CATÉGORIES SEMI-SIMPLES ET CATÉGORIES PRIMITIVES

P.-Y. LEDUC

1. Introduction. Le but de cet article est d'établir une théorie des catégories additives axée sur l'idée de structure. Etant donné ce que nous connaissons aujourd'hui des catégories additives, il était tout naturel qu'une telle étude fut entreprise, et ce, dans l'optique d'une généralisation de la théorie classique (Wedderburn–Artin–Jacobson) des anneaux non-commutatifs avec élément unité. C'est dans "On the radical of a category" de G. M. Kelly **(2)** que l'on retrouve une amorce à l'étude des catégories additives, telle que nous la concevons dans cet article.

Pour atteindre notre objectif, nous avons dû généraliser la notion de module sur un anneau à une notion de module sur une catégorie (pour laquelle nous proposons le terme de "$\mathfrak{R}$-précatégorie"). Afin de décrire celle-ci, convenons tout d'abord d'appeler "précatégorie" tout système $\mathscr{M}$ formé d'une classe d'objets $A, X, \ldots$ et de la donnée d'un groupe abélien $M_{\mathscr{M}}(X, A)$ pour chaque paire ordonnée d'objets (X, A). Grâce à ce concept de précatégorie, nous obtenons tout naturellement la généralisation suivante de la notion de représentation d'un anneau.

Etant donnée une catégorie additive $\mathfrak{R}$, *une* $\mathfrak{R}$*-précatégorie est un couple* $(\mathscr{M}, \Phi)$ *où* $\mathscr{M}$ *est une précatégorie ayant les mêmes objets que* $\mathfrak{R}$ *et où* Φ *est une fonction assignant à chaque objet* A *de* $\mathfrak{R}$ *un foncteur* $\Phi_A\colon \mathfrak{R} \rightarrow \mathrm{Ab}$ *tel que pour toute couple* (X, A), $\Phi_A (X) = M_{\mathscr{M}}(X, A)$.

Si la catégorie $\mathfrak{R}$ n'a qu'un seul objet, disons A, et si R désigne l'anneau $M_{\mathfrak{R}}(A, A)$, alors la donnée d'une $\mathfrak{R}$-précatégorie $(\mathscr{M}, \Phi)$ revient à celle d'un homomorphisme Φ_A de R dans l'anneau des endomorphismes du groupe abélien $M_{\mathscr{M}}(A, A)$, c'est-à-dire à la donnée d'une représentation de l'anneau R, ou encore, d'un R-module. Nous espérons convaincre le lecteur qu'une généralisation vraiment fidèle de la théorie des anneaux exige que l'on dispose d'une notion de représentation utilisable *de la même façon* qu'en théorie des anneaux.

Après avoir montré que, lorsqu'une certaine condition de finitude est réalisée, le quotient d'une catégorie $\mathfrak{R}$ par son radical de Kelly est somme directe d'un nombre fini de ses idéaux simples, nous établissons une généralisation du théorème de Wedderburn–Artin sur les anneaux semi-simples.

Les catégories de matrices au moyen desquelles nous représentons nos catégories "semi-simples" ont été introduites par I. E. Burmistrovič **(1)**

Received September 19, 1966.

mais nous les utilisons sous une forme quelque peu simplifiée. Cette simplification permet également d'obtenir toute une classe de catégories "primitives". Après avoir montré que toute catégorie primitive s'identifie à une sous-catégorie d'une catégorie de la forme $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\mathscr{V}, \mathscr{V})$, où $\mathscr{V}$ est ce que l'on pourrait appeler un "espace vectoriel sur le corpoïde $\mathfrak{C}$", nous démontrons que cette immersion est dense pour une certaine relation d'indépendance linéaire, ce qui constitue le dernier résultat proposé dans cet article, c'est-à-dire la généralisation du théorème de densité de Jacobson–Kaplansky.

Tout au long de cet article, $\mathfrak{R}$ désignera une catégorie additive; les objets de $\mathfrak{R}$ seront notés $A, B, X, Y, \ldots$ et l'ensemble des morphismes allant de A à B, $M_{\mathfrak{R}}(A, B)$; par "additive" nous voulons dire que les $M_{\mathfrak{R}}(A, B)$ sont des groupes abéliens, et que les lois de distributivité habituelles sont valides (il n'est pas requis que tout couple d'objets possède une somme directe). Enfin, pour éviter toute difficulté d'ordre logique *nous supposons que* $\mathfrak{R}$ *est petite*, c'est-à-dire que la classe des objets de $\mathfrak{R}$ est un ensemble.

Cet article représente l'essentiel de ma thèse de doctorat, rédigée sous la direction du Professeur Jean Maranda. Je profite de cette occasion pour lui adresser mes plus vifs remerciements. Après m'avoir suggéré le présent domaine de recherches, il a su me guider avec clairvoyance tout au long de sa réalisation.

2. $\mathfrak{R}$-précatégories. Au cours de cette section, nous commencerons par préciser ce que sont les $\mathfrak{R}$-précatégories; puis, nous indiquerons de quelle manière les $\mathfrak{R}$-sous-précatégories d'une $\mathfrak{R}$-précatégorie donnée peuvent être construites.

Définition 1. Une *précatégorie* $\mathscr{M}$ est un système composé (i) d'une classe d'objets $A, B, \ldots, X, Y, \ldots$ (ii) pour chaque couple (A, B), de la donnée d'un groupe abélien additif noté $M_{\mathscr{M}}(A, B)$, dont les éléments sont appelés des morphismes.

Ainsi, toute catégorie est une précatégorie; de plus, la donnée d'une précatégorie ayant un seul objet équivaut à celle d'un groupe abélien.

Soit A un objet d'une précatégorie $\mathscr{M}$; nous désignerons par $A_{\mathscr{M}}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des groupes abéliens, dont les objets sont les $M_{\mathscr{M}}(X, A)$, X parcourant la classe des objets de $\mathscr{M}$.

Définition 2. Une $\mathfrak{R}$-*précatégorie* (*à droite*) est un couple $(\mathscr{M}, \Phi)$ où $\mathscr{M}$ est une précatégorie ayant les mêmes objets que $\mathfrak{R}$, et où Φ est une fonction assignant à chaque objet A de $\mathfrak{R}$ un foncteur additif contravariant Φ_A: $\mathfrak{R} \to A_{\mathscr{M}}$; ce couple est en outre soumis aux axiomes suivants:

(1) si X est nul ou si A est nul, alors $M_{\mathscr{M}}(X, A) = \{0\}$,

(2) pour chaque A, si $r \in M_{\mathfrak{R}}(Y, X)$, alors $\Phi_A(r)$: $M_{\mathscr{M}}(X, A) \to M_{\mathscr{M}}(Y, A)$.

Pour $x \in M_{\mathscr{M}}(X, A)$ et $r \in M_{\mathfrak{R}}(Y, X)$, nous abrègerons souvent l'expression $\Phi_A(r)(x)$ par xr. Remarquons que xr est défini si, et seulement si, (but de r) = (source de x), et que dans ce cas, (source de xr) = (source de r) et (but de xr) = (but de x). En outre, si $\circ$ désigne la loi de composition multiplicative de $\mathfrak{R}$, nous avons:

(1) $x(r_1 \circ r_2) = (xr_1)r_2$,

(2) $x(r_1 + r_2) = xr_1 + xr_2$ et $(x_1 + x_2)r = x_1 r + x_2 r$,

(3) $x1_A = x$, $x0 = 0$ et $0r = 0$

pour tous morphismes x, x_1, x_2, de $\mathscr{M}$ et r, r_1, r_2 de $\mathfrak{R}$, les deux membres de chacune des trois premières égalités étant toujours définis simultanément.

