationnel*). On a une correspondance bijective entre les boules ouvertes (resp. irrationnelles) et les bouts rationnels (resp. irrationnels).

Chaque automorphisme φ de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ induit une bijection sur les bouts rationnels (resp. irrationnels, singuliers). On note cette action par φ_*.

2.2. PARTITIONS DE LA DROITE PROJECTIVE ET POINTS DE $\mathbb{H}_p$

L'espace hyperbolique, qu'on note $\mathbb{H}_p$, est par définition un ensemble de *points*, qu'on décrit maintenant. Il y a trois types de points de $\mathbb{H}_p$: les points singuliers, rationnels et irrationnels.

2.2.1. *Points Singuliers*

Les *points singuliers* de $\mathbb{H}_p$ sont par définition les ensembles de la forme $\mathcal{S} = \{\mathcal{P}\}$, où $\mathcal{P}$ est un bout singulier.

2.2.2. *Points non Singuliers*

On dit que deux boules ouvertes ou irrationnelles $B_0, B_1 \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ sont *associées*, si $B_0 = B_1$ ou si $B_0 \cap B_1 = \emptyset$ et B_0 et B_1 sont maximales pour cette propriété. C'est-à-dire que si $i \in \{0, 1\}$ et B_i' est une boule ouverte ou irrationnelle telle que $B_i \subset B_i'$ et $B_i' \cap B_{1-i} = \emptyset$, alors $B_i' = B_i$.

LEMME 2.2. *Soient B_0 et B_1 associées à B. Alors $B_0 = B_1$ ou $B_0 \cap B_1 = \emptyset$. Dans ce dernier cas B_0 est associée à B_1.*

Preuve. La première assertion suit par maximalité. Supposons $B_0 \cap B_1 = \emptyset$. Soit $i \in \{0, 1\}$ et soit B_i' une boule ouverte ou irrationnelle telle que $B_i \subset B_i'$ et $B_i' \cap B_{1-i} = \emptyset$. Alors $B \not\subset B_i'$, car B_{1-i} est associée à B, donc $B_i' \cap B = \emptyset$. Par conséquent $B_i' = B_i$, car B_i est associée à B. □

Un point non-singulier $\mathcal{S}$ de $\mathbb{H}_p$ est par définition un ensemble de bouts rationnels ou irrationnels tel que pour tous $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1 \in \mathcal{S}$ distincts, les boules $B_{\mathcal{P}_0}$ et $B_{\mathcal{P}_1}$ soient associées, et maximal pour cette propriété. Dans ce cas on dit qu'une boule $B_{\mathcal{P}}$, avec $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$, est *associée* à $\mathcal{S}$.

Notons que l'union d'une suite croissante de boules ouvertes ou irrationnelles disjointes d'une boule donnée, est une boule ouverte ou irrationnelle. Par conséquent chaque point non singulier $\mathcal{S}$ de $\mathbb{H}_p$ contient au moins deux éléments et on a la partition,

$$\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) = \bigsqcup_{\mathcal{S}} B_{\mathcal{P}}.$$

2.2.3. *Points Irrationnels*

Etant donné un bout irrationnel $\mathcal{P}$, les ensembles $B_{\mathcal{P}}$ et $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B_{\mathcal{P}}$ sont des boules irrationnelles. Alors $\{\mathcal{P}, \mathcal{P}'\}$ est un point non singulier de $\mathbb{H}_p$, où $\mathcal{P}'$ est le bout associé à $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B_{\mathcal{P}}$. On appelle $\{\mathcal{P}, \mathcal{P}'\}$ *point irrationnel*.

https://doi.org/10.1023/A:1026136530383 Published online by Cambridge University Press

2.2.4. *Le Point Canonique*

Rappelons que pour $\zeta \in \mathbb{P}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ on note $B(\zeta)$ la boule $\{z \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) \mid \tilde{z} = \zeta\}$; voir Préliminaires. Donc on a la *partition canonique*

$$\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) = \bigsqcup_{\mathbb{P}(\bar{\mathbb{F}}_p)} B(\zeta).$$

Soit $\mathcal{P}(\zeta)$ le bout correspondant à $B(\zeta)$. Alors il est facile de voir que $\mathcal{S}_{\mathrm{can}} = \{\mathcal{P}(\zeta)\}_{\mathbb{P}(\bar{\mathbb{F}}_p)}$ est un point non singulier. On l'appelle le *point canonique*.

2.2.5. *Points rationnels*

Soit $\mathcal{P}$ un bout rationnel et soit φ un automorphisme de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ tel que $\varphi(\{|z| < 1\}) = B_{\mathcal{P}}$. Alors $\mathcal{P} = \varphi_*(\mathcal{P}(0))$ et $\mathcal{S} = \{\varphi_*(\mathcal{P}(\zeta))\}_{\mathbb{P}(\bar{\mathbb{F}}_p)}$ est un point non singulier contenant $\mathcal{P}$. On appelle $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ *point rationnel*. En particulier S_{can} est un point rationnel.

Notons que on a un paramétrage de $\mathcal{S}$ par $\mathbb{P}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ qui est unique, à changement de coordonné projectif de $\mathbb{P}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ près.

2.2.6. *Définition de l'espace Hyperbolique*

DÉFINITION 2.3. *L'espace hyperbolique p-adique*, qu'on note $\mathbb{H}_p$, est l'ensemble des points rationnels, irrationnels et singuliers. De plus on note $\mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ (resp. $\mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$) l'ensemble des points non singuliers (resp. rationnels) de $\mathbb{H}_p$.

Notons que tout bout (resp. bout non singulier, bout rationnel) est contenu dans exactement un point de $\mathbb{H}_p$ (resp. $\mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$).

Dans la Section 3 on munit $\mathbb{H}_p$ d'une distance pour laquelle c'est un arbre réel séparable et complet. Notons que $\mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ est dénombrable, car $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ est séparable.

Il est clair que le groupe $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}_p)$ des automorphismes de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ agit sur $\mathbb{H}_p$, préservant $\mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ et $\mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$. Cette action est transitive sur $\mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ et le stabilisateur du point $\mathcal{S}_{\mathrm{can}}$ correspond au groupe $\mathrm{PGL}(2, \mathcal{O}_p)$. Par conséquent on a une bijection entre $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}_p)/\mathrm{PGL}(2, \mathcal{O}_p)$ et $\mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$.

Etant donné un automorphisme φ de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ on note φ_* l'action sur $\mathbb{H}_p$ induite par φ.

2.3. PROPRIÉTÉ DE SÉPARATION

DÉFINITION 2.4. Soit $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ et $X \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$.

(1) Si $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ est non singulier et si X intersecte au moins deux boules associées à $\mathcal{S}$, alors on dit que $\mathcal{S}$ *sépare* X *et on note* $\mathcal{S} \prec X$.
(2) Si $\mathcal{S} = \{\mathcal{P}\} \in \mathbb{H}_p$ est singulier et si pour toute chaine évanescente $\{D_i\}_{i \geqslant 0}$ définissant $\mathcal{P}$ et tout $i \geqslant 0$ on a $D_i \cap X \neq \emptyset$, alors on note $\mathcal{S} \prec X$.

Soient $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ et $X, Y \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$. Alors $\mathcal{S} \prec X$ et $X \subset Y$ implique $\mathcal{S} \prec Y$. Notons que pour un point singulier $\mathcal{S} = \{\mathcal{P}\}$ il suffit de vérifier la propriété en 2 pour une chaine évanescente quelconque définissant $\mathcal{P}$.

LEMME 2.5. *Soit $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ un point et $B' \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ une boule telle que $\mathcal{S} \prec B'$.*

(1) *Si $\mathcal{S}$ est non singulier alors il existe une unique boule B associée à $\mathcal{S}$ telle que $B \not\subset B'$, et alors $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B' \subset B$. Si de plus B' est ouverte ou irrationnelle, alors $B \cap B' \neq \emptyset$ et $B \cap B'$ est une couronne.*
(2) *Si $\mathcal{S} = \{\mathcal{P}\}$ est un point singulier, alors pour toute chaine évanescente $\{D_i\}_{i \geqslant 0}$ définissant $\mathcal{P}$ on a $D_i \subset B'$ pour i assez grand.*

Preuve. (1) Comme $\mathcal{S} \prec B'$ il existe des boules distinctes B_0 et B_1 associées à $\mathcal{S}$, qui intersectent B'. Aprés changement de coordonnée on suppose que $0 \in B_0 \cap B'$ et $\infty \in B_1 \cap B'$; on a alors $B_0 = \{|z| < r\}$ et $B_\infty = \{|z| > r\} \cup \{\infty\}$. Par conséquent $D' = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B' \subset \mathbb{C}_p - \{0\}$ et donc D' est de la forme $\{|z-a| \leqslant s\}$ avec $0 < s < |a|$, ou de la forme $\{|z-a| < s\}$ avec $0 < s \leqslant |a|$.

Si $|a| < r$ (resp. $|a| = r$, $|a| > r$) alors B_0 (resp. $\{|z-a| < r\}$, B_∞) est la seule boule associée à $\mathcal{S}$ qui intersecte $D' = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B'$ et on a $D' \subset B_0$ (resp. $D' \subset \{|z-a| < r\}$, $D' \subset B_\infty$). Si de plus B' est ouverte ou irrationnelle on a $B' = \{|z-a| > r\} \cup \{\infty\}$ et donc $B_0 \cap B' = \{s < |z-a| < r\}$ (resp. $\{s < |z-a| < r\}$, $\{|z| > r, |z-a| > s, \infty\}$) est une couronne.

(2) Supposons par contradiction $D_i \not\subset B'$ pour tout $i \geqslant 0$. Comme $D_i \cap B' \neq \emptyset$, soit $B' \subset D_i$, soit $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B' \subset D_i$. Comme $\{D_i\}_{i \geqslant 0}$ est une suite décroissante, soit $B' \subset D_i$ pour tout $i \geqslant 0$, soit $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B' \subset D_i$ pour tout $i \geqslant 0$. Dans le deux cas on arrive´ à une contradiction avec la propriété $\bigcap_{i \geqslant 0} D_i = \emptyset$. □

LEMME 2.6. *Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p$ des points distincts. Alors il existe un unique bout $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ tel que $\mathcal{S}' \prec B_{\mathcal{P}}$.*

Preuve. Si $\mathcal{S}$ est singulier le lemme est trivial, donc on suppose $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$.

(1) Supposons $\mathcal{S}'$ non singulier. Après changement de coordonnée on suppose que $\mathcal{S}'$ est le point associé à la boule $\{|z| < r'\}$. Soit B_0 (resp. B_∞) la boule associée à $\mathcal{S}$ telle que $0 \in B_0$ (resp. $\infty \in B_\infty$).

Si $B_0 = B_\infty$ alors $\mathcal{S}' \prec B_0 = B_\infty$. Par le Lemme 2.5 il existe une boule B' associée à $\mathcal{S}'$ telle que $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B' \subset B_0$. Donc toute boule B associée à $\mathcal{S}$ et différente de B_0 est contenue dans B' et par conséquent $\mathcal{S} \not\prec B$.

Supposons $B_0 \neq B_\infty$. Alors $B_0 = \{|z| < r\}$ et $B_\infty = \{|z| > r\} \cup \{\infty\}$, où $r \neq r'$. On se ramène à $r' < r$. Alors $\mathcal{S}' \prec \{|z| < r\}$ et toute autre boule associée à $\mathcal{S}$ est contenue dans $\{|z| > r\} \cup \{\infty\}$.

(2) Supposons $\mathcal{S}' = \{\mathcal{P}'\}$ singulier et soit $\{D_i'\}_{i \geqslant 0}$ une chaine évanescente définissant $\mathcal{P}'$. Après changement de coordonnée on suppose que $\mathcal{S}$ sépare $\{0, \infty\}$. Comme $\bigcap_{i \geqslant 0} D_i' = \emptyset$ il existe $n \geqslant 0$ tel que $D_n \subset \mathbb{C}_p - \{0\}$ et alors $\mathcal{S} \prec \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - D_n$. Par le Lemme 2.5 il existe une boule B associée à B telle que

https://doi.org/10.1023/A:1026136530383 Published online by Cambridge University Press

$D_n \subset B$. En particulier B est l'unique boule associée à $\mathcal{S}$ telle qu'on ait $\mathcal{S} \prec B$. □

LEMME 2.7. *Soient $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ distincts. Soit B (resp. B') la boule associée à $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}'$) telle que $\mathcal{S}' \prec B$ (resp. $\mathcal{S} \prec B'$). Alors $B \cap B'$ est une couronne.*

Preuve. Par le Lemme 2.5 il existe une unique boule $\widetilde{B}$ associée à $\mathcal{S}$ telle que $\widetilde{B} \not\subset B'$ et $\widetilde{B} \cap B'$ est une couronne. Donc $\mathcal{S}'$ sépare $\widetilde{B}$ et par conséquent $B = \widetilde{B}$. □

2.4. PROPRIÉTÉ DE SÉPARATION DANS $\mathbb{H}_p$

Fixons un point $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$. Par le Lemme 2.6 chaque point $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p$ différent de $\mathcal{S}$, détermine un bout $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ tel que $\mathcal{S}' \prec B_{\mathcal{P}}$.

Comme $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) = \bigsqcup_{\mathcal{S}} B_{\mathcal{P}}$ est une partition de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, chaque point $z' \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ détermine un bout $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ tel que $z' \in B_{\mathcal{P}}$. On note $z' \prec B_{\mathcal{P}}$.

DÉFINITION 2.8. Soient $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}_1 \in \mathbb{H}_p \cup \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ et $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ distincts. Pour $i = 0, 1$ soit $\mathcal{P}_i \in \mathcal{S}$ le bout tel que $\mathcal{S}_i \prec B_{\mathcal{P}_i}$. On dit que $\mathcal{S}$ est *entre* $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_1$ si $\mathcal{P}_0 \neq \mathcal{P}_1$. On dit aussi que $\mathcal{S}$ *sépare* $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_1$.

On note $(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1) \subset \mathbb{H}_p$ l'ensemble de tous les points entre $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_1$. De plus on pose $[\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1) = (\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_0] = (\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1) \cup \{\mathcal{S}_0\}$ et $[\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1] = [\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1) \cup \{\mathcal{S}_1\}$.

