



Transfert du pseudo-coefficient de Kottwitz et formules de caractère pour la série discrète de $GL(N)$ sur un corps local

P. Broussous

Abstract. Soit G le groupe $GL(N, F)$, où F est un corps localement compact et non archimédien. En utilisant la théorie des types simples de Bushnell et Kutzko, ainsi qu'une idée originale d'Henniart, nous construisons des pseudo-coefficients explicites pour les représentations de la série discrète de G . Comme application, nous en déduisons des formules inédites pour la valeur du caractère d'Harish-Chandra de certaines telles représentations en certains éléments elliptiques réguliers.

Introduction

Soit F un corps local non archimédien de caractéristique quelconque et $N > 1$ un entier naturel. L'objectif de cet article est d'établir des formules donnant le caractère de certaines représentations de la série discrète de $GL(N, F)$ en certains éléments elliptiques réguliers. Ces formules se veulent à la fois simples, et explicites, au sens où la valeur du caractère est reliée au type de Bushnell et Kutzko [BK] de la représentation.

Pour arriver à ces fins, nous nous servons de la formule de Kazhdan reliant la valeur du caractère d'une représentation de la série discrète à l'intégrale orbitale d'un pseudo-coefficient de cette représentation ([Ka] et [Ba]). L'obtention d'un pseudo-coefficient explicite est basée sur une idée originale de Guy Henniart. Celle-ci consiste à remarquer les faits suivants.

- Le pseudo-coefficient construit par Kottwitz [Kott] d'une représentation de carré intégrable Iwahori-sphérique vit dans l'algèbre de Hecke–Iwahori de son type.
- L'algèbre de Hecke du type d'une représentation de carré intégrable de $GL(N, F)$ est isomorphe, via les isomorphismes d'algèbres de Hecke de [BK], à une algèbre de Hecke–Iwahori d'un autre groupe linéaire H (sur un corps différent).

L'idée d'Henniart est alors de transférer les pseudo-coefficients des représentations Iwahori-sphériques de la série discrète de H via les divers isomorphismes d'algèbres de Hecke de [BK] en des fonctions sur G . Les fonctions obtenues sont alors des candidats pour être des pseudo-coefficients des représentations de la série discrète de G . Il faut en réalité travailler avec des algèbres de Hecke à caractère central, difficulté que nous omettons dans cette introduction.

Reçu par la rédaction le 11 juillet, 2012; revu le 20 février, 2013.

Publié électronique au 27 mai, 2013.

Classification (AMS) par sujet: 22E50.

Mots clés: reductive p -adic groups, discrete series, Harish-Chandra character, pseudo-coefficient.

Dans ce travail nous montrons que les candidats d’Henniart sont effectivement des pseudo-coefficients. Nous calculons leurs intégrales orbitales pour obtenir des formules de caractère dans deux cas :

- (i) L’extension de corps E/F qui paramétrise le type de Bushnell et Kutzko est non ramifiée et l’élément pour lequel on calcule le caractère est minimal au sens de [BK, (1.4.14)], et engendre dans $M(N, F)$ une extension non ramifiée.
- (ii) L’extension de corps E/F est totalement ramifiée, et l’élément elliptique régulier est minimal et engendre une extension totalement ramifiée.

Lorsqu’une représentation cuspidale irréductible π d’un groupe réductif p -adique G est donnée comme une induite compacte $\text{c-Ind}_K^G \rho$, où ρ est une représentation lisse d’un sous-groupe K ouvert compact modulo le centre de G , le caractère de π en un élément (elliptique) régulier est donné par une formule à la Frobenius faisant intervenir le caractère de ρ , comme dans le cas des groupes finis (voir par exemple [BH4, Théorème (A.14)]). Si π est une représentation de la série discrète, elle possède un type (K, ρ) , mais ne s’exprime plus comme induite compacte à partir de ce type si elle n’est pas cuspidale. Il est remarquable cependant que dans les cas (i) et (ii), le caractère de π est donné par des formules à la Frobenius qui utilisent le caractère d’une autre représentation (K', ρ') , qui se déduit de (K, ρ) par une modification relativement simple.

La motivation à la base de la rédaction de ce travail est double. Tout d’abord très peu de formules sont connues sur le caractère d’une représentation de carré intégrable de $\text{GL}(N, F)$ non cuspidale (voir plus bas pour un très bref rappel historique). Ensuite Bushnell et Henniart ont dans une série d’articles ([BH2] à [BH4]) explicité une grande partie de la correspondance de Jacquet–Langlands entre série discrète de $\text{GL}(N)$ et celle d’une de ses formes intérieures $\text{GL}(m, D)$, où D est une F -algèbre à division centrale. Leur méthode d’explicitation demande de connaître le caractère d’une représentation de la série discrète en suffisamment d’éléments elliptiques réguliers. N’ayant pas de formule générale à leur disposition, Bushnell et Henniart ont essentiellement traité le cas d’une représentation cuspidale s’envoyant sur une autre représentation cuspidale par la correspondance. Les formules des cas (i) et (ii) devraient permettre d’étendre leurs travaux à des situations plus générales.

Le calcul explicite des caractères de représentations lisses irréductibles des groupes réductifs sur F a une longue histoire qui remonte au moins aux travaux de Gelfand et Graev [GG]. Pour un très joli historique, nous renvoyons à l’article de P. J. Sally Jr. et L. Spice [SaSp]. Cependant les articles de Bushnell et Henniart sur l’explicitation de la correspondance de Jacquet–Langlands ([BH2] à [BH4]) contiennent nombre de formules de caractère inédites pour les cuspidales, dont il n’est pas fait mention dans [SaSp].

Les progrès effectués ces cinquante dernières années ne concernent principalement que les représentations cuspidales ou les induites paraboliques irréductibles. On sait très peu de choses sur les caractères des représentations non cuspidales de la série discrète (de $\text{GL}(n, F)$ ou bien d’autres groupes). A ma connaissance, seules sont connues les valeurs du caractère de la représentation de Steinberg pour un groupe réductif connexe quelconque, et les valeurs du caractère des représentations

de niveau 0 de la série discrète de $GL(m, D)$ en certains éléments minimaux, par les travaux de Silberger et Zink [SZ2]. Notons que Schneider et Stuhler ont obtenu des formules de caractères, dans une situation très générale, par des considérations homologiques sur l'immeuble affine de Bruhat–Tits. Cependant leurs formules ne sont pas exploitables pour obtenir des formules explicites en fonction des types, sauf en niveau 0, où ce travail reste à écrire.

Lorsque E/F est non ramifiée, et pour le groupe $GL(N, F)$, notre formule généralise celle de Silberger et Zink. Nous pensons que le principe du transfert d'un pseudo-coefficient devrait permettre d'obtenir des formules dans des situations beaucoup plus générales (en particulier pour d'autres groupes réductifs que $GL(N)$).

Cet article est structuré de la façon suivante. La section 1 consiste en un *très bref* rappel de la construction des *types simples* (de niveau > 0), c'est-à-dire des types contenus dans des représentations de la série discrète. Un type simple étant fixé, les représentations de la série discrète qui le contiennent sont construites à la section 5.

La structure des algèbres de Hecke–Iwahori est rappelée à la section 2, tandis que les isomorphismes d'algèbres de Hecke de Bushnell et Kutzko sont décrits à la section 3. La section 4 consiste en des définitions et lemmes techniques sur les algèbres de Hecke à caractère central. Nous avons eu besoin d'explicitier l'action d'une algèbre de Hecke sphérique sur certains modules. N'ayant pas trouvé de références pratiques, nous avons préféré donner des démonstrations dans l'annexe A.

À la section 6 nous démontrons que le transfert d'un pseudo-coefficient satisfaisant à des hypothèses raisonnables est un pseudo-coefficient. Nous avons besoin pour cela de savoir qu'un isomorphisme unitaire d'algèbres de Hecke préserve les représentations *tempérées*, fait qui nous a été communiqué par Bushnell et Henniart et qui est démontré en Annexe B. La construction du pseudo-coefficient de Kottwitz est rappelée à la section 7. Dans les sections 8 et 11 nous transférons ce pseudo-coefficient dans un premier cas, où E/F est non ramifiée, afin d'obtenir une première formule de caractère. Nous aurons besoin pour cela de lemmes techniques concernant les représentations du groupe linéaire sur un corps fini (sections 9 et 10). Ceux-ci permettent de calculer le caractère d'une sous-représentation irréductible d'une induite parabolique réductible en fonction d'un idempotent d'algèbre de Hecke. Malgré leur simplicité, nous ne leur connaissons pas de références et avons préféré donner des démonstrations complètes. Enfin dans la section 12, le transfert du pseudo-coefficient de Kottwitz est appliqué dans une deuxième situation, où E/F est ramifiée, pour obtenir une seconde formule de caractère.

D'un point de vue technique, ce travail est basé sur les isomorphismes d'algèbres de Hecke de [BK]. Nous aurons donc besoin de la plupart des concepts et résultats de cette monographie. Pour que cet article garde une taille raisonnable, nous supposons le lecteur familier avec le formalisme de Bushnell et Kutzko (strates, caractères et types simples).

L'auteur remercie chaleureusement Guy Henniart et Colin Bushnell pour de nombreux échanges instructifs et motivants. Il remercie également le *Referee* dont les remarques pertinentes ont permis d'améliorer grandement la présentation de ce travail.

0 Notations

Nous fixons pour tout l'article un corps localement compact, non discret et non archimédien F . Si K est un tel corps, on note

- \mathfrak{o}_K son anneau d'entiers,
- \mathfrak{p}_K l'idéal maximal de \mathfrak{o}_K ,
- k_K le corps résiduel de K ,
- ϖ_K le choix d'une uniformisante de K .

Si L/K est une extension algébrique finie de tels corps, on note respectivement $e(L/K)$ et $f(L/K)$ son indice de ramification et son degré d'inertie.

On fixe un entier $N \geq 2$ ainsi qu'un F -espace vectoriel V de dimension N . On note $G = \text{Aut}_F(V) \simeq \text{GL}(N, F)$ le groupe des automorphismes linéaires de V . C'est un groupe localement compact et totalement discontinu. Les représentations de G considérées dans ce travail seront toujours supposées *lisses* et *complexes*.

Si \mathcal{A} est un anneau unitaire, on note \mathcal{A}^\times , ou encore $U(\mathcal{A})$, son groupe d'unités. En particulier, en posant $A = \text{End}_F(V) \simeq M(N, F)$, on a $G = A^\times$. On note $\text{Rad}(\mathcal{A})$ le radical de Jacobson de \mathcal{A} .

Soit M une K -algèbre centrale simple sur un corps local non-archimédien K , isomorphe à $M(n, K)$ pour un entier $n > 0$, et soit \mathfrak{A} un \mathfrak{o}_K -ordre héréditaire de M . On note $e(\mathfrak{A}/\mathfrak{o}_K)$ l'indice de ramification défini par

$$\mathfrak{p}_K \mathfrak{A} = \text{Rad}(\mathfrak{A})^{e(\mathfrak{A}/\mathfrak{o}_K)}.$$

Le groupe des 1-unités de \mathfrak{A} , défini par $U^1(\mathfrak{A}) = 1 + \text{Rad}(\mathfrak{A})$ est distingué dans $U(\mathfrak{A})$. Si de plus \mathfrak{A} est *principal* (cf. [BK, section (1.1)]), le quotient $U(\mathfrak{A})/U^1(\mathfrak{A})$ est (non canoniquement) isomorphe à

$$\text{GL}((n/e), k_K)^{\times e}, \quad \text{où } e = e(\mathfrak{A}/\mathfrak{o}_K).$$

On note $\mathcal{K}(\mathfrak{A})$ le normalisateur de \mathfrak{A} dans M^\times :

$$\mathcal{K}(\mathfrak{A}) = \{x \in M^\times; x\mathfrak{A}x^{-1} = \mathfrak{A}\}.$$

Supposons de plus que $E/K \subset M$ est une extension de K et un sous-anneau unitaire de M , de sorte que le centralisateur B de K dans M est isomorphe à $M(n/[E:F], E)$. Alors si \mathfrak{B} est un \mathfrak{o}_E -ordre héréditaire de B , il existe un unique \mathfrak{o}_K -ordre héréditaire \mathfrak{A} de M tel que

$$\mathcal{K}(\mathfrak{B}) \subset \mathcal{K}(\mathfrak{A}),$$

et de plus $e(\mathfrak{B}/\mathfrak{o}_E) = e(\mathfrak{A}/\mathfrak{o}_K)/e(E/F)$. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [BK, section (1.2)].

1 Les données typiques

Puisque le caractère de Harish-Chandra d'une représentation irréductible de carré intégrable a déjà été étudié par Silberger et Zink en niveau 0 [SZ2], nous ne considérerons dans ce travail que des représentations de niveau > 0 , c'est-à-dire ne possédant

pas de vecteur fixe non nul sous le premier sous-groupe de congruence

$$K^1 = 1 + \varpi_F M(N, \mathfrak{o}_F).$$

Par [BK, corollaire (8.5.11), p. 304], toute représentation lisse irréductible de carré intégrable de G contient par restriction un type simple¹ de G au sens de *loc. cit.* section 5.

Un type simple (J, λ) de niveau > 0 de G est associé aux données suivantes.

- (a) Une strate simple $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ [BK, (1.5.5), p. 43]. En particulier \mathfrak{A} est un \mathfrak{o}_F -ordre héréditaire principal de A , β un élément non nul de A engendrant un corps $E = F[\beta]$, et normalisant l'ordre \mathfrak{A} . On a de plus $\beta\mathfrak{A} = \text{Rad}(\mathfrak{A})^{-n}$. On note $B = \text{End}_E(V)$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap B$; c'est un \mathfrak{o}_E -ordre héréditaire de B vérifiant $\mathcal{K}(\mathfrak{B}) \subset \mathcal{K}(\mathfrak{A})$. On pose :

$$e = e(\mathfrak{B}/\mathfrak{o}_E) = e(\mathfrak{A}/\mathfrak{o}_F)/e(E/F).$$

- (b) Un caractère simple $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{A}, 0, \beta)$ du groupe $H^1(\beta, \mathfrak{A}) \subset U(\mathfrak{A})$ [BK, section 3].
- (c) Une extension $\eta = \eta(\theta)$, dite de Heisenberg, de θ au groupe $J^1(\beta, \mathfrak{A})$ [BK, section 3 et Proposition (5.1.1), p. 158]. On a $H^1(\beta, \mathfrak{A}) \subset J^1(\beta, \mathfrak{A}) \subset U(\mathfrak{A})$ et η est à isomorphisme près l'unique représentation lisse irréductible de $J^1(\beta, \mathfrak{A})$ contenant θ par restriction.
- (d) Une β -extension κ de η au groupe $J = J(\beta, \mathfrak{A})$ [BK, section 3 et Definition (5.2.1), p. 166].

Le groupe $J(\beta, \mathfrak{A})/J^1(\beta, \mathfrak{A})$ s'identifie canoniquement à $U(\mathfrak{B})/U^1(\mathfrak{B})$, et non canoniquement à

$$\text{GL}\left(\frac{N}{[E:F]e}, k_E\right)^{\times e}.$$

- (e) Il existe alors une représentation cuspidale irréductible σ_0 de

$$\text{GL}\left(\frac{N}{([E:F]e)}, k_E\right),$$

telle que $\lambda = \kappa \otimes \sigma$, où $\sigma = \sigma_0^{\otimes e}$ est vue comme une représentation de $J(\beta, \mathfrak{A})$, triviale sur $J^1(\beta, \mathfrak{A})$.

Soit $\mathcal{R}_{(J,\lambda)}(G)$ le block de Bernstein formé des représentations lisses de G qui sont engendrées par leur composante λ -isotypique. Alors [BK, Theorem (7.7.1) et Corollary (8.5.11)] $\mathcal{R}_{(J,\lambda)}(G)$ contient toujours des représentations irréductibles de carré intégrable.

Nous aurons besoin aussi de travailler avec un type modifié (J', λ') défini dans [BK, section (5.6), p. 189], type pour la même composante de G que (J, λ) . Il est construit de la façon suivante.

On fixe une extension non ramifiée K/E de degré $f := N/([E:F]e)$ telle que $K^\times \subset \mathcal{K}(\mathfrak{B})$, et l'on note C la K -algèbre $\text{End}_K(V)$. L'ordre $\mathfrak{C} = \mathfrak{B} \cap C = \mathfrak{A} \cap C$ est un ordre héréditaire *minimal* (ou d'Iwahori) de C et $\mathcal{K}(\mathfrak{C}) \subset \mathcal{K}(\mathfrak{B}) \subset \mathcal{K}(\mathfrak{A})$.

¹Pour une introduction à la théorie générale des types, nous renvoyons le lecteur à [BK2].

On fixe un ordre maximal $\mathfrak{C}_M \supset \mathfrak{C}$ et on note \mathfrak{A}_M et \mathfrak{B}_M les ordres correspondants dans A et B respectivement. En d'autres termes, \mathfrak{A}_M (resp. \mathfrak{B}_M) est l'unique ordre héréditaire de l'algèbre A (resp. de l'algèbre B) tel que $\mathcal{K}(\mathfrak{C}_M) \subset \mathcal{K}(\mathfrak{A}_M)$ (resp. tel que $\mathcal{K}(\mathfrak{C}_M) \subset \mathcal{K}(\mathfrak{B}_M)$). L'ordre \mathfrak{B}_M est maximal, tandis que l'ordre \mathfrak{A}_M ne l'est pas toujours.

On note θ_M le transfert de θ à $H^1(\beta, \mathfrak{A}_M)$ (voir [BK, section (3.6)] pour la définition du transfert d'un caractère simple entre deux ordres). Soit η_M l'extension de Heisenberg de θ_M , et κ_M la β -extension de η_M attachée à κ comme dans [BK, Théorème (5.2.3), p. 167]. C'est une représentation de $J(\beta, \mathfrak{A}_M)$. On restreint κ_M en une représentation de $J' = U(\mathfrak{B})J_M^1$, où $J_M^1 = J^1(\beta, \mathfrak{A}_M)$.

Alors λ' est la représentation de J' donnée par $\kappa_M \otimes \sigma$. On voit ici σ comme une représentation de J' via l'isomorphisme canonique

$$J'/U^1(\mathfrak{B})J_M^1 \simeq U(\mathfrak{B})/U^1(\mathfrak{B}).$$

Le fait que la paire (J', λ') est un type pour la même composante de Bernstein que (J, λ) vient de ce que ces deux représentations s'induisent en des représentations irréductibles équivalentes de $U(\mathfrak{B})U^1(\mathfrak{A})$ [BK, Prop. (5.5.13), p. 185, et (5.2.5), p. 169].