Il est bien entendu que la catégorie $\mathfrak{R}$ est elle-même une $\mathfrak{R}$-précatégorie, lorsqu'on pose $\mathfrak{R} = (\mathfrak{R}, \Gamma)$ où pour chaque objet A, le foncteur $\Gamma_A: \mathfrak{R} \to A_{\mathfrak{R}}$ est défini par $\Gamma_A(r)(x) = x \circ r$, pour tout $x \in M_{\mathfrak{R}}(X, A)$ et tout $r \in M_{\mathfrak{R}}(Y, X)$. La lettre Γ sera désormais exclusivement réservée à cette fin.

Définition 3. On dira qu'une $\mathfrak{R}$-précatégorie $(\mathscr{M}', \Phi')$ est une $\mathfrak{R}$-*sous-précatégorie* de $(\mathscr{M}, \Phi)$ si

(a) pour chaque couple (X, A), $M_{\mathscr{M}'}(X, A)$ est un sous-groupe de $M_{\mathscr{M}}(X, A)$;

(b) pour chaque $r \in M_{\mathfrak{R}}(Y, X)$ et chaque objet A, $\Phi'_A(r)$: $M_{\mathscr{M}'}(X, A) \to M_{\mathscr{M}'}(Y, A)$ est la restriction à $M_{\mathscr{M}'}(X, A)$ de $\Phi_A(r)$.

On remarque immédiatement que si $\mathfrak{R}$ possède un seul objet, la donnée d'une $\mathfrak{R}$-sous-précatégorie équivaut à celle d'un sous-module.

Une $\mathfrak{R}$-sous-précatégorie à droite de $\mathfrak{R}$ sera appelée un *idéal* à droite de $\mathfrak{R}$. Nous retrouvons ainsi comme cas particulier de $\mathfrak{R}$-precatégorie la notion d'idéal à droite de Sehgal **(4)** dont la définition peut être formulée comme suit: une sous-classe $\mathscr{I}$ de $\mathfrak{R}$ est un idéal à droite si, et seulement si, pour chaque couple (X, A), $M_{\mathscr{I}}(X, A)$ est un sous-groupe abélien de $M_{\mathfrak{R}}(X, A)$ et si pour chaque triple (Y, X, A), on a

$$M_{\mathscr{I}}(X, A) \circ M_{\mathfrak{R}}(Y, X) \subseteq M_{\mathscr{I}}(Y, A).$$

Pour les idéaux *bilatères*, nous adoptons également la condition supplémentaire évidente.

PROPOSITION 1. *Supposons donné, pour chaque objet A d'une $\mathfrak{R}$-précatégorie*[1] *$\mathscr{M}$, un $M_{\mathfrak{R}}(A, A)$-sous-module $\mathfrak{a}$ de $M_{\mathscr{M}}(A, A)$. Alors les $\mathfrak{R}$-sous-précatégories $\mathscr{N}$ et $\mathscr{N}'$ de $\mathscr{M}$ définies par*

$$M_{\mathscr{N}}(X, A) = \mathfrak{a} M_{\mathfrak{R}}(X, A)$$

et

$$M_{\mathscr{N}'}(X, A) = \{x \in M_{\mathscr{M}}(X, A) \mid xM_{\mathfrak{R}}(A, X) \subseteq \mathfrak{a}\}$$

[1]Lorsque le contexte le permettra, nous sous-entendrons le Φ dans une expression telle que $(\mathscr{M}, \Phi)$.

sont respectivement la plus petite et la plus grande des $\mathfrak{R}$-sous-précatégories $\mathscr{S}$ de $\mathscr{M}$, telles que $M_{\mathscr{S}}(A, A) = \mathfrak{a}$ pour tout A.

3. $\mathfrak{R}$-précatégories simples et ideaux à droite maximaux. Dans ce qui suit, nous désignerons par 0 tout foncteur équivalent à un foncteur dont le but n'est formé que d'objets zéros. En outre, nous écrirons $\Phi'_A \leqslant \Phi_A$ pour indiquer que Φ'_A est un *sous-foncteur* (au sens de la définition 3) de Φ_A.

Définition 4. Nous dirons qu'une $\mathfrak{R}$-précatégorie $(\mathscr{M}, \Phi)$ est *simple* si pour chaque objet non-nul A de $\mathfrak{R}$, $0 \leqslant \Psi_A < \Phi_A$ implique $\Psi_A = 0$, quel que soit le sous-foncteur Ψ_A de Φ_A.

PROPOSITION 2. *Soit $(\mathscr{M}, \Phi)$ une $\mathfrak{R}$-précatégorie telle que pour tout couple (X, A) et tout $x \in M_{\mathscr{M}}(X, A)$, $xM_{\mathfrak{R}}(A, X) = \{0\}$ implique $x = 0$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*:

(1) *$(\mathscr{M}, \Phi)$ est simple*;

(2) *pour tout A tel que $\Phi_A \neq 0$, $M_{\mathscr{M}}(A, A)$ est un $M_{\mathfrak{R}}(A, A)$-module à droite simple et $\Phi_A(X) = M_{\mathscr{M}}(A, A)M_{\mathfrak{R}}(X, A)$ pour tout X.*

On sait qu'un module peut être simple sans que son groupe abélien sous-jacent ne le soit. Il en va de même du cas général, mais ici, une $\mathfrak{R}$-précatégorie $\mathscr{M}$ peut ne pas être simple même si tous ses groupes abéliens $M_{\mathscr{M}}(X, A)$ sont simples; des exemples d'une telle situation sont très faciles à construire.

Définition 5. On dira qu'un idéal à droite $(\mathscr{M}, \Theta)$ de $\mathfrak{R}$ est *maximal* si pour tout objet non-nul A de $\mathfrak{R}$, (1) $\Theta_A \neq \Gamma_A$ et (2) $\Theta_A < \Delta_A \leqslant \Gamma_A$ implique $\Delta_A = \Gamma_A$, pour tout sous-foncteur Δ_A de Γ_A.

PROPOSITION 3. *Soit $(\mathscr{M}, \Theta)$ un idéal à droite de $\mathfrak{R}$. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(1) *$(\mathscr{M}, \Theta)$ est maximal*;

(2) *pour tout A non-nul, $M_{\mathscr{M}}(A, A)$ est un idéal à droite maximal de $M_{\mathfrak{R}}(A,A)$ et $\Theta_A(X) = \{x \in M_{\mathfrak{R}}(X, A) | \, x \circ M_{\mathfrak{R}}(A, X) \subseteq M_{\mathscr{M}}(A, A)\}$ pour tout X.*

Les démonstrations de ces propositions ne sont que des vérifications et nous laissons au lecteur le soin de les faire. Nous sommes maintenant prêts à aborder la question du radical.