Notons que un point $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ peut séparer deux éléments de $\mathbb{H}_p \cup \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ seulement si $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$. Cette définition généralise la Définition 2.4 dans le sens qu'un point $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ sépare deux points z_0 et $z_1 \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ distincts, si et seulement si $\mathcal{S}$ sépare l'ensemble $\{z_0, z_1\} \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ (dans le sens de la Définition 2.4).

LEMME 2.9. *Soient $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1 \in \mathbb{H}_p$ des points distincts et $\mathcal{S} \in (\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1)$. Alors on a les propriétés suivantes.*

(1) *Si $\mathcal{P} \in \mathcal{S}_1$ est le bout tel que $\mathcal{S} \prec B_{\mathcal{P}}$, alors $\mathcal{S}_0 \prec B_{\mathcal{P}}$.*
(2) $(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1) - \{\mathcal{S}\} = (\mathcal{S}_0, \mathcal{S}) \sqcup (\mathcal{S}, \mathcal{S}_1)$.

Preuve. Soient $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1 \in \mathcal{S}$ les bouts distincts tels que $\mathcal{S}_0 \prec B_{\mathcal{P}_0}$ et $\mathcal{S}_1 \prec B_{\mathcal{P}_1}$.

(1) D'après le Lemme 2.7 on a $B_{\mathcal{P}} \cap B_{\mathcal{P}_1} \neq \emptyset$, donc $B_{\mathcal{P}_0} \subset B_{\mathcal{P}}$ (Lemme 2.5). Comme $\mathcal{S} \prec B_{\mathcal{P}_0}$ on a $\mathcal{S} \prec B_{\mathcal{P}}$.

(2) Considérons $\mathcal{S}' \in (\mathcal{S}_0, \mathcal{S})$ et soient $\mathcal{P}'_0, \mathcal{P}' \in \mathcal{S}'$ les bouts distincts tels que $\mathcal{S}_0 \prec B_{\mathcal{P}'_0}$ et $\mathcal{S}' \prec B_{\mathcal{P}'}$. Par la partie 1, avec $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_1$, on a $\mathcal{S}_1 \prec B_{\mathcal{P}'}$. Donc $\mathcal{S}' \in (\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1)$. De la même façon on a $(\mathcal{S}, \mathcal{S}_1) \subset (\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1)$.

D'autre part soit $\mathcal{S}' \in (\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1)$ différent de $\mathcal{S}$ et soient $\mathcal{P}'_0, \mathcal{P}'_1 \in \mathcal{S}'$ les bouts tels que $\mathcal{S}_0 \prec B_{\mathcal{P}'_0}$ et $\mathcal{S}_1 \prec B_{\mathcal{P}'_1}$. Comme $\mathcal{S}_i \prec B_{\mathcal{P}_i}$ et $\mathcal{S}_i \prec B_{\mathcal{P}'_i}$ on a $B_{\mathcal{P}_i} \cap B_{\mathcal{P}'_i} \neq \emptyset$, pour $i = 0, 1$.

Si $B_{\mathcal{P}_0} \cap B_{\mathcal{P}'_1} \neq \emptyset$ alors $\mathcal{S} \prec B_{\mathcal{P}'_1}$ et par conséquent $\mathcal{S}' \in (\mathcal{S}_0, \mathcal{S})$. Supposons alors $B_{\mathcal{P}_0} \cap B_{\mathcal{P}'_1} = \emptyset$. Dans une coordonnée telle que $0 \in B_{\mathcal{P}_0}$ et $\infty \in B_{\mathcal{P}'_1}$ on a $B_{\mathcal{P}_0} = \{|z| < r\}$ et $B_{\mathcal{P}'_1} = \{|z| > r'\} \cup \{\infty\}$, o ù $r' > r$. Comme $B_{\mathcal{P}_i} \cap B_{\mathcal{P}'_i} \neq \emptyset$, pour

$i = 0, 1$, on a $B_{\mathcal{P}'_0} = \{|z| < r'\}$ et $B_{\mathcal{P}_1} = \{|z| > r\} \cup \{\infty\}$. Donc $\mathcal{S} \prec B_{\mathcal{P}'_0}$ et par conséquent $\mathcal{S}' \in (\mathcal{S}, \mathcal{S}_1)$. $\square$

LEMME 2.10. *Soient $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2 \in \mathbb{H}_p \cup \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ des points distincts tels que $\mathcal{S}_i$ ne soit pas entre $\mathcal{S}_j$ et $\mathcal{S}_k$, pour tous les choix de $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$. Alors il existe un unique point $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ tel que $\mathcal{S}$ est entre $\mathcal{S}_i$ et $\mathcal{S}_j$, pour chaque paire $0 \leqslant i < j \leqslant 2$. Dans ce cas $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$.*

Preuve. Lorsque $\mathcal{S}_i \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ notons B_i la boule associée à $\mathcal{S}_i$ telle que $\mathcal{S}_j \prec B_i$ et $\mathcal{S}_k \prec B_i$; on pose $D_i = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B_i$. Lorsque $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2 \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$, pour chaque paire $0 \leqslant i < j \leqslant 2$, $B_i \cap B_j$ est une couronne (Lemme 2.7), donc D_0, D_1 et D_2 sont disjoints deux à deux.

Pour chaque $0 \leqslant i \leqslant 2$ tel que $\mathcal{S}_i \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ ou tel que $\mathcal{S}_i \in \mathbb{H}_p$ soit un point singulier, on choisit une boule irrationnelle D_i telle que $\mathcal{S}_i \prec D_i$, de telle façon que les boules D_0, D_1 et D_2 soient deux à deux disjointes. Après changement de coordonnée on suppose $0 \in D_0$, $1 \in D_1$ et $\infty \in D_2$. Donc $D_0 \subset B(0)$, $D_1 \subset B(1)$ et $D_2 \subset B(\infty)$ et par conséquent $\mathcal{S}_{\mathrm{can}}$ est entre $\mathcal{S}_i$ et $\mathcal{S}_j$, pour chaque paire $0 \leqslant i < j \leqslant 2$.

Supposons d'autre part que $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ est un point entre $\mathcal{S}_i$ et $\mathcal{S}_j$, pour chaque paire $0 \leqslant i < j \leqslant 2$. Considérons le bout $\mathcal{P}_i \in \mathcal{S}$ tel que $\mathcal{S}_i \prec B_{\mathcal{P}_i}$ (Lemme 2.6), pour $i = 0, 1, 2$. Alors les bouts $\mathcal{P}_i$ sont distincts deux à deux et par conséquent $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$. D'autre part on a $D_i \cap B_{\mathcal{P}_i} \neq \emptyset$ car $\mathcal{S}_i \prec D_i$. Si $B_{\mathcal{P}_i}$ ne contient pas D_i alors D_j, $D_k \subset B_{\mathcal{P}_i}$, pour $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$ (cf. Lemme 2.5); mais ceci implique $B_{\mathcal{P}_j} \cap B_{\mathcal{P}_i} \neq \emptyset$, qui est une contradiction. Donc $D_i \subset B_{\mathcal{P}_i}$. De plus $B_{\mathcal{P}_0}$ ne contient pas 1 et ∞, et par conséquent $B_{\mathcal{P}_0} \subset B(0)$. De la même façon on a $B_{\mathcal{P}_1} \subset B(1)$ et $B_{\mathcal{P}_2} \subset B(\infty)$. Donc $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mathrm{can}}$; cf. Section 2.2.2. $\square$

LEMMA 2.11. *Soit $\mathcal{P}$ un bout et soient $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1 \in \mathbb{H}_p$ des points distincts tels que $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1 \prec B_{\mathcal{P}}$. Alors il existe un point $\bar{\mathcal{S}} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ tel que $\bar{\mathcal{S}} \prec B_{\mathcal{P}}$ et tel que $[\mathcal{S}_0, \mathcal{S}) \cap [\mathcal{S}_1, \mathcal{S}) = [\bar{\mathcal{S}}, \mathcal{S})$, où $\mathcal{S}$ est le point de $\mathbb{H}_p$ contenant $\mathcal{P}$.*

Preuve. L'assertion est triviale si $\mathcal{S}_0 \in (\mathcal{S}_1, \mathcal{S})$ ou si $\mathcal{S}_1 \in (\mathcal{S}_0, \mathcal{S})$. Donc on suppose que $\mathcal{S}_0$ (resp. $\mathcal{S}_1$) n'est pas entre $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}$ (resp. entre $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}$). Comme $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1 \prec B_{\mathcal{P}}$ et $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$, le point $\mathcal{S}$ n'est pas entre $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_1$. Alors par le Lemme 2.10 il existe un point $\bar{\mathcal{S}} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ qui est entre $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_1$ et entre $\mathcal{S}_i$ et $\mathcal{S}$, pour $i = 0, 1$. Donc on a $\bar{\mathcal{S}} \prec B_{\mathcal{P}}$, $(\mathcal{S}_i, \mathcal{S}) = (\mathcal{S}_i, \bar{\mathcal{S}}) \sqcup [\bar{\mathcal{S}}, \mathcal{S})$, pour $i = 0, 1$, et $(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1) - \{\bar{\mathcal{S}}\} = (\mathcal{S}_0, \bar{\mathcal{S}}) \sqcup (\bar{\mathcal{S}}, \mathcal{S}_1)$ (Lemme 2.9).

Considérons $\mathcal{S}' \in (\mathcal{S}_1, \bar{\mathcal{S}})$. Alors $\mathcal{S}'$ est entre $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}$ et entre $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_0$. Par l'unicité de $\bar{\mathcal{S}}$ (cf. Lemme 2.10) on conclut que $\mathcal{S}'$ n'est pas entre $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}$. De la même façon on a que $(\mathcal{S}_0, \bar{\mathcal{S}}) \subset (\mathcal{S}_0, \mathcal{S})$ est disjoint de $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S})$. Donc $(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}) \cap (\mathcal{S}_1, \mathcal{S}) = [\bar{\mathcal{S}}, \mathcal{S})$. $\square$

3. Distance sur $\mathbb{H}_p$

Dans cette section on définit une distance d sur $\mathbb{H}_p$ (Lemme 3.1). L'espace hyperbolique $\mathbb{H}_p$ est complet pour cette distance et l'ensemble $\mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ est dense dans $\mathbb{H}_p$, dans la topologie sur $\mathbb{H}_p$ induite par d (Proposition 3.2 et voir aussi Lemme 3.3).

https://doi.org/10.1023/A:1026136530383 Published online by Cambridge University Press

En particulier $\mathbb{H}_p$ est séparable car $\mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ est dénombrable. On montre aussi que l'espace métrique $(\mathbb{H}_p, d)$ est un arbre réel au sens de J. Tits (Proposition 3.9, Section 3.4).

Dans l'Appendice on donne une définition assez courte de l'espace métrique $(\mathbb{H}_p, d)$.

3.1. DÉFINITION ET QUELQUE PROPRIÉTÉS DE LA DISTANCE SUR $\mathbb{H}_p$

Dans cette section pour une partie X de $\mathbb{C}_p$, $\mathrm{diam}(X)$ note le diamètre de X par rapport à la distance sur $\mathbb{C}_p$ induite par la norme $|\cdot|$.

Considérons des points non singuliers $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ distincts. Soit B la boule associée à $\mathcal{S}$ telle que $\mathcal{S}' \prec B$ et soit B' la boule associée à $\mathcal{S}'$ telle que $\mathcal{S} \prec B'$ (voir Lemme 2.6). Par le Lemme 2.7, $B \cap B'$ est une couronne. On définit

$$d(\mathcal{S}, \mathcal{S}') = \mathrm{mod}(B \cap B').$$

Alors il est facile de voir que si D (resp. D') est une boule de $\mathbb{C}_p$ associée à $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}'$) on a

$$d(\mathcal{S}, \mathcal{S}') = \log_p \frac{\mathrm{diam}(D \cup D')^2}{\mathrm{diam}(D)\,\mathrm{diam}(D')}. \tag{2}$$

Considérons maintenant $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ non singulier et $\mathcal{S}' = \{\mathcal{P}'\} \in \mathbb{H}_p$ singulier. Soit B la boule associée à $\mathcal{S}$ telle que $\mathcal{S}' \prec B$ (Lemme 2.6) et soit $\{\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B_i'\}_{i \geqslant 0}$ une chaine évanescente définissant $\mathcal{P}'$; on suppose les boules B_i' irrationnelles. Alors $D_i' = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B_i' \subset B$, pour i assez grand (Lemme 2.5). Donc $\{B \cap B_i'\}_{i \gg 1}$ est une suite croissante de couronnes. On pose

$$d(\mathcal{S}, \mathcal{S}') = \lim_{i \to \infty} \mathrm{mod}(B \cap B_i').$$

Comme $D_i' \subset \mathbb{C}_p$ pour i assez grand et $\mathrm{diam}(D_i') \to r' > 0$, on a $d(\mathcal{S}, \mathcal{S}') < \infty$. Il est facile de voir que si D est une boule associée à $\mathcal{S}$ contenue dans $\mathbb{C}_p$, on a

$$d(\mathcal{S}, \mathcal{S}') = \lim_{i \to \infty} \log_p \frac{\mathrm{diam}(D \cup D_i')^2}{\mathrm{diam}(D)\,\mathrm{diam}(D_i')} .$$

On peut définir $d(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ quand les points $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p$ sont singuliers, de façon analogue. Pour $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ on pose $d(\mathcal{S}, \mathcal{S}) = 0$; notons qu'on a $d(\mathcal{S}, \mathcal{S}') > 0$ quand $\mathcal{S} \neq \mathcal{S}'$.

Le lemme suivant montre que d définit une distance sur $\mathbb{H}_p$. Comme le module d'une couronne est invariant par les automorphismes de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, chaque automorphisme de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ induit une isométrie sur $\mathbb{H}_p$.

LEMME 3.1. *Soient $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ de points distincts. Alors*

$$d(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1) \leqslant d(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}) + d(\mathcal{S}, \mathcal{S}_1),$$

avec égalité si et seulement si $\mathcal{S}$ est entre $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_1$.