2 L'algèbre de Hecke–Iwahori

Posons $H = \text{GL}_K(V) = C^\times$. Alors $U(\mathfrak{C})$ est un sous-groupe d'Iwahori de H , que l'on notera parfois I . On fixe une base (v_1, \dots, v_e) de V sur K , de sorte que dans l'identification $H \simeq \text{GL}(e, K)$, $U(\mathfrak{C})$ soit formé des matrices de $\text{GL}(d, \mathfrak{o}_K)$ qui sont triangulaires supérieures modulo \mathfrak{p}_K . On supposera alors que \mathfrak{C}_M est l'ordre maximal standard $M(e, \mathfrak{o}_K)$, de sorte que $U(\mathfrak{C}_M)$ est le sous-groupe compact maximal standard de H .

On note \mathcal{H}_0 l'algèbre de Hecke–Iwahori $\mathcal{H}(H//U(\mathfrak{C})) \simeq \mathcal{H}(H, \mathbf{1}_{U(\mathfrak{C})})$. Le produit de convolution est ici défini en choisissant comme mesure de Haar sur H celle qui donne un volume 1 à $U(\mathfrak{C})$. Elle admet pour base les fonctions caractéristiques

$$f_w^0 = \mathbf{1}_{U(\mathfrak{C})wU(\mathfrak{C})}$$

où w décrit le groupe de Weyl affine étendu W_0^{aff} de H . On note $W_0 = W_0^{\text{sph}}$ le groupe de Weyl sphérique de H relativement au sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures de H , et $S \subset W_0$ le système d'involutions habituel engendrant W_0 :

$$S = \{s_i; i = 1, \dots, e - 1\}$$

où s_i est la matrice correspondant à la transposition $(i, i + 1)$. Rappelons que (W_0, S) est un groupe de Coxeter. Le sous-groupe $U(\mathfrak{C})$ de $U(\mathfrak{C}_M)$ est le groupe “ B ” d'une BN-paire (ou système de Tits) du groupe $U(\mathfrak{C}_M)$, de groupe de Coxeter (W_0, S) .

La sous-algèbre $\mathcal{H}_0^{\text{sph}} = \mathcal{H}(U(\mathfrak{C}_M)//U(\mathfrak{C})) \subset \mathcal{H}_0$ est formée des fonctions à support dans $U(\mathfrak{C}_M)$. Elle admet pour base les f_w^0 , $w \in W_0$.

Nous aurons besoin pour la suite d'un système de représentants \mathcal{P} des H -classes de conjugaison des sous-groupes parahoriques de H . Un sous-groupe parahorique de

H est de la forme $U(\mathfrak{D})$, où \mathfrak{D} est un \mathfrak{o}_K -ordre héréditaire de $\text{End}_K(V)$. Dans la classe de conjugaison d'un parahorique, il y a toujours un $U(\mathfrak{D})$ tel que $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{D} \subset \mathfrak{C}_M$, de sorte que par propriété des systèmes de Tits, on a

$$U(\mathfrak{D}) = U(\mathfrak{C})\langle T \rangle U(\mathfrak{C})$$

pour un certain sous-ensemble T de S . On note que deux parahoriques

$$U(\mathfrak{D}_i) = U(\mathfrak{C})\langle T_i \rangle U(\mathfrak{C}), \quad T_i \subset S, i = 1, 2$$

sont conjugués si, et seulement si, T_1 et T_2 sont conjugués sous l'action du groupe $\langle \Pi \rangle$, où

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \varpi_K & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous fixons

$$\mathcal{P} = \{P_T = U(\mathfrak{C})\langle T \rangle U(\mathfrak{C}), T \in \Theta\}$$

où Θ désigne un système de représentants dans l'ensemble des parties de S pour la relation d'équivalence : $T_1 \sim T_2$ si les parties T_1 et T_2 sont conjuguées par une puissance de Π .

3 Les isomorphismes d'algèbres de Hecke

Nous nous référons ici à [BK, 5.6], eux-mêmes se référant à [HM]. Pour la définition de l'algèbre de convolution $\mathcal{H}(\mathcal{G}, \rho)$ des fonctions ρ -sphériques (ici \mathcal{G} est un groupe localement profini unimodulaire et ρ une représentation lisse irréductible d'un sous-groupe ouvert compact \mathcal{J} de \mathcal{G}) est rappelée en Annexe A. Nous renvoyons au chapitre 4 de [BK] pour plus de détails.

Le but de cette section est de rappeler la forme explicite de l'isomorphisme d'algèbres de Hecke :

$$\Psi: \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}(H, \mathbf{1}_{U(\mathfrak{C})}) \longrightarrow \mathcal{H}_{\lambda'} = \mathcal{H}(G, \lambda'),$$

ou du moins, c'est ce qui nous intéresse dans un premier temps, de sa restriction :

$$\Psi: \mathcal{H}_0^{\text{sph}} = \mathcal{H}(U(\mathfrak{C}_M)//U(\mathfrak{C})) \longrightarrow \mathcal{H}_{\lambda'}.$$

Nous allons rappeler sa construction.

Rappelons que $J_M = U(\mathfrak{B}_M)J_M^1$, $J' = U(\mathfrak{B})J_M^1$, et que le type (J', λ') est donné par $(\kappa_M)_{|J'} \otimes \sigma$, où :

- (J_M, κ_M) est la β -extension de η_M attachée à (J, κ) ,

– σ est vue comme une représentation de $U(\mathfrak{B})J_M^1$ triviale sur $U^1(\mathfrak{B})J_M^1$, via l'isomorphisme canonique

$$U(\mathfrak{B})J_M^1/U^1(\mathfrak{B})J_M^1 \simeq U(\mathfrak{B})/U^1(\mathfrak{B}).$$

Le quotient $J_M/J_M^1 =: \bar{G}$ est canoniquement isomorphe à $U(\mathfrak{B}_M)/U^1(\mathfrak{B}_M) \simeq \text{GL}(ef, k_E)$. Le sous-groupe J'/J_M^1 s'identifie alors à un sous-groupe parabolique \bar{P} de \bar{G} , de sous-groupe de Levi $\bar{L} = U(\mathfrak{B})/U^1(\mathfrak{B}) \simeq \text{GL}(f, k_E)^e$, et de radical unipotent $\bar{U} = U^1(\mathfrak{B})/U^1(\mathfrak{B}_M)$.

On peut donc regarder σ comme une représentation de \bar{L} et considérer son inflation à \bar{P} , que l'on note par le même symbole.

Rappelons le résultat principal de [HM].

Proposition 3.1 *Il existe un unique isomorphisme d'algèbres :*

$$\Upsilon : \mathcal{H}_0^{\text{sph}} \longrightarrow \mathcal{H}(\bar{G}, \sigma|_{\bar{P}})$$

qui préserve (dans un sens que nous allons préciser plus loin) le support des fonctions.

Remarque 3.2 La mesure de comptage sur \bar{G} qui définit le produit de convolution de $\mathcal{H}(\bar{G}, \sigma|_{\bar{P}})$ donne le volume 1 à tout singleton de \bar{G} .

Notons encore W_0 le groupe des matrices de permutation de $\text{GL}(e, k_E)$ plongé par blocs dans $\text{GL}(ef, k_E)$ (un "0" est remplacé par un bloc 0_f et un "1" par un bloc I_f).

L'entrelacement de $\sigma|_{\bar{P}}$ dans \bar{G} est alors donné par $\bar{P}W_0\bar{P}$. Notons X_0 l'espace de σ_0 et $X = X_0^{\otimes e}$ celui de σ . Pour chaque $w \in W_0$, on note \bar{f}_w , l'élément de $\mathcal{H}(\bar{G}, \sigma|_{\bar{P}})$, de support $\bar{P}W_0\bar{P}$, donné par

$$\bar{f}_w(p_1 w p_2) = \frac{1}{|\bar{P}|} \sigma^\vee(p_1) \circ T_w \circ \sigma^\vee(p_2) \quad p_1, p_2 \in \bar{P}$$

où T_w désigne l'endomorphisme de l'espace $X^\vee = (X_0^\vee)^{\otimes e}$ de σ^\vee donné par

$$T_w(x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_e) = x_{w(1)} \otimes x_{w(2)} \otimes \cdots \otimes x_{w(e)}.$$

Ces $\bar{f}_w, w \in W_0$, forment une base de $\mathcal{H}(\bar{G}, \sigma|_{\bar{P}})$.

Notons \bar{B} le sous-groupe de Borel standard supérieur du groupe $\text{GL}(e, k_K)$. Pour $w \in W_0$, notons \bar{f}_w^0 l'élément de l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}(\text{GL}(e, k_K), \bar{B})$ donné par

$$\bar{f}_w^0 = \frac{1}{|\bar{B}|} \mathbf{1}_{\bar{B}w\bar{B}}.$$

Les $\bar{f}_w^0, w \in W_0$, forment une base de cette algèbre. On a alors un isomorphisme d'algèbres [HM] :

$$\mathcal{H}(\bar{G}, \sigma|_{\bar{P}}) \longrightarrow \mathcal{H}(\text{GL}(e, k_K), \bar{B})$$

donné sur la base par :

$$\bar{f}_w \mapsto \bar{f}_w^0.$$

Quant à elle, l'algèbre $\mathcal{H}(GL(e, k_K), \bar{B})$ est naturellement isomorphe à

$$\mathcal{H}_0^{\text{sph}}(H//U(\mathbb{C})) = \mathcal{H}(U(\mathbb{C}_M)//U(\mathbb{C}))$$

par

$$\tilde{f}_w^0 \mapsto f_w^0 = \mathbf{1}_{U(\mathbb{C})wU(\mathbb{C})}, \quad w \in W_0.$$

Finalement notre isomorphisme Υ s'obtient en composant ces isomorphismes et est donné sur les bases par :

$$\begin{aligned} \Upsilon: \mathcal{H}_0^{\text{sph}} &\longrightarrow \mathcal{H}(\bar{G}, \sigma_{|\bar{p}}) \\ f_w^0 &\longmapsto \tilde{f}_w, \quad w \in W_0. \end{aligned}$$

La dernière étape est de plonger $\mathcal{H}(\bar{G}, \sigma_{|\bar{p}})$ dans l'algèbre $\mathcal{H}(G, \lambda')$ via l'isomorphisme d'algèbres

$$\mathcal{H}(\bar{G}, \sigma_{|\bar{p}}) \simeq \mathcal{H}(J_M, \lambda') \subset \mathcal{H}(G, \lambda')$$

donné par [BK, Lemma (5.6.3), p. 189]. Décrivons cet isomorphisme. Pour cela notons Y l'espace de κ_M .

N.B. Je n'ai pas les mêmes notations que [BK] : les rôles de X et Y sont interchangés.

À $\varphi \in \mathcal{H}(\bar{G}, \sigma_{|\bar{p}})$, est associée la fonction $\varphi': J_M \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(X^{\vee} \otimes Y^{\vee})$ donnée par

$$\varphi'(g) = \kappa_M^{\vee}(g) \otimes \varphi(\bar{g})$$

où \bar{g} désigne l'image de g dans $J_M/J_M^1 \simeq \bar{G}$.

Notons que, même si c'est tacite dans [BK], pour que $\varphi \mapsto \varphi'$ soit un morphisme d'algèbres, il nous faut imposer la notation suivante.

Notation 3.3 La mesure de Haar μ_G sur G est fixée de telle sorte que $\mu_G(J_M^1) = 1$.

N.B. Il y a une petite faute de frappe dans [BK], où il est écrit $g \in G$, au lieu de $g \in J_M$.

Nous noterons

$$\Psi_0: \mathcal{H}_0^{\text{sph}} \longrightarrow \mathcal{H}(J_M, \lambda') \subset \mathcal{H}(G, \lambda')$$

la composition des divers isomorphismes d'algèbres de Hecke construits précédemment.

Théorème 3.4 ([BK, Proposition (5.5.11), p. 185]) *L'entrelacement de (J', λ') dans G est $J'W_0^{\text{aff}}J'$, où, rappelons le, W_0^{aff} est le groupe de weyl affine de H .*

Considérons l'élément de $\mathcal{H}(H, \mathbf{1}_{U(\mathbb{C})})$ donné par $\zeta = \mathbf{1}_{U(\mathbb{C})\Pi U(\mathbb{C})} = \mathbf{1}_{\Pi U(\mathbb{C})}$.

Théorème 3.5 ([BK, Main Theorem (5.6.6), p. 190])

- (i) *Il existe un élément non nul ψ de $\mathcal{H}(G, \lambda')$ de support $J'\Pi J'$ et celui-ci est unique à un scalaire près.*

(ii) Pour tout élément ψ comme en (i), il existe un unique morphisme d'algèbres

$$\Psi: \mathcal{H}(H, \mathbf{1}_{U(\mathbb{C})}) \longrightarrow \mathcal{H}(G, \lambda')$$

qui prolonge Ψ_0 et vérifie $\Psi(\zeta) = \psi$.

De plus, une telle application Ψ est un isomorphisme d'algèbres qui préserve les supports au sens où le support de $\Psi(\mathbf{1}_{U(\mathbb{C})} w \mathbf{1}_{U(\mathbb{C})})$ est $J' w J'$, pour tout $w \in W_0^{\text{aff}}$.

Pour toute la suite de ce travail, nous fixons un tel isomorphisme Ψ . Nous supposons :

Hypothèse 3.6 L'isomorphisme Ψ est unitaire au sens de la définition (5.6.16) de [BK].

Rappelons [BK, (4.3), p. 153]) que l'algèbre $\mathcal{H}(G, \lambda')$ est canoniquement munie d'une (anti-)invololution (semi-linéaire) canonique $\Phi \mapsto \bar{\Phi}$. L'isomorphisme Ψ est alors dit *unitaire* si, avec les notations précédentes, on a $\psi \star \bar{\psi} = 1$. Notons que cette condition détermine Ψ à multiplication près par un nombre complexe de module 1.

4 Algèbres de Hecke à caractère central

Notons ω_0 un caractère de K^\times trivial sur \mathfrak{o}_K^\times et $\omega_0 \mathbf{1}_{U(\mathbb{C})}$ le caractère de $K^\times U(\mathbb{C})$ prolongeant ω_0 et $\mathbf{1}_{U(\mathbb{C})}$. Notons aussi $\mathcal{H}(H, \omega_0 \mathbf{1}_{U(\mathbb{C})})$ l'algèbre de Hecke des fonctions $f: H \rightarrow \mathbb{C}$ qui

- sont bi-invariantes sous l'action de l'Iwahori $U(\mathbb{C})$,
- vérifient $f(zg) = \omega_0^{-1}(z) f(g)$, $g \in H, z \in K^\times$,
- sont à support compact modulo le centre K^\times .

On note μ_H la mesure de Haar sur H donnant un volume 1 à l'Iwahori $U(\mathbb{C})$ et μ_{K^\times} la mesure de Haar sur K^\times donnant un volume 1 à \mathfrak{o}_K^\times . On désigne alors par μ_{H/K^\times} la mesure quotient définie par

$$\int_H f(x) d\mu_H(x) = \int_{H/K^\times} \left\{ \int_{K^\times} f(z y) d\mu_{K^\times}(z) \right\} d\mu_{H/K^\times}(y) \quad f \in \mathcal{C}_c^\infty(H).$$

La structure d'algèbre sur $\mathcal{H}(H, \omega_0 \mathbf{1}_{U(\mathbb{C})})$ est donnée par la convolution :

$$f_1 \star f_2(g) = \int_{H/K^\times} f_1(y) f_2(y^{-1}g) d\mu_{H/K^\times}(y) \quad f_1, f_2 \in \mathcal{H}(H, \omega_0 \mathbf{1}_{U(\mathbb{C})}).$$

Notons $\mathcal{R}_{\text{Iw}}(H)$ la catégorie des représentations lisses de H qui sont engendrées par leur sous-espace de vecteurs fixes sous le sous-groupe d'Iwahori $U(\mathbb{C})$ de H . Soit (σ, \mathcal{W}) un objet de $\mathcal{R}_{\text{Iw}}(H)$, de caractère central ω_0 . Alors le \mathbb{C} -espace vectoriel $N = \mathcal{W}^{U(\mathbb{C})} = \mathcal{W}^{\omega_0 \mathbf{1}_{U(\mathbb{C})}}$ est muni d'une structure de $\mathcal{H}(H, \mathbf{1}_{U(\mathbb{C})})$ -module à gauche via

$$\sigma(f).w = \int_H f(h) \sigma(h).w d\mu_H(h) \quad f \in \mathcal{H}(H, \mathbf{1}_{U(\mathbb{C})}), \quad w \in N$$

et d'une structure de $\mathcal{H}(H, \omega_0 \mathbf{1}_{U(\mathbb{G})})$ -module à gauche via :

$$\sigma(f).w = \int_{H/K^\times} f(h)\sigma(h).w \, d\mu_{H/K^\times}(\dot{h})$$

$f \in \mathcal{H}(H, \omega_0 \mathbf{1}_{U(\mathbb{G})})$, $w \in N$.

On a un morphisme surjectif d'algèbres :

$$P_{\omega_0} : \mathcal{H}(H, \mathbf{1}_{U(\mathbb{G})}) \longrightarrow \mathcal{H}(H, \omega_0 \mathbf{1}_{U(\mathbb{G})})$$

donné par

$$P_{\omega_0}(f)(y) = \int_{K^\times} \omega_0(z)f(zy) \, d\mu_{K^\times}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega_0(\varpi_K)^n f(\varpi_K^n y)$$

$y \in H$, $f \in \mathcal{H}(H, \mathbf{1}_{U(\mathbb{G})})$ (voir [BK, (6.1.6), p. 201]).

Lemme 4.1 Soit (σ, \mathcal{W}) une objet de $\mathcal{R}_{\text{Iw}}(H)$ de caractère central ω_0 . Notons $N = \mathcal{W}^{U(\mathbb{G})}$.

(a) Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(H, \mathbf{1}_{U(\mathbb{G})}) & \longrightarrow & \text{End}_{\mathbb{C}}(N) \\ \downarrow P_{\omega_0} & \nearrow & \\ \mathcal{H}(H, \omega_0 \mathbf{1}_{U(\mathbb{G})}) & & \end{array}$$

où les flèches non nommées découlent des structures de module de N .

(b) Si σ est admissible, alors pour tout $f \in \mathcal{H}(H, \mathbf{1}_{U(\mathbb{G})})$ on a

$$\text{Tr}(\sigma(f), N) = \text{Tr}(\sigma(P_{\omega_0}(f)), N).$$

Preuve Le point (a) découle d'un calcul immédiat et (b) en est une conséquence évidente.