4. Le radical de Kelly.

Définition (Kelly **(2**, § 3**)**). Le *radical d'une catégorie* $\mathfrak{R}$ est le plus grand idéal bilatère $\mathfrak{K}$ de $\mathfrak{R}$ pour lequel on ait, quel que soit A,

$$(*) \qquad M_{\mathfrak{K}}(A, A) = \operatorname{rad} M_{\mathfrak{R}}(A, A) \qquad \text{(Jacobson)}.$$

Dans **(2**, § 3**)** Kelly démontre que le radical de $\mathfrak{R}$ existe et que pour tout (X, A), $M_{\mathfrak{K}}(X, A) = \{x \in M_{\mathfrak{R}}(X, A) |$ pour tout $a \in M_{\mathfrak{R}}(A, X)$, $1_A - x \circ a$ est inversible$\}$. Etant donnée une famille $(\mathscr{M}_i)_{i \in I}$ de $\mathfrak{R}$-précatégories, nous

https://doi.org/10.4153/CJM-1968-060-7 Published online by Cambridge University Press

dirons que la $\mathfrak{R}$-précatégorie $\bigcap_{i\in I} \mathscr{M}_i$ définie pour chaque couple (X, A) par $M_{\bigcap_{i\in I}\mathscr{M}_i}(X, A) = \bigcap_{i\in I} M_{\mathscr{M}_i}(X, A)$ est *l'intersection* de $(\mathscr{M}_i)_{i\in I}$.

PROPOSITION 4. *Soit $\mathfrak{K}$ le radical de $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{K}'$ l'intersection des idéaux à droite maximaux de $\mathfrak{R}$. Alors $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}'$.*

Preuve. D'après la proposition 3, $M_{\mathfrak{K}'}(X, A) = \{x \in M_{\mathfrak{R}}(X, A) |$ pour tout $a \in M_{\mathfrak{R}}(A, X)$, $x \circ a \in \operatorname{rad} M_{\mathfrak{R}}(A, A)\}$. $\mathfrak{K}'$ est donc le plus grand idéal à droite pour lequel on ait (*), d'après la proposition 1. Donc $\mathfrak{K}' \supseteq \mathfrak{K}$. Inversement, si $x \in M_{\mathfrak{K}'}(X, A)$, pour tout $a \in M_{\mathfrak{R}}(A, X)$, $x \circ a \in \operatorname{rad} M_{\mathfrak{R}}(A, A)$, d'où $1_A - x \circ a$ est inversible et $x \in M_{\mathfrak{K}}(X, A)$.

Si $\mathscr{N}$ est une $\mathfrak{R}$-sous-précatégorie d'une $\mathfrak{R}$-précatégorie $\mathscr{M}$, on définit la $\mathfrak{R}$-*précatégorie quotient* $\mathscr{M}/\mathscr{N}$ en posant pour tout (X, A),

$$M_{\mathscr{M}/\mathscr{N}}(X, A) = M_{\mathscr{M}}(X, A)/M_{\mathscr{N}}(X, A);$$

pour $x \in M_{\mathscr{M}}(X, A)$ et $r \in M_{\mathfrak{R}}(Y, X)$, nous posons $\bar{x}r = \overline{xr}$ où la barre indique qu'on prend la classe "mod $\mathscr{N}$". Tout comme dans le cas habituel, le quotient d'une catégorie par un idéal bilatère est encore une catégorie, avec $\bar{x}\bar{y} = \overline{xy}$.

PROPOSITION 5. *Soit $\mathfrak{K}$ le radical d'une catégorie $\mathfrak{R}$. Alors le radical de $\mathfrak{R}/\mathfrak{K}$ est nul ou, ce qui est équivalent, pour tout idéal à droite $\mathscr{S}$ de $\mathfrak{R}/\mathfrak{K}$ et pour tout A, $M_{\mathscr{S}}(A, A) = \{0\}$ implique (pour tout X) $M_{\mathscr{S}}(X, A) = \{0\}$.*

Preuve. Que ces deux propriétés soient équivalentes résulte de la proposition 4 et de la définition du radical de $\mathfrak{R}/\mathfrak{K}$. Le reste est une simple vérification.

5. Catégories semi-simples. Nous dirons que la catégorie $\mathfrak{R}$ satisfait à la *condition minimale* (à droite) si pour tout objet A, toute chaîne $\Gamma_A \geqslant \Phi_A^1 \geqslant \Phi_A^2 \geqslant \ldots$ de sous-foncteurs de Γ_A est stationnaire.

Cette condition de finitude est moins forte que celle de Sehgal (**4**, déf. 2.5) qui ne peut être vérifiée que pour des catégories qui n'ont qu'un nombre fini d'objets non-nuls. En fait, la condition de Sehgal entraîne aussi la condition minimale "uniforme" que nous introduirons à l'instant. Il ne faut cependant pas oublier que ses considérations s'appliquent à des structures plus générales.

Il est clair que si $\mathfrak{R}$ satisfait à la condition minimale, chaque anneau $M_{\mathfrak{R}}(A, A)$ satisfait à la condition minimale pour les idéaux à droite. Si la longueur des chaînes strictement descendantes d'idéaux à droite d'anneaux $M_{\mathfrak{R}}(A, A)$ est bornée, nous dirons que $\mathfrak{R}$ satisfait *uniformément à la condition minimale.*

Il nous faut encore préciser le sens que nous attribuerons à certains termes. Soit $\{(\mathscr{A}_i, \Phi^i)\}$ une famille de $\mathfrak{R}$-sous-précatégories d'une $\mathfrak{R}$-précatégorie $(\mathscr{M}, \Phi)$ et supposons que pour tout couple (X, A), $M_{\mathscr{M}}(X, A) = \oplus_i M_{\mathscr{A}_i}(X, A)$ et que pour tout élément $x = \sum_i x_i \in M_{\mathscr{M}}(X, A)$ et tout $r \in M_{\mathfrak{R}}(Y, X)$,

https://doi.org/10.4153/CJM-1968-060-7 Published online by Cambridge University Press

on ait $\Phi_A(r)(x) = \sum_i \Phi_A^i(r)(x)$; alors nous dirons que $(\mathscr{M}, \Phi)$ est *somme directe de la famille* $\{(\mathscr{A}_i, \Phi^i)\}$ et nous écrirons simplement $\mathscr{M} = \oplus_i \mathscr{A}_i$.

Nous dirons enfin qu'une *catégorie* est *semi-simple* si son radical de Kelly est nul.

THÉORÈME 1. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(1) $\mathfrak{R}$ *est semi-simple et satisfait uniformément à la condition minimale*;

(2) $\mathfrak{R} = \oplus_{i=1}^n \mathscr{A}_i$ *où n est un entier positif, chaque $\mathscr{A}_i$ est une $\mathfrak{R}$-précatégorie simple, et pour tout couple* (X, A), $M_{\mathscr{A}_i}(A, A) = \{0\}$ *entraîne* $M_{\mathscr{A}_i}(X, A) = \{0\}$.