Preuve. (1) Supposons que $\mathcal{S}$ est entre $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_1$. Alors $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ et après changement de coordonnée on peut supposer que $\mathcal{S}$ est associé à $B = \{|z| < r\}$, $\mathcal{S}_0 \prec B$ et $\mathcal{S}_1 \prec \{|z| > r\} \cup \{\infty\}$.

https://doi.org/10.1023/A:1026136530383 Published online by Cambridge University Press

Soient D_0 et D_1 des boules tel que $D_0 \subset B$ et $D_1 \subset \{|z| > r\}$. Alors diam $(D_0 \cup B) =$ diam(B) et diam$(B \cup D_1) =$ diam$(D_0 \cup D_1)$. Par conséquent

$$\frac{\mathrm{diam}(D_0 \cup B)^2}{\mathrm{diam}(D_0)\mathrm{diam}(B)} \frac{\mathrm{diam}(B \cup D_1)^2}{\mathrm{diam}(B)\mathrm{diam}(D_1)} = \frac{\mathrm{diam}(D_0 \cup D_1)^2}{\mathrm{diam}(D_0)\mathrm{diam}(D_1)}.$$

Dans le cas $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1 \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ on obtient $d(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}) + d(\mathcal{S}, \mathcal{S}_1) = d(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1)$, en prenant D_i comme boule associée à $\mathcal{S}_i$, pour $i = 0, 1$.

Si $\mathcal{S}_0 = \{\mathcal{P}_0\}$ (resp. $\mathcal{S}_1 = \{\mathcal{P}_1\}$) est singulier on considère une chaine évanescente $\{D_{0,i}\}_{i \geqslant 0}$ (resp. $\{D_{1,j}\}_{j \geqslant 0}$) définissant $\mathcal{P}_0$ (resp. $\mathcal{P}_1$). Alors on obtient $d(\mathcal{S}_0, \mathcal{S})+$ $d(\mathcal{S}, \mathcal{S}_1) = d(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1)$ prenant $D_0 = D_{0,i}$ (resp. $D_1 = D_{1,j}$) pour $i \geqslant 0$ (resp. $j \geqslant 0$) assez grand tel que $D_{0,i} \subset B$ (resp. $D_{1,j} \subset \{|z| > r\}$) et passant à la limite quand $i \to \infty$ (resp. $j \to \infty$).

(2) Supposons maintenant que $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ n'est pas entre $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_1$. Si $\mathcal{S}_0$ est entre $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}$ ou $\mathcal{S}_1$ est entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_0$, alors l'inégalité stricte suit de ce qui précède. Sinon il existe $\bar{\mathcal{S}} \in \mathbb{H}_p$ qui est entre $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_1$, entre $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}$ et entre $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}$ (Lemme 2.10). Alors, par ce qui précède,

$$d(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}) + d(\mathcal{S}, \mathcal{S}_1) = d(\mathcal{S}_0, \bar{\mathcal{S}}) + d(\bar{\mathcal{S}}, \mathcal{S}_1) + 2d(\bar{\mathcal{S}}, \mathcal{S}) > d(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1). \qquad \square$$

Notons que la distance entre deux points de $\mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ est rationnelle. De plus la distance entre un point rationnel et un point irrationnel est irrationnelle, mais il y a des points singuliers à distance rationnelle d'un point rationnel.

PROPOSITION 3.2. *L'espace métrique* $(\mathbb{H}_p, d)$ *est complet et* $\mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ *est dense dans* $\mathbb{H}_p$. *En particulier* $\mathbb{H}_p$ *est séparable*.

Preuve. Soit $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ et soit $\{B - B_i\}_{i \geqslant 1}$ une chaine évanescente définissant un bout dans $\mathcal{S}$. On suppose les boules B_i fermées. Alors le point $\mathcal{S}_i \in \mathbb{H}_p$ associé à $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B_i$ est rationnel. Si $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$, alors $d(\mathcal{S}, \mathcal{S}_i) = \mathrm{mod}(B - B_i) \to 0$ quand $i \to \infty$. Si $\mathcal{S}$ est singulier alors $D_i = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B_i$ est une boule ouverte et $r = \lim_{i \to \infty} \mathrm{diam}(D_i) > 0$. Par conséquent

$$d(\mathcal{S}, \mathcal{S}_i) = \log_p \mathrm{diam}(D_i) - \log_p r \to 0,$$

quand $i \longrightarrow \infty$. Donc $\mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ est dense dans $\mathbb{H}_p$.

Soit $\{\mathcal{S}_i\}_{i \geqslant 0} \subset \mathbb{H}_p$ une suite de Cauchy. Par ce qui précède on peut supposer $\{\mathcal{S}_i\}_{i \geqslant 0} \subset \mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$. Soit B_i une boule ouverte associée à $\mathcal{S}_i$ contenue dans $\mathbb{C}_p$.

Comme $\{\mathcal{S}_i\}_{i \geqslant 0}$ est une suite de Cauchy, pour chaque $i \geqslant 0$ l'ensemble

$$\bigcup_{j \geqslant i} B_i \subset \mathbb{C}_p$$

est borné, cf. (2). Il existe alors une boule D_i de $\mathbb{C}_p$ de même diamètre contenant $\bigcup_{j \geqslant i} B_i$. On a $D_{i+1} \subset D_i$ pour $i \geqslant 0$ et de plus diam$(D_i) \to r > 0$, car $\{\mathcal{S}_i\}_{i \geqslant 0}$ est une suite de Cauchy.

Soit $\bar{\mathcal{S}}_i \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ le point associé à D_i. Pour $j \geqslant i$ on a $B_j \subset D_j \subset D_i$, donc

$$d(\mathcal{S}_j, \bar{\mathcal{S}}_j) + d(\bar{\mathcal{S}}_j, \bar{\mathcal{S}}_i) = d(\mathcal{S}_j, \bar{\mathcal{S}}_i) \to 0, \text{ quand } i \to \infty.$$

Par conséquent $\{\bar{\mathcal{S}}_i\}_{i \geqslant 0}$ est une suite de Cauchy équivalente à $\{\mathcal{S}_i\}_{i \geqslant 0}$.

Soit $D = \bigcap D_i$. Alors $\{D_i - D\}_{i \geqslant 0}$ est une chaine évanescente et $\{\bar{\mathcal{S}}_i\}_{i \geqslant 0}$ converge vers le point de $\mathbb{H}_p$ associé à $\{D_i - D\}_{i \geqslant 0}$. □

3.2. GÉODÉSIQUES ET SEGMENTS GÉODÉSIQUES

Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p \cup \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ deux points distincts. Rappelons que $(\mathcal{S}, \mathcal{S}') \subset \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des points entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$, $[\mathcal{S}, \mathcal{S}') = (\mathcal{S}', \mathcal{S}] = \{\mathcal{S}\} \cup (\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ et $[\mathcal{S}, \mathcal{S}'] = [\mathcal{S}, \mathcal{S}') \cup \{\mathcal{S}'\}$ (Définition 2.8).

Par exemple il est facile de voir que $(0, \infty) \subset \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ est égal à $\{\mathcal{S}_r\}_{\mathbb{R}}$, où $\mathcal{S}_r \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ est le point associé à la boule $\{|z| < p^r\}$. De plus l'application $\mathcal{S}_r \in (0, \infty) \longrightarrow r \in \mathbb{R}$ est une isométrie. Rappelons que chaque automorphisme de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ induit une isométrie sur $\mathbb{H}_p$.

Si $z, z' \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ on dit que $(z, z') \subset \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ est la *géodésique* joignait z et z'. Comme il existe un automorphisme de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ qui envoie z en 0 et z' en ∞, on conclut que (z, z') est isométrique à $\mathbb{R}$.

Dans le cas où $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ et $z \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, on dit que $[\mathcal{S}, z)$ est une *demi-géodésique*. Si $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ alors il existe un automorphisme de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ envoyant z en ∞ et $\mathcal{S}$ dans $(0, \infty)$. Par conséquent $[\mathcal{S}, z)$ est isométrique à $[0, \infty) \subset \mathbb{R}$.

Dans le cas où $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p$ on appelle $[\mathcal{S}, \mathcal{S}']$ *segment géodésique*. Si $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ alors il existe un automorphisme de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ qui envoie $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ dans $(0, \infty) \subset \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$. Alors $[\mathcal{S}, \mathcal{S}']$ est isométrique à un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ de longeur $d(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$.

LEMME 3.3. *Les points rationnels sont denses dans chaque segment géodésique de* $\mathbb{H}_p$.

Preuve. Soit ℓ un segment géodésique et soit $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ appartenant à ℓ. Fixons $\mathcal{S}' \in \ell$ différent de $\mathcal{S}$ et soit $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ le bout tel que $\mathcal{S}' \prec B_{\mathcal{P}}$ (Lemme 2.6).

Soit $\{B - B_i\}_{i \geqslant 0}$ une chaine évanescente définissant $\mathcal{P}$, telle que chaque B_i soit une boule fermée. Alors pour i assez grand le point $\mathcal{S}_i \in \mathbb{H}_p$ associé au complémentaire de B_i appartient à $(\mathcal{S}, \mathcal{S}') \subset \ell$ (cf. Lemme 2.11). De plus $\mathcal{S}_i$ converge vers $\mathcal{S}$ quand $i \to \infty$; voir la démonstration de la Proposition 3.2. □

LEMME 3.4. *Considérons $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p$ distincts. Alors le segment géodésique* $[\mathcal{S}, \mathcal{S}']$ *est isométrique à un intervalle de $\mathbb{R}$ de longeur $d(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$. De plus pour $z \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, la demi-géodésique* $[\mathcal{S}, z)$ *est isométrique à* $[0, \infty) \subset \mathbb{R}$.

Preuve. Il reste a considérer le cas $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ singulier. Supposons que $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p \cup \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ n'est pas un point singulier de $\mathbb{H}_p$, le cas $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p$ singulier étant similaire.

Soit $\{\mathcal{S}_i\}_{i \geqslant 0} \subset (\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ une suite convergente vers $\mathcal{S}$ telle que $d(\mathcal{S}, \mathcal{S}_i)$ soit décroissante avec i (cf. preuve du lemme précédent). Alors $(\mathcal{S}_i, \mathcal{S}')$ est une suite croissante de segments géodésiques (ou demi-géodésiques) isométriques à un intervalle de $\mathbb{R}$ de longeur $d(\mathcal{S}_i, \mathcal{S}') \to d(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$. Comme $(\mathcal{S}, \mathcal{S}') = \bigcup(\mathcal{S}_i, \mathcal{S}')$ (cf. Lemme 2.9) on a que $[\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ est isométrique à $[0, \infty) \subset \mathbb{R}$ si $\mathcal{S}' \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ ou $[\mathcal{S}, \mathcal{S}']$ est isométrique à un intervalle de $\mathbb{R}$ de longeur $d(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$, si $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p$. □

3.3. CONVEXITÉ ET ENVELOPPES CONVEXES

DÉFINITION 3.5. On dit qu'une partie $\widehat{X}$ de $\mathbb{H}_p$ est *convexe* si pour tous $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1 \in \widehat{X}$ distincts, $\widehat{X}$ contient tous les points de $\mathbb{H}_p$ entre $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_1$.

Notons que par le Lemme 3.4 toute partie convexe de $\mathbb{H}_p$ est aussi connexe. D'autre part on verra que toute partie connexe de $\mathbb{H}_p$ est convexe (Proposition 3.9). En particulier l'intersection non vide de deux parties connexes de $\mathbb{H}_p$ est aussi connexe.

LEMME 3.6. *Etant donné une partie X de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, l'ensemble*

$$\widehat{X} = \{\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p \mid \mathcal{S} \prec X\}$$

est convexe et par conséquent connexe.

Preuve. Considérons $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1 \in \widehat{X}$ distincts et soit $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ entre $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_1$. Soient B_0 et B_1 les boules distinctes associées à $\mathcal{S}$, telles que $\mathcal{S}_i \prec B_i$ pour $i = 0, 1$.

Si $\mathcal{S}_i$ est singulier on a $B_i \cap X \neq \emptyset$, car $\mathcal{S}_i \prec B_i$ et $\mathcal{S}_i \prec X$ (voir partie 2 du Lemme 2.5).

Si $\mathcal{S}_i$ est non singulier il existe une boule $\widetilde{B}_i$ associée à $\mathcal{S}_i$ telle que $\widetilde{B}_i \not\subset B_i$ et $D_i = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - \widetilde{B}_i \subset B_i$ (Lemme 2.5). Comme $\mathcal{S}_i$ sépare X on a $D_i \cap X \neq \emptyset$ et par conséquent $B_i \cap X \neq \emptyset$.

Donc $B_i \cap X \neq \emptyset$, pour $i = 0, 1$, et par conséquent $\mathcal{S} \prec X$. □

On appelle $\widehat{X} \subset \mathbb{H}_p$ l'*enveloppe convexe* de $X \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$. Notons que l'ensemble $\widehat{X}$ contient tous les points de $\mathbb{H}_p$ qui sont entre deux points dans X.

Remarque 3.7. La terminologie 'enveloppe connvexe' qu'on utilise ici n'est pas complément appropriée, car l'ensemble $\widehat{X} \subset \mathbb{H}_p$ n'est pas nécessairement le plus petit convexe contenant tous les points de $\mathbb{H}_p$ entre points distincts de X. Ce dernier ensemble est égal à

$$\widehat{X} \cap \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}} = \{\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}} \mid \mathcal{S} \prec X\},$$

qui est égal à l'union de tous les géodésiques joignant des points distincts de X. Clairement cet ensemble est convexe et par conséquent connexe (voir aussi la preuve du Lemme 3.6).

Notons aussi que $\hat{X} = \{\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p \mid \mathcal{S} \prec X\}$ est contenu dans $\mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ si et seulement si X est compact. □

https://doi.org/10.1023/A:1026136530383 Published online by Cambridge University Press

3.4. SUR LA STRUCTURE D'ARBRE DE $\mathbb{H}_p$

Dans cette section on montre que l'espace métrique $(\mathbb{H}_p, d)$ est un arbre réel (Proposition 3.9). C'est-à-dire que pour tous points distincts $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p$ il existe un et un seul arc topologique $[\mathcal{S}, \mathcal{S}'] \subset \mathbb{H}_p$ d'extrémités $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$, et que de plus cet arc topologique est isométrique à un intervalle de $\mathbb{R}$ de longeur $d(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$. Cette définition est due à J. Tits [T], voir aussi par exemple [P].