De façon similaire, nous allons définir une algèbre $\mathcal{H}(G, \lambda'\omega)$ comme dans [BK, (6.1), p. 199]. Puisque la représentation (J', λ') est irréductible, le lemme de Schur affirme qu'il existe un caractère ω_λ de \mathfrak{o}_F^\times tel que, pour $z \in \mathfrak{o}_F^\times$, $\lambda'(z)$ est l'homothétie de rapport $\omega_\lambda(z)$. Fixons un caractère ω de F^\times tel que $\omega|_{\mathfrak{o}_F^\times} = \omega_\lambda$.

On définit l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G, \lambda'\omega)$ comme l'ensemble des fonctions $f : G \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\dot{W}'_\lambda)$ vérifiant :

- $f(j_1 g j_2) = (\lambda'\omega)^\vee(j_1) f(g) (\lambda'\omega)^\vee(j_2)$, $j_1, j_2 \in F^\times J'$, $g \in G$
- f est à support compact modulo le centre F^\times .

On fixe une mesure de Haar μ_{F^\times} sur F^\times de sorte que $\mu_{F^\times}(\mathfrak{o}_F^\times) = 1$ et on note μ_{G/F^\times} la mesure quotient correspondante sur G/F^\times . C'est cette dernière mesure qui nous permet de définir un produit de convolution sur $\mathcal{H}(G, \lambda'\omega)$.

On a aussi un morphisme surjectif d'algèbres

$$P_\omega : \mathcal{H}(G, \lambda') \longrightarrow \mathcal{H}(G, \lambda'\omega)$$

donné par

$$P_\omega(f)(g) = \int_{F^\times} \omega(z)f(zg) d\mu_{F^\times}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega(\varpi_F^n) f(\varpi_F^n g)$$

$g \in G, f \in \mathcal{H}(G, \lambda')$.

Considérons une représentation lisse (π, \mathcal{V}) de G , de caractère central ω . Elle donne lieu à deux \mathbb{C} -espaces vectoriels canoniquement isomorphes :

$$M = \text{End}_{J'}(\lambda', \pi) \quad \text{et} \quad M_\omega = \text{End}_{F^\times J'}(\lambda'\omega, \pi).$$

Plus exactement l'inclusion naturelle $M_\omega \subset M$ est en fait une égalité. Comme il est rappelé dans l'annexe A, le \mathbb{C} -espace $M = M_\omega$ est muni d'une structure de $\mathcal{H}(G, \check{\lambda}')$ -module à droite, ainsi que d'une structure de $\mathcal{H}(G, (\lambda'\omega)^\vee)$ -module à droite.

On a un morphisme surjectif d'algèbres

$$\check{P}_\omega : \mathcal{H}(G, \check{\lambda}') \longrightarrow \mathcal{H}(G, \lambda'\omega)$$

défini par la même formule que pour P_ω .

Lemme 4.2 (1) *On a un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(G, \check{\lambda}') & \xrightarrow{\quad} & \text{End}_{\mathbb{C}}(M) \simeq \text{End}_{\mathbb{C}}(M_\omega). \\ \downarrow \check{P}_\omega & \nearrow & \\ \mathcal{H}(G, \lambda'\omega) & & \end{array}$$

(2) *Pour tout $f \in \mathcal{H}(G, \check{\lambda}')$, on a*

$$\text{Tr}(f, M) = \text{Tr}(P_\omega(f), M_\omega).$$

Preuve Le point (2) découle évidemment de (1).

Soient $f \in \mathcal{H}(G, \check{\lambda}')$ et $\varphi \in M \simeq M_\omega$. Notons $f_\omega = \check{P}_\omega(f)$. Il s'agit de démontrer que $\varphi \cdot f = \varphi_\omega \cdot f_\omega$. D'après les lemmes A.2 et A.4 de l'annexe A, on a les formules :

$$\varphi \cdot f = \int_G \pi(x) \circ \varphi \circ f(x^{-1}) dx$$

et

$$\begin{aligned}
 \varphi \cdot f_\omega &= \int_{G/F^\times} \pi(x) \circ \varphi \circ f_\omega(x^{-1}) d\mu_{G/F^\times}(\dot{x}) \\
 &= \int_{G/F^\times} \left(\pi(x) \circ \varphi \circ \int_{F^\times} \omega(z) f(z^{-1}x^{-1}) d\mu_{F^\times}(z) \right) d\mu_{G/F^\times}(\dot{x}) \\
 &= \int_{G/F^\times} \int_{F^\times} \left(\pi(zx) \circ \varphi \circ f((zx)^{-1}) \right) d\mu_{F^\times}(z) d\mu_{G/F^\times}(\dot{x}) \\
 &= \int_F \pi(x) \circ \varphi \circ f(x^{-1}) dx \\
 &= \varphi \cdot f
 \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Rappelons que les algèbres $\mathcal{H}(G, \check{\lambda}')$ et $\mathcal{H}(G, \lambda')$ sont anti-isomorphes via l'opération $f \mapsto f^*$, définie par

$$f^*(g) = f(g^{-1})^\vee \quad g \in G, f \in \mathcal{H}(G, \check{\lambda}')$$

où on a noté \check{a} le transposé dans $\text{End}_{\mathbb{C}}(\check{W})$ d'un élément de $\text{End}_{\mathbb{C}}(W)$. On définit de façon similaire un anti-isomorphisme d'algèbres entre $\mathcal{H}(G, (\lambda'\omega)^\vee)$ et $\mathcal{H}(G, \lambda'\omega)$ que l'on note encore $f \mapsto f^*$. Ceci permet de munir M (resp. M_ω) d'une structure de $\mathcal{H}(G, \lambda')$ -module à gauche (resp. $\mathcal{H}(G, \lambda'\omega)$ -module à gauche) par la formule :

$$f \cdot \varphi = \varphi \cdot f^*.$$

Lemme 4.3

(1) On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{H}(G, \lambda') & \longrightarrow & \text{End}_{\mathbb{C}}(M) \simeq \text{End}_{\mathbb{C}}(M_\omega) \\
 \downarrow P_\omega & & \nearrow \\
 \mathcal{H}(G, \lambda'\omega) & &
 \end{array}$$

(2) Pour tout $f \in \mathcal{H}(G, \lambda')$, on a

$$\text{Tr}(f, M) = \text{Tr}(P_\omega(f), M_\omega).$$

Preuve A nouveau (2) découle directement de (1). Au vu du lemme précédent, pour montrer (1), il suffit d'établir la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{H}(G, \check{\lambda}') & \longrightarrow & \mathcal{H}(G, \lambda') \\
 \downarrow \check{P}_\omega & & \downarrow P_\omega \\
 \mathcal{H}(G, \lambda'\check{\omega}) & \longrightarrow & \mathcal{H}(G, \lambda'\omega)
 \end{array}$$

En effet, si $f \in \mathcal{H}(G, \lambda')$ et $g \in G$, on a

$$\check{P}_\omega(f)(g) = \int_Z \omega(z) f(zg) d\mu_Z(z)$$

et

$$\begin{aligned} (\check{P}_\omega(f)(g^{-1}))^\vee &= \int_Z \omega(z) f(zg^{-1})^\vee d\mu_Z(z) \\ &= \int_Z \left(\omega(z^{-1}) f((z^{-1}g)^{-1}) \right)^\vee d\mu_Z(z) \\ &= \int_Z \omega(t) f^*(tg) d\mu_Z(t) \\ &= P_\omega(f^*) \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Soit $\mathcal{H}(G, \omega)$ l'espace des fonctions f localement constantes sur G , à support compact modulo F^\times et vérifiant $f(zg) = \omega^{-1}(z)f(g)$, $f \in F^\times, g \in G$. On le munit d'une structure d'algèbre via le produit de convolution

$$f_1 \star f_2(g) = \int_{G/F^\times} f_1(x) f_2(x^{-1}g) d\mu_{G/F^\times}(x).$$

On note $e_{\lambda'\omega}$ l'idempotent de $\mathcal{H}(G, \omega)$ défini par

$$e_{\lambda'\omega}(x) = \begin{cases} \mu_{G/F^\times}(J'F^\times) \dim(\lambda') \text{Tr}(\lambda'\omega)(x^{-1}) & \text{si } x \in J'F^\times \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

de sorte que $e_{\lambda'\omega} \star \mathcal{V}$ est la composante λ' -isotypique $\mathcal{V}^{\lambda'}$ de \mathcal{V} , pour toute représentation lisse \mathcal{V} de caractère central ω .

Par [BK, Proposition (4.2.4) et Remark (4.2.6)], on a un isomorphisme canonique d'algèbres de Hecke :

$$\Upsilon_{\lambda'\omega} : \mathcal{H}(G, \lambda'\omega) \otimes_{\mathbb{C}} \text{End}_{\mathbb{C}}(W_{\lambda'}) \longrightarrow e_{\lambda'\omega} \star \mathcal{H}(G, \omega) \star e_{\lambda'\omega}.$$

Rappelons brièvement comment cet isomorphisme est construit. On commence par identifier $\text{End}_{\mathbb{C}}(W_{\lambda'})$ à $W_{\lambda'} \otimes \check{W}_{\lambda'}$ de la façon canonique habituelle. Si $\varphi \in \mathcal{H}(G, \lambda'\omega)$, $w \in W_{\lambda'}, \check{w} \in \check{W}_{\lambda'}$, l'image $\Phi = \Upsilon_{\lambda'\omega}(\varphi \otimes w \otimes \check{w})$ est donnée par

$$\Phi(g) = \dim(\lambda') \langle w, \varphi(g)\check{w} \rangle.$$

En particulier si (w_i) est une base de $W_{\lambda'}$, de base duale (\check{w}_i) , on a $\text{id}_{W_{\lambda'}} = \sum_i w_i \otimes \check{w}_i$, et

$$\Upsilon_{\lambda'\omega}(\varphi \otimes \text{id}_{W_{\lambda'}})(g) = \dim(\lambda') \sum_i \langle w_i, \varphi(g)\check{w}_i \rangle = \dim(\lambda') \text{Tr}_{\check{W}_{\lambda'}}(\varphi(g)),$$

$g \in G \varphi \in \mathcal{H}(G, \lambda'\omega)$. Pour résumer :

Lemme 4.4 Pour tout $f \in \mathcal{H}(G, \lambda' \omega)$, on a

$$\Upsilon_{\lambda' \omega}(f \otimes \text{id}_{W_{\lambda'}}) = \text{Tr}_{\check{W}_{\lambda'}} \circ f.$$

Oubliant le caractère central, on peut, comme dans [BK, (4.2)], considérer l’idempotent $e_{\lambda'}$ de $\mathcal{H}(G)$ associé à la représentation (J', λ') et l’algèbre de Hecke $e_{\lambda'} \star \mathcal{H}(G) \star e_{\lambda'} \subset \mathcal{H}(G)$. On a alors un isomorphisme canonique

$$\Upsilon_{\lambda'} : \mathcal{H}(G, \lambda') \otimes_{\mathbb{C}} \text{End}_{\mathbb{C}}(W_{\lambda'}) \longrightarrow e_{\lambda'} \star \mathcal{H}(G) \star e_{\lambda'}$$

qui est donné par la même formule que celle de $\Upsilon_{\lambda' \omega}$.

On a aussi un homomorphisme surjectif d’algèbres :

$$\Pi_{\omega} : e_{\lambda'} \star \mathcal{H}(G) \star e_{\lambda'} \longrightarrow e_{\lambda' \omega} \star \mathcal{H}(G) \star e_{\lambda' \omega}$$

qui est donné par

$$\Pi_{\omega}(f) = \int_{F^{\times}} \omega(z) f(zg) d\mu_{F^{\times}}(z).$$

On vérifie facilement le résultat suivant.

Lemme 4.5 Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(G, \lambda') \otimes \text{End}_{\mathbb{C}}(W_{\lambda'}) & \xrightarrow{\Upsilon_{\lambda'}} & e_{\lambda'} \star \mathcal{H}(G) \star e_{\lambda'} \\ P_{\omega} \otimes \text{id} \downarrow & & \downarrow \Pi_{\omega} \\ \mathcal{H}(G, \lambda' \omega) \otimes \text{End}_{\mathbb{C}}(W_{\lambda'}) & \xrightarrow{\Upsilon_{\lambda' \omega}} & e_{\lambda' \omega} \star \mathcal{H}(G) \star e_{\lambda' \omega}. \end{array}$$

5 Série discrète et algèbres de Hecke

Soient (J, λ) un type simple comme au section 1 (dont nous gardons les notations) et (J', λ') son type modifié. On note $\mathcal{R}(G)$ (resp. $\mathcal{R}(H)$) la catégorie des représentations lisses de G (resp. de H), $\mathcal{R}_{\lambda}(G)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{R}(G)$ correspondant aux types λ et λ' , et finalement $\mathcal{R}_{\text{Iw}}(H)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{R}(H)$ correspondant au type $(U(\mathbb{C}), \mathbf{1}_{U(\mathbb{C})})$.

Fixons un isomorphisme *unitaire* d’algèbres de Hecke

$$\Psi : \mathcal{H}(H, \mathbf{1}_{U(\mathbb{C})}) \longrightarrow \mathcal{H}(G, \lambda')$$

comme dans la section 3. Il induit une équivalence Ψ_* entre les catégories de modules à gauche correspondantes :

$$\Psi_* : \mathcal{H}(H, \mathbf{1}_{U(\mathbb{C})})\text{-Mod} \longrightarrow \mathcal{H}(G, \lambda')\text{-Mod}.$$

Concrètement, si M est un $\mathcal{H}(H, \mathbf{1}_{U(\mathbb{C})})$ -module, $\Psi_*(M)$ est le module bâti sur le même \mathbb{C} -espace avec l'action :

$$f.m = \Psi^{-1}(f).m \quad f \in \mathcal{H}(G, \lambda'), m \in M.$$

Rappelons aussi les équivalences de catégories induites par la *Théorie des Types* (nous renvoyons le lecteur à [BK2]):

$$\begin{aligned} \text{Mod}_\lambda: \mathcal{R}_\lambda(G) &\longrightarrow \mathcal{H}(G, \lambda')\text{-Mod} \\ (\pi, \mathcal{V}) &\longmapsto \text{Hom}_{J'}(\lambda', \mathcal{V}) \\ \text{Mod}_{\text{Iw}}: \mathcal{R}_{\text{Iw}}(H) &\longrightarrow \mathcal{H}(H, \mathbf{1}_{U(\mathbb{C})})\text{-Mod} \\ (\sigma, \mathcal{W}) &\longmapsto \text{Hom}_{U(\mathbb{C})}(\mathbf{1}_{U(\mathbb{C})}, \mathcal{W}) \simeq \mathcal{W}^{U(\mathbb{C})}. \end{aligned}$$

On note \mathcal{E}_Ψ l'équivalence de catégories rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{\text{Iw}}(H) & \xrightarrow{\mathcal{E}_\Psi} & \mathcal{R}_\lambda(G) \\ \text{Mod}_{\text{Iw}} \downarrow & & \downarrow \text{Mod}_\lambda \\ \mathcal{H}(H, \mathbf{1}_{U(\mathbb{C})})\text{-Mod} & \xrightarrow{\Psi_*} & \mathcal{H}(G, \lambda')\text{-Mod} \end{array}$$

Rappelons qu'une représentation lisse irréductible d'un groupe réductif p -adique est dite de *carré intégrable* si son caractère central est unitaire et si ses coefficients sont de carré intégrable modulo le centre. Nous réserverons l'expression *représentation de la série discrète* (ou encore *représentation essentiellement de carré intégrable*) à une représentation obtenue d'une représentation de carré intégrable par torsion par un caractère lisse du groupe.

Nous aurons besoin du résultat suivant dû à Bushnell et Kutzko.

Théorème 5.1 ([BK, Theorem (7.7.1) et Gloss (7.7.2), p. 257]) *Soit (σ, W) une représentation irréductible, objet de $\mathcal{R}_{\text{Iw}}(H)$. Alors (σ, W) est de carré intégrable si, et seulement si, $\mathcal{E}_\Psi(\sigma)$ est de carré intégrable.*

Soit $B \subset H$ le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures. Notons i_B^H et I_B^H les foncteurs d'induction parabolique respectivement normalisé et non normalisé. Soit σ une représentation irréductible de carré intégrable de H , supposée Iwahori-sphérique (objet de $\mathcal{R}_{\text{Iw}}(H)$). On sait qu'il existe un unique caractère unitaire non ramifié χ de K^\times tel que σ soit isomorphe à un quotient de l'induite parabolique

$$i_B^H(|\cdot|_{K^2}^{\frac{1-n}{2}} \chi \otimes |\cdot|_{K^2}^{\frac{3-n}{2}} \chi \otimes \cdots \otimes |\cdot|_{K^2}^{\frac{n-1}{2}} \chi) = I_B^H(\chi \otimes \cdots \otimes \chi) = \chi \circ \det \otimes (I_B^H \mathbf{1}_B).$$

La représentation de Steinberg de H , notée \mathbf{St}_H est par définition l'unique quotient irréductible de $I_B^H(\mathbf{1}_B)$. Les autres représentations Iwahori-sphériques et de carré intégrable de H sont donc, à isomorphisme près, les tordues $\chi \otimes \mathbf{St}_H = (\chi \circ \det) \otimes \mathbf{St}_H$, où χ parcourt les caractères unitaires non ramifiés de K^\times .

Nous avons donc montré le résultat suivant.

Lemme 5.2 Les objets de $\mathcal{R}_\lambda(G)$ qui sont irréductibles et de carré intégrable sont, à isomorphisme près, les

$$\pi_\chi = \mathcal{E}_\Psi(\chi \otimes \mathbf{St}_H).$$

où χ décrit les caractères unitaires et non ramifiés de K^\times .

Soit χ un caractère unitaire et non ramifié de K^\times . Un calcul immédiat, basé sur l'isomorphisme d'algèbres de Hecke de [BK, (5.6.6)], montre qu'il existe un isomorphisme unitaire d'algèbres de Hecke

$$\Psi' : \mathcal{H}(H, \mathbf{1}_{U(\mathbb{C})}) \longrightarrow \mathcal{H}(G, \lambda')$$

tel que

$$\mathcal{E}_\Psi(\chi \otimes \mathbf{St}_H) \simeq \mathcal{E}_{\Psi'}(\mathbf{St}_H).$$

Corollaire 5.3 Soit π une représentation irréductible de carré intégrable, objet de $\mathcal{R}_\lambda(G)$. Il existe alors un isomorphisme unitaire d'algèbres de Hecke

$$\Psi : \mathcal{H}(H, \mathbf{1}_{U(\mathbb{C})}) \longrightarrow \mathcal{H}(G, \lambda')$$

tel que

$$\pi \simeq \mathcal{E}_\Psi(\mathbf{St}_H).$$

6 Le principe du transfert d'un pseudo-coefficient

Pour alléger les notations, nous notons $I = U(\mathbb{C})$.