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2). Par hypothèse, pour chaque objet A, l'anneau $M_{\mathfrak{R}}(A, A)$ est somme directe d'un nombre fini, disons n_A, d'idéaux à droite minimaux et la famille des entiers n_A est bornée; soit N le plus grand d'entre eux. On peut alors écrire pour chaque A,

$$1_A = e_1^A + e_2^A + \ldots + e_{n_A}^A + e_{n_A+1}^A + \ldots + e_N^A$$

où

$$e_{n_A+1}^A = \ldots = e_N^A = 0$$

et où

$$e_1^A + \ldots + e_{n_A}^A$$

est une décomposition de 1_A en somme d'idempotents orthogonaux primitifs. Pour A et i fixes ($A \in \mathfrak{R}$ et $1 \leqslant i \leqslant N$), posons $\mathfrak{a}_i = e_i{}^A \circ M_{\mathfrak{R}}(A, A)$. Alors $\mathfrak{a}_i$ est ou bien nul, ou bien un idéal à droite minimal, de sorte que si l'on pose pour chaque X,

$$\Gamma_A^i(X) = \mathfrak{a}_i \circ M_{\mathfrak{R}}(X, A),$$

on obtient une décomposition directe de $\mathfrak{R}$, et c'est la décomposition cherchée.

(2) $\Rightarrow$ (1). Posons $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ et pour $J \subseteq I$, désignons par $\sum_{j\in J} \Gamma_A^j$ le foncteur "structural" de $\oplus_{j\in J} \mathscr{A}_j$ correspondant à l'objet A. Le fait que $\mathfrak{R}$ satisfait à la condition minimale est alors une conséquence immédiate du lemme suivant:

LEMME. *Pour tout idéal à droite $(\mathscr{B}, \Phi)$ de $\mathfrak{R}$ il existe un idéal à droite $(\mathscr{C}, \Psi)$ de $\mathfrak{R}$ tel que* (i) $\mathfrak{R} = \mathscr{B} \oplus \mathscr{C}$ *et* (ii) *pour tout objet non-nul A de $\mathfrak{R}$, $\Psi_A = \sum_{j\in J} \Gamma_A^j$ pour un certain sous-ensemble J de I (qui dépend de A).*

Preuve. Soit $(\mathscr{B}, \Phi)$ un idéal à droite de $\mathfrak{R}$ et A un objet non-nul; on a $\Phi_A \leqslant \Gamma_A$. Posons $J = \{j \in I |$ (pour tout X) $M_{\mathscr{A}_j}(X, A) \cap M_{\mathscr{B}}(X, A) = \{0\}\}$; si $i \notin J$, alors le groupe abélien

$$[\oplus_{j\in J} M_{\mathscr{A}_j}(X, A) \oplus M_{\mathscr{A}_i}(X, A)] \cap M_{\mathscr{B}}(X, A)$$

est non-nul pour au moins un objet X: la famille de tous ces groupes abéliens (X parcourant maintenant l'ensemble de tous les objets de $\mathfrak{R}$) définit donc un sous-foncteur non-nul de Γ_A, et ainsi, la famille

$$\{[\oplus_{j\in J} M_{\mathscr{A}_j}(X, A) \oplus M_{\mathscr{B}}(X, A)] \cap M_{\mathscr{A}_i}(X, A)\}_{X\in\mathfrak{R}}$$

définit à son tour un sous-foncteur non-nul de Γ_A; comme $\mathscr{A}_i$ est simple, on a, pour tout X,

$$M_{\mathscr{A}i}(X, A) \subseteq \oplus_{j\in J} M_{\mathscr{A}j}(X, A) \oplus M_{\mathscr{B}}(X, A),$$

ce qui montre que $\Psi_A = \sum_{j\in J} \Gamma_A^j$ est le foncteur cherché; c'est-à-dire, l'idéal $(\mathscr{C}, \Psi)$ défini par ces foncteurs vérifie bien la condition (i).

Fin de la preuve du théorème. Que la condition minimale soit satisfaite *uniformément* est trivial. Il reste à démontrer que le radical $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{N}$ est nul. Soient A et i tels que $M_{\mathscr{A}i}(A, A) \neq \{0\}$; alors $M_{\mathscr{A}i}(A, A)$ est un idéal à droite minimal de $M_{\mathfrak{N}}(A, A)$, ce qui entraîne que

$$M_{\mathfrak{R}}(A, A) = \operatorname{rad} M_{\mathfrak{N}}(A, A) = \{0\}.$$

Etant donné un objet arbitraire X, pour montrer que $M_{\mathfrak{R}}(X, A) = \{0\}$, il suffit de montrer que pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$, $M_{\mathfrak{R}}(X, A) \cap M_{\mathscr{A}i}(X, A) = \{0\}$, ce qui ne pose aucune difficulté.

6. Morphismes entre objets de $\mathfrak{N}$-précatégories. Soient $(\mathscr{M}, \Phi)$ et $(\mathscr{N}, \Psi)$ des $\mathfrak{N}$-précatégories; nous noterons $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{N}}(\mathscr{M}, \mathscr{N})$ *la précatégorie dont les objets sont ceux de* $\mathfrak{N}$, *un morphisme de* $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{N}}(\mathscr{M}, \mathscr{N})$ *allant de A à B étant une transformation naturelle* $\Phi_A \to \Psi_B$. La "linéarité" d'un morphisme $\alpha: \Phi_A \to \Psi_B$ s'exprime ici par le fait que pour tout $r \in M_{\mathfrak{N}}(Y, X)$, le rectangle

$$\begin{array}{ccc} M_{\mathscr{M}}(X, A) & \xrightarrow{\alpha_X} & M_{\mathscr{N}}(X, B) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle \Phi_A(r)} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \Psi_B(r)} \\ M_{\mathscr{M}}(Y, A) & \xrightarrow{\alpha_Y} & M_{\mathscr{N}}(Y, B) \end{array}$$

est commutatif, ce qui pourrait être abrégé par $(\alpha(x))r = \alpha(xr)$. Il est clair que *dans le cas où* $(\mathscr{N}, \Psi) = (\mathscr{M}, \Phi)$, $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{N}}(\mathscr{M}, \mathscr{N})$ définit une *catégorie.*

PROPOSITION 6. *Les catégories* $\mathfrak{N}$ *et* $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{N}, \mathfrak{N})$ *sont isomorphes.*

Preuve. A l'objet A de $\mathfrak{N}$ on fait correspondre l'objet Γ_A, et au morphisme $f \in M_{\mathfrak{N}}(A, B)$ on associe la famille $\{f_X: \Gamma_A(X) \to \Gamma_B(X)\}_{X\in\mathfrak{N}}$ définie par $f_X(x) = f \circ x$, $x \in M_{\mathfrak{N}}(X, A)$.

Nous supposerons d'ici à la fin du § 7, *que* $\mathfrak{N}$ *est somme directe d'un nombre fini n de* $\mathfrak{N}$*-précatégories* $(\mathscr{A}_i, \Gamma^i)$.

Ainsi, si $\alpha: \Gamma_A \to \Gamma_B$ est un morphisme appartenant à $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{N}, \mathfrak{N})$, pour chaque X,

$$\alpha_X: \bigoplus_{i=1}^{n} M_{\mathscr{A}i}(X, A) \to \bigoplus_{i=1}^{n} M_{\mathscr{A}i}(X, B)$$

peut être considéré comme un élément de

$$\bigoplus_{i,j=1}^{n} \operatorname{Hom}_Z(M_{\mathscr{A}i}(X, A), M_{\mathscr{A}i}(X, B)),$$

grâce aux propriétés élémentaires du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}$. Dans ce qui suit, pour un objet arbitraire C de $\mathfrak{R}$, ϕ_C^i: $M_{\mathscr{A}_i}(X, C) \to M_{\mathfrak{R}}(X, C)$ et

$$\bar{\phi}_C^i\colon M_{\mathfrak{R}}(X, C) \to M_{\mathscr{A}_i}(X, C)$$

désigneront respectivement l'injection et la projection canonique.