Soit $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ un point non-singulier. Pour un bout $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ on pose

$$\hat{B}_{\mathcal{P}} = \{\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p \mid \mathcal{S}' \prec B_{\mathcal{P}}\}.$$

Par le Lemme 3.6 cet ensemble est convexe et par conséquent connexe. D'après le Lemme 2.6 on a une partition,

$$\mathbb{H}_p - \{\mathcal{S}\} = \bigsqcup_{\mathcal{S}} \hat{B}_{\mathcal{P}}. \tag{3}$$

LEMME 3.8. *Soit $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ un point non-singulier. Alors l'ensemble $\hat{B}_{\mathcal{P}} \subset \mathbb{H}_p$ est ouvert et sa fermeture est égale à $\hat{B}_{\mathcal{P}} \cup \{\mathcal{S}\}$. En particulier $\hat{B}_{\mathcal{P}}$ est une composante connexe de $\mathbb{H}_p - \{\mathcal{S}\}$.*

Preuve. Soit $\mathcal{S}' \in \hat{B}_{\mathcal{P}}$. Si $\mathcal{S}'' \in \mathbb{H}_p$ est différent de $\mathcal{S}$ et n'appartient pas à $\hat{B}_{\mathcal{P}}$, on a $\mathcal{S} \in (\mathcal{S}', \mathcal{S}'')$ et par conséquent $d(\mathcal{S}', \mathcal{S}'') > d(\mathcal{S}', \mathcal{S})$. Donc l'ensemble ouvert $\{\mathcal{S}'' \in \mathbb{H}_p \mid d(\mathcal{S}', \mathcal{S}'') < d(\mathcal{S}', \mathcal{S})\}$ est contenu dans $\hat{B}_{\mathcal{P}}$.

D'autre part le point $\mathcal{S}$ appartient à la fermeture de $\hat{B}_{\mathcal{P}}$ (cf. partie 1 du Lemme 2.9) et comme l'ensemble

$$\mathbb{H}_p - \hat{B}_{\mathcal{P}} \cup \{\mathcal{S}\} = \bigsqcup_{\mathcal{P}' \in \mathcal{S} - \{\mathcal{P}\}} \hat{B}_{\mathcal{P}'}$$

est ouvert par ce qui précède, on conclut que $\hat{B}_{\mathcal{P}} \cup \{\mathcal{S}\}$ est fermé. □

PROPOSITION 3.9. (1) *Une partie de $\mathbb{H}_p$ est convexe si et seulement si elle est connexe.* (2) *L'espace métrique $(\mathbb{H}_p, d)$ est un arbre réel.*

Preuve. (1) D'après le Lemme 3.4 toute partie convexe de $\mathbb{H}_p$ est aussi connexe. D'autre part soit $\hat{X} \subset \mathbb{H}_p$ une partie connexe de $\mathbb{H}_p$. Soient $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \hat{X}$ et $\mathcal{S}_0 \in (\mathcal{S}, \mathcal{S}')$. De plus soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}' \in \mathcal{S}_0$ les bouts tels que $\mathcal{S} \prec B_{\mathcal{P}}$ et $\mathcal{S}' \prec B_{\mathcal{P}'}$. Supposons par contradiction $\hat{X} \subset \mathbb{H}_p - \{\mathcal{S}_0\}$. Alors les ensembles $\hat{B}_{\mathcal{P}} \cap \hat{X}$ et $\hat{B}_{\mathcal{P}'} \cap \hat{X}$ sont non-vides et par ce qui précède ils sont ouverts et fermés dans $\hat{X}$. On obtient une contradiction, donc $\mathcal{S}_0 \in \hat{X}$. Par conséquent $\hat{X}$ est convexe.

(2) Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p$ des points distincts. Par le Lemme 3.4, $[\mathcal{S}, \mathcal{S}'] \subset \mathbb{H}_p$ est un arc topologique d'extrémités $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ et il est isométrique à un intervalle de $\mathbb{R}$ de longeur $d(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$.

D'autre part soit $\ell \subset \mathbb{H}_p$ un arc topologique d'extrémités $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$. Comme ℓ est connexe on a $[\mathcal{S}, \mathcal{S}'] \subset \ell$ par la première partie de la preuve et donc $\ell = [\mathcal{S}, \mathcal{S}']$. □

Considérons un point $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$. Si $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ est singulier, alors $\mathbb{H}_p - \{\mathcal{S}\}$ est convexe (car $\mathbb{H}_p^{\mathbb{R}} \subset \mathbb{H}_p - \{\mathcal{S}\}$) et par conséquent il est connexe.

https://doi.org/10.1023/A:1026136530383 Published online by Cambridge University Press

Supposons maintenant $\mathcal{S}$ non singulier. Alors pour un bout $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ l'ensemble $\hat{B}_{\mathcal{P}}$ est une composante connexe de $\mathbb{H}_p - \{\mathcal{S}\}$ (cf. Lemme 3.8). Donc la partition (3) est la partition en composantes connexes de $\mathbb{H}_p - \{\mathcal{S}\}$.

Donc *pour tout point $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ il y a une correspondance entre les composantes connexes de $\mathbb{H}_p - \{\mathcal{S}\}$ et les éléments de $\mathcal{S}$*. Comme la cardinalité de $\mathcal{S}$ est 1, 2 où ∞ selon que $\mathcal{S}$ est singulier, irrationnel ou rationnel respectivement, on conclut que *les points de branchement de $\mathbb{H}_p$ sont les points rationnels*.

4. Action des fonctions rationnelles sur $\mathbb{H}_p$

Considérons une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$ qui ne soit pas constante. Etant donné un point $w \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ le *degré local* de R en w, que l'on note $\deg_R(w)$, est défini comme suit. On considère des coordonnées tel que $w = 0$ et $R(0) = 0$. Alors R est localement de la forme

$$a_d z^d + a_{d+1} z^{d+1} + \cdots +, \quad \text{où } d \geqslant 1 \quad \text{et } a_d \neq 0;$$

on définit $\deg_R(w) = d$ et on dit que $\deg_R(w)$ est la *multiplicité* de w comme préimage de $R(w)$. Il n'est pas difficile de voir que $\deg_R(w)$ ne dépend pas du choix des coordonnées.

Pour $w \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ on a

$$\sum_{R(z)=w} \deg_R(z) = \deg(R) \tag{4}$$

et pour $Q \in \mathbb{C}_p(z)$ qui n'est pas constante on a $\deg_{Q\circ R}(w) = \deg_Q(R(w)) \cdot \deg_R(w)$.

Etant donnés $X, Y \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ tels que $R(X) \subset Y$ on dit que $R\colon X \longrightarrow Y$ est *de degré d*, où $d \geqslant 1$, si pour tout $y \in Y$

$$\sum_{x\in X,\, R(x)=y} \deg_R(x) = d;$$

de façon équivalente, tout point dans Y a exactement d préimages dans X comptées avec multiplicité.

4.1. ACTION D'UNE FONCTION RATIONNELLE SUR LES BOUTS

Fixons une fonction rationnelle non constante $R \in \mathbb{C}_p(z)$.

PROPOSITION 4.1. *Soit $\mathcal{P}$ un bout rationnel (resp. irrationnel, singulier). Alors il existe un bout $\mathcal{P}'$ de même nature et un entier $d \geqslant 1$ tel que pour toute chaine évanescente $\{C_i\}_{i\geqslant 0}$ définissant $\mathcal{P}$, il existe $N \geqslant 1$ tel que on ait les propriétés suivantes.*

(1) *$\{R(C_i)\}_{i\geqslant N}$ est une chaine évanescente définissant $\mathcal{P}'$.*
(2) *Pour tout $i \geqslant N$, $R\colon C_i \longrightarrow R(C_i)$ est de degré d.*

La preuve de cette proposition est à la fin de cette section.

https://doi.org/10.1023/A:1026136530383 Published online by Cambridge University Press

On note $R_*(\mathcal{P}) = \mathcal{P}'$. De plus on note $\deg_R(\mathcal{P}) = d$ et on l'appelle *degré local de* R *en* $\mathcal{P}$.

LEMME 4.2. *Soit* $\mathcal{P}$ *un bout non-singulier. Alors il existe un entier* $N \geqslant 1$ *tel que*

(1) *Chaque point* $y \in B_{R_*(\mathcal{P})}$ *a* $N + \deg_R(\mathcal{P})$ *préimages par* R *dans* $B_{\mathcal{P}}$.
(2) *Chaque point* $y \notin B_{R_*(\mathcal{P})}$ *a* N *préimages par* R *dans* $B_{\mathcal{P}}$.

En particulier $R\colon B_{\mathcal{P}} \longrightarrow B_{R_*(\mathcal{P})}$ *est de degré* $\deg_R(\mathcal{P})$ *ou* $R(B_{\mathcal{P}}) = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$.

Les démonstrations de la Proposition 4.1 et du Lemme 4.2 dépendent du lemme suivant.

LEMME 4.3. *Considérons* $r > 0$. *Alors il existe un entier* $d \geqslant 1$ *et* $r_0 \in (0, r)$ *tel que après changement de coordonnée à l'arrivée, on ait* $|R(z)| = |z|^d$ *si* $r_0 < |z| < r$, *et tel que pour tout* $\tilde{r}_0 \in [r_0, r)$

$$R\colon \{z \in \mathbb{C}_p \mid \tilde{r}_0 < |z| < r\} \longrightarrow \{w \in \mathbb{C}_p \mid \tilde{r}_0^d < |w| < r^d\}$$

est de degré d. *Si de plus* $r \notin |\mathbb{C}_p^*|$ *alors il existe* $r_1 > r$ *tel que* $R(z) = |z|^d$ *si* $r_0 < |z| < r_1$, *et tel que pour tous* $r_0 \leqslant \tilde{r}_0 < \tilde{r}_1 \leqslant r_1$

$$R\colon \{z \in \mathbb{C}_p \mid \tilde{r}_0 < |z| < \tilde{r}_1\} \longrightarrow \{w \in \mathbb{C}_p \mid \tilde{r}_0^d < |w| < \tilde{r}_1^d\}$$

est de degré d.

Preuve. Etant donné un polynôme $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_k z^k \in \mathbb{C}_p[z]$, soit $n(P) \geqslant 0$ le plus petit entier qui maximise $|a_n| r^n$ et on pose $T_P(z) = P(z) - a_{n(P)} z^{n(P)}$. Après changement de coordonnée à l'arrivée on suppose $R = P/Q$, avec $P(z) = z^{n(P)} + T_P(z) \in \mathbb{C}_p[z]$ et $Q(z) = z^{n(Q)} + T_Q(z) \in \mathbb{C}_p[z]$.

Quitte à changer R par $R - 1$ on suppose $n(P) \neq n(Q)$ et quitte à changer R par $1/R$ on suppose $n(P) > n(Q)$. Par conséquent $|R(z)| = |z|^{n(P)-n(Q)}$ pour $z \in \mathbb{C}_p$ tel que $|z| < r$ est assez proche de 1.

Posons $d = n(P) - n(Q) \geqslant 1$. Alors pour $|w| < r^d$ le polynôme

$$P_w(z) = P(z) - wQ(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n,$$

est tel que $c_{n(P)} = 1$ et tel que $n(P)$ est le plus petit entier qui maximise $|c_n| r^n$ (c'est à dire $n(P_w) = n(P)$). Posons $r_w = |w|^{\frac{1}{d}}$. On choisit $r_0 \in (0, r)$ proche de r, tel que si $r_0^d < |w| < r^d$ alors $|c_{n(Q)}| = |w|$,

$$|c_i| r_w^i \leqslant r_w^{n(P)} = |c_{n(Q)}| r_w^{n(Q)}, \quad \text{pour } n(Q) < i < n(P)$$

et $|c_j| r_w^j < |c_{n(Q)}| r_w^{n(Q)}$ pour $0 \leqslant j < n(Q)$.

Par consèquent $(n(Q), \log_p |w|)$ et $(n(P), 0)$ sont des sommets consecutifs du polygône de Newton de P_w. Donc le polynôme P_w a $d = n(P) - n(Q)$ zéros dans $\{|z| = r_w\}$, comptés avec multiplicité. C'est-à-dire que R a d préimages de w dans $\{|z| = r_w\}$ comptées avec multiplicité, et par conséquent pour tout $\tilde{r}_0 \in [r_0, r)$,

$$R\colon \{\tilde{r}_0 < |z| < r\} \longrightarrow \{\tilde{r}_0^d < |z| < r^d\}$$

est de degré d.

Si de plus $r \notin |\mathbb{C}_p^*|$, on a $|a_i|r^i < r^{n(P)}$ pour $i \neq n(P)$ et $|b_j|r^j < r^{n(Q)}$ pour $j \neq n(Q)$. Alors on peut montrer les assertions qui restent de façon analogue. □

Preuve de la Proposition 4.1. *Cas* (1) *Le bout* $\mathcal{P}$ *est non-singulier*. Après changement de coordonnée au départ on suppose $B_{\mathcal{P}} = \{|z| < r\}$. Considérons la coordonnée à l'arrivée donnée par le Lemme 4.3. Notons que pour toute chaine évanescente $\{C_i\}_{i \geqslant 0}$ définissant $\mathcal{P}$, on a $C_i = \{\rho_i < |z| < r\}$ pour i assez grand, où $\rho_i \to r$ quand $i \to \infty$. Alors la proposition suit des assertions du Lemme 4.3 dans ce cas.

Cas (2) *Le bout* $\mathcal{P}$ *est singulier*. Ce cas dépend du Lemme 4.2, qui dépend du cas précédent seulement.

Comme la suite de boules $\{C_i\}_{i \geqslant 0}$ est décroissante et $\bigcap C_i = \emptyset$, on a $\bigcap_{i \geqslant 0} R(C_i) = \emptyset$. De plus pour i assez grand la boule C_i est disjointe des pôles de R et dans ce cas $R(C_i)$ est une boule et $R : C_i \longrightarrow R(C_i)$ est de degré $d_i \geqslant 1$ (Lemme 4.2). Comme $C_{i+1} \subset C_i$ on a $d_{i+1} \leqslant d_i$ et il existe $N \geqslant 0$ tel que $d = d_i$ ne dépend pas de i pour $i \geqslant N$.