Rappelons qu'on a une équivalence de catégories :

$$\mathcal{H}(H, \mathbf{1}_I)\text{-Mod} \longrightarrow \mathcal{R}_{Iw}(H)$$

dont l'inverse est donnée par

$$\begin{aligned} \text{Mod}_I (= \text{Mod}_{Iw}) : \mathcal{R}_{Iw}(H) &\longrightarrow \mathcal{H}(H, \mathbf{1}_I)\text{-Mod} \\ (\pi, \mathcal{V}) &\longmapsto \mathcal{V}^I \simeq \text{Hom}_I(\mathbf{1}_I, \mathcal{V}). \end{aligned}$$

Soit $(\sigma_0, \mathcal{W}_0)$ la représentation de Steinberg de H ; elle est de carré intégrable et son caractère central ω_0 est le caractère trivial de K^\times . On note $M_0 = \mathcal{W}_0^I$ le $\mathcal{H}(H, \mathbf{1}_I)$ -module correspondant. Par [BH, (3.6.1), pp. 323–324], le module M_0 est de dimension 1.

Soit f_0 un pseudo-coefficient de $(\sigma_0, \mathcal{W}_0)$. Par définition, f_0 est un élément de $\mathcal{H}(H, \omega_0)$ qui vérifie la condition suivante. Pour toute représentation irréductible lisse tempérée (σ, \mathcal{W}) de H , de caractère central ω_0 , on a

$$\text{Tr}(\sigma(f_0), \mathcal{W}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma \simeq \sigma_0 \\ 0 & \text{si } \sigma \not\simeq \sigma_0. \end{cases}$$

Nous faisons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 6.1 La fonction f_0 appartient à $\mathcal{H}(H, \omega_0 \mathbf{1}_I)$.

Soit $F_0 \in \mathcal{H}(H, \mathbf{1}_I)$ une fonction telle que $P_{\omega_0}(F_0) = f_0$.

Notons que si (σ, \mathcal{W}) est un objet de $\mathcal{R}_{\text{Iw}}(H)$ de caractère central ω_0 , on a successivement :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\sigma(f_0), \mathcal{W}) &= \text{Tr}(\sigma(F_0), \mathcal{W}), \quad \text{par le lemme 4.1} \\ &= \text{Tr}(\sigma(F_0 \star e_I), \mathcal{W}) \\ &= \text{Tr}(\sigma(F_0), e_I \star \mathcal{W}) \\ &= \text{Tr}(F_0, M) \end{aligned}$$

où $M = \text{Mod}_I(\mathcal{W}) = \mathcal{W}^I$. On a donc le lemme suivant.

Lemme 6.2 Pour toute représentation tempérée (σ, \mathcal{W}) objet de $\mathcal{R}_{\text{Iw}}(H)$, de caractère central ω_0 , et de $\mathcal{H}(H, \mathbf{1}_I)$ -module associé $\text{Mod}_I(\mathcal{W}) = M$, on a

$$\text{Tr}(F_0, M) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma \simeq \sigma_0 \text{ c'est-à-dire si } M \simeq M_0 \\ 0 & \text{si } \sigma \not\simeq \sigma_0 \text{ c'est-à-dire si } M \not\simeq M_0. \end{cases}$$

Fixons un isomorphisme unitaire d'algèbres de Hecke

$$\Psi: \mathcal{H}(H, \mathbf{1}_I) \longrightarrow \mathcal{H}(G, \lambda').$$

Il induit une équivalence de catégories :

$$\Psi^*: \mathcal{H}(H, \mathbf{1}_I)\text{-Mod} \longrightarrow \mathcal{H}(G, \lambda')\text{-Mod}$$

pour M objet de $\mathcal{H}(H, \mathbf{1}_I)\text{-Mod}$, $\Psi^*(M) = M$ comme \mathbb{C} -espace vectoriel, et où la structure de module est donnée par :

$$\varphi \star m = \Psi^{-1}(\varphi) \star m \quad m \in M, \varphi \in \mathcal{H}(G, \lambda').$$

En particulier, pour tout $\varphi_0 \in \mathcal{H}(H, \mathbf{1}_I)$ et tout $M \in \mathcal{H}(H, \mathbf{1}_I)\text{-Mod}$, on a

$$\text{Tr}(\varphi_0, M) = \text{Tr}(\Psi(\varphi_0), \Psi^*(M)).$$

Le résultat suivant est l'outil principal qui fait fonctionner notre procédure. Il se déduit aisément des travaux de Bushnell, Henniart et Kutzko [BHK] sur le lien entre types et formule de Plancherel et sera démontré dans l'annexe B.

Théorème 6.3 Soit (σ, \mathcal{W}) une représentation irréductible, objet de $\mathcal{R}_{\text{Iw}}(H)$, de $\mathcal{H}(H, \mathbf{1}_I)$ -module associé M , et soit $(\pi, \mathcal{V}) = \mathcal{E}_\Psi(\sigma, \mathcal{W})$ l'objet de $\mathcal{R}_\lambda(G)$ de $\mathcal{H}(G, \lambda')$ -module associé $\Psi^*(M)$. Alors la représentation (σ, \mathcal{W}) est tempérée si, et seulement si, la représentation (π, \mathcal{V}) l'est.

Notons $M_\lambda = \Psi^*(M_0)$, et soit $(\pi_\lambda, \mathcal{V}_\lambda) = \mathcal{E}_\Psi(\sigma_0, \mathcal{W}_0)$ l'objet de $\mathcal{R}_\lambda(G)$ correspondant au module M_λ . Par le théorème 5.1, la représentation $(\pi_\lambda, \mathcal{V}_\lambda)$ est de carré intégrale. Notons ω son caractère central.

Notation 6.4 Nous considérons les fonctions suivantes :

- (i) $F_\lambda = \Psi(F_0) \in \mathcal{H}(G, \lambda')$,
- (ii) $f_\lambda = P_\omega(F_\lambda) \in \mathcal{H}(G, \lambda'\omega)$,
- (iii)

$$\varphi_\lambda = \Upsilon_{\lambda'\omega} \left\{ \frac{1}{\dim(\lambda')} f_\lambda \otimes \text{id}_{W_\lambda} \right\} = \text{Tr}_{W_{\lambda'}} \circ f_\lambda \in e_{\lambda'\omega} \star \mathcal{H}(G, \omega) \star e_{\lambda'\omega}.$$

Proposition 6.5 La fonction φ_λ est un pseudo-coefficient de la représentation $(\pi_\lambda, \mathcal{V}_\lambda)$.

Démonstration Soit (π, \mathcal{V}) une représentation lisse irréductible tempérée, de caractère central ω , du groupe G . Distinguons deux cas.

Cas n° 1 La représentation (π, \mathcal{V}) n'est pas un objet de la catégorie $\mathcal{R}_\lambda(G)$. En particulier $\pi \not\cong \pi_\lambda$. Par définition $\pi(e_{\lambda'})\mathcal{V} = \pi(e_{\lambda'\omega})\mathcal{V} = 0$. On a donc

$$\text{Tr}(\pi(\varphi_\lambda), \mathcal{V}) = \text{Tr}(\pi(\varphi_\lambda \star e_{\lambda'\omega}), \mathcal{V}) = \text{Tr}(\pi(\varphi_\lambda), \pi(e_{\lambda'\omega})\mathcal{V}) = 0.$$

Cas n° 2 Supposons que (π, \mathcal{V}) soit un objet de $\mathcal{R}_\lambda(G)$. Notons :

- M le $\mathcal{H}(G, \lambda)$ -module correspondant à (π, \mathcal{V}) ;
- $(\sigma, \mathcal{W}) = \mathcal{E}_\Psi^{-1}(\pi, \mathcal{V})$;
- N le $\mathcal{H}(H, \mathbf{1}_I)$ -module correspondant à (σ, \mathcal{W}) .

Par le théorème 6.3, la représentation (σ, \mathcal{W}) est tempérée.

Rappelons que les algèbres $\mathcal{H}(G, \lambda')$ et $e_{\lambda'} \star \mathcal{H}(G) \star e_{\lambda'}$ (resp. $(\mathcal{H}, \lambda'\omega)$ et $e_{\lambda'\omega} \star \mathcal{H}(G, \omega) \star e_{\lambda'\omega}$) sont équivalentes au sens de Morita, et que l'on a l'isomorphisme $\Upsilon_{\lambda'\omega}$:

$$\mathcal{V}^{\lambda'} = \mathcal{V}^{\lambda'\omega} \simeq M \otimes W_{\lambda'}.$$

Nous pouvons écrire successivement :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\varphi_\lambda, \mathcal{V}) &= \text{Tr}(\varphi_\lambda, \mathcal{V}^{\lambda'}) \\ &= \text{Tr} \left(\Upsilon_{\lambda'\omega} \left\{ \frac{1}{\dim(\lambda')} f_\lambda \otimes \text{id}_{W_{\lambda'}} \right\}, \mathcal{V}^{\lambda'} \right) \\ &= \text{Tr} \left(\frac{1}{\dim(\lambda')} f_\lambda \otimes \text{id}_{W_{\lambda'}}, M \otimes W_{\lambda'} \right) \\ &= \text{Tr}(f_\lambda, M) \frac{1}{\dim(\lambda')} \text{Tr}(\text{id}_{W_{\lambda'}}, W_{\lambda'}) \\ &= \text{Tr}(f_\lambda, M) = \text{Tr}(F_\lambda, M) \\ &= \text{Tr}(\Psi(F_0), \Psi^*(N)) = \text{Tr}(F_0, N). \end{aligned}$$

Soit $\omega'_0 = (\omega_0)_{|F^\times}$ le caractère trivial de F^\times (rappelons que ω_0 est trivial). Notons

$$P_{\omega'_0} : \mathcal{H}(H) \longrightarrow \mathcal{H}(H, \omega'_0)$$

le morphisme d'algèbres donné par

$$P_{\omega'_0}(f)(h) = \int_{F^\times} \omega'_0(z) f(zh) d\mu_{F^\times}(z) \quad f \in \mathcal{H}(f), h \in H$$

où μ_{F^\times} est la mesure de Haar sur F^\times donnant le volume 1 à \mathfrak{o}_F^\times .

Notons $f'_0 = P_{\omega'_0}(F_0)$. Par le lemme (7.7.6) de [BK], le caractère central de σ vérifie : $(\omega_\sigma)_{|F^\times} = \omega'_0$, de sorte que σ peut se voir comme une représentation de H/F^\times . Il est alors clair que σ est une représentation tempérée de H/F^\times . En effet cela découle facilement du fait [Wa] qu'une représentation lisse irréductible unitaire ρ d'un groupe réductif p -adique \mathcal{G} de centre \mathcal{Z} est tempérée si, et seulement si, tout coefficient de ρ est dans $L^{2+\epsilon}(\mathcal{G}/\mathcal{Z})$, pour tout $\epsilon > 0$.

Nous faisons la *seconde hypothèse* suivante :

Hypothèse 6.6 Il existe une constante non nulle $c \in \mathbb{C}$, telle que, vue comme représentation de H/F^\times , $(\sigma_0, \mathcal{W}_0)$ admet la fonction $c \cdot f'_0$ comme pseudo-coefficient.

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\varphi_\lambda, \mathcal{V}) &= \text{Tr}(F_0, \mathcal{W}) \\ &= \frac{1}{c} \cdot \text{Tr}(c f'_0, \mathcal{W}). \end{aligned}$$

On en déduit que si $\sigma \not\cong \sigma_0$ (i.e., si $\pi \not\cong \pi_\lambda$), on a $\text{Tr}(\varphi_\lambda, \mathcal{V}) = 0$.

D'un autre côté, si $\sigma \cong \sigma_0$ (i.e., $\pi \cong \pi_\lambda$), on a alors

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\varphi_\lambda, \mathcal{V}) &= \text{Tr}(F_0, \mathcal{W}_0) \\ &= \text{Tr}(f_0, \mathcal{W}_0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

ce qui termine notre démonstration.

7 Le pseudo-coefficient de Kottwitz

On suit ici la section 2 de [Kott], où Kottwitz définit des fonctions d'Euler–Poincaré f_{EP} pour tout groupe réductif connexe à centre anisotrope.

Soit donc \mathbb{L} un groupe réductif connexe de centre anisotrope. On note L le groupe de ses points F -rationnels. Fixons une mesure de Haar μ_L sur L et notons :

- X_L l'immeuble de Bruhat-Tits de \mathbb{L} sur F ;
- Σ un système de représentants des L -classes de conjugaison de simplexes de X_L ;
- d_L le F -rang de \mathbb{L} ;

- d_σ la dimension d'un simplexe σ de X_L ;
- L_σ le stabilisateur d'un simplexe σ dans L ;
- $\text{sgn}_\sigma(x)$ la signature de la permutation des sommets d'un simplexe σ de X_L induite par l'action de $x \in L_\sigma$.
- $\mathbf{1}_U$ la fonction caractéristique d'une partie U de L ;

Kottwitz définit une fonction d'Euler–Poincaré par la formule :

$$f_{\text{EP}}^{\Sigma,L} = \sum_{\sigma \in \Sigma} (-1)^{d_\sigma} \frac{1}{\mu_L(L_\sigma)} \mathbf{1}_{L_\sigma} \text{sgn}_\sigma .$$

On a alors le résultat fondamental suivant.

Théorème 7.1 (Kottwitz–Casselman, [Kott, Thm. 2', p. 637]) *La fonction*

$$f_{\text{Kottwitz}}^{\Sigma,L} := (-1)^{d_L-1} f_{\text{EP}}^{\Sigma,L}$$

est un pseudo-coefficient de la représentation de Steinberg de L .

Nous allons spécialiser ce résultat à deux groupes \mathbb{L} particulier. Dans le premier cas, c'est K qui joue le rôle du corps de base F .

Commençons par le K -groupe réductif $\mathbb{L} = \text{PGL}(e)$. Ici :

- la mesure de Haar μ_L est prise comme étant μ_H/μ_{K^\times} , où μ_H est la mesure de Haar sur $H = \text{GL}(e, K)$ qui donne le volume 1 à un sous-groupe d'Iwahori et μ_{K^\times} la mesure de Haar sur K^\times qui donne la mesure 1 à \mathfrak{o}_K^\times .
- Σ est un système de représentants des H -orbites de simplexes construit comme dans la section 2.

En particulier, on note :

- Θ un système de représentants dans l'ensemble des parties de S pour la relation d'équivalence \sim définie à la fin de la section 6 ;
- \mathcal{K}_T le normalisateur dans H du parahorique $P_T = U(\mathbb{C})\langle T \rangle U(\mathbb{C})$, et $\tilde{\mathcal{K}}_T$ son image dans $\text{PGL}(e, K)$, et $\mathbf{1}_{\mathcal{K}_T}$ et $\mathbf{1}_{\tilde{\mathcal{K}}_T}$ leurs fonctions caractéristiques ;
- σ_T l'unique simplexe de l'immeuble stabilisé par \mathcal{K}_T , et d_T sa dimension, i.e., $d_T = e - 1 - |T|$.
- $\text{sgn}_T = \text{sgn}_{\sigma_T}$.

On a alors :

$$f_{\text{EP}}^{\Sigma,L} = f_{\text{EP}}^{\Theta,H} := \sum_{T \in \Theta} (-1)^{d_T} \frac{1}{\mu_{H/K^\times}(\tilde{\mathcal{K}}_T)} \mathbf{1}_{\tilde{\mathcal{K}}_T} \text{sgn}_T .$$

Regardons $f_{\text{EP}}^{\Theta,H}$ comme une fonction de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(H, \omega_0)$, où ω_0 est le caractère trivial de K^\times .

Corollaire 7.2 *La fonction $f_{\text{Kottwitz}}^{\Theta,H} := (-1)^{e-1} f_{\text{EP}}^{\Theta,H}$ est un pseudo-coefficient de la représentation de Steinberg de H .*

Dans [La, section 5], Gérard Laumon propose une variante de ce pseudo-coefficient que nous allons rappeler. Soit f_0 la fonction de $\mathcal{H}(H, \omega_0)$ donnée par

$$f_0 = (-1)^{e-1} \sum_{T \subset S} (-1)^{d_T} \frac{\text{sgn}_T \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{K}_T}}{(d_T + 1) \text{vol}(P_T, dh)}.$$

Nous avons alors la proposition suivante.

Proposition 7.3 ([La, Lemma (5.2.2), p. 135])

- (i) La fonction f_0 est la moyenne des fonctions $f_{\text{Kottwitz}}^{\Theta, H}$, lorsque Θ décrit tous les ensembles de représentants possibles des orbites de Π dans l'ensemble des parties de S .
- (ii) La fonction f_0 est un pseudo-coefficient de la représentation de Steinberg de H .

Bien sûr le point (ii) découle de (i) de façon immédiate.

Pour $T \subset S$, le normalisateur de P_T dans H peut s'écrire $z_T^u P_T$, où z_T est une certaine puissance Π^u de Π , u entier positif divisant e .

Notation 7.4 On pose $\epsilon_T = \text{sgn}_T(z_T)$ et on note n_T l'unique entier positif tel que $z_T^{n_T} = \varpi_K \epsilon$.

Lemme 7.5 Pour $h \in H$, on a l'égalité

$$f_0(h) = (-1)^{e-1} \sum_{T \subset S} \frac{(-1)^{d_T}}{(d_T + 1) \mu_H(P_T)} \sum_{l=0, \dots, n_T-1} \epsilon_T^l \sum_{w \in \langle T \rangle} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_w^0(z_T^{-l} \varpi_K^k h).$$

Démonstration Cette formule découle facilement des écritures :

$$\mathcal{K}_T = \coprod_{k \in \mathbb{Z}} z_T^k P_T$$

et

$$\mathbf{1}_{P_T} = \sum_{w \in \langle T \rangle} \mathbf{1}_{IwI} = \sum_{w \in \langle T \rangle} f_w^0.$$

Pour la suite nous aurons besoin d'une fonction $F_0 \in \mathcal{H}(H)$, telle qu'avec les notations de la section 4, on ait $P_{\omega_0}(F_0) = f_0$. Il est clair que l'on peut se donner une telle F_0 par la formule suivante :

$$F_0(h) = \frac{(-1)^{e-1}}{e'} \sum_{T \subset S} \frac{(-1)^{d_T}}{(d_T + 1) \mu_H(P_T)} \sum_{w \in \langle T \rangle} \sum_{l=0, \dots, e' n_T-1} \epsilon_T^l f_w^0(z_T^{-l} h) \quad h \in H,$$

où $e' = e(E/F) = e(K/F)$.