LEMME 1. *Si* $\alpha\colon \Gamma_A \to \Gamma_B$ *est une transformation naturelle, alors pour chaque couple* (i, j), *la famille* $\{\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\phi_A^i, \bar{\phi}_B^j)(\alpha_X)\}_{X\in\mathfrak{R}}$ *définit une transformation naturelle* $\alpha^{ji}\colon \Gamma_A^i \to \Gamma_B^j$.

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
M_{\mathscr{A}_i}(X, A) \arrow[r, "\phi_A^i"] \arrow[d, "\Gamma_A^i(r)"] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & M_{\mathfrak{R}}(X, A) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "\Gamma_A(r)"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & M_{\mathfrak{R}}(X, B) \arrow[r, "\bar{\phi}_B^j"] \arrow[d, "\Gamma_B(r)"] & M_{\mathscr{A}_j}(X, B) \arrow[d, "\Gamma_B^j(r)"] \\
M_{\mathscr{A}_i}(Y, A) \arrow[r, "\phi_A^i"] & M_{\mathfrak{R}}(Y, A) \arrow[r, "\alpha_Y"] & M_{\mathfrak{R}}(Y, B) \arrow[r, "\bar{\phi}_B^j"] & M_{\mathscr{A}_j}(Y, B).
\end{tikzcd}$$

LEMME 2. *Soient* A *et* B *deux objets fixes de* $\mathfrak{R}$. *Si pour chaque couple* (i, j), $\alpha^{ji}\colon \Gamma_A^i \to \Gamma_B^j$ *est une transformation naturelle, alors il existe une et une seule transformation naturelle* $\alpha\colon \Gamma_A \to \Gamma_B$ *telle que pour chaque* X,

$$\alpha_X^{ji} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\phi_A^i, \bar{\phi}_B^j)(\alpha_X).$$

Preuve. Pour chaque X, il existe un et un seul homomorphisme

$$\alpha_X \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M_{\mathfrak{R}}(X, A), M_{\mathfrak{R}}(X, B))$$

tel que pour tout couple (i, j), $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\phi_A^i, \bar{\phi}_B^j)(\alpha_X) = \alpha_X^{ji}$. Par hypothèse, $\Gamma_B^j(r)\alpha_X^{ji} = \alpha_Y^{ji}\Gamma_A^i(r)$, c'est-à-dire, le grand rectangle ci-dessus est commutatif. Du fait que les carrés (1) et (3) sont commutatifs, on a

$$\bar{\phi}_B^j \Gamma_B(r)\alpha_X \,\phi_A^i = \bar{\phi}_B^j \,\alpha_Y\, \Gamma_A(r)\phi_A^i,$$

d'où $\Gamma_B(r)\alpha_X = \alpha_Y\, \Gamma_A(r)$.

De ces deux lemmes on tire

PROPOSITION 7. *Considérées comme précatégories*, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$ *et*

$$\bigoplus_{i,j=1}^{n} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}}(\mathscr{A}_i, \mathscr{A}_j)$$

sont isomorphes.

PROPOSITION 8. *Si dans la précatégorie*

$$\bigoplus_{i,j=1}^{n} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}}(\mathscr{A}_i, \mathscr{A}_j)$$

on écrit les morphismes (α^{ij}), $i, j = 1, 2, \ldots, n$, *sous la forme de matrices, et si on compose ces morphismes comme on multiplie des matrices, alors*

https://doi.org/10.4153/CJM-1968-060-7 Published online by Cambridge University Press

$$\bigoplus_{i,j=1}^{n} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}}(\mathscr{A}_i, \mathscr{A}_j)$$

devient une catégorie isomorphe à la catégorie $\mathfrak{R}$.

Preuve. Que $\oplus \mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}}(\mathscr{A}_i, \mathscr{A}_j)$, munie de cette loi de composition, soit une catégorie est immédiat. Il suffit, grâce à la proposition 6, de montrer que cette catégorie est isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$; pour cela, nous montrerons que la correspondance de la proposition 7 conserve la composition des morphismes. Soient $\alpha: \Gamma_A \to \Gamma_B$ et $\beta: \Gamma_B \to \Gamma_C$; alors

$$(\beta\alpha)_X^{ij} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}\,(\phi_A^j, \bar{\phi}_C^i)(\beta\alpha)_X = \bar{\phi}_C^i\,\beta_X\,\alpha_X\,\phi_A^j =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{\phi}_C^i\,\beta_X\,\phi_B^k\,\bar{\phi}_B^k\,\alpha_X\,\phi_A^j = \sum_{k=1}^{n} \beta_X^{ik}\,\alpha_X^{kj}.$$

PROPOSITION 9. *Soient* $(\mathscr{M}, \Phi)$ *et* $(\mathscr{N}, \Psi)$ *des* $\mathfrak{R}$*-précatégories simples; alors un morphisme* $\alpha: \Phi_A \to \Psi_B$ *est ou bien nul, ou bien une équivalence.*

Preuve. On procède essentiellement comme dans le cas des anneaux et des modules. N'oublions pas d'ailleurs que les $\mathfrak{R}$-précatégories simples sont précisément les modules simples lorsque $\mathfrak{R}$ ne possède qu'un seul objet.

7. Corpoïdes et catégories de matrices. Etant donnée une catégorie additive $\mathfrak{D}$ et un entier positif n, on définit la catégorie $\mathfrak{D}^{n\times n}$ *des* $n \times n$*-matrices sur* $\mathfrak{D}$ comme suit: (1) les objets sont les n-tuplets ordonnés $(A_1, \ldots, A_n)$, $A_i \in \mathrm{Ob}\mathfrak{D}$; (2) un morphisme allant de (A_i) à (B_i) dans $\mathfrak{D}^{n\times n}$ est une $n \times n$-matrice (f^{ij}) où $f^{ij} \in M_{\mathfrak{D}}(A_j, B_i)$. L'addition et la composition de ces morphismes est l'addition et la multiplication habituelle des matrices.

On remarque une fois de plus que si $\mathfrak{D}$ n'a qu'un seul objet, $\mathfrak{D}^{n\times n}$ s'identifie à l'anneau des $n \times n$-matrice sur un anneau; enfin, il est clair que $\mathfrak{D}^{1\times 1} = \mathfrak{D}$. Cette catégorie $\mathfrak{D}^{n\times n}$ est une sous-catégorie pleine de la catégorie de toutes les matrices, telle que définie par I. E. Burmistrovič **(1)**.

D'ici à la fin du §7, *nous supposerons que*

$$\mathfrak{R} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathscr{A}_i$$

où chaque $\mathfrak{R}$*-précatégorie* $\mathscr{A}_i = (\mathscr{A}_i, \Gamma^i)$ *est simple.*

Quelques préparatifs seront maintenant nécessaires à l'élaboration du prochain théorème.

Construction de la catégorie $\mathfrak{C}$. On remarque que sur l'ensemble des foncteurs Γ_A^k ($A \in \mathrm{Ob}\mathfrak{R}$ et $k = 1, 2, \ldots, n$) la relation $\approx$ définie par $\Gamma_A^k \approx \Gamma_{A'}^{k'}$ si et seulement s'il existe une équivalence $\Gamma_A^k \to \Gamma_{A'}^{k'}$ est une relation d'équivalence. Dans chaque classe c d'équivalence modulo $\approx$ choisissons un représentant arbitraire mais fixe, et désignons le par rep. c.