On voit facilement que $\mathcal{P}'$ et d ne dépendent pas du représentant de $\mathcal{P}$ choisi. □

Preuve du Lemme 4.2. Après changement de coordonnée on suppose $B_{\mathcal{P}} = \{|z| < r\}$. Considérons la coordonnée à l'arrivée donnée par le Lemme 4.3. Alors $d = \deg_R(\mathcal{P})$, $B_{R_*(\mathcal{P})} = \{|w| < r^d\}$ et il existe $r_0 \in (0, r)$ tel que $|R(z)| = |z|^d$ quand $r_0 < |z| < r$.

Soit $N \geqslant 0$ le nombre de pôles de R dans la boule $\{|z| < r\}$. Alors R a $N + d$ zéros dans $\{|z| < r\}$ (voir par exemple [Es1] ou [R-L1] Section 1.3.2).

Considérons $y \in \{|z| < r^d\}$. Alors $|R(z) - y| = |z|^d$ quand $\max\{r_0, |y|\} < |z| < r$. Donc la fonction rationnelle $R - y$ a $N + d$ zéros dans $\{|z| < r\}$.

Considérons $y \notin \{|z| < r^d\}$. Alors $|yR(z)/(R(z) - y)| = |z|^d$ quand $r_0 < |z| < r$. Comme la fonction rationnelle $yR/(R - y)$ a les mêmes zéros que R, elle a N pôles dans $\{|z| < r\}$. □

4.2. ACTION D'UNE FONCTION RATIONNELLE SUR $\mathbb{H}_p$.

Dans cette section on définit l'action R_* sur $\mathbb{H}_p$ induite par une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$. On définit aussi pour chaque point $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ un entier $\deg_R(\mathcal{S}) \geqslant 1$ qu'on appelle *degré local de* R *en* $\mathcal{S}$.

Etant donné un point singulier $\mathcal{S} = \{\mathcal{P}\} \in \mathbb{H}_p$ on note $R_*(\mathcal{S}) = \{R_*(\mathcal{P})\} \in \mathbb{H}_p$ et $\deg_R(\mathcal{S}) = \deg_R(\mathcal{P}) \geqslant 1$.

https://doi.org/10.1023/A:1026136530383 Published online by Cambridge University Press

Soit $\mathcal{S} = \{\mathcal{P}, \mathcal{P}'\} \in \mathbb{H}_p$ un point irrationnel. Alors par le Lemme 4.3 on a $\deg_R(\mathcal{P}) = \deg_R(\mathcal{P}') \geqslant 1$ et $\{R_*(\mathcal{P}), R_*(\mathcal{P}')\}$ est un point irrationnel de $\mathbb{H}_p$. On note $\deg_R(\mathcal{S})$ et $R_*(\mathcal{S}) \in \mathbb{H}_p$ respectivement.

La proposition suivante décrit l'action d'une fonction rationnelle sur les points rationnels de $\mathbb{H}_p$; voir [R-L1] Proposition 2.4.

PROPOSITION 4.4. *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle et soit $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ un point rationnel. Alors on a les propriétés suivantes.*

(1) *Il existe un point rationnel $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ tel que si $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ alors $R_*(\mathcal{P}) \in \mathcal{S}'$.*
(2) *Considérons des paramétrages*

$$\mathcal{S} = \{\mathcal{P}(\xi)\}_{\xi \in \mathbb{P}(\bar{\mathbb{F}}_p)} \quad et \quad \mathcal{S}' = \{\mathcal{P}'(\xi)\}_{\xi \in \mathbb{P}(\bar{\mathbb{F}}_p)}.$$

Alors il existe une fonction rationnelle $\tilde{R} \in \bar{\mathbb{F}}_p(z)$ telle que pour tout $\xi \in \mathbb{P}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ on ait

$$R_*(\mathcal{P}(\xi)) = \mathcal{P}'(\tilde{R}(\xi)) \quad et \quad \deg_R(\mathcal{P}(\xi)) = \deg_{\tilde{R}}(\xi).$$

Donc pour tout $\mathcal{P}' \in \mathcal{S}'$

$$\sum_{\mathcal{P} \in \mathcal{S},\, R_*(\mathcal{P}) = \mathcal{P}'} \deg_R(\mathcal{P}) = \deg(\tilde{R}).$$

(3) *Il existe un sous-ensemble fini $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ tel que $R(B_{\mathcal{P}}) = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ pour tout $\mathcal{P} \in \mathcal{T}$ et tel que $R\colon B_{\mathcal{P}} \longrightarrow B_{R_*(\mathcal{P})}$ soit de degré* $\deg_R(\mathcal{P})$ *pour tout $\mathcal{P} \in \mathcal{S} - \mathcal{T}$; dans ce dernier cas $R(B_{\mathcal{P}}) = B_{R_*(\mathcal{P})}$.*

On note $\deg_R(\mathcal{S}) \geqslant 1$ le degré de $\tilde{R}$, qui ne dépend pas du choix des coordonnées.

4.3. ACTION LOCALE D'UNE FONCTION RATIONNELLE

PROPOSITION 4.5. *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle fixant $0 \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ et localement de la forme $R(z) = a_d z^d + a_{d+1} z^{d+1} + \cdots$, où $d = \deg_R(0)$. Alors pour $r > 0$ petit on a*

$$R_*(\mathcal{S}_r) = \mathcal{S}_{|a_d| r^d} \ et\ \deg_R(\mathcal{S}_r) = d = \deg_R(0);$$

où $\mathcal{S}_r \in \mathbb{H}_p$ est le point associé à la boule $\{|z| < r\}$.

Preuve. Pour $r > 0$ soit $\mathcal{P}_r \in \mathcal{S}_r$ le bout associé à $\{|z| < r\}$. Pour $r > 0$ petit on a $R(\{|z| = r\}) = \{|z| = |a_d| r^d\}$ et l'application $R\colon \{|z| < r\} \longrightarrow \{|z| < |a_d| r^d\}$ est de degré d. Donc $R_*(\mathcal{P}_r) = \mathcal{P}_{|a_d| r^d}$ et $\deg_R(\mathcal{P}_r) = d$. Par conséquent $R_*(\mathcal{S}_r) = \mathcal{S}_{|a_d| r^d}$.

De plus notons que l'image du bout associé à $\{|z| > r\} \cup \{\infty\}$ est le bout associé à $\{|z| > |a_d| r^d\} \cup \{\infty\}$ et comme $R(\{|z| = r\}) = \{|z| = |a_d| z^d\}$ on conclut que $\mathcal{P}_r$ est le seul bout dans $\mathcal{S}_r$ ayant $\mathcal{P}_{|a_d| r^d}$ comme image. Donc $\deg_R(\mathcal{S}_r) = \deg_R(\mathcal{P}_r) = d$ (cf. partie 2 de la Proposition 4.4). $\square$

PROPOSITION 4.6. *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle. Soit $\mathcal{P}$ un bout et soit $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ le point qui contient $\mathcal{P}$. Alors il existe un point $\bar{\mathcal{S}} \in \mathbb{H}_p$ tel que $\bar{\mathcal{S}} \prec B_{\mathcal{P}}$ et tel que on ait les propriétés suivantes.*

(1) *$R_*((\mathcal{S}, \bar{\mathcal{S}}]) = (R_*(\mathcal{S}), R_*(\bar{\mathcal{S}})]$ et R_* est injective sur $(\mathcal{S}, \bar{\mathcal{S}}]$.*
(2) *Pour tout $\mathcal{S}' \in (\mathcal{S}, \bar{\mathcal{S}}]$ on a*

$$\deg_R(\mathcal{S}') = \deg_R(\mathcal{P}) \quad et \quad d(R_*(\mathcal{S}), R_*(\mathcal{S}')) = \deg_R(\mathcal{P}) \cdot d(\mathcal{S}, \mathcal{S}').$$

La preuve de cette proposition est ci-dessous.

COROLLAIRE 4.7. *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle. Alors pour tous $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p$ on a*

$$d(R_*(\mathcal{S}), R_*(\mathcal{S}')) \leqslant \deg(R) \cdot d(\mathcal{S}, \mathcal{S}').$$

En particulier l'action sur $\mathbb{H}_p$ induite par une fonction rationnelle est continue.

Preuve. Rappelons que pour tout bout $\mathcal{P}$ on a $\deg_R(\mathcal{P}) \leqslant \deg(R)$, voir Section 4.1.

Posons $t' = d(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ et pour $0 \leqslant t \leqslant t'$ soit $\mathcal{S}_t \in [\mathcal{S}, \mathcal{S}']$ le point tel que $d(\mathcal{S}_t, \mathcal{S}) = t$; on a $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}$ et $\mathcal{S}' = \mathcal{S}_{t'}$. Par la Proposition 4.6 pour tout $t \in [0, t')$ (resp. $t \in (0, t']$) il existe $\bar{t} \in (t, t']$ (resp. $\bar{t} \in [0, t)$) tel que on ait

$$d(R_*(\mathcal{S}_t), R_*(\mathcal{S}_{\bar{t}})) \leqslant \deg(R) \cdot d(\mathcal{S}_t, \mathcal{S}_{\bar{t}});$$

voir aussi Lemme 2.11. Comme l'intervalle $[0, t']$ est compact il existe $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = t'$ tel que $d(R_*(\mathcal{S}_{t_{i-1}}), R_*(\mathcal{S}_{t_i})) \leqslant \deg(R) \cdot d(\mathcal{S}_{t_{i-1}}, \mathcal{S}_{t_i})$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$. □

COROLLAIRE 4.8. *Considérons un segment de $\mathbb{H}_p$ paramétré par $\{\mathcal{S}_t\}_{0 \leqslant t \leqslant t'}$, de telle façon que $d(\mathcal{S}_{t_0}, \mathcal{S}_{t_1}) = |t_0 - t_1|$ pour $0 \leqslant t_0 < t_1 \leqslant t'$. Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle telle que R_* soit injective sur $[\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_{t'}]$. Alors*

$$d(R_*(\mathcal{S}_0), R_*(\mathcal{S}_{t'})) = \int_0^{t'} \deg_R(\mathcal{S}_s)\, \mathrm{d}s.$$

En particulier on a $d(R_*(\mathcal{S}_0), R_*(\mathcal{S}_{t'})) \geqslant d(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_{t'})$.

Preuve. Comme dans la démonstration du corollaire précédent on peut trouver $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = t'$ tels que pour $1 \leqslant i \leqslant k$ le degré $\deg_R(\mathcal{S})$ soit constant sur $[\mathcal{S}_{t_{i-1}}, \mathcal{S}_{t_i}]$ et tel que on ait

$$d(R_*(\mathcal{S}_{t_{i-1}}), R_*(\mathcal{S}_{t_i})) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \deg_R(\mathcal{S}_s)\, \mathrm{d}s$$

(cf. partie 2 et 3 de la Proposition 4.6). Comme par hypothèse R_* est injective sur $[\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_{t'}]$, l'assertion du corollaire suit. □

La démonstration de la Proposition 4.6 dépend du lemme suivant.

LEMME 4.9. *Soit C une couronne et soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle telle que $R(C)$ est aussi une couronne. Alors il existe un entier $d \geqslant 1$ tel que $R\colon C \longrightarrow R(C)$ est de degré d et on a,* $\operatorname{mod}(R(C)) = d \cdot \operatorname{mod}(C)$.

Preuve. Après changement de coordonnée on suppose $C = \{r_0 < |z| < r_1\}$ et $R(C) = \{r'_0 < |z| < r'_1\}$. En particulier R n'a pas de zéros ni des pôles sur C. On pose $R = P/Q$ où,

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \in \mathbb{C}_p[z] \text{ et}$$

$$Q(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_{n'} z^{n'} \in \mathbb{C}_p[z].$$

Alors il existe $0 \leqslant k \leqslant n$ (resp. $0 \leqslant k' \leqslant n'$) tel que $|a_i| r_0^i \leqslant |a_k| r_0^k$ (resp. $|b_j| r_0^j \leqslant |b_{k'}| r_0^{k'}$) pour $0 \leqslant i \leqslant k$ (resp. $0 \leqslant j \leqslant k'$) et $|a_i| r_1^i \leqslant |a_k| r_1^k$ (resp. $|b_j| r_1^j \leqslant |b_{k'}| r_1^{k'}$) pour $k \leqslant i \leqslant n$ (resp. $k' \leqslant j \leqslant n'$).

Comme $R(C) = \{r'_0 < |z| < r'_1\}$ on a $k \neq k'$ et quitte à changer R par $\frac{1}{R}$ on suppose $k > k'$. Alors on peut montrer, comme dans la démonstration de la Proposition 4.1, que $R\colon C \longrightarrow R(C)$ est de degré $d = k - k'$. De plus notons que $r'_0 = (|a_k|/|b_{k'}|) r_0^d$ et $r'_1 = (|a_k|/|b_{k'}|) r_1^d$. Par conséquent

$$\operatorname{mod}(R(C)) = \log_p(r'_1/r'_0) = \log_p(r_1^d/r_0^d) = d \cdot \operatorname{mod}(C). \qquad \square$$

Preuve de la Proposition 4.6. Si le bout $\mathcal{P}$ est non-singulier, le lemme suit de la preuve de la Proposition 4.1 et du Lemme 4.3. Donc on suppose $\mathcal{S} = \{\mathcal{P}\}$ singulier.

Soit $\{D_i\}_{i \geqslant 0}$ une chaine évanescente définissant $\mathcal{P}$ et soit $\mathcal{S}_i \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ le point associé à D_i, de telle façon que $\mathcal{S}_{i+1}$ est entre $\mathcal{S}_i$ et $\mathcal{S}$. On pose $\bar{\mathcal{S}} = \mathcal{S}_0$. On suppose $R\colon D_i \longrightarrow R(D_i)$ de degré $\deg_R(\mathcal{P})$ et que $\{R(D_i)\}_{i \geqslant 0}$ est une chaine évanescente définissant $R_*(\mathcal{P})$ (Proposition 4.1).