Le second groupe auquel nous allons spécialiser le résultat du théorème 7.1 est $H' = \text{GL}(e, K)/F^\times$, où F^\times est naturellement vu comme un sous-groupe du centre K^\times de H . On considère ici H' comme le groupe des F -points rationnels du F -groupe réductif connexe $\text{Res}_{K/F}(\text{GL}(e)_K) / \text{GL}(1)_F$. Le centre K^\times / F^\times de H' étant compact, nous sommes sous les hypothèses du théorème 7.1.

On munit H' de la mesure de Haar obtenue en quotientant μ_H par μ_{F^\times} , la mesure de Haar sur F^\times donnant le volume 1 à \mathfrak{o}_F^\times . Le théorème 7.1 fournit des pseudo-coefficients $f_{\text{Kottwitz}}^{\Sigma, H'}$ pour la représentation de Steinberg de H' . Nous allons comparer ces pseudo-coefficients à ceux de la représentation de Steinberg de $\tilde{H} = \text{PGL}(e, K)$.

Lemme 7.6 *Les groupes \tilde{H} et H' ont le même immeuble.*

Démonstration En effet, $\tilde{H} = \text{PGL}(e, K)$ est obtenu en quotientant H' par son centre. Les immeubles de ces deux groupes s'identifient donc naturellement.

Lemme 7.7 *Notons $p: H' \rightarrow \tilde{H}$ la projection naturelle et $\text{St}_{\tilde{H}}, \text{St}_{H'}$ les représentations de Steinberg de \tilde{H} et H' respectivement. On peut les réaliser dans le même espace où elle sont reliées par la relation :*

$$\text{St}_{H'}(h) = \text{St}_{\tilde{H}}(p(h)) \quad h \in H'.$$

Démonstration Rappelons que si \mathcal{G} est le groupe des points rationnels d'un groupe réductif défini sur K , de sous groupe de Borel \mathcal{B} , alors la représentation de Steinberg de \mathcal{G} s'identifie au quotient

$$I_{\mathcal{B}}^{\mathcal{G}}(\mathbf{1}_{\mathcal{B}}) / \sum_{\mathcal{P} \supset \mathcal{B}} I_{\mathcal{P}}^{\mathcal{G}}(\mathbf{1}_{\mathcal{P}})$$

où I désigne l'induction parabolique et où la somme porte sur tous les sous-groupes paraboliques contenant \mathcal{B} .

Notant \tilde{B} et B' les sous-groupes de Borel de \tilde{H} et H' , formés des matrices triangulaires supérieures, on a une identification $H'/B' = \tilde{H}/\tilde{B}$. D'où une identification canonique entre les induites paraboliques : $I_{B'}^{H'}(\mathbf{1}_{B'}) = I_{\tilde{B}}^{\tilde{H}}(\mathbf{1}_{\tilde{B}})$. D'autre part, la projection naturelle $p: H' \rightarrow \tilde{H}$ induit une bijection $P' \mapsto \tilde{P}$ entre les sous-groupes paraboliques de H' contenant B' et les sous-groupes paraboliques de \tilde{H} contenant \tilde{B} , et pour une paire (P', \tilde{P}) de paraboliques se correspondant, on a une identification canonique $I_{P'}^{H'}(\mathbf{1}_{P'}) = I_{\tilde{P}}^{\tilde{H}}(\mathbf{1}_{\tilde{P}})$. D'où une identification

$$I_{B'}^{H'}(\mathbf{1}_{B'}) / \sum_{P' \supset B'} I_{P'}^{H'}(\mathbf{1}_{P'}) = I_{\tilde{B}}^{\tilde{H}}(\mathbf{1}_{\tilde{B}}) / \sum_{\tilde{P} \supset \tilde{B}} I_{\tilde{P}}^{\tilde{H}}(\mathbf{1}_{\tilde{P}}).$$

Fixons un système de représentants Σ des \tilde{H} -classes de conjugaison de simplexes dans l'immeuble X de \tilde{H} (et de H' !). Par le lemme 7.6, c'est aussi un système de représentants des H' -classes de conjugaison de simplexes dans l'immeuble de H' .

On peut voir la fonction d'Euler–Poincaré $f_{\text{EP}}^{\Sigma, H'}$ comme une fonction de $\mathcal{H}(H, \mathbf{1}_{F^\times})$. Considérons le morphisme d'algèbres

$$P': \mathcal{H}(H, \mathbf{1}_{F^\times}) \longrightarrow \mathcal{H}(H, \mathbf{1}_{K^\times})$$

donné par

$$P'(f)(h) = \int_{K^\times/F^\times} f(zh) d\mu_{K^\times/F^\times}(z), \quad h \in H.$$

Ici μ_{K^\times/F^\times} est la mesure de Haar sur le centre K^\times/F^\times de H' , quotient de la mesure de Haar μ_{K^\times} par μ_{F^\times} .

Par un calcul immédiat laissé au lecteur, nous avons le résultat suivant.

Lemme 7.8 Les fonctions $f_{EP}^{\Sigma, H'}$ et $f_{EP}^{\Sigma, \tilde{H}}$ sont reliées par la relation :

$$f_{EP}^{\Sigma, \tilde{H}} = c.P'(f_{EP}^{\Sigma, H'})$$

où $c \in \mathbb{C}$ est une constante non nulle.

Pour un système de représentants Θ construit comme dans la section 2, on obtient :

$$f_{EP}^{\Sigma, H'} = f_{EP}^{\Theta, H'} := \sum_{T \in \Theta} (-1)^{d_T} \frac{1}{\mu_{H'}(\mathcal{K}'_T)} \mathbf{1}_{\mathcal{K}'_T} \text{sgn}_T$$

où \mathcal{K}'_T est l'image de \mathcal{K}_T dans H' .

Suivant Laumon, nous définissons une nouvelle fonction de $\mathcal{H}(H, \mathbf{1}_{F^\times})$ par la formule :

$$f'_0 = (-1)^{e-1} \sum_{T \in S} (-1)^{d_T} \frac{\text{sgn}_T \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{K}_T}}{(d_T + 1)\mu_H(P_T)}.$$

Proposition 7.9

- (i) Pour tout Θ , $f_{Kottwitz}^{\Theta, H'} := (-1)^{e-1} f_{EP}^{\Theta, H'}$ est un pseudo coefficient de la représentation de Steinberg de H' .
- (ii) La fonction f'_0 est la moyenne des fonctions $f_{Kottwitz}^{\Theta, H'}$ lorsque Θ décrit tous les ensembles possibles de représentants des orbites de Π dans l'ensemble des parties de S .
- (iii) En particulier, f'_0 est un pseudo-coefficient de la représentation de Steinberg de H' .

Notons

$$P'_{\omega_0} : \mathcal{H}(H) \longrightarrow \mathcal{H}(H', \mathbf{1}_{F^\times})$$

la projection naturelle donnée par

$$P'_{\omega_0}(f)(g) = \int_{F^\times} f(zg) d\mu_{F^\times}(z) \quad f \in \mathcal{H}(H).$$

Lemme 7.10 On a $P'_{\omega_0}(F_0) = c.f'_0$, pour une constante non nulle $c \in \mathbb{C}$. En particulier si (σ, \mathcal{W}) est une représentation lisse admissible de H telle que

$$\sigma(zh) = \sigma(h), \quad h \in H, z \in F^\times$$

on a alors

$$\text{Tr}(F_0, \mathcal{W}) = c. \text{Tr}(f'_0, \mathcal{W}).$$

8 Transfert du pseudo-coefficient de Kotwittz

Nous utilisons les notations des deux sections précédentes. Fixons une représentation $\pi = \pi_\lambda$ irréductible de carré intégrable, objet de $\mathcal{R}_\lambda(G)$. On sait par le corollaire 5.3 qu'il existe un isomorphisme unitaire d'algèbres de Hecke

$$\Psi : \mathcal{H}(H, \mathbf{1}_{U(\mathbb{C})}) \longrightarrow \mathcal{H}(G, \lambda')$$

tel que π_λ s'écrive $\mathcal{E}_\Psi(\mathbf{St}_H)$. Le but de cette section est de calculer le pseudo-coefficient φ_λ de la proposition 6.5 obtenu par transfert du pseudo-coefficient de Kottwitz (plus exactement sa version modifiée de Laumon), au travers des isomorphismes d'algèbres de Hecke. Plus exactement nous allons déterminer la restriction de φ_λ à G^0 , où

$$G^0 = \{g \in G; \text{val}_F(\det(g)) = 0\}.$$

Rappelons que

$$F_0 = \frac{(-1)^{e-1}}{e'} \sum_{T \subset S} \frac{(-1)^{d_T}}{(d_T + 1)\mu_H(P_T)} \sum_{w \in \langle T \rangle} \sum_{l=0, \dots, e'n_T-1} \epsilon_T^l f_{z_T^l w}.$$

Le pseudo-coefficient φ_λ se calcule à partir de F_0 par les trois étapes :

- (1) $F_\lambda = \Psi(F_0) \in \mathcal{H}(G, \lambda')$,
- (2) $f_\lambda = P_\omega(F_\lambda) \in \mathcal{H}(G, \lambda'\omega)$,
- (3) $\varphi_\lambda = \text{Tr}_{\tilde{W}_{\lambda'}} \circ f_\lambda \in e_{\lambda'\omega} \star \mathcal{H}(G, \omega) \star e_{\lambda'\omega}$.

où ω désigne le caractère central de π_λ .

Pour $g \in G$, on a alors :

$$\varphi_\lambda(g) = \frac{(-1)^{e-1}}{e'} \sum_{T \subset S} \frac{(-1)^{d_T}}{(d_T + 1)\mu_H(P_T)} \sum_{w \in \langle T \rangle} \sum_{l=0, \dots, n_T e' - 1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \omega(\varpi_F)^{-k} \epsilon_T^l \Psi_{z_T^l w}^k(g)$$

où $\Psi_{z_T^l w}^k$ est la fonction sur G définie par

$$\Psi_{z_T^l w}^k(g) = \text{Tr}_{\tilde{W}_{\lambda'}} \circ \Psi(f_{z_T^l w})(\varpi_F^{-k} g).$$

Notons que la fonction $\Psi(f_{z_T^l w})$ a son support dans $J'z_T^l wJ'$, avec $J' \subset G^0$. Il s'ensuit que si $g \in G^0$, le terme $\Psi(f_{z_T^l w})(\varpi_F^{-k} g)$ est nul si $k \neq 0$ ou $l \neq 0$. On a alors l'expression simplifiée :

$$\varphi_\lambda(g) = \frac{(-1)^{(e-1)}}{e'} \sum_{T \subset S} \frac{(-1)^{d_T}}{(d_T + 1)\mu_H(P_T)} \sum_{w \in \langle T \rangle} \Psi_w^0(g), \quad g \in G^0.$$

Pour expliciter le pseudo-coefficient, il nous reste donc à déterminer $\text{Tr}_{\tilde{W}_{\lambda'}} \circ \Psi(f_w^0)$, pour $w \in W^0$. Rappelons que $\Psi(f_w^0)$ est l'élément de $\mathcal{H}(G, \lambda')$, de support $J'wJ'$, donné par

$$\Psi(f_w^0)(g) = \frac{1}{|\bar{P}|} \kappa_M(g) \otimes [\check{\sigma}(j_1) \circ T_w \circ \check{\sigma}(j_2)]$$

où $g = j_1 w j_2$, $j_1, j_2 \in J'$. Ici, pour $j \in J'$, \check{j} désigne l'image de j dans le quotient $J'/J_M^1 = U(\mathfrak{B})J_M^1/J_M^1 \simeq \bar{P}$. On a obtenu le résultat suivant.

Lemme 8.1 Pour $w \in W^0$, $\text{Tr}_{\tilde{W}_{\lambda'}} \circ \Psi(f_w^0)$ est la fonction à support dans $J'wJ' \subset J_M$ donnée par

$$\text{Tr}_{\tilde{W}_{\lambda'}} \circ \Psi(f_w^0)(g) = \text{Tr} \kappa_M(g) \cdot \text{Tr} \bar{f}_w(\bar{g})$$

où \bar{g} désigne l'image de g dans J_M/J_M^1 et \bar{f}_w la fonction introduite à la section 3.

En particulier le support de $(\varphi_\lambda)_{|G^0}$ est contenu dans la réunion des supports des $\Psi(f_w), w \in W^0$, c'est-à-dire :

$$\bigcup_{w \in W^0} J_M^1 U(\mathfrak{B})_w U(\mathfrak{B}) J_M^1 \subset J_M^1 U(\mathfrak{B}_M) J_M^1 = J_M.$$

Nous avons donc démontré la formule suivante.

Proposition 8.2 Soit $g \in G^0$. On a

$$\varphi_\lambda(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } g \notin J_M, \\ \frac{(-1)^{e-1}}{e'} \sum_{T \subset S} \frac{(-1)^{d_T}}{(d_T+1)\mu_H(P_T)} \sum_{w \in \langle T \rangle} \text{Tr } \check{\kappa}_M(g) \cdot \text{Tr } \bar{f}_w(\bar{g}) & \text{si } g \in J_M. \end{cases}$$

9 Calculs de traces dans les groupes finis

Les notations de cette section sont indépendantes des précédentes.

On considère un groupe fini G et une représentation complexe irréductible (π, V) de G .

Lemme 9.1 Supposons V muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ G -invariant. Soient $v \in V$ un vecteur de norme 1 et $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$. On a alors :

$$\text{Tr}(T) = \frac{\dim \pi}{|G|} \sum_{x \in G} \langle v, \pi(x) \circ T \circ \pi(x^{-1}).v \rangle.$$

Démonstration L'endomorphisme

$$\frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \pi(x) \circ T \circ \pi(x^{-1})$$

est G -équivariant et par le lemme de Schur, il est de la forme $\lambda(T) \text{id}_V$, pour un $\lambda(T) \in \mathbb{C}$. L'application obtenue $\lambda: \text{End}_{\mathbb{C}}(V) \rightarrow \mathbb{C}$ est une forme linéaire. On peut la voir comme une forme bilinéaire sur $V \otimes \check{V}$, qui est G -invariante pour l'action de G donnée par $\pi \otimes \check{\pi}$. Une seconde application du lemme de Schur montre que λ est proportionnelle à l'application trace : il existe $k \in \mathbb{C}$, tel que $\lambda = k \cdot \text{Tr}$. On a $\lambda(\text{id}_V) = 1$ et $k \cdot \text{Tr}(\text{id}_V) = k \cdot \dim \pi$, de sorte que $k = 1/\dim \pi$. Il vient donc

$$\frac{\dim \pi}{|G|} \sum_{x \in G} \langle v, \pi(x) \circ T \circ \pi(x^{-1}).v \rangle = \frac{1}{|G|} \text{Tr}(T) \sum_{x \in G} \langle v, v \rangle = \text{Tr}(T).$$

Notons comme conséquence, le résultat bien connu suivant.

Corollaire 9.2 Soit $v \in V$ un vecteur de norme 1 pour un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ G -invariant sur V . Alors en notant f le coefficient de π donné par $g \mapsto \langle v, \pi(g).v \rangle$, on a :

$$\text{tr } \pi(\gamma) = \frac{\dim \pi}{|G|} \sum_{x \in G} f(x\gamma x^{-1}).$$

Démonstration Appliquer le lemme à $T = \pi(\gamma)$.

Donnons-nous à présent un sous-groupe H de G et (σ, V_H) une représentation irréductible de H . Soit (π, V_G) la représentation induite. On identifie comme d'habitude l'algèbre d'entrelacement $\text{End}_G(V_G)$ à l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G, \delta)$ des fonctions $f: G \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V_H)$ telles que $f(h_1gh_2) = \sigma(h_1)f(g)\sigma(h_2)$, $g \in G, h_1, h_2 \in H$.

Concrètement une fonction $\varphi \in \mathcal{H}(G, \delta)$ s'identifie à l'opérateur de convolution $\varphi \in \text{End}_G(V_G)$ donné par $\varphi(f) = \varphi \star f$, où

$$\varphi \star f(g) = \sum_{x \in G} \varphi(x)[f(x^{-1}g)] = \sum_{x \in G} \varphi(gx^{-1})[f(x)] \quad f \in V_G, g \in G.$$

Fixons un idempotent e de $\mathcal{H}(G, \delta)$ et notons (π_e, V_e) la sous-représentation de (π, V_G) donnée par

$$V_e = e \star \text{Ind}_H^G \sigma = e \star V_G.$$

Nous faisons les hypothèses suivantes.

Hypothèse 9.3 La représentation (π_e, V_e) est irréductible.

Hypothèse 9.4 Il existe un produit scalaire H -invariant $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ sur V_H tel que, pour tout $x \in G$, l'adjoint $e^*(x)$ de $e(x)$ relativement à $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ est $e(x^{-1})$.

Hypothèse 9.5 On a $e(1) = \lambda_1 \text{id}_{V_H}$ pour une constante réelle $\lambda_1 > 0$.

Pour la suite nous fixons un tel produit scalaire.

Nous nous proposons de démontrer le résultat suivant.

Proposition 9.6 La trace de la représentation π_e en un élément $\gamma \in G$ est donnée par la formule :

$$\text{Tr } \pi_e(\gamma) = \frac{1}{\lambda_1} \frac{\dim \pi_e}{\dim \sigma} \frac{|H|}{|G|} \sum_{x \in H \backslash G} [\text{Tr } \sigma e](xyx^{-1}).$$

Démonstration Fixons un vecteur $v \in V_H$ tel que $\|v\|_H = 1$ et soit $f_v \in \text{Ind}_H^G \sigma$ la fonction de support H , donnée par

$$f_v(h) = \sigma(h).v \quad h \in H.$$

La fonction $g_e = e \star f_v$ est alors dans V_e . Pour $y \in G$, on a

$$g_e(y) = \sum_{x \in G} e(yx^{-1})f_v(x) = \sum_{x \in H} e(y)\sigma(x^{-1})\sigma(x)f_v(1) = |H|.e(y)(v).$$

On définit un produit scalaire G -invariant sur V_G par la formule

$$\langle f, g \rangle_G = \sum_{x \in G} \langle f(x), g(x) \rangle_H, \quad f, g \in V_G$$

On a

$$\begin{aligned} \|g_e\|_G^2 &= |H|^2 \sum_{x \in G} \langle e(x)(v), e(x)(v) \rangle_H \\ &= |H|^2 \sum_{x \in G} \langle v, e(x^{-1})e(x)v \rangle_H = |H|^2 \langle v, \left(\sum_{x \in G} e(x^{-1})e(x) \right) (v) \rangle_H \\ &= |H|^2 \langle v, e(1)(v) \rangle = |H|^2 \lambda_1. \end{aligned}$$

La fonction $f_e = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1|H|}}g_e$, donnée par $f_e(y) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}e(y)(v)$ est donc un vecteur de V_e tel que $\|f_e\|_G = 1$.