(1) Les objets de $\mathfrak{C}$ sont les *classes* $c, c', \ldots$ d'équivalence (mod $\approx$).

(2) $M_{\mathfrak{C}}(c, c') = \{\text{transformation naturelle rep. } c \to \text{rep. } c'\}.$

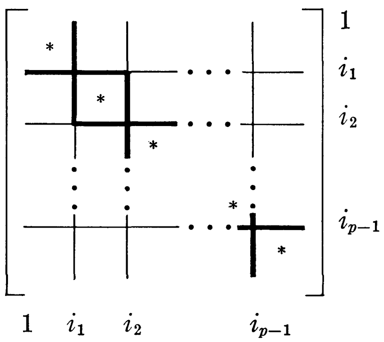
Construction des sous-catégories $\mathfrak{C}_k$. Pour chaque $k = 1, 2, \ldots, n$ on notera $\mathfrak{C}_k$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{C}$, composée des objets de $\mathfrak{C}$ qui possèdent un représentant appartenant à $\mathscr{A}_k$. Plus précisément, $c \in \mathrm{Ob}\mathfrak{C}_k$ si et seulement s'il existe un objet A de $\mathfrak{R}$ tel que $\Gamma_A^k \in c$.

Construction des sous-catégories $\mathfrak{S}_m$. Il est clair que pour $i \neq j$, il peut se faire que $\mathrm{Ob}\mathfrak{C}_i \cap \mathrm{Ob}\mathfrak{C}_j \neq \emptyset$. Comme nous avons besoin d'une famille de sous-catégorie de $\mathfrak{C}$ dont les ensembles d'objets sont disjoints, nous procéderons comme suit. On considère la relation $\equiv$ définie sur $\{1, 2, \ldots, n\}$ par $i \equiv j$ si et seulement si $\mathrm{Ob}\mathfrak{C}_i \cap \mathrm{Ob}\mathfrak{C}_j \neq \emptyset$; puis on prend la fermeture transitive de cette relation (réflexive et symétrique). Ceci donne lieu à une partition $I_1 + I_2 + \ldots + I_p$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pour $m = 1, 2, \ldots, p$, on définit la sous-catégorie pleine $\mathfrak{S}_m$ de $\mathfrak{C}$ comme étant celle dont les objets appartiennent à au moins un des ensembles $\mathrm{Ob}\mathfrak{C}_i$, $i \in I_m$.

Construction de la catégorie $\mathfrak{R}^*$. C'est la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{C}^{n\times n}$ dont les objets sont de la forme

$$(a_1, \ldots, a_{i_1}, a_{i_1+1}, \ldots, a_{i_2}, a_{i_2+1}, \ldots, a_{i_{p-1}}, a_{i_{p-1}+1}, \ldots, a_n)$$

(1)



où $a_1, \ldots, a_{i_1} \in \mathrm{Ob}\mathfrak{S}_1$, $a_{i_1+1}, \ldots, a_{i_2} \in \mathrm{Ob}\mathfrak{S}_2, \ldots, a_{i_{p-1}+1}, \ldots, a_n \in \mathrm{Ob}\mathfrak{S}_p$.

Remarque. D'après la proposition 9, nous voyons que les morphismes de $\mathfrak{R}^*$ sont tous de la forme (1), où les coefficients sont nuls en dehors des blocs désignés par des astérisques.

On appellera *corpoïde* une catégorie additive dont tout morphisme est soit nul, soit un isomorphisme.

La catégorie $\mathfrak{C}$ est un corpoïde, de même que chacune des catégories $\mathfrak{S}_m$, $m = 1, 2, \ldots, p$. On remarque enfin que

$$\mathfrak{R}^* = \mathfrak{S}_1^{n_1\times n_1} \times \mathfrak{S}_2^{n_2\times n_2} \times \ldots \times \mathfrak{S}_p^{n_p\times n_p}$$

où $n_1 = i_1$, $n_2 = i_2 - i_1, \ldots, n_p = n - i_{p-1}$.

THÉORÈME 2. *Soit $\mathfrak{R}$ une catégorie semi-simple vérifiant uniformément la condition minimale. Alors $\mathfrak{R}$ est équivalente à une sous-catégorie pleine d'un produit fini de catégories de la forme $\mathfrak{C}_i^{n_i \times n_i}$ où pour chaque i, $\mathfrak{C}_i$ est un corpoïde et n_i est un entier positif.*

C'est un corollaire de la

PROPOSITION 10. *Si*

$$\mathfrak{R} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathscr{A}_i$$

où pour chaque i, $\mathscr{A}_i = (\mathscr{A}_i, \Gamma^i)$ est une $\mathfrak{R}$-précatégorie simple, il existe un foncteur additif covariant $F: \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}^*$ où, pour chaque couple (A, B) d'objets de $\mathfrak{R}$, l'homomorphisme $M_{\mathfrak{R}}(A, B) \to M_{\mathfrak{R}^*}(F(A), F(B))$ induit par F est un isomorphisme et où $F(A) = F(B)$ si et seulement si A et B sont isomorphes.

Preuve. D'après la proposition 8, il suffit de trouver un foncteur convenable

$$T: \bigoplus_{i,j=1}^{n} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}}(\mathscr{A}_i, \mathscr{A}_j) \to \mathfrak{R}^*.$$

Nous supposerons que la suite des précatégories $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ est écrite dans un ordre tel que toutes celles dont les foncteurs structuraux appartiennent à des classes de $\mathrm{Ob}\mathfrak{S}_1$ viennent en premier; que celles-ci sont suivies de celles dont les foncteurs structuraux appartiennent à des classes de $\mathrm{Ob}\mathfrak{S}_2$, et ainsi de suite. Etant donné un objet A de $\oplus \mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}}(\mathscr{A}_i, \mathscr{A}_j)$, il donne lieu à n foncteurs structuraux $\Gamma_A^1, \Gamma_A^2, \ldots, \Gamma_A^n$, et on pose

$$T(A) = (\text{classe de } \Gamma_A^1, \ldots, \text{classe de } \Gamma_A^n).$$

Un morphisme $(\alpha^{ij}): A \to B$ dans $\oplus \mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}}(\mathscr{A}_i, \mathscr{A}_j)$ prend, d'après la proposition 9, la même forme que les matrices (1) de la catégorie $\mathfrak{R}^*$ qui appliquent $T(A) = (\text{classe de } \Gamma_A^1, \ldots, \text{classe de } \Gamma_A^n)$ sur $T(B) = (\text{classe de } \Gamma_B^1, \ldots, \text{classe de } \Gamma_B^n)$; sauf que dans $\mathfrak{R}^*$, le coefficient d'indice (i, j) est une transformation naturelle γ^{ij} de rep.(classe de Γ_A^j) sur rep.(classe de Γ_B^i), et non de Γ_A^j sur Γ_B^i. Il s'agit donc de définir une correspondance convenable $\alpha^{ij} \rightsquigarrow \gamma^{ij}$. S'il n'existe pas d'équivalence $\Gamma_A^j \to \Gamma_B^i$, la correspondance $\alpha^{ij} \rightsquigarrow \gamma^{ij}$ doit être $0 \rightsquigarrow 0$. Dans le cas contraire, classe de Γ_A^j = classe de Γ_B^i de sorte que si Φ désigne le représentant choisi de cette classe (i.e. rep. (classe de Γ_B^i)), alors il faut faire correspondre à α^{ij} une transformation naturelle $\gamma^{ij}: \Phi \to \Phi$. On procède comme suit: pour chaque foncteur Ψ appartenant à la classe de Φ on choisit une équivalence $\sigma_\Psi: \Phi \to \Psi$ et alors à α^{ij}, on fait correspondre $\sigma_{\Gamma_B^i}^{-1} \alpha^{ij} \sigma_{\Gamma_A^j}$. Il est aisé de vérifier que l'on obtient ainsi le foncteur T qu'on recherchait. Si $T(A) = T(B)$, alors pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$, il existe une équivalence $\alpha^{ii}: \Gamma_A^i \to \Gamma_B^i$. Pour

https://doi.org/10.4153/CJM-1968-060-7 Published online by Cambridge University Press