De plus on suppose les boules D_i irrationnelles, de telle façon que $C_i = D_0 - D_i$ est une couronne et par conséquent $d(\bar{\mathcal{S}}, \mathcal{S}_i) = \operatorname{mod}(C_i)$. De plus $R(C_i) = R(D_0) - R(D_i)$ est aussi une couronne, donc $d(R(\bar{\mathcal{S}}), R(\mathcal{S}_i)) = \operatorname{mod}(R(C_i))$. Comme $R\colon C_i \longrightarrow R(C_i)$ est de degré $\deg_R(\mathcal{P})$ on a par le Lemme 4.9,

$$\begin{aligned} d(R(\bar{\mathcal{S}}), R(\mathcal{S}_i)) &= \operatorname{mod}(R(C_i)) = \deg_R(\mathcal{P}) \cdot \operatorname{mod}(C_i) \\ &= \deg_R(\mathcal{P}) \cdot d(\bar{\mathcal{S}}, \mathcal{S}_i). \end{aligned} \qquad \square$$

5. Points périodiques dans $\mathbb{H}_p$

Fixons une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$ et considérons l'action R_* sur $\mathbb{H}_p$ induite par R. On dit qu'un point $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ est *périodique* par R_* s'il existe $n \geqslant 1$ tel que $R_*^n(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$. Dans ce cas on dit que $\mathcal{S}$ est *indifférent* si $\deg_{R^n}(\mathcal{S}) = 1$ et on dit que $\mathcal{S}$ est *répulsif* si $\deg_{R^n}(\mathcal{S}) > 1$.

Comme on verra dans la Section 5.1 les points fixes rationnels sont étroitement reliés à la notion de *réduction*. Dans la Section 5.2 on considère les points fixes irrationnels ou singuliers et dans les Sections 5.3 et 5.4 on considère les points périodiques répulsifs et indifférents respectivement.

5.1. RÉDUCTION D'UNE FONCTION RATIONNELLE ET POINTS FIXES

En coordonnées homogènes une fonction rationnelle s'écrit sous la forme $[P_0, P_1]$, où P_0 et $P_1 \in \mathbb{C}_p[z_0, z_1]$ sont des polynômes homogènes de même degré, égal au degré de la fonction rationnelle. Pour $\lambda \in \mathbb{C}_p^*$, $[\lambda P_0, \lambda P_1]$ représente la même fonction rationnelle.

Etant donné un polynôme $P \in \mathcal{O}_p[z_0, z_1]$ on note $\tilde{P}$ sa projection dans $\bar{\mathbb{F}}_p[z_0, z_1]$.

DÉFINITION 5.1. Considérons une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$ donné en coordonnées homogènes par $[P_0, P_1]$. Quitte à remplacer P_0 et P_1 par λP_0 et λP_1 on suppose P_0 et P_1 à coefficients entiers et tel que au moins un des coefficients de P_0 ou P_1 soit de norme égale à 1.

Alors on dit que R a une *réduction non triviale* si les polynômes $\tilde{P}_0, \tilde{P}_1 \in \bar{\mathbb{F}}_p[z_0, z_1]$ sont tels que ni $\tilde{P}_0$ ni $\bar{P}_1$ n'est un multiple scalaire de l'autre. Dans ce cas la fonction rationnelle $\tilde{R} \in \bar{\mathbb{F}}_p(z)$, donnée en coordonnées homogènes par $[\tilde{P}_0, \tilde{P}_1]$, est de degré au moins 1 et on dit que $\tilde{R}$ est la *réduction* de R.

Cette notion est reliée à la notion de bonne réduction, introduite par Morton et Silverman dans [MS], voir aussi [Ben2] et [R-L1].

Les propriétés suivantes sont faciles de voir; cf. [R-L1].

Une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$ a une réduction nontriviale si le point canonique $\mathcal{S}_{\text{can}} \in \mathbb{H}_p$ est fixé par R_*. Dans ce cas la fonction rationnelle $\tilde{R} \in \mathbb{F}_p(z)$ est de degré au moins 1 et elle coïncide avec la fonction rationnelle donnée par la Proposition 4.4.

Donc on a la propriété suivante: *Pour tout point rationnel $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ la condition $R_*(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ est équivalente à ce que R ait une réduction non triviale dans une coordonnée compatible avec $\mathcal{S}$.*

LEMME 5.2. *Soit $\tilde{R} \in \bar{\mathbb{F}}_p(z)$ une fonction rationnelle.*

(1) *Si* $\deg(\tilde{R}) = 1$ *alors tout élément de $\mathbb{P}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ est périodique par $\tilde{R}$.*
(2) *Si* $\deg(\tilde{R}) > 1$ *alors tout élément de $\mathbb{P}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ est prépériodique par $\tilde{R}$ et $\tilde{R}$ a une infinité de points périodiques.*

Preuve. Soit $q \geqslant 1$ un puissance de p telle que $\tilde{R} \in \mathbb{F}_q(z)$. Alors chaque $\mathbb{P}(\mathbb{F}_{q^n}) = \mathbb{F}_{q^n} \cup \{\infty\}$ est invariant par $\tilde{R}$ et comme $\mathbb{P}(\bar{\mathbb{F}}_p) = \bigcup_{n \geqslant 1} \mathbb{P}(\mathbb{F}_{q^n})$, tout élément de $\mathbb{P}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ est prépériodique par $\tilde{R}$.

(1) Si $\deg(\tilde{R}) = 1$ alors $\tilde{R}$ induit une bijection sur chaque $\mathbb{P}(\mathbb{F}_{q^n})$ et par conséquent tout élément de $\mathbb{P}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ est périodique par $\tilde{R}$.

(2) Supposons $\deg(\tilde{R}) > 1$.

Soient $\zeta_1, \ldots, \zeta_k \in \mathbb{P}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ les points fixes de $\tilde{R}$ et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ leurs multiplicateurs. Pour chaque $1 \leqslant i \leqslant k$ tel que $\lambda_i \neq 0$ soit $n_i \geqslant 1$ le plus petit entier tel que $\lambda_i^{n_i} = 1$.

https://doi.org/10.1023/A:1026136530383 Published online by Cambridge University Press

Soit r un nombre premier strictement supérieur à p et aux n_i. Soit ζ une racine de $\tilde{R}^r(z) = z$. Si $\zeta = \zeta_i$ et $\lambda_i = 0$, ζ est une racine simple de $\tilde{R}^r(z) - z$. Si $\zeta = \zeta_i$, $\lambda_i = 0$ et $n_i > 1$, il en est de même (car r n'est pas un multiple de n_i). Si $\zeta = \zeta_i$, $\lambda_i \neq 0$ et $n_i = 1$, la multiplicité de ζ_i comme racine de $\tilde{R}(z) - z$ et $\tilde{R}^r(z) - z$ est la même. Donc il existe une racine ζ de $\tilde{R}^r(z) - z$ distincte des ζ_i (car $\deg(\tilde{R}^r(z) - z) > \deg(\tilde{R}(z) - z)$). C'est un point périodique de période minimale r. $\square$

5.2. POINTS FIXES SINGULIERS OU IRRATIONNELS

LEMME 5.3. *Soit $\mathcal{S} = \{\mathcal{P}, \mathcal{P}'\} \in \mathbb{H}_p$ un point irrationnel et soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle telle que $R_*(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$. Alors $\deg_R(\mathcal{S}) = 1$ et R fixe $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.*

Preuve. Après changement de coordonnée on suppose $B_{\mathcal{P}} = \{|z| < r\}$ et $B_{\mathcal{P}'} = \{|z| > r\} \cup \{\infty\}$, où $r \notin |\mathbb{C}_p^*|$. Posons $R = P/Q$ avec,

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_d z^d \in \mathbb{C}_p[z]$$

et

$$Q(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_{d'} z^{d'} \in \mathbb{C}_p[z].$$

Soit $0 \leqslant n \leqslant d$ (resp. $0 \leqslant n' \leqslant d'$) le plus petit entier qui maximise $|a_n|r^n$ (resp. $|b_{n'}|r^{n'}$). Comme $r \notin |\mathbb{C}_p^*|$ on a $|a_i|r^i < |a_n|r^n$ (resp. $|b_j|r^j < |b_{n'}|r^{n'}$) pour $i \neq n$ (resp. $j \neq n'$). Donc $|R(z)| = |a_n/b_{n'}||z|^{n-n'}$ pour tout z tel que $|z|$ est assez proche de r. Donc $|a_n/b_{n'}|r^{n-n'} = r$ et comme $r \notin |\mathbb{C}_p^*|$ on a $\deg_R(\mathcal{P}) = n - n' = 1$ et R_* fixe $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. $\square$

LEMME 5.4. *Soit $\mathcal{P} \in \mathbb{H}_p$ un bout singulier, soit $\{D_i\}_{i \geqslant 0}$ une chaine évanescente définissant $\mathcal{P}$ et soit $r = \lim_{i\to\infty}\mathrm{diam}(D_i) > 0$. De plus soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une function rationnelle telle que $R_*(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$. Alors $\deg_R(\mathcal{P}) = 1$ et il existe $N \geqslant 0$ tel que $|R - id| \leqslant r$ sur D_N.*

Preuve. Soit $N \geqslant 1$ assez grand tel que pour $i \geqslant N$, la boule D_i ne contient pas de points fixes de R et tel qu'on ait D_i, $R(D_i) \subset \mathbb{C}_p$. Alors $R(D_i)$ est une boule et $\{R(D_i)\}_{i \geqslant N}$ est une chaine évanescente définissant $\mathcal{P}$.

Notons $\mathcal{S} = \{\mathcal{P}\} \in \mathbb{H}_p$ et soit $S_i \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ le point associé à D_i. Par la Proposition 4.6, on peut supposer N assez grand pour que

$$d(\mathcal{S}, R_*(\mathcal{S}_N)) = d(R_*(\mathcal{S}), R_*(\mathcal{S}_N)) = \deg_R(\mathcal{P}) d(\mathcal{S}, \mathcal{S}_N).$$

Par conséquent $D_N \subset R(D_N)$ avec égalité si et seulement si $\deg_R(\mathcal{P}) = 1$. Si l'on a $\deg_R(\mathcal{P}) > 1$, alors l'image de D_N par $R - id$ est la boule $\{|z| \leqslant \mathrm{diam}(R(D_N))\}$; mais ceci n'est pas possible car cette boule contient 0 et R n'a pas de points fixes sur D_N. Donc $R(D_N) = D_N$ et par conséquent $\deg_R(\mathcal{P}) = 1$.

Comme R n'a pas de point fixe sur D_N, $|R - id|$ est constant sur D_N. Comme R fixe chaque boule D_i, pour $i \geqslant N$, on a $|R - id| \leqslant \lim_{i\to\infty} \mathrm{diam}(D_i) = r$ sur D_N. $\square$

5.3. POINTS PÉRIODIQUES RÉPULSIFS

PROPOSITION 5.5. *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une function rationnelle et soit $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ un point périodique répulsif de R_*. Alors on a les propriétés suivantes.*

(1) *Le point $\mathcal{S}$ est rationnel.*
(2) *Soil $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ et $n \geqslant 1$ tells que $R_*^n(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$. Alors $B_{\mathcal{P}}$ contient un point fixe de R^n. Si de plus $R_*^n(B_p) \subset B_{\mathcal{P}}$, alors ce point fixe est non répulsif.*

Preuve. (1) Le fait que le point $\mathcal{S}$ est rationnel est une conséquence immédiate des Lemmes 5.3 et 5.4.

(2) Aprés changement de coordonnée on suppose $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\text{can}}$ et $B_{\mathcal{P}} = \{|z| < 1\}$. Donc R^n a une réduction non triviale qu'on note $\tilde{R} \in \overline{\mathbb{F}}_p(z)$. Par hypothèse $\deg(\tilde{R}) = \deg_{R^n}(\mathcal{S}_{\text{can}}) > 1$, donc la fonction rationnelle $Q(z) = R^n(z) - z$ a $\tilde{Q}(z) = \tilde{R}(z) - z \in \overline{\mathbb{F}}_p(z)$ comme réduction. Donc $\tilde{Q}(0) = 0$ et par conséquent $Q_*(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ et $\{|z| < 1\} = B_p \subset Q(B_{\mathcal{P}})$ (Lemme 4.2). Alors il exists $z_0 \in B_{\mathcal{P}}$ tel que $R^n(z_0) - z_0 = Q(z_0) = 0$.

(2.1) Si on a $R^n(\{|z| < 1\}) \subset \{|z| < 1\}$ alors $|(R^n)'(z_0)| \leqslant 1$, donc z_0 est non répulsif. □

COROLLAIRE 5.6. *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle telle que R_* ait un point périodique répulsif dans $\mathbb{H}_p$. Alors R a une infinité de points périodiques non répulsifs dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$.*

Preuve. Soit $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ un point périodique répulsif de R_* de période $n \geqslant 1$. Soit $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}_{\text{can}}$ l'ensemble fini tel que $R(B_{\mathcal{P}}) = B_{R*(\mathcal{P})}$, pour tout bout $\mathcal{P} \in \mathcal{S} - \mathcal{T}$ (Proposition 4.4).

Comme $\tilde{R}$ a une infinité de points périodiques (Lemme 5.2) il existe une infinité de bouts $\mathcal{P} \in \mathcal{S}_{\text{can}}$ périodiques par R_*^n et tel que $R^{nm}(\mathcal{P}) \in \mathcal{S} - \mathcal{T}$ pour $m \geqslant 1$. Pour un tel $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ on a $R^{nk}(B_{\mathcal{P}}) = B_{\mathcal{P}}$, où $k \geqslant 1$ est la période de $\mathcal{P}$. Par la Partie 2 de la Proposition 5.5 la boule $B_{\mathcal{P}}$ contient un point périodique non répulsif de R. □

COROLLAIRE 5.7. *Une fonction rationnelle ayant une réduction non-triviale de degré au moins deux, a une infinité de points périodiques non répulsifs dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$.*

Preuve. Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle ayant une réduction $\tilde{R} \in \overline{\mathbb{F}}_p(z)$ non-triviale. Alors $R_*(S_{\text{can}}) = S_{\text{can}}$ et $\deg_R(S_{\text{can}}) = \deg(\tilde{R}) > 1$ par hypothèse (cf. Section 5.1). Cette à dire $\mathcal{S}_{\text{can}}$ est un point fixe répulsif de R. Alors le corollaire suit du corollaire suit du corollaire précédent. □

5.4. POINTS PÉRIODIQUES INDIFFÉRENTS

Le but de cette section est de démontrer la Proposition 5.8, ci-dessous; la démonstration des Théorèmes A et B en dépend. Pour cela on considére le Théorème 1, qui est une reformulation du Théorème 3 de [R-L1].