Soit $\gamma \in G$. D'après le corollaire 9.2, on a

$$\begin{aligned} \text{tr } \pi_e(\gamma) &= \frac{\dim \pi_e}{|G|} \sum_{x \in G} \langle f_e, \pi_e(x\gamma x^{-1})f_e \rangle_G \\ &= \frac{\dim \pi_e}{|G|} \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} \langle f_e(y), f_e(yx\gamma x^{-1}) \rangle_H \\ &= \frac{\dim \pi_e}{\lambda_1 \cdot |G|} \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} \langle e(y)(v), e(yx\gamma x^{-1})(v) \rangle_H \\ &= \frac{\dim \pi_e}{\lambda_1 \cdot |G|} \sum_{x \in G} \left\langle v, \left\{ \sum_{y \in G} e(y^{-1})e(yx\gamma x^{-1}) \right\} (v) \right\rangle_H \\ &= \frac{\dim \pi_e}{\lambda_1 \cdot |G|} \sum_{x \in G} \langle v, e \star e(x\gamma x^{-1})(v) \rangle_H \\ &= \frac{\dim \pi_e}{\lambda_1 \cdot |G|} \sum_{x \in G} \langle v, e(x\gamma x^{-1})(v) \rangle_H. \end{aligned}$$

Mais d'après le lemme 9.1, on a pour tout $x \in G$:

$$\begin{aligned} \sum_{h \in H} \langle v, e(hx\gamma x^{-1}h^{-1})v \rangle_H &= \sum_{h \in H} \langle v, \sigma(h)e(x\gamma x^{-1})\sigma(h^{-1})v \rangle_H \\ &= \frac{|H|}{\dim \sigma} \text{Tr } e(x\gamma x^{-1}). \end{aligned}$$

On en déduit donc bien :

$$\text{Tr } \pi_e(\gamma) \frac{1}{\lambda_1} \frac{\dim \pi_e}{\dim \sigma} \frac{|H|}{|G|} \sum_{x \in H \setminus G} [\text{Tr } \circ e](xyx^{-1}).$$

10 Caractères des représentations triviales généralisées

Pour des preuves ou des références, nous renvoyons le lecteur à l'article [SZ] de Silberger et Zink.

Nous utilisons ici les notations du paragraphe 3. En particulier rappelons que l'on note $\bar{G} \simeq \text{GL}(ef, k_E)$ le groupe quotient J_M/J_M^1 . Il possède le sous-groupe parabolique J'/J_M^1 , de sous-groupe de Levi $\bar{L} \simeq U(\mathfrak{B})/U^1(\mathfrak{B}) \simeq \text{GL}(f, k_E)^e$. La représentation cuspidale σ fixée de $U(\mathfrak{B})/U^1(\mathfrak{B})$ est regardée comme une représentation de \bar{L} .

Le groupe \bar{G} possède deux représentations irréductibles remarquables de support cuspidal (\bar{L}, σ) : la représentation *triviale généralisée* $\tau = \tau(\sigma_0, e)$ et la représentation de *Steinberg généralisée* $\text{St}(\sigma_0, e)$. Ce sont les seules représentations de \bar{G} qui apparaissent avec multiplicité 1 dans l'induite parabolique $\text{Ind}_{\bar{P}}^{\bar{G}} \sigma$. La représentation de Steinberg se distingue de la triviale généralisée par le fait qu'elle est générique.

Dans [SZ], Silberger et Zink déterminent les idempotents de $\mathcal{H}(\bar{G}, \delta)$ correspondant à ces deux représentations. Ici c'est la triviale généralisée qui nous intéresse. L'idempotent associée est donné par :

$$e_\tau = \frac{1}{p_{e-1}(q_K)} \sum_{w \in W_0} \bar{f}_w$$

où p_{e-1} désigne le polynôme de Poincaré du système de racines de type A_{e-1} :

$$p_{e-1}(x) = \prod_{k=1}^{e-1} (1 + x + \dots + x^k).$$

Par [SZ, p. 3349], la dimension de τ est donnée par

$$\dim \tau = \text{Tr}(e_\tau(1)) |\bar{G}|.$$

Proposition 10.1 *Le caractère de $\tau = \tau(\sigma_0, e)$ en un élément γ de \bar{G} est donné par*

$$\text{Tr } \tau(\gamma) = \sum_{x \in \bar{G}} [\text{Tr } e_\tau](x\gamma x^{-1}).$$

Démonstration Commençons par vérifier que les hypothèses 9.4 et 9.5 de la section précédente sont satisfaites.

On a $e_\tau(1) = \frac{1}{p_{e-1}(q_K)} f_1(1) = \frac{1}{p_{e-1}(q_K) \cdot |\bar{P}|} \text{id}_X$, ce qui montre que $\lambda_1 = \frac{1}{p_{e-1}(q_K) \cdot |\bar{P}|}$ et l'hypothèse 9.5.

On construit un produit scalaire \bar{P} -invariant $\langle -, - \rangle_X$ sur X de la façon suivante. On fixe un produit scalaire $\langle -, - \rangle_0$, $\text{GL}(f, k_E)$ -invariant sur X_0 , et on pose :

$$\langle v_1 \otimes \dots \otimes v_e, w_1 \otimes \dots \otimes w_e \rangle_X = \prod_{i=1, \dots, e} \langle v_i, w_i \rangle_0.$$

En d'autres termes, on définit ce produit scalaire en décrétant que si $(v_i)_i$ est une base orthonormée de X_0 , alors $(v_{k_1} \otimes \dots \otimes v_{k_e})_{k_1, \dots, k_e}$ est une base orthonormée de X .

Alors pour $w \in W_0$, l'adjoint T_w^* de $T_w \in \text{End}_{\mathbb{C}}(X)$, relativement à $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$, est $T_{w^{-1}}$, et l'hypothèse 9.4 en découle aisément.

On peut donc appliquer la proposition 9.6 : pour $\gamma \in \bar{G}$, on a

$$\text{Tr } \tau(\gamma) = \frac{1}{\lambda_1} \frac{\dim \tau}{\dim \sigma} \frac{|\bar{P}|}{|\bar{G}|} \sum_{x \in \bar{P} \backslash \bar{G}} \text{Tr}(e(x\gamma x^{-1})).$$

Tenant compte du fait que

$$\dim \tau = \text{Tr } e_\tau(1) \cdot |\bar{G}| = \lambda_1 |\bar{G}| \dim \sigma,$$

il vient

$$\text{Tr } \tau(\gamma) = |\bar{P}| \sum_{x \in \bar{P} \backslash \bar{G}} \text{Tr}(e(x\gamma x^{-1})) = \sum_{x \in \bar{G}} \text{Tr}(e(x\gamma x^{-1})).$$

11 Une formule de caractère pour les représentations de carré intégrable de $GL(n, F)$

On pose $(\pi_\lambda, \mathcal{V}_\lambda) = \mathcal{E}_\Psi(\mathbf{St}_H) \in \mathcal{R}_{(J,\lambda)}(G)$, où Ψ est un isomorphisme unitaire d'algèbres de Hecke comme en (5.3), et on note Θ_λ son caractère d'Harish-Chandra. Notons que la classe d'isomorphie de π_λ , et donc Θ_λ , dépend de l'isomorphisme d'algèbres de Hecke Ψ choisi et pas seulement du type (J, λ) . On note φ_λ le pseudo-coefficient de π_λ construit dans la section 8. Rappelons le résultat fondamental suivant.

Théorème 11.1 ([Ka, Proposition 3, p. 28]) *Soit $g \in G$ un élément elliptique régulier et soit $\mu_{G/Z}$ la mesure de Haar sur G/Z fixée dans la section 4. Alors :*

$$\Theta_\lambda(g) = \int_{G/Z} \varphi_\lambda(xg^{-1}x^{-1}) d\mu_G(\dot{x}).$$

Remarque 11.2 En fait l'article de Kazhdan est écrit sous les conditions restrictives que la caractéristique de F est nulle et que le centre de G est compact. Cependant Badulescu (point (ii) du Théorème (4.3) de [Ba], p. 64) démontre ce résultat pour $GL(n)$ sans restriction sur le corps F .

L'objet de cette section est de calculer $\Theta_\lambda(g_0)$ lorsque g_0 est un élément elliptique régulier de la forme ζu , où :

- $\zeta \in U(\mathfrak{B}_M) \subset J_M$ est une racine primitive $q_F^N - 1$ de l'unité, q_F étant le cardinal du corps résiduel de F ,
- $u \in H^1(\beta, \mathfrak{A}_M) \subset J_M$, où $H^1(\beta, \mathfrak{A}_M)$ est le groupe défini dans [BK, (3.1)].

Lemme 11.3

- (i) *L'image $\bar{g}_0 = \bar{\zeta}$ de g_0 dans $J_M / J_M^1 \simeq U(\mathfrak{B}_M) / U^1(\mathfrak{B}_M) \simeq GL(ef, k_E)$ est elliptique régulière.*
- (ii) *Plus généralement, si $g \in U(\mathfrak{A}_M)$ est tel que $g^{-1}g_0g \in J_M$, alors l'image de $g^{-1}g_0g$ dans $J_M / J_M^1 \simeq GL(ef, k_E)$ est elliptique régulière.*

(iii) L'élément g_0 est minimal sur F au sens de [BK, (1.4.14), p. 41], et $F[g_0]/F$ est une extension non ramifiée de degré maximal N . L'ordre \mathfrak{A}_M est l'unique ordre héréditaire de A normalisé par g_0 .

Démonstration Le point (i) est facile. Montrons d'abord (iii). Il découle immédiatement de la définition de [BK] que ζ est minimal. La strate $[\mathfrak{A}_M, 0, -1, \zeta]$ est donc simple (voir [BK, (1.5)] pour plus de détails). Puisque

$$\zeta u - \zeta = \zeta(u - 1) \in \text{Rad}(\mathfrak{B}_M) \subset \text{Rad}(\mathfrak{A}_M),$$

on a l'équivalence de strates :

$$[\mathfrak{A}_M, 0, -1, \zeta u] \sim [\mathfrak{A}_M, 0, -1, \zeta].$$

Donc par la proposition (2.2.2) de [BK, p. 52], la strate $[\mathfrak{A}_M, 0, -1, \zeta u]$ est simple et l'extension $F[\zeta u]/F$ est de degré maximal. En particulier ζu est minimal sur F . Par [BK, (2.1.4), p. 50], $F[\zeta u]/F$ est non ramifiée. Enfin il est clair que \mathfrak{A}_M est normalisé par g_0 et par l'exercice (1.5.6) de [BK, p. 44], c'est l'unique ordre héréditaire de A ayant cette propriété.

Pour prouver (ii), supposons par l'absurde que l'image de gg_0g^{-1} ne soit pas elliptique régulière. Il existerait alors un \mathfrak{o}_E -ordre héréditaire \mathfrak{B}'_M strictement inclus dans \mathfrak{B}_M tel que $gg_0g^{-1} \in U(\mathfrak{B}'_M)J_M^1$. Ainsi on aurait

$$gg_0g^{-1} \in U(\mathfrak{A}'_M)J_M^1 \subset U(\mathfrak{A}'_M)U^1(\mathfrak{A}_M) \subset U(\mathfrak{A}'_M)$$

où \mathfrak{A}'_M est l' \mathfrak{o}_F -ordre héréditaire de A correspondant à \mathfrak{B}'_M par la correspondance de [BK, (1.2)]. On obtiendrait alors $g_0 \subset U(g^{-1}\mathfrak{A}'_Mg)$, avec $g^{-1}\mathfrak{A}'_Mg$ sous-ordre héréditaire strict de \mathfrak{A} , ce qui contredirait la minimalité de g_0 .

Soit $g \in G$, nous avons vu dans la proposition 8.3 que $\varphi(gg_0^{-1}g^{-1})$ est nul à moins que $gg_0^{-1}g^{-1} \in J_M$. D'un autre côté, si $gg_0^{-1}g^{-1} \in J_M \subset U(\mathfrak{A}_M)$, alors, par minimalité de g_0 , g appartient au normalisateur de \mathfrak{A}_M , c'est-à-dire $F^\times U(\mathfrak{A}_M)$. Pour déterminer la fonction $g \mapsto \varphi_\lambda(gg_0^{-1}g^{-1})$, nous supposons donc que $g \in F^\times U(\mathfrak{A}_M)$ et $gg_0^{-1}g^{-1} \in J_M$. Par le point (ii) du lemme précédent, on a que l'image de $gg_0^{-1}g^{-1}$ dans J_M/J_M^1 est elliptique régulière.

Par la proposition 8.2, nous avons :

$$\varphi(gg_0^{-1}g^{-1}) = \frac{(-1)^{e-1}}{e'} \sum_{T \subset S} \frac{(-1)^{d_T}}{(d_S + 1)\mu_H(P_T)} \sum_{w \in T} \text{Tr} \kappa_M(gg_0^{-1}g^{-1}) \cdot \text{Tr} \bar{f}_w(\overline{gg_0^{-1}g^{-1}}).$$

Soient $T \subset S$ et $w \in \langle T \rangle$. Alors si $\bar{f}_w(\overline{gg_0^{-1}g^{-1}}) \neq 0$, l'élément elliptique régulier $\overline{gg_0^{-1}g^{-1}}$ appartient à $\bar{P}\langle T \rangle\bar{P}$. Or si T est strictement contenu dans S , ce sous-ensemble est contenu dans un parabolique propre de \bar{G} , ce qui n'est pas possible. On en déduit l'expression suivante :

$$\varphi(gg_0^{-1}g^{-1}) = \frac{(-1)^{e-1}}{e'} \frac{(-1)^{d_S}}{(d_S + 1)\mu_H(P_S)} \sum_{w \in W_0} \text{Tr} \kappa_M(gg_0^{-1}g^{-1}) \cdot \text{Tr} \bar{f}_w(\overline{gg_0^{-1}g^{-1}}).$$

Soit $\tau = \tau(\check{\sigma}_0, e)$ la représentation triviale généralisée de \bar{G} attachée à $\check{\sigma}_0$. Alors d'après les résultats rappelés en section 10, elle admet pour idempotent

$$e_\tau = \frac{1}{p_{e-1}(q_K)} \sum_{w \in W_0} \bar{f}_w.$$

Nous obtenons donc :

$$\varphi(gg_0^{-1}g^{-1}) = \frac{(-1)^{e-1}}{e'} \frac{(-1)^{d_S}}{(d_S + 1)\mu_H(P_S)} p_{e-1}(q_K) \text{Tr } \check{\kappa}_M(gg_0^{-1}g^{-1}) \cdot \text{Tr } e_\tau(\overline{gg_0^{-1}g^{-1}}).$$

Pour simplifier les notations, posons :

$$C_S = \frac{(-1)^{e-1}}{e'} \frac{(-1)^{d_S}}{(d_S + 1)\mu_H(P_S)} p_{e-1}(q_K).$$

En utilisant la proposition 10.1 reliant la trace de la représentation τ à l'idempotent e_τ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{J_M} \varphi_\lambda(gg_0^{-1}g^{-1}) d\mu_G(g) &= C_S \mu_G(J_M^1) \text{Tr } \check{\kappa}_M(gg_0^{-1}g^{-1}) \text{Tr } \tau(\overline{gg_0^{-1}g^{-1}}) \\ &= C_S \mu_G(J_M^1) \text{Tr } \kappa_M(g^{-1}g_0g) \text{Tr } \tau(\sigma_0, e)(\overline{g^{-1}g_0^{-1}g}) \\ &= C_S \mu_G(J_M^1) \text{Tr} \{ \kappa_M \otimes \tau(\sigma_0, e) \} (g^{-1}g_0^{-1}g) \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que la contragrédiente de τ est $\tau(\sigma_0, e)$.

Proposition 11.4

- (a) Les représentations $\tau(\sigma_0, e)$ et $\mathbf{St}(\sigma_0, e)$ sont images l'une de l'autre dans la dualité d'Alvis–Curtis.
- (b) Pour tout élément elliptique régulier α de \bar{G} , on a :

$$\text{Tr } \tau(\sigma_0, e)(\alpha) = (-1)^{e-1} \text{Tr } \mathbf{St}(\sigma_0, e)(\alpha).$$

Démonstration Pour le point (a), nous renvoyons à [DM, Corollaire 14.47].

La dualité d'Alvis-Curtis, originellement définie au niveau des caractères des représentations, a été explicitement construite par Deligne et Lusztig [DL]. Leur corollaire (c) du paragraphe 5, p. 290, affirme que si E est une représentation irréductible de \bar{G} de duale E^\sharp , alors on a l'égalité suivante dans le groupe de Grothendieck des \bar{G} -modules virtuels :

$$(-1)^{i_0} E^\sharp = \sum_{I \in \bar{S}} (-1)^{|I|} E_{(I)}$$

où :

- \bar{S} est le système générateur d'involutions de la BN -paire sphérique de \bar{G} ,
- $E_{(\bar{S})} = E$,

- si I est un sous-ensemble strict de \bar{S} , $E_{(I)}$ est une représentation de \bar{G} induite à partir d'un parabolique propre,
- $i_0 = \text{Min}\{|I|; E^{U_I} \neq 0\}$, où U_I est le radical unipotent du parabolique standard de type I .

Appliquons ceci à $E = \mathbf{St}(\sigma_0, e)$. Puisque le support cuspidal de cette représentation est (\bar{L}, σ) , on a $i_0 = e(f - 1)$. De plus si α est elliptique régulier et I un sous-ensemble strict de \bar{S} , on a $\text{Tr } E_{(I)}(\alpha) = 0$. On obtient ainsi

$$(-1)^{e(f-1)} \text{Tr } E^{\sharp}(\alpha) = (-1)^{|\bar{S}|} \text{Tr } \mathbf{St}(\sigma_0, e)(\alpha) = (-1)^{ef-1} \text{Tr } \mathbf{St}(\sigma_0, e)(\alpha)$$

et l'assertion (b) en découle.

Pour résumer, nous avons montré le résultat suivant.