$i \neq j$, posons $\alpha^{ij} = 0$: $\Gamma_A^j \to \Gamma_B^i$. Alors d'après le lemme 2, § 6, il existe une et une seule transformation α: $\Gamma_A \to \Gamma_B$ ayant les α^{ij} comme "composantes"; d'après la proposition 6, il existe un morphisme $f \in M_{\mathfrak{R}}(A, B)$ tel que pour tout X, α_X: $M_{\mathfrak{R}}(X, A) \to M_{\mathfrak{R}}(X, B)$ soit défini par $\alpha_X(x) = f \circ x$. On vérifie sans peine que f est alors un isomorphisme de A à B.

Remarque. Si nous nous reportons à la construction des catégories $\mathfrak{S}_m$, nous voyons pourquoi le foncteur F n'est pas surjectif; pour cela, il faudrait que quels que soient les objets A et B de $\mathfrak{R}$, si $\Gamma_A^j \approx \Gamma_B^i$, alors il existe un objet C tel que $\Gamma_C^j \approx \Gamma_A^j$ et $\Gamma_C^i \approx \Gamma_B^i$, ce qui peut évidemment ne pas se produire.

Cas particulier. Si R est un anneau artinien semi-simple, alors R est isomorphe au produit cartésien d'un nombre fini d'anneaux de matrices sur un corps.

On retrouve ce théorème en considérant le cas où $\mathfrak{R}$ n'a qu'un seul objet X tel que $M_{\mathfrak{R}}(X, X) = R$, et en reprennant les arguments de la preuve.

8. Catégories primitives.

Définition 6. Nous dirons qu'une catégorie $\mathfrak{R}$ est *primitive* s'il existe une $\mathfrak{R}$-précatégorie (à droite) simple $(\mathscr{V}, \theta)$ telle que pour tout objet non-nul A,

(P1) $\theta_A \neq 0$,

(P2) pour tout $x \in M_{\mathfrak{R}}(X, A)$, $\theta_A(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Il est clair que si $\mathfrak{R}$ possède un seul objet, on retombe sur la notion habituelle d'anneau primitif. Dans la suite, nous aurons à considérer des *précatégories à gauche*; il serait inutile d'en donner une définition explicite: on *dualise* tout simplement la définition de précatégorie à droite. La différence essentielle est que les foncteurs structuraux sont alors *covariants*. Correspondant à la notion d'*espace vectoriel* de dimension finie à gauche, nous prenons la somme directe de copies d'un corpoïde $\mathfrak{C}$ considéré comme $\mathfrak{C}$-précatégorie à gauche; nous écrirons $\mathfrak{C}^n$ pour indiquer qu'on prend n copies de $\mathfrak{C}$. $\mathfrak{C}^n$ est donc une $\mathfrak{C}$-précatégorie à gauche, mais c'est aussi (de la façon évidente) une précatégorie à droite sur la sous-catégorie pleine $\overline{\mathfrak{C}^{n\times n}}$ de la catégorie $\mathfrak{C}^{n\times n}$, dont l'ensemble des objets est composé des n-tuplets de la forme $(A, A, \ldots, A)$. Nous parlerons de $\overline{\mathfrak{C}^{n\times n}}$ comme de la catégorie des $n \times n$-*matrices homogènes* sur $\mathfrak{C}$.

PROPOSITION 11. *La catégorie des $n \times n$-matrices homogènes sur un corpoïde est primitive.*

Preuve. Il suffit de montrer, en procédant comme dans le cas habituel, que $(\mathfrak{C}^n, \theta)$ vérifie les conditions de la définition 1 (où θ désigne l'application structurale de $\mathfrak{C}^n$ considérée comme $\overline{\mathfrak{C}^{n\times n}}$-précatégorie à droite).

9. Centralisateur et indépendance linéaire. Soit $(\mathscr{V}, \theta)$ une $\mathfrak{R}$-précatégorie à droite et désignons par $\mathfrak{C}$ la catégorie $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}}(\mathscr{V}, \mathscr{V})$. On peut munir $\mathscr{V}$ d'une structure de $\mathfrak{C}$-précatégorie à gauche de la manière suivante. En fait, il s'agit de définir pour chaque objet X, un foncteur covariant Δ_X: $\mathfrak{C} \to_{\mathscr{V}} X$ tel que, pour chaque objet A, $\Delta_X(A) = M_{\mathscr{V}}(X, A)$. Pour tout $\alpha \in M_{\mathfrak{C}}(A, B)$, $\Delta_X(\alpha)$ doit appliquer $M_{\mathscr{V}}(X, A)$ dans $M_{\mathscr{V}}(X, B)$; posons

$$\Delta_X(\alpha)(x) = \alpha_X(x), \qquad x \in M_{\mathscr{V}}(X, A).$$

Lorsque nous parlerons de la structure de $\mathfrak{C}$-précatégorie à gauche d'une $\mathfrak{R}$-précatégorie à droite $\mathscr{V}$, il s'agira toujours de celle que nous venons de définir.

Etant donné deux précatégories à gauche $(\mathscr{V}, \Delta)$ et $(\mathscr{W}, \Sigma)$ sur une catégorie $\mathfrak{C}$, on peut décrire la précatégorie $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ en dualisant la définition correspondante pour les précatégories à droite. En particulier, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\mathscr{V}, \mathscr{V})$ sera *par définition* la catégorie *duale* de la catégorie dont les objets sont ceux de $\mathfrak{C}$ et dont les morphismes de X vers Y sont les transformations naturelles de Δ_X vers Δ_Y.