Rappelons qu'un affinoïde ouvert (resp. fermé) est le complémentaire dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ d'une réunion finie non vide de boules fermées (resp. ouvertes) disjointes

$\{B_i\}_I$. On appelle les bouts correspondants aux boules $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B_i$, *bouts de l'affinoïde*.

Un *espace analytique connexe* est une union d'affinoïdes don't l'intersection est non vide. La *composante analytique* d'un point z_0 dans une partie ouverte U est le plus grand espace analytique connexe contenant z_0 et contenu dans U (voir [R-L1] pour les propriétés élémentaires de ces notoions).

Etant donné une fonction rationnele $R \in \mathbb{C}_p(z)$, soit $\mathcal{E}(R) \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}p)$ l'intérieur de l'ensemble des points récurrents par R, qu'on appelle *domaine de quasi-périodicité* de R; voir [R-L1]. Cet ensemble est ouvert, invariant par R et pour tout $n \geqslant 1$ on a $\mathcal{E}(R^n) = \mathcal{E}(R)$. De plus $\mathcal{E}(R)$ contient les points périodiques indifférents de R.

THEORÉME 1 ([R – L1] Théorème 3). *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle de degré au moins deux. Alors chaque composante analytique C de $\mathcal{E}(R)$ est un affinoïde ouvert et chaque point de $\mathbb{H}_p$ contenant un bout de C est un point périodique répulsif de R_*.*

PROPOSITION 5.8. *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle de degré au moins deux. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) *R_* a un point périodique indifférent dans $\mathbb{H}_p$.*
(2) *R_* a une infinité de points périodiques indifférents dans $\mathbb{H}_p$.*
(3) *R a un point périodique indifférent dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$.*
(4) *R a une infinité de points périodiques indifférents dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$.*
(5) *$\mathcal{E}(R) \neq \emptyset$.*

Dans ce cas R_* a aussi un point périodique répulsif dans $\mathbb{H}_p$.

La démonstration de cette proposition dépend du lemme suivant.

LEMME 5.9. *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle.*

(1) *Soit $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ un point fixe indifférent de R_*. Alors il existe un bout $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ fixé par R_*; notons qu'on a $\deg_R(\mathcal{P}) = 1$.*
(2) *Soit $\mathcal{P}$ un bout fixé par R_* tel que $\deg_R(\mathcal{P}) = 1$ et soit $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ le point contenant $\mathcal{P}$. Alors il existe un point $\overline{\mathcal{S}}$ tel que $\overline{\mathcal{S}} \prec B_{\mathcal{P}}$ et tel que tout point dans le segment $(\mathcal{S}, \overline{\mathcal{S}}) \subset \mathbb{H}_p$ soit fixe indifférent.*

Preuve. (1) L'assertion est triviale si $\mathcal{S}$ est singulier. Elle suit du Lemme 5.3 si $\mathcal{S}$ est irrationnel et de la Proposition 4.4 si $\mathcal{S}$ est rationnel.

(2) Soit $\mathcal{S}_0$ tel que $\mathcal{S}_0 \prec B_{\mathcal{P}}$, tel que R_* soit injective sur $(\mathcal{S}_0, \mathcal{S})$ et tel que $\deg_R(\mathcal{S}') = 1$ pour tout $\mathcal{S}' \in (\mathcal{S}_0, \mathcal{S})$ (Proposition 4.6). Comme $R_*(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ on a $R_*(\mathcal{S}_0) \prec B_{\mathcal{P}}$.

Si $\mathcal{S}_0$ n'est pas fixé par R_* considérons le point $\overline{\mathcal{S}}$ tel que $(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}) \cap (R_*(\mathcal{S}_0), \mathcal{S}) = [\overline{\mathcal{S}}, \mathcal{S})$ (Lemme 2.11). Alors $R_*(\overline{\mathcal{S}}) \in (R_*(\mathcal{S}_0), \mathcal{S})$ et $d(\overline{\mathcal{S}}, \mathcal{S}) = d(R_*(\overline{\mathcal{S}}), \mathcal{S})$, done $\overline{\mathcal{S}}$ est fixé par R_*. Quitte à remplacer $\mathcal{S}_0$ par $\overline{\mathcal{S}}$ on suppose $R_*(\mathcal{S}_0) = \mathcal{S}_0$.

https://doi.org/10.1023/A:1026136530383 Published online by Cambridge University Press

Alors tout point dans $(\mathcal{S}_0, \mathcal{S})$ est fixé par R_* (cf. Proposition 4.6). □

Preuve de la Proposition 5.8. Si $\mathcal{E}(R) \neq \emptyset$, R_* a un point périodique répulsif dans $\mathbb{H}_p$ d'après le Théorème 1.

L'équivalence entre les propriétés 3, 4 et 5 à été démontrée dans [R-L1], voir Corollaire 5.17. L'equivalence entre 1 et 2 suit du Lemme 5.9. Donc il suffit de montrer que 3 implique 1 et 1 implique 5.

$(3 \Rightarrow 1)$ Supposons que R a un point périodique indifférent dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$. On se ramene au cas $R(0) = 0$ et $|R'(0)| = 1$. Alors pour $r > 0$ assez petit $R\colon \{|z| \leqslant r\} \longrightarrow \{|z| \leqslant r\}$ est de degré 1 et par conséquent le point $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ associé à la boule $\{|z| < r\}$ est un point fixe indifférent de R_* ; voir aussi Proposition 4.5.

$(1 \Rightarrow 5)$ Soit $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ un point périodique indifférent de R_*. Quitte à remplacer R par un itéré on suppose que $\mathcal{S}$ est fixé par R_*. D'après le Lemme 5.9 on peut supposer que $\mathcal{S}$ est rationnel et après changement de coordonnée on suppose $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\text{can}}$. Alors R a une réduction $\tilde{R} \in \bar{\mathbb{F}}_p(z)$ de degré 1. Soit $\mathcal{P} \in \mathcal{S}_{\text{can}}$ et $n \geqslant 1$ tels que $R^n\colon B_{\mathcal{P}} \to B_{\mathcal{P}}$ soit de degré 1 (cf. Lemme 5.2 et Proposition 4.4). Alors $B_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{E}(R)$ (voir [R-L1] Corollaire 3.12). □

6. Théorèmes A et B

Fixons une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$ de degré au moins deux. Notons que par le Corollaire 5.6 le Théorème A suit du Théorème A$'$.

LEMME 6.1. *Soit $z_0 \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ un point fixe de R et soit $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ un point tel que $\mathcal{S} \in (z_0, R_*(\mathcal{S})) \subset \mathbb{H}_p$. Alors, soit z_0 est un point fixe répulsif de R, soit $(z_0, \mathcal{S})$ contient un point fixe répulsif de R_*.*

Preuve. Pour $r > 0$ soit $\mathcal{S}_r \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ le point associé à la boule $\{|z| < r\}$. Notons que la propriété $R_*(\mathcal{S}_r) \prec \{|z| < r\}$ est ouverte en r.

Comme $\mathcal{S} \in (z_0, R_*(\mathcal{S})) \subset \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$, le point $\mathcal{S}$ est nonsingulier. Après changement de coordonnée on suppose $z_0 = \infty$ et $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{r_0}$. Posons

$$r_1 = \sup\{r \geqslant r_0 \mid R_*(\mathcal{S}_{r'}) \prec \{|z| < r\} \text{ pour tout } r' \in (r_0, r)\} > r_0.$$

Si $r_1 = \infty$, alors $\infty \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ est un point fixe répulsif de R (cf. Proposition 4.5).

Supposons $r_1 < \infty$. Alors $R_*(\mathcal{S}_{r'}) \prec \{|z| < r_1\}$ pour tout $r' \in (r_0, r_1)$. Donc $R_*(\mathcal{S}_{r_1})$ appartient à la fermeture de $\hat{B} = \{\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p \mid \mathcal{S} \prec \{|z| < r_1\}\}$, qui est égale à $\hat{B} \cup \{\mathcal{S}_{r_1}\}$ (Lemme 3.8). Mais $R_*(\mathcal{S}_{r_1}) \notin \hat{B}$ par définition de r_1, donc $R_*(\mathcal{S}_{r_1}) = \mathcal{S}_{r_1}$. Par construction on a

$$d(R_*(\mathcal{S}_{r'}), \mathcal{S}_{r_1}) > d(\mathcal{S}_{r'}, \mathcal{S}_{r_1}), \quad \text{pour tout } r' \in (r_0, r_1).$$

Donc le degré de R au bout associé à $\{|z| < r_1\}$ est strictement plus grand que 1 (cf. partie 3 de la Proposition 4.6) et par conséquent $\deg_R(\mathcal{S}_{r_1}) > 1$. □

Preuve du Théorème A$'$. Si R a un point périodique indifférent le Théorème suit de la Proposition 5.8, donc on suppose que R a deux points périodiques attractifs z_0

et $z_1 \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$. Quitte à remplacer R par un itéré on suppose les points z_0 et z_1 fixés par R et après changement de coordonnée on suppose $z_0 = 0$ et $z_1 = \infty$.

Pour $r > 0$ soit $\mathcal{S}_r \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ le point associé à la boule $\{|z| < r\}$. Comme 0 est un point fixe attractif, pour $r > 0$ petit on a $R_*(\mathcal{S}_r) = \mathcal{S}_{r'}$, avec $r' < r$ (Proposition 4.5). C'est-à-dire $\mathcal{S}_r \in (\infty, R_*(\mathcal{S}_r)) \subset \mathbb{H}_p$. Par le Lemme 6.1, $(\infty, \mathcal{S}_r) \subset \mathbb{H}_p$ contient un point fixe répulsif de R_*. □

LEMME 6.2. *Soit* $R \in \mathbb{C}_p(z)$ *une fonction rationnelle et soit* $\mathcal{P}$ *un bout non-singulier tel que* $B_{\mathcal{P}} \subset B_{R_*(\mathcal{P})}$ *et* $R_*(\mathcal{P}) \neq \mathcal{P}$. *Alors on a les propriétés suivantes.*

(1) *La boule* $B_{\mathcal{P}}$ *contient au moins* $\deg_R(\mathcal{P}) \geqslant 1$ *points fixes de* R, *comptés avec multiplicité.*
(2) *Soit* $B_{\mathcal{P}} \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ *contient un point fixe répulsif de* R, *soit* $\hat{B}_{\mathcal{P}} = \{\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p \mid \mathcal{S} \prec B_{\mathcal{P}}\}$ *contient un point fixe répulsif de* R_*.

Preuve. (1) Après changement de coordonnée on suppose que $R_*(\mathcal{P})$ est le bout associé à $\{|z| < r\}$. Posons $Q(z) = R(z) - z \in \mathbb{C}_p(z)$. Alors il n'est pas difficile de voir que $Q_*(\mathcal{P}) = R_*(\mathcal{P})$ et $\deg_Q(\mathcal{P}) = \deg_R(\mathcal{P})$ (cf. Lemme 2.3 de [R-L1]). Par le Lemme 4.2 $B_{\mathcal{P}}$ contient au moins $\deg_Q(\mathcal{P}) = \deg_R(\mathcal{P})$ zéros de Q, comptés avec multiplicité.

(2) Soit $z_0 \in B_{\mathcal{P}}$ un point fixe de R et soit $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ le point contenant le bout $\mathcal{P}$. Comme on a $B_{\mathcal{P}} \subset B_{R_*(\mathcal{P})}$ et $R_*(\mathcal{P}) \neq \mathcal{P}$, on a $\mathcal{S} \in (z_0, R_*(\mathcal{S}))$ et l'assertion suit du Lemme 6.1. □

Preuve du Théorème B. Soit $z_0 \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ un point fixe non-répulsif de R. Il y a deux cas.

Cas (1) Le point fixe z_0 est attractif. Soit B une boule fermée contenant z_0, assez petite. Alors le bout $\mathcal{P}$ associé à $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B$ est tel que $B_{\mathcal{P}} \subset B_{R_*(\mathcal{P})}$ et $R_*(\mathcal{P}) \neq \mathcal{P}$ (cf. Proposition 4.5). Donc le théorème suit du lemme précédent dans ce cas.

Cas (2) Le point fixe z_0 est indifférent. Alors la composante analytique C de $\mathcal{E}(R)$ contenant z_0 est fixée par R. Soient $\mathcal{P}_0, \ldots, \mathcal{P}_n$ les bouts de C et soit $\mathcal{S}_i \in \mathbb{H}_p$ le point contenant $\mathcal{P}_i$. Notons que $\deg_R(\mathcal{P}_i) = 1$.

Alors R_* permute les bouts $\mathcal{P}_0, \ldots, \mathcal{P}_n$ et d'après le Théorème 1 il existe $0 \leqslant i \leqslant n$ tel que $\deg_R(\mathcal{S}_i) > 1$. Si $R_*(\mathcal{S}_i) = \mathcal{S}_i$ on a fini, donc on suppose $R_*(\mathcal{S}_i) = \mathcal{S}_j$ avec $j \neq i$. Comme $\deg_R(\mathcal{P}_i) = 1$ il existe un bout $\mathcal{P} \in \mathcal{S}_i$ différent de $\mathcal{P}_i$ tel que $R_*(\mathcal{P}) = R_*(\mathcal{P}_i) = \mathcal{P}_j$. En particulier $\mathcal{P} \neq \mathcal{P}_j = R_*(\mathcal{P})$. De plus on a,

$$B_{\mathcal{P}} \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B_{\mathcal{P}_i} \subset B_{\mathcal{P}_j}.$$

Alors le théorème suit de la partie 2 du Lemme 6.2. □

7. Appendice. Remarques sur l'espace hyperbolique

Notons que l'espace hyperbolique $\mathbb{H}_p$ n'est pas seulement un espace métrique, car chaque point rationnel a une structure algébrique donnée par un paramétrage par

https://doi.org/10.1023/A:1026136530383 Published online by Cambridge University Press

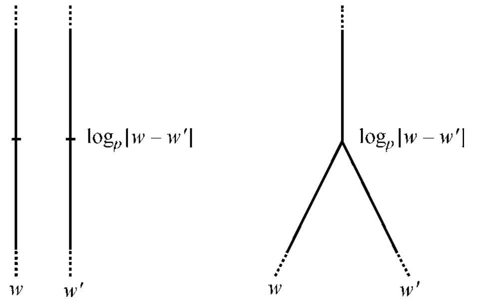

Figure 1.

l'espace projectif du corps résiduel $\tilde{\mathbb{C}}_p = \bar{\mathbb{F}}_p$; voir aussi Appendice 3. On remarque que l'espace métrique $(\mathbb{H}_p, d)$ ne dépend pas du nombre premier p (!).