Proposition 11.5 Avec les notations précédentes, on a :

$$\int_{J_M} \varphi_{\lambda}(gg_0^{-1}g^{-1}) d\mu_G(g) = C_S \mu_G(J_M^1) (-1)^{e-1} \text{Tr}\{\kappa_M \otimes \mathbf{St}(\sigma_0, e)\}(g_0).$$

Ecrivons

$$\begin{aligned} & \int_{U(\mathfrak{A}_M)} \varphi_{\lambda}(gg_0^{-1}g^{-1}) d\mu_G(g) \\ &= \sum_{u \in J_M \backslash U(\mathfrak{A}_M)} \int_{J_M} \varphi_{\lambda}(gu\gamma u^{-1}g^{-1}) d\mu_G(x) \\ &= \sum_{u \in J_M \backslash U(\mathfrak{A}_M)} C_S \mu_G(J_M^1) (-1)^{e-1} \text{Tr}\{\kappa_M \otimes \mathbf{St}(\sigma_0, e)\}(ug_0u^{-1}) \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} & \int_{U(\mathfrak{A}_M)} \varphi_{\lambda}(gg_0^{-1}g^{-1}) d\mu_G(g) = \\ & \sum_{u \in U(\mathfrak{A}_M)/J_M} C_S \mu_G(J_M^1) (-1)^{e-1} \text{Tr}\{\kappa_M \otimes \mathbf{St}(\sigma_0, e)\}(u^{-1}g_0u). \end{aligned}$$

La fonction

$$x \mapsto \varphi_{\lambda}(x\gamma^{-1}x^{-1})$$

étant à support dans $F^{\times}U(\mathfrak{A}_M)$ et étant invariante par F^{\times} , le membre de gauche de notre dernière équation est en réalité égal à

$$\int_{G/Z} \varphi_{\lambda}(gg_0^{-1}g^{-1}) d\mu_{G/Z}(\dot{g}).$$

Nous allons simplifier le membre de droite. On a

$$C_S \mu_G(J_M^1) (-1)^{e-1} = \frac{[(-1)^{e-1}]^2}{e'} \frac{(-1)^{d_S}}{(d_S + 1)\mu_H(P_S)} P_{e-1}(q_K)\mu_G(J_M^1)$$

avec

- $d_S = 0$ (le simplexe correspondant à S est un sommet),
- $\mu_G(J_M^1) = 1$ (normalisation de la mesure de Haar sur G),
- $e' = e(E/F) = 1$, car E/F est non ramifiée,
- $P_S = \text{GL}(e, \mathfrak{o}_K)$.

De plus, puisque $\mu_H(I) = 1$, on a

$$\mu_H(P_S) = |P_S/I| = |\text{GL}(e, k_K)/B_e(k_K)|$$

où B_e est le sous-groupe de Borel standard de $\text{GL}(e)$. Un calcul classique donne donc $\mu_H(P_S) = p_{e-1}(q_K)$.

Remarque 11.6 Il est amusant de noter que $p_{e-1}(q_K)$ est la q_K -factorielle de e , qui se trouve être le nombre de points rationnels de la variétés de drapeaux complets sur k_K^e .

Nous venons donc de démontrer la formule. de caractère suivante.

Théorème 11.7 Avec les notations précédentes, la valeur du caractère d’Harish-Chandra de π_λ en ζu est donnée par

$$\Theta_\lambda(\zeta u) = \sum_{v \in U(\mathfrak{A}_M)/J_M} \text{Tr}\{\kappa_M \otimes \mathbf{St}(\sigma_0, e)\}(v^{-1}(\zeta u)v).$$

12 Transfert du pseudo-coefficient de Kottwitz-II

Avec les notations de la section 1, nous faisons ici les deux hypothèses suivantes :

- (i) l’extension E/F est totalement ramifiée,
- (ii) l’ordre \mathfrak{B} est minimal.

Il s’ensuit que la représentation σ intervenant dans le type $\lambda = \kappa \otimes \sigma$ est un caractère de $U(\mathfrak{B})/U^1(\mathfrak{B}) \simeq (k_E^\times)^{N/[E:F]}$. Quitte à modifier la β -extension κ , nous ne perdons donc rien à supposer que σ est le caractère trivial et $\lambda = \kappa$.

Notons qu’ici on a $K = E$ et le groupe H est $\text{GL}(N/[E : F], E)$. L’ordre \mathfrak{A} est minimal. Fixons une uniformisante ϖ_E de E et une uniformisante $\Pi = \Pi_{\mathfrak{B}}$ de l’ordre \mathfrak{B} , choisie de telle sorte que $\Pi^{N/[E:F]} = \varpi_E$; Π est aussi une uniformisante de l’ordre \mathfrak{A} .

Fixons un isomorphisme unitaire d’algèbres de Hecke :

$$\Psi: \mathcal{H}(H, \mathbf{1}_I) \longrightarrow \mathcal{H}(G, \lambda)$$

et notons

$$\mathcal{E}_\Psi: \mathcal{R}_{(I, \mathbf{1}_I)} \longrightarrow \mathcal{R}_\lambda(G)$$

l’équivalence de catégories correspondante. Finalement posons

$$\pi_\lambda = \mathcal{E}_\Psi(\mathbf{St}_H)$$

et notons ω le caractère central de π_λ .

Transférons le pseudo-coefficient de Kottwitz $f_0 \in \mathcal{H}(H, \mathbf{1}_I)$ en un élément φ_λ de $\mathcal{H}(G, \lambda\omega)$ par les étapes suivantes :

- (i) $F_\lambda = \Psi(F_0) \in \mathcal{H}(G, \lambda)$,
- (ii) $f_\lambda = P_\omega(F_\lambda) \in \mathcal{H}(G, \lambda\omega)$,
- (iii) $\varphi_\lambda = \text{Tr}_{W_\lambda} \circ f_\lambda \in e_{\lambda\omega} \star \mathcal{H}(G) \star e_{\lambda\omega}$.

Nous avons choisi ici la mesure de Haar μ_G sur G telle que $\mu_G(J) = 1$, la mesure de Haar sur F^\times normalisée par $\mu_{F^\times}(\mathfrak{o}^\times) = 1$, et la mesure de Haar quotient $\mu_{G/Z}$ sur G/Z . La projection P_ω et l'idempotent $e_{\lambda\omega}$ sont alors définis de façon habituelle.

Le résultat suivant se démontre comme la proposition 6.5.

Proposition 12.1 *La fonction φ_λ est un pseudo-coefficient de π_λ .*

Notons $\tilde{E} = E[\Pi] = F[\Pi]$. C'est une extension totalement ramifiée de F de degré N dont le groupe multiplicatif normalisé \mathfrak{B} et \mathfrak{A} . En fait Π est minimal sur F au sens de [BK, (1.4.14)] et \mathfrak{A} est l'unique ordre héréditaire de A normalisé par Π (cf. [BK, exercice (1.5.6)]).

Nous allons déterminer les valeurs $\varphi(xg_0g^{-1})$, $x \in G$, pour un élément g_0 de la forme :

$$g_0 = \Pi^{-\nu} u, \quad \nu \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \quad \text{pgcd}(\nu, N) = 1 \quad \text{et} \quad u \in H^1(\beta, \mathfrak{A}).$$

Lemme 12.2 *L'élément g_0 est minimal sur F et normalise \mathfrak{A} . En particulier \mathfrak{A} est l'unique ordre héréditaire de A normalisé par g_0 .*

Démonstration On a $u \in 1 + \text{Rad}(\mathfrak{A}) \subset U(\mathfrak{A})$ et g_0 normalise donc \mathfrak{A} . Les strates $[\mathfrak{A}, -\nu, -\nu-1, g_0]$ et $[\mathfrak{A}, -\nu, -\nu-1, \Pi^{-\nu}]$ sont équivalentes et on conclut comme dans le lemme 11.3.

On a, rappelons-le :

$$\varphi_\lambda(g) = \frac{(-1)^{e-1}}{e'} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{T \subset S} \frac{(-1)^{d_T}}{(d_T + 1)\mu_H(P_T)} \sum_{w \in \langle T \rangle} \sum_{l=0}^{e' n_T - 1} \epsilon_T^l \omega(\varpi_F)^{-k} \text{Tr}_{W_\lambda} \circ \Psi(f_{z_T^l, w})(\varpi_F^{-k} g)$$

pour $g \in G$ et où $e' = e(E/F)$.

Si $g = xg_0^{-1}x^{-1}$, alors $v_F(\det(g)) = \nu$. D'un autre côté la fonction $\Psi(f_{z_T^l, w})$ a un support contenu dans $Jz_T^l w J$. Or tout élément y de $Jz_T^l w J$ vérifie

$$v_F(\det(y)) = l v_F(\det(z_T)) = l \frac{N}{n_T e'}.$$

Ainsi, si le terme $\Psi(f_{z_T^l, w})(\varpi^{-k} g)$ est non nul, on a $l \frac{N}{n_T e'} = \nu - kN$. Puisque $0 \leq l \frac{N}{n_T e'} < N$, ceci entraîne $k = 0$. Donc $l \frac{N}{n_T e'} = \nu$, c'est-à-dire $\nu = l$, puisque ν est premier à N . Mais alors $n_T = N/e' = N/[E : F]$, ce qui entraîne $T = \emptyset$.

Pour résumer, si $xg_0^{-1}x^{-1}$ est dans le support de φ_λ , on a

$$\varphi_\lambda(xg_0^{-1}x^{-1}) = \frac{(-1)^{e-1}}{e'} \frac{(-1)^{d_\emptyset}}{(d_\emptyset + 1)\mu_H(I)} \epsilon_\emptyset^\nu \text{Tr}_{W_\lambda} \circ \Psi(f_{\Pi^\nu})(xg_0^{-1}x^{-1}).$$

Notons aussi que $d_\emptyset = N/e' - 1$ et $e = N/e'$. De plus g_0 étant minimal sur F et $\Psi(f_{\Pi^\nu})$ de support contenu dans $N_G(\mathfrak{A}) = \langle \Pi \rangle U(\mathfrak{A})$, on a $\varphi_\lambda(xg_0^{-1}x^{-1}) = 0$, si $x \notin N_G(\mathfrak{A})$. Nous avons donc démontré le lemme suivant.

Lemme 12.3 *On a*

$$\varphi_\lambda(xg_0^{-1}x^{-1}) = \frac{\epsilon_\emptyset}{N} \text{Tr}_{W_\lambda} \circ \Psi(f_\Pi)^\nu(xg_0^{-1}x^{-1}), \quad x \in N_G(\mathfrak{A})$$

et

$$\varphi_\lambda(xg_0^{-1}x^{-1}) = 0 \quad \text{si } x \notin N_G(\mathfrak{A}).$$

Notons que ϵ_\emptyset est la signature de la permutation circulaire

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $(-1)^{n-1}$.

Notons V l'espace de π_λ .

Proposition 12.4

- (i) *La composante λ -isotypique V^λ est isomorphe à λ comme représentation de J (i.e., λ intervient dans π avec multiplicité 1).*
- (ii) *L'espace V^λ est stable sous l'action de $N_{B^\times}(\mathfrak{B})$. En particulier l'action de $\langle \Pi \rangle J$ dans V^λ est une représentation $\tilde{\lambda}$ qui prolonge la représentation λ .*
- (iii) *Il existe une constante non nulle $c \in \mathbb{C}$ telle que*

$$\Psi(f_\Pi)(\Pi j) = c \cdot \tilde{\lambda}(\Pi j) \quad j \in J.$$

- (iv) *Pour $k \geq 0$, on a*

$$\Psi(f_\Pi)^k(\Pi^k j) = c^k \cdot \tilde{\lambda}(\Pi^k j) \quad j \in J.$$

Démonstration Le $\mathcal{H}(H, I)$ -module correspondant à \mathbf{St}_H est de dimension 1. Il en est donc de même du $\mathcal{H}(G, \lambda)$ -module M correspondant à V . Comme \mathbb{C} -espace vectoriel la composante isotypique V^λ est isomorphe à $M \otimes_{\mathbb{C}} W_\lambda$. On a donc $\dim_{\mathbb{C}}(V^\lambda) = \dim(\lambda)$, ce qui prouve (i).

Par [BK, proposition (5.5.11), p. 185], l'entrelacement de (J, λ) est $JB^\times J$, en particulier il contient $N_{B^\times}(\mathfrak{B})$. Mais par (3.1.15)(ii), le groupe $N_{B^\times}(\mathfrak{B})$ normalise J et il normalise donc la paire (J, λ) . Le point (ii) en découle.

Par [BK, (5.66)(i), p. 190], toutes les fonctions de $\mathcal{H}(G, \lambda)$ à support dans $\Pi \cdot J$ sont proportionnelles. Par le point (i), on a que Π entrelace λ avec comme opérateur d'entrelacement $\tilde{\lambda}(\Pi)$. Donc il existe une fonction $f \in \mathcal{H}(G, \lambda)$, non nulle à support $\Pi \cdot J$, telle que $f(\Pi) = \tilde{\lambda}(\Pi)$. On en déduit qu'il existe $c \in \mathbb{C}^\times$ tel que $\Pi(f_\Pi)$, qui est à support $\Pi \cdot J$, vaut $c \cdot \tilde{\lambda}$ en Π . Le point (iii) en découle. Le (iv) se déduit de (iii), par récurrence, via un calcul immédiat de convolution (utilisant le fait que $\mu_G(J) = 1$).

Théorème 12.5 Avec les notations précédentes, supposons que le polynôme caractéristique de $g_0 = \Pi^{-\nu}u \in A$ est séparable sur F , de sorte que g_0 est elliptique régulier. Le caractère d’Harish-Chandra Θ_λ de π_λ en g_0 est alors donné par la formule

$$\Theta_\lambda(\Pi^{-\nu}u) = (-1)^{\nu(n-1)}c^\nu \sum_{x \in U(\mathfrak{O})/J} \text{Tr } \tilde{\lambda}(x^{-1}(\Pi^{-\nu}u)x).$$

Démonstration En étendant la fonction $\text{Tr } \tilde{\lambda}$ par 0 à G tout entier, on a

$$\varphi_\lambda(xg_0^{-1}x^{-1}) = \frac{(-1)^{\nu(n-1)}}{N} \text{Tr } \tilde{\lambda}(x^{-1}(\Pi^{-\nu}u)x) \quad x \in G.$$

La formule de Kazhdan (théorème 11.1) donne alors successivement :

$$\begin{aligned} \Theta_\lambda(g_0) &= \frac{(-1)^{\nu(n-1)}}{N} \sum_{\langle \Pi \rangle U(\mathfrak{O})/F^\times} \text{Tr } \tilde{\lambda}(x^{-1}g_0x) d\mu_{G/Z}(\dot{x}) \\ &= \frac{(-1)^{\nu(n-1)}}{N} \sum_{k=0}^N \int_{\Pi^k F^\times U(\mathfrak{O})/F^\times} \text{Tr } \tilde{\lambda}(x^{-1}g_0x) d\mu_{G/Z}(\dot{x}) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^{\nu(n-1)}c^\nu \int_{\Pi^k U(\mathfrak{O})} \text{Tr } \tilde{\lambda}(x^{-1}g_0x) d\mu_G(x) \\ &= c^\nu (-1)^{\nu(n-1)} \int_{U(\mathfrak{O})} \text{Tr } \tilde{\lambda}(x^{-1}g_0x) d\mu_G(x) \\ &= c^\nu (-1)^{\nu(n-1)} \sum_{x \in U(\mathfrak{O})/J} \text{Tr } \tilde{\lambda}(x^{-1}g_0x). \end{aligned}$$

A Quelques lemmes sur l’action d’une algèbre de Hecke de fonctions λ -sphériques

Les résultats de cette annexe sont peut être bien connus, mais l’auteur, ne connaissant pas de références, a préféré les démontrer.

On fixe :

- un groupe G localement profini et unimodulaire et une mesure de Haar μ sur G ;
- une paire (J, λ) formée d’un sous-groupe ouvert compact J de G et d’une représentation lisse irréductible (λ, W) de J .

Soit $(\check{\lambda}, \check{W})$ la représentation contragrédiente de (λ, W) . Rappelons que l’algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}(G, \check{\lambda})$ est le \mathbb{C} -espace vectoriel formé des fonctions

$$\varphi: G \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(W)$$

qui sont à support compact et se transforment selon

$$\varphi(j_1 g j_2) = \lambda(j_1) \circ \varphi(g) \circ \lambda(j_2)$$

muni du produit de convolution

$$\varphi_1 \star \varphi_2(g) = \int_G \varphi_1(x) \circ \varphi_2(x^{-1}g) \, dx \quad g \in G.$$

Il est classique qu'on a un isomorphisme canonique d'algèbres

$$\mathcal{H}(G, \check{\lambda}) \longrightarrow \text{End}_G(\text{c-ind}_J^G \lambda)$$

qui à $\varphi \in \mathcal{H}(G, \check{\lambda})$ associe l'opérateur de convolution

$$f \mapsto \varphi \star f \quad f \in \text{c-ind}_J^G \lambda$$

où

$$\varphi \star f(g) = \int_G \varphi(x)[f(x^{-1}g)] \, dx \quad g \in G.$$

On notera φ_\star l'opérateur de convolution attaché à φ .

Fixons à présent une représentation lisse (π, \mathcal{V}) de G . On lui associe deux espaces vectoriels :

$$M_{\mathcal{V}} = \text{Hom}_J(\lambda, \pi) \quad \text{et} \quad \tilde{M}_{\mathcal{V}} = \text{Hom}_G(\text{c-ind}_J^G \lambda, \pi).$$

Par réciprocity de Frobenius pour l'induction compacte, ces deux espaces sont canoniquement isomorphes. Rappelons comment est réalisé cet isomorphisme canonique. Considérons l'élément $\alpha \in \text{Hom}_J(\lambda, \text{c-ind}_J^G \lambda)$ qui à $w \in W$ associe la fonction T_w à support dans J donnée par $T_w(j) = \lambda(j).w$, $j \in J$. L'isomorphisme canonique $\Psi: \tilde{M}_{\mathcal{V}} \longrightarrow M_{\mathcal{V}}$ est donné par $\Psi(\tilde{\varphi}) = \tilde{\varphi} \circ \alpha$, $\tilde{\varphi} \in \tilde{M}_{\mathcal{V}}$. Nous avons besoin d'exhiber son inverse.