On peut définir l'espace métrique $(\mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}, d)$ (et par conséquent $(\mathbb{H}_p, d)$ comme sa complétion) de façon assez courte comme suit.

Considérons la relation $\sim$ sur $\mathbb{C}_p \times \mathbb{R}$ définie par,

$$(w, t) \sim (w', t') \text{ si et suelement si } t = t' \text{ et } |w - w'| \leqslant p^t.$$

Le caractère ultremétrique de la norme $|\cdot|$, montre que cette relation est transitive et par conséquent c'est une relation d'équivalence; voir Figure 1. La distance usuelle sur $\mathbb{R}$ induit une distance sur $\mathbb{C}_p \times \mathbb{R}/\sim$:

la distance entre les points réprésentés par (w, t) et (w', t') est donnée par $|t - t'|$ si $|w - w'| \leqslant p^{\max\{t,t'\}}$ et en général par

$$2\max\{t, t', \log_p\ |w - w'|\} - t - t'. \tag{5}$$

De plus il n'est pas difficile de voir que l'espace métrique qu'on obtient est un arbre réel.

Considérons la bijection entre $\mathbb{C}_p \times \mathbb{R}/\sim$ et $\mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$, qui au point réprésenté par (w, t) associe le point de $\mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ ayant $\{|z - w| < p^t\}$ comme boule associée. Cette bijection est une isométrie, car la distance entre les points de $\mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ ayant

$$\{|z - w| < p^t\} \quad \text{et} \quad \{|z - w'| < p^{t'}\},$$

comme boules associées est par définition,

$$\frac{\log_p \operatorname{diam}(\{|z - w| < p^t\} \cup \{|z - w'| < p^{t'}\})^2}{\operatorname{diam}(\{|z - w| >< p^t\}) \cdot \operatorname{diam}(\{|z - w'| >< p^{t'}\})},$$

qui est égale à (5); voir (2) dans la Section 3.

7.1. BORD Á L'INFINI

Le bord à l'infini (voir par exemple [Ca]) de $\mathbb{H}_p$ est défini comme l'ensemble des classes d'équivalence de demi-géodésiques, par la relation d'équivalence suivante: deux

https://doi.org/10.1023/A:1026136530383 Published online by Cambridge University Press

demi-géodésiques sont équivalentes si et seulement si leur intersection est aussi une demi-géodésique. Soient z, $z' \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ et $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p$. Alors on voit facilement que les demi-géodésiques $[\mathcal{S}, z)$ et $[\mathcal{S}', z')$ sont équivalentes si et seulement si $z = z'$. Donc le bord à l'infini de $\mathbb{H}_p$ est canoniquement identifié à $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$.

La distance sur $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ induite par $\mathbb{H}_p$ (relative à $\mathcal{S}_{\mathrm{can}}$) est définie par,

$$\Delta(z, z') = p^{-d(\mathcal{S}_{\mathrm{can}}, \langle z, z' \rangle)},$$

où le point $\langle z, z' \rangle \in \mathbb{H}_p$ est déterminé par la propriété $[\mathcal{S}_{\mathrm{can}}, z) \cap [\mathcal{S}_{\mathrm{can}}, z') = [\mathcal{S}_{\mathrm{can}}, \langle z, z' \rangle)]$ (cf. Lemme 2.11). Cette distance coïncide avec la *distance chordale*:

$$\Delta(z, z') = \frac{|z - z'|}{\max\{1, |z|\} \cdot \max\{1, |z'|\}}, \text{ voir e.g. [MS] ou [R-L1].}$$

7.2. L'IMMEUBLE DE BRUHAT–TITS DE $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}_p)$

On montre maintenant que $\mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ est isométrique à l'immeuble de Bruhat-Tits associé à $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}_p)$; voir [BT] et [T].

Soit K un corps muni d'une valuation ultramétrique w. Dans notre cas $K = \mathbb{C}_p$ et $w(z) = -\log_p |z|$. On étend w à K posant $w(0) = \infty$. Posons $G = \mathrm{SL}(2, K)$ et pour chaque $r \in \mathbb{R}$ on considère le sous-groupe G_r de G engendre par les matrices de la forme,

$$\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & o \\ u' & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix},$$

où $w(u) \geqslant r$, $w(u') \geqslant r$ et $w(t) = 0$; cf. [T] pages 385–386. Notons que $G_0 = \mathrm{SL}(2, \mathcal{O}_K)$, où $\mathcal{O}_K = \{z \in K \mid w(z) \geqslant 0\}$ est l'anneau des entiers de K.

De plus considérons le sous-groupe de G:

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & t^{-1} \\ -t & 0 \end{pmatrix} \middle| t \in K \right\}$$

et la représentation v qui à $n = \left(\begin{smallmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{smallmatrix}\right) \in N$ associe la translation $v(n)(x) = x - 2w(t)$ de $\mathbb{R}$ et à $n = \left(\begin{smallmatrix} 0 & t^{-1} \\ -t & 0 \end{smallmatrix}\right) \in N$ la réflexion $v(n)(x) = 2w(t) - x$; cf. [BT] 6.1.

On considère la relation $\sim$ dans $G \times \mathbb{R}$ définie par

$$(g, r) \sim (g', r') \text{ si et seulement s'il existe} \tag{6}$$

$$n \in N \text{ tel que } r' = v(n)(r) \quad \text{et} \quad g^{-1}g'n \in G_r,$$

qui est une relation *d*'équivalence ([BT] 7.4.1 et [T] page 386). Notons que dans ce cas on a $G_{r'} = nG_r n^{-1}$. Alors l'*immeuble associé à* $G = \mathrm{SL}(2, K)$ est par définition l'ensemble quotient du produit $G \times \mathbb{R}$ par la relation d'équivalence (6); cf. [BT] 7.4.2. La distance usuelle de $\mathbb{R}$ induit une distance sur l'immeuble.

Considérons maintenant $K = \mathbb{C}_p$. L'immeuble de PGL$(2, \mathbb{C}_p)$ est défini de façon analogue et coïncide avec l'immeuble de SL$(2, \mathbb{C}_p)$; cf.(6). On identifie PGL$(2, \mathbb{C}_p)$ au groupe des automorphismes de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$. En particulier pour chaque $g \in$ PGL$(2, \mathbb{C}_p)$, g_* note l'action sur $\mathbb{H}_p$ induite par g.

Pour $r \in \mathbb{R}$ soit $\mathcal{S}_r \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ le point associé à la boule $\{z \in \mathbb{C}_p \mid |z| < p^r\}$. Alors le groupe G_r correspond au stabilisateur de $\mathcal{S}_r$ et le groupe N correspond au groupe des automorphismes de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ qui préservent $\{0, \infty\} \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ (et par conséquent la géodésique $(0, \infty) = \{\mathcal{S}_r\}_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$). De plus pour $n \in N$ et $r \in \mathbb{R}$ on a $n_*(\mathcal{S}_r) = \mathcal{S}_{v(n)(r)}$.

Considérons l'application π de PGL$(2, \mathbb{C}_p) \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$, qui au point réprésenté par (g, r) associe le point $g_*^{-1}(\mathcal{S}_r) \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$. Soient (g, r) et $(g', r') \in$ PGL$(2, \mathbb{C}_p) \times \mathbb{R}$. Alors $g_*^{-1}(\mathcal{S}_r) = (g')_*^{-1}(\mathcal{S}_{r'})$ si et seulement s'il existe $n \in N$ tel que $n_*(\mathcal{S}_r) = \mathcal{S}_{v(n)(r)} = \mathcal{S}_{r'}$ et tel que $(g^{-1}g'n)_*$ appartient au stabilisateur de $\mathcal{S}_r$, qui est égal à G_r. Par conséquent l'application π induit une bijection entre l'immeuble de SL$(2, \mathbb{C}_p)$ et $\mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$; on note encore cette application π.

De plus cette bijection est une isométrie. En effet, il suffit de vérifier que si la distance entre les points réprésentés par (g, r) et $(g, r') \in G \times \mathbb{R}$ est préservée par π. Comme g_* est une isométrie de $\mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ on a,

$$d(g_*^{-1}(\mathcal{S}_r), g_*^{-1}(\mathcal{S}_{r'})) = d(\mathcal{S}_r, \mathcal{S}_{r'}) = |r - r'|.$$

7.3. L'ESPACE ANALYTIQUE DE $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ AU SENS DE V. G. BERKOVICH

Considérons la fonction

$$\| \cdot \| \colon \mathbb{H}_p \sqcup \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) \longrightarrow [-\infty, \infty] = \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, \infty\}$$

définie comme suit. Pour $z \in \mathbb{C}_p^*$ on pose $\| z \| = \log_p |z|$ et on pose $\| 0 \| = -\infty$ et $\| \infty \| = +\infty$. Pour $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$, $r = \| \mathcal{S} \|$ est déterminé par la propriété $[\mathcal{S}, \infty) \cap (0, \infty) = [\mathcal{S}_r, \infty)$, où $\mathcal{S}_r$ est le point associé à la boule $\{|z| < p^r\}$.

L'espace analytique de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, au sens de [Ber], peut être défini comme l'ensemble $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) \sqcup \mathbb{H}_p$ muni de la topologie la moins fine telle que pour toute fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$ la fonction

$$\mathbb{H}_p \cup \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) \longrightarrow [-\infty, +\infty], \ \ \mathcal{S} \longrightarrow \ \| R_*(\mathcal{S}) \|$$

soit continue. Cette topologie induit une topologie strictement moins fine que celle induite par la distance d. En effet l'espace analytique de V. G. Berkovich est localement compact; voir [Ber]. De plus il n'est pas difficile de vérifier que tous les ouverts pour cette topologie ont un diamètre infini pour la distance d.

Remerciements

Ce papier à été écrit pendant le sejour de l'auteur à Institute for Mathematical Sciences, SUNY at Stony Brook.

Il est la première partie du IMS preprint #2001/12, de même titre.

Je voudrais remercier J.C. Yoccoz avec qui j'ai eu des nombreuses discussions intéressantes et qui a influencé énormeément ce travail. Je remercie également R. Benedetto pour des nombreuses discussions ainsi que pour plusieurs remarques et corrections qu'il a fait á une version précédente de ce travail. Mes remerciements vont aussi á E. Ghys et F. Paulin pour les références trés utiles qu'ils m'ont indiquées, ainsi que pour d'enrichissantes discussions. Je remercie aussi A. Escassut qui m'a indiquée quelques références et G. Havard qui a fait des corrections d'orthographe pour l'introduction. Ce papier a profité d'un excellent rapporteur, et je tiens á le remercier pour ces suggestions et corrections.

Je voudrais enfin remercier le Collège de France pour son hospitalité.

Références

[Ben1] Benedetto, R.: Hyperbolic maps in p-adic dynamics, *Ergodic. Theory Dynam. Systems* **21** (2001), 1–11.

[Ben2] Benedetto, R.: Reduction, dynamics, and Julia sets of rational functions, *J. Number Theory* **86** (2001), 175–195.

[Ber] Berkovich, V. G.: *Spectral Theory and Analytic Geometry over Non-Archimedean fields*, Math. Surveys Monogr. 33, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.

[Bou] Boussaf, K.: Images of circular filters, *Int. J. Math. Game Theory Algebra* **10** (2000), 365–372.

[BHM] Boussaf, K., Hemdaoui, M. et Maïnetti, N.: Tree structure on the set of multiplicative semi-norms of Kranser algebras H(D), *Rev. Mat. Complut.* **13** (2000), 85–109.

[BT] Bruhat, F. et Tits, J.: Groupes réductifs sur un corps local, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* **41** (1972), 5–251.

[Ca] Cartier, P.: Fonctions harmoniques sur un arbre, *Symposia Mathematica* (*Convegno di Calcolo delle Probabilità*, INDAM, Rome, 1971), Academic Press, London, 1972, pp. 203–270.

[Ep] Epstein, A.: Infinitesimal Thurston rigidity and the Fatou-Shishikura inequality, IMS preprint #1999/1.

[Es1] Escassut, A.: Algèbres de Banach ultramétriques et algèbres de Krasner–Tate, *Astérisque* **10** (1973).

[Es2] Escassut, A.: *Analytic Elements in p-adic Analysis*, World Scientific, Singapore, 1995.

[Hs] Hsia, L. C.: Closure of periodic points over a non-Archimidean field, *J. London Math. Soc.* **62** (2000), 685–700.

[Mi] Milnor, J.: *Dynamics in One Complex Variable*, Vieweg, Braunschweig, 1999.

[Mu] Mumford, D.: An analytic construction of degenerating curves over complete local rings, *Compositio Math.* **24** (1974), 129–174.

[MS] Morton, P. et Silverman, J.: Periodic points, multiplicities, and dynamical units, *J. Reine Agnew. Math.* **461** (1995), 81–122.

[P] Paulin, F.: Actions de groupes sur les arbres, *Séminaire Bourbaki*, Vol. 1995/96. *Astérisque* **241** (1997), 97–137.

[R-L1] Rivera-Letelier, J.: Dynamique des fonctions rationnelles sur des corps locaux, Thèse, Orsay 2000. À aparaître dans *Astérisque*.

[R-L2] Rivera-Letelier, J.: Sur la structure des ensembles de Fatou p-adiques, Prépublication 2002.

[Sh] Shishikura, M.: On the Quasiconformal surgery of rational functions, *Ann. Sci. École. Norm. Sup.* **20** (1987), 1–29.

[T] Tits, J.: A theorem of Lie–Kolchin for trees, *Contributions to Algebra* (Collection of papers dedicated to Ellis Kolchin), Academic Press, New York, 1977, pp. 377–388.
[Y] Yoccoz, J. C.: Notes d'un cours au Collège de France, 2001/2002. http://math.sunysb.edu/~rivera