Lemme A.1 *L'inverse $\Phi: M_{\mathcal{V}} \longrightarrow \tilde{M}_{\mathcal{V}}$ de Ψ est donné par $\Phi(\varphi) = \tilde{\varphi}$, où*

$$\tilde{\varphi}(f) = \frac{1}{\mu(J)} \int_G \pi(x). \varphi(f(x^{-1})) \, dx \quad f \in \text{c-ind}_J^G \lambda.$$

Démonstration Soient $\varphi \in M_{\mathcal{V}}$ et $w \in W$. On a successivement :

$$\begin{aligned} \Psi(\Phi(\varphi))(w) &= \Phi(\varphi) \circ \alpha(w) \\ &= \Phi(\varphi)(T_w) \\ &= \frac{1}{\mu(J)} \int_G \pi(x). \varphi(T_w(x^{-1})) \, dx \\ &= \frac{1}{\mu(J)} \int_J \pi(j). \varphi(\lambda(j^{-1}).w) \, dj \\ &= \frac{1}{\mu(J)} \int_J \pi(j) \circ \pi(j^{-1}). \varphi(w) \, dj \\ &= \varphi(w). \end{aligned}$$

On a bien $\Psi(\Phi(\varphi)) = \varphi$.

On regarde \tilde{M}_V comme un $\mathcal{H}(G, \check{\lambda})$ -module à droite via

$$\tilde{\varphi}.f = \tilde{\varphi} \circ f_* \tilde{\varphi} \in \tilde{M}_V \quad f \in \mathcal{H}(G, \check{\lambda}).$$

On munit de même M_V d'une structure de $\mathcal{H}(G, \check{\lambda})$ -module à droite via l'identification canonique $M_V \simeq \tilde{M}_V$, c'est-à-dire :

$$\varphi.f = \Psi(\Phi(\varphi) \circ f_*) \quad \varphi \in M_V, f \in \mathcal{H}(G, \check{\lambda}).$$

Nous allons calculer cette action de façon explicite.

Lemme A.2 *L'action naturelle de $\mathcal{H}(G, \check{\lambda})$ sur M_λ est donnée par*

$$\varphi.f = \int_G \pi(x) \circ \varphi \circ f(x^{-1}) dx \quad \varphi \in M_V, f \in \mathcal{H}(G, \check{\lambda}).$$

Démonstration Soient $\varphi \in \text{Hom}_J(\lambda, \pi)$, $f \in \mathcal{H}(G, \check{\lambda})$ et $w \in W$. On a successivement :

$$\begin{aligned} (\varphi.f)(w) &= \Psi(\Phi(\varphi) \circ f_*)(w) = \Phi(\varphi \circ f_*)(T_w) = \Phi(\varphi(f \star T_w)) \\ &= \frac{1}{\mu(J)} \int_G \pi(x) \cdot \varphi\{(f \star T_w)(x^{-1})\} dx \\ &= \frac{1}{\mu(J)} \int_G \pi(x) \cdot \varphi\left\{ \int_G f(u)[T_w(u^{-1}x^{-1})] du \right\} dx \\ &= \frac{1}{\mu(J)} \int_G \pi(x) \cdot \varphi\left\{ \int_J f(x^{-1}j^{-1})[T_w(j)] dj \right\} dx \\ &= \frac{1}{\mu(J)} \int_G \pi(x) \cdot \varphi\left\{ \int_J f(x^{-1}) \circ \lambda(j^{-1}) \circ \lambda(j)(w) dj \right\} dx \\ &= \frac{1}{\mu(J)} \int_G \pi(x) \cdot \varphi\left\{ \mu(J) \cdot f(x^{-1})(w) \right\} dx \\ &= \left(\int_G \pi(x) \circ \varphi \circ f(x^{-1}) \right) (w) \end{aligned}$$

où à la sixième égalité, on a fait le changement de variable $j = u^{-1}x^{-1}$. Le résultat en découle.

Nous allons énoncer des résultats similaires en relâchant les hypothèses. Les démonstrations sont laissées au lecteur. Nous gardons donc les mêmes notations mais modifions les hypothèses de la façon suivante :

- J est ouvert, contient le centre Z de G et J/Z est compact ;
- (π, V) possède un caractère central ω_π qui coïncide avec le caractère central de λ .

On fixe une mesure de Haar μ_Z sur Z et on note $\mu_{G/Z}$ la mesure quotient de μ par μ_Z . Cette mesure de Haar définit une algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G, \check{\lambda})$. Cette dernière s'identifie à l'algèbre $\text{End}_G(\text{c-ind}_J^G \lambda)$. Cette identification envoie $\varphi \in \mathcal{H}(G, \check{\lambda})$ sur l'opérateur φ_* donné par

$$\varphi_*(f)(g) = f \star \varphi(g) = \int_{G/Z} \varphi(x)[f(x^{-1}g)] d\mu_{G/Z}(\check{x}) \quad f \in \text{c-ind}_J^G \lambda, g \in G.$$

Comme précédemment, les \mathbb{C} -espaces vectoriels

$$M_{\mathcal{V}} = \text{Hom}_J(\lambda, \pi) \quad \text{et} \quad \tilde{M}_{\mathcal{V}} = \text{Hom}_G(\text{c-ind}_J^G \lambda, \pi)$$

sont canoniquement isomorphes via

$$\Psi: \tilde{M}_{\mathcal{V}} \ni \tilde{\varphi} \mapsto \tilde{\varphi} \circ \alpha \in M_{\mathcal{V}}$$

où α est le plongement naturel J -équivariant de λ dans $\text{c-ind}_J^G \lambda$, défini comme dans le cas J compact.

Lemme A.3 *L'inverse Φ de Ψ est donné par $\Phi(\varphi) = \tilde{\varphi}$, où*

$$\tilde{\varphi}(f) = \frac{1}{\mu_{G/Z}(J/Z)} \int_{G/Z} \pi(x) \cdot \varphi(f(x^{-1})) d\mu_{G/Z}(\check{x}) \quad \varphi \in M_{\mathcal{V}}, f \in \text{c-ind}_J^G \lambda.$$

Démonstration Laissée au lecteur.

Comme dans le cas où J est compact, les deux \mathbb{C} -espaces vectoriels $M_{\mathcal{V}}$ et $\tilde{M}_{\mathcal{V}}$ sont naturellement munis de structures de $\mathcal{H}(G, \check{\lambda})$ -modules à droite.

Lemme A.4 *L'action naturelle de $\mathcal{H}(G, \check{\lambda})$ sur $M_{\mathcal{V}}$ est donnée par*

$$\varphi \cdot f = \int_{G/Z} \pi(x) \circ \varphi \circ f(x^{-1}) d\mu_{G/Z}(\check{x}) \quad \varphi \in \text{Hom}_J(\lambda, \pi), f \in \mathcal{H}(G, \check{\lambda}).$$

Démonstration Laissée au lecteur.

B Isomorphismes d'algèbre de Hecke et représentations tempérées

L'objet de cette annexe est de démontrer le théorème 6.3. Nous allons en fait démontrer un résultat plus général qui est virtuellement déjà contenu dans [BHK]. Nous utiliserons largement les concepts et notations de cet article.

Soit G un groupe réductif connexe défini sur F de groupe de points rationnels G . Fixons une mesure de Haar μ sur G . Soit \hat{G} le dual unitaire de G , formé des classes d'isomorphie de représentations unitaires continues irréductibles de G dans des espaces de Hilbert. Nous identifierons \hat{G} de façon canonique avec l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations lisses, irréductibles, unitarisables, de G [BHK, (2.13)]. L'espace topologique \hat{G} est muni de la mesure de Plancherel $\hat{\mu}$, duale de μ . On note $\text{supp } \hat{\mu}$ le dual réduit de G , c'est-à-dire le support de la mesure $\hat{\mu}$. Rappelons le résultat fondamental suivant.

Théorème B.1 ([Be], [Wa]) *Le support de la mesure de Plancherel $\hat{\mu}$ consiste en les classes d'isomorphie de représentations irréductibles tempérées.*

Pour toute paire (K, ρ) formée d'un sous-groupe ouvert compact K et d'une représentation lisse irréductible ρ de K , on note $\mathcal{H}(G, \rho)$ l'algèbre de Hecke sphérique attachée à ρ et à la mesure de Haar μ , comme dans [BK, section 4]. Elle est munie d'une structure canonique d'algèbre de Hilbert, de \mathbb{C}^* -star algèbre réduite associé notée ${}_r\mathcal{C}^*(G, \rho)$ (voir [BHK, section 3] pour la notion d'algèbre de Hilbert et [BK, (4.3), pp. 152–156], pour la structure naturelle d'algèbre de Hilbert sur une algèbre de Hecke sphérique). Cette dernière est obtenue de $\mathcal{H}(G, \rho)$ par un procédé de complétion. Le dual de ${}_r\mathcal{C}^*(G, \rho)$ est noté ${}_r\hat{\mathcal{C}}^*(G, \rho)$. L'application de "restriction des scalaires"

$${}_r\hat{\mathcal{C}}^*(G, \rho) \longrightarrow \mathcal{H}(G, \rho)\text{-Mod}$$

est injective et permet d'identifier ${}_r\hat{\mathcal{C}}^*(G, \rho)$ à un sous-ensemble de l'ensemble des classes d'isomorphie de $\mathcal{H}(G, \rho)$ -modules simples.

Pour toute représentation lisse (π, V) de G , on note $m_\rho(V) = V_\rho = \text{Hom}_K(\rho, V)$. On note ${}_r\hat{G}(\rho)$ l'ensemble des $(\pi, V) \in {}_r\hat{G}$ tels que $V_\rho \neq 0$. On a alors le résultat suivant.

Théorème B.2 ([BHK, Théorème B]) *Pour tout $(\pi, V) \in {}_r\hat{G}(\rho)$, la structure de $\mathcal{H}(G, \rho)$ -module de V_ρ s'étend en une structure ${}_r\mathcal{C}^*(G, \rho)$ -module et le module obtenu est simple. L'application $(\pi, V) \mapsto V_\rho$ induit un homéomorphisme :*

$$\hat{m}_\rho: {}_r\hat{G}(\rho) \longrightarrow {}_r\hat{\mathcal{C}}^*(G, \rho).$$

Donnons-nous maintenant, pour $i = 1, 2$, un F -groupe réductif connexe \mathbb{G}_i , de groupe de points rationnels G_i , une mesure de Haar μ_i , et deux paires (K_i, ρ_i) comme ci-dessus. Supposons donné un isomorphisme de \mathbb{C} -algèbres

$$j: \mathcal{H}(G_1, \rho_1) \longrightarrow \mathcal{H}(G_2, \rho_2)$$

compatible avec les structures d'algèbres de Hilbert. Alors j s'étend en un isomorphisme de \mathbb{C}^* -star algèbres

$${}_r\mathcal{C}^*(G_1, \rho_1) \longrightarrow {}_r\mathcal{C}^*(G_2, \rho_2)$$

encore noté \hat{j} , et induit un homéomorphisme

$$\begin{aligned} \hat{j}: {}_r\hat{\mathcal{C}}^*(G_1, \rho_1) &\longrightarrow {}_r\hat{\mathcal{C}}^*(G_2, \rho_2) \\ (\pi, H) &\longmapsto (\pi \circ j^{-1}, H). \end{aligned}$$

En particulier l'application naturelle

$$j^*: \mathcal{H}(G, \rho_1)\text{-Mod} \longrightarrow \mathcal{H}(G\rho_2)\text{-Mod}$$

se "restreint" en \hat{j} .

Supposons à présent que, pour $i = 1, 2$, (K_i, ρ_i) soit un type au sens de Bushnell et Kutzko [BK2]. Pour $i = 1, 2$, notons $\mathcal{R}_{\rho_i}(G_i)$ la catégorie des représentations lisses de G_i engendrées par leur composante ρ_i -isotypique. Soit

$$\mathcal{E}_j : \mathcal{R}_{\rho_1}(G_1) \longrightarrow \mathcal{R}_{\rho_2}(G_2)$$

l'équivalence de catégories telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{\rho_1}(G_1) & \xrightarrow{\mathcal{E}_j} & \mathcal{R}_{\rho_2}(G_2) \\ \rho_1 \downarrow & & \rho_2 \downarrow m \\ \mathcal{H}(G, \rho_1)\text{-Mod} & \xrightarrow{j^*} & \mathcal{H}(G, \rho_2)\text{-Mod} . \end{array}$$

Alors ce dernier diagramme se restreint en

$$\begin{array}{ccc} {}_r\hat{G}_1(\rho_1) & \xrightarrow{\mathcal{E}_j} & {}_r\hat{G}_2(\rho_2) \\ \hat{m}_{\rho_1} \downarrow & & \downarrow \hat{m}_{\rho_2} \\ {}_r\hat{C}(G_1, \rho_1) & \xrightarrow{j} & {}_r\hat{C}(G_1, \rho_1) . \end{array}$$

En particulier si (π, V) est une représentation, lisse irréductible, unitaire, de G_1 , alors π est tempérée si, et seulement, si $\mathcal{E}_j(\pi)$ est tempérée. Pour résumer, on a le résultat suivant.

Théorème B.3 *Pour $i = 1, 2$, soit (K_i, ρ_i) un type de G_i . Soit*

$$j : \mathcal{H}(G, \rho_1) \longrightarrow \mathcal{H}(G, \rho_2)$$

un isomorphisme d'algèbres de Hilbert. Alors \mathcal{E}_j envoie une représentation irréductible tempérée de $\mathcal{R}_{\rho_1}(G_1)$ sur une représentation irréductible tempérée de $\mathcal{R}_{\rho_2}(G_2)$.

Appliquons à présent ce résultat au contexte du Théorème 6.3. Ici, on a :

- $G_1 = \text{Res}_{K/F} \text{GL}(e, K)$ et $(K_1, \rho_1) = (I, \mathbf{1}_I)$,
- $G_2 = \text{GL}(N, F)$ et $(K_2, \rho_2) = (J', \lambda')$
- j est l'isomorphisme Ψ , qui est supposé *unitaire*.

Or par le corollaire [BK, (5.6.17)], un isomorphisme unitaire d'algèbres de Hecke sphériques est compatible avec les structures unitaires de ces algèbres. De plus, par [BK, (5.6.19), p. 194], un tel isomorphisme est compatible avec les involutions. Il s'ensuit qu'un isomorphisme unitaire d'algèbres de Hecke sphériques est compatible avec les structure d'algèbres de Hilbert, ce qui démontre le théorème 6.3.

Références

- [Ba] I. Badulescu, *Un résultat de transfert et un résultat d'intégrabilité locale des caractères en caractéristique non nulle*. J. Reine Angew. Math. **565**(2003), 1001–124.
- [Be] J. Bernstein, *On the support of Plancherel measure*. J. Geom. Phys. **5**(1988), 663–710. [http://dx.doi.org/10.1016/0393-0440\(88\)90024-1](http://dx.doi.org/10.1016/0393-0440(88)90024-1)
- [BH] C. J. Bushnell et G. Henniart, *Explicit functorial correspondences for level zero representations of p -adic linear groups*. J. Number Theory **131** (2011), 309–331. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jnt.2010.09.003>
- [BH1] ———, *The essentially tame Jacquet–Langlands correspondence for inner forms of $GL(n)$* . Prépublication, 2008.
- [BH2] ———, *Local tame lifting for $GL(n)$. III. Explicit base change and Jacquet–Langlands correspondence*. J. Reine Angew. Math. **580**(2005), 39–100. <http://dx.doi.org/10.1515/crll.2005.2005.580.39>
- [BH3] ———, *Correspondance de Jacquet–Langlands explicite. II. Le cas de degré égal à la caractéristique résiduelle*. Manuscripta Math. **102**(2000), 211–225. <http://dx.doi.org/10.1007/s002291020211>
- [BH4] ———, *Local tame lifting for $GL(N)$. I. Simple characters*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **83**(1996), 105–233.
- [BHK] C. J. Bushnell, G. Henniart et P. C. Kutzko, *Types and explicit Plancherel formulae for reductive p -adic groups*. In: *On certain L-functions*, Clay Math. Proc. **13**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, 55–80.
- [BK] C. J. Bushnell et P. C. Kutzko, *The admissible dual of $GL(N)$ via compact open subgroups*. Ann. of Math. Stud. **129**, Princeton University Press, 1993.
- [BK2] ———, *Smooth representations of p -adic groups: Structure theory via types*, Proc. London Math. Soc. (3) **77**(1998), 582–634. <http://dx.doi.org/10.1112/S0024611598000574>
- [DL] P. Deligne et G. Lusztig, *Duality for representations of reductive a group over a finite field*. J. Algebra **74**(1982), 284–291. [http://dx.doi.org/10.1016/0021-8693\(82\)90023-0](http://dx.doi.org/10.1016/0021-8693(82)90023-0)
- [DM] F. Digne et J. Michel, *Representations of finite groups of Lie type*. London Mathematical Society Student Texts **21**, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [GG] I. M. Gel'fand et M. I. Graev, *Représentations of the group of second order matrices with elements in a locally compact field and spherical functions in locally compact fields*. (Russian) Uspehi Mat. Nauk **18**(1963), 29–99.
- [HM] R. Howe et A. Moy, *Harish-Chandra homomorphisms for p -adic groups*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics **59**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985.
- [Ka] D. Kazhdan, *Cuspidal geometry of p -adic groups*. J. d'Analyse Math. **47**(1986), 1–36. <http://dx.doi.org/10.1007/BF02792530>
- [Kott] R. E. Kottwitz, *Tamagawa Numbers*. Annals of Math. **127**(1988), 629–646. <http://dx.doi.org/10.2307/2007007>
- [La] G. Laumon, *Cohomology of Drinfeld modular varieties, Part I: Geometry, counting of points and local harmonic analysis*. Cambridge Stud. Adv. Math. **41**, Cambridge University Press, 1996.
- [ScSt] P. Schneider et U. Stuhler, *Representation theory and sheaves on the Bruhat–Tits building*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **85**(1997), 97–191.
- [SaSp] P. J. Sally Jr. et L. Spice, *Character theory of reductive p -adic groups*. In: *Ottawa lectures on admissible representations of reductive p -adic groups*, Fields Institute Monographs **26**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.
- [SZ] A. L. Silberger et E.-W. Zink, *The character of the generalized Steinberg representations of finite linear groups on the regular elliptic set*. Trans. Amer. Math. Soc. **352**(2000), 3339–3356. <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-00-02454-5>
- [SZ2] ———, *Weak explicit matching for level zero discrete series of unit groups of p -adic simple algebras*. Canad. J. Math. **55**(2003), 353–378. <http://dx.doi.org/10.4153/CJM-2003-016-4>
- [Wa] J.-L. Waldspurger, *La formule de Plancherel pour les groupes p -adiques (d'après Harish-Chandra)*. J. Inst. Math. Jussieu **2**(2003), 235–333. <http://dx.doi.org/10.1017/S1474748003000082>

Université de Poitiers, Laboratoire de Mathématiques et Applications, UMR 7348 du CNRS
courriel: paul.broussous@math.univ-poitiers.fr