PROPOSITION 12. *Si $\mathfrak{R}$ possède une $\mathfrak{R}$-précatégorie à droite $(\mathscr{V}, \theta)$ satisfaisant à* (P2) *et si l'on pose $\mathfrak{C} = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}}(\mathscr{V}, \mathscr{V})$, alors $\mathfrak{R}$ s'identifie à une sous-catégorie de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\mathscr{V}, \mathscr{V})$.*

Preuve. (Dans l'expression $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\mathscr{V}, \mathscr{V})$, $\mathscr{V}$ doit évidemment être considéré comme $\mathfrak{C}$-précatégorie à gauche.) Nous allons construire un foncteur additif covariant F: $\mathfrak{R} \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\mathscr{V}, \mathscr{V})$ tel que pour chaque X, $F(X) = \Delta_X$ et pour chaque couple (Y, X), F induit un monomorphisme de $M_{\mathfrak{R}}(Y, X)$ dans $M_{\mathfrak{P}}(Y, X)$, où $\mathfrak{P}$ désigne $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\mathscr{V}, \mathscr{V})$. Soit donc $r \in M_{\mathfrak{R}}(Y, X)$ et soit $F(r)$ la transformation naturelle $\{r_A\}_{A \in \mathfrak{R}}$: $\Delta_X \to \Delta_Y$ définie par $r_A = \theta_A(r)$, $A \in \mathrm{Ob}\mathfrak{R}$. (1°) $\{r_A\}$ est bien une transformation naturelle puisqu'en premier lieu r_A: $M_{\mathscr{V}}(X, A) \to M_{\mathscr{V}}(Y, A)$ et que pour $\alpha \in M_{\mathfrak{C}}(A, B)$, le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} M_{\mathscr{V}}(X, A) & \xrightarrow{r_A} & M_{\mathscr{V}}(Y, A) \\ \downarrow{\scriptstyle \Delta_X(\alpha)} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta_Y(\alpha)} \\ M_{\mathscr{V}}(X, B) & \xrightarrow{r_B} & M_{\mathscr{V}}(Y, B) \end{array}$$

(Pour le voir, considérons cet autre diagramme:

$$\begin{array}{ccc} M_{\mathscr{V}}(X, A) & \xrightarrow{\alpha_X} & M_{\mathscr{V}}(X, B) \\ \downarrow{\scriptstyle \theta_A(r)} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_B(r)} \\ M_{\mathscr{V}}(Y, A) & \xrightarrow{\alpha_Y} & M_{\mathscr{V}}(Y, B) \end{array}$$

C'est un diagramme commutatif, car α est une transformation naturelle; dès lors, $\theta_B(r)\alpha_X(x) = \alpha_Y\, \theta_A(r)(x)$ pour tout $x \in M_{\mathscr{V}}(X, A)$, donc

$r_B\Delta_X(\alpha)(x) = \Delta_Y(\alpha)r_A(x)$.) (2°) F est bien un foncteur, car si $s \in M_{\mathfrak{R}}(Z, Y)$ et $r \in M_{\mathfrak{R}}(Y, X)$, alors

$$F(r \circ s) = \{\theta_A(r \circ s)\}_{A\in\mathfrak{R}} = \{\theta_A(s)\theta_A(r)\}_{A\in\mathfrak{R}},$$

ce qui est une transformation naturelle:

$$\Delta_X \xrightarrow{\{\theta_A(r)\}} \Delta_Y \xrightarrow{\{\theta_A(s)\}} \Delta_Z,$$

ce qui dans $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\mathscr{V}, \mathscr{V})$ veut dire que $F(r \circ s) = F(r)F(s)$, par définition. (3°) Le fait que F induise des monomorphismes de $M_{\mathfrak{R}}(Y, X)$ à $M_{\mathfrak{P}}(Y, X)$ est une conséquence immédiate du fait que $\mathscr{V}$ satisfait à (P2).

10. Le théorème de densité. Dorénavant, $\mathfrak{R}$ sera supposée *primitive*. Choisissons une fois pour toutes une $\mathfrak{R}$-précatégorie $(\mathscr{V}, \theta)$ satisfaisant à la définition 6. Nous savons que $\mathfrak{C} = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}}(\mathscr{V}, \mathscr{V})$ est alors un *corpoïde*: c'est le "*centralisateur*" de $\mathfrak{R}$.

La proposition 12 a pour conséquence immédiate la

PROPOSITION 13. *Toute catégorie primitive* $\mathfrak{R}$ *s'identifie à une sous-catégorie d'une catégorie de la forme* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\mathscr{V}, \mathscr{V})$ *où* $\mathscr{V}$ *est une précatégorie à gauche sur un corpoïde* $\mathfrak{C}$.

Soit $(\mathscr{W}, \Sigma)$ une précatégorie à gauche sur une catégorie $\mathfrak{F}$ et $v_i \in M_{\mathscr{W}}(X, A_i)$, $i \in I$, une famille de morphismes de $\mathscr{W}$. Nous dirons que les v_i sont *linéairement indépendants* si pour tout objet C et tout sous-ensemble fini $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ de I, toute relation du type

$$\alpha_{i_1} v_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_n} v_{i_n} = 0 \qquad \text{où} \quad \alpha_{i_k} \in M_{\mathfrak{C}}(A_{i_k}, C)$$

entraîne que $\alpha_{i_1} = 0, \ldots, \alpha_{i_n} = 0$.

THÉORÈME 3. *Soit* $\mathfrak{R}$ *une catégorie primitive et* $\mathfrak{C} = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}}(\mathscr{V}, \mathscr{V})$ *son centralisateur. Etant donné* n *morphismes linéairement indépendants* $v_i \in M_{\mathscr{V}}(X, A_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *et* n *morphismes arbitraires* $x_i \in M_{\mathscr{V}}(Y, A_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *il existe un morphisme* $a \in M_{\mathfrak{R}}(Y, X)$ *tel que*

$$v_i\, a = x_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

La preuve de ce théorème suit d'assez près celle du théorème classique de densité et nous nous contenterons d'en indiquer les principales étapes en insistant surtout sur la façon dont se généralisent les différentes notions qu'elle fait intervenir.

I. Tout d'abord, si $\mathscr{S}$ est un idéal à droite de $\mathfrak{R}$, on note $\mathscr{S}^{\perp}$ la *sous-précatégorie* de $\mathscr{V}$ définie pour chaque couple (X, Y), par

$$M_{\mathscr{S}^{\perp}}(X, Y) = \{v \in M_{\mathscr{V}}(X, Y) |\ \text{pour tout } Z,\ vM_{\mathscr{S}}(Z, X) = \{0\}\}.$$

II. Soit $u \in M_{\mathscr{V}}(X, A)$; on note $u^{\perp}$ *l'idéal à droite* de $\mathfrak{R}$ défini pour chaque couple (Y, Z) par

$$M_{u^\perp}(Y, Z) = M_{\mathfrak{R}}(Y, Z) \qquad \text{si } Z \neq X,$$

$$M_{u^\perp}(Y, X) = \{a \in M_{\mathfrak{R}}(Y, X) | \, ua = 0\}.$$

III. Soit $u \in M_{\mathscr{V}}(X, A)$; on note $\mathfrak{S}u$ la $\mathfrak{S}$-*sous-précatégorie* de $\mathscr{V}$ définie pour chaque couple (B, Z) par

$$M_{\mathfrak{S}u}(B, Z) = \{0\} \qquad \text{si } B \neq X,$$

$$M_{\mathfrak{S}u}(X, Z) = \{\alpha u | \, \alpha \in M_{\mathfrak{S}}(A, Z)\}.$$

IV. Soient $\mathscr{U}_1$ et $\mathscr{U}_2$ deux sous-précatégories de $\mathscr{V}$; leur *somme*, notée $\mathscr{U}_1 + \mathscr{U}_2$, est définie pour chaque couple (A, B) par

$$M_{\mathscr{U}_1+\mathscr{U}_2}(A, B) = M_{\mathscr{U}_1}(A, B) + M_{\mathscr{U}_2}(A, B).$$

V. LEMME 1. *Soit* $u \in M_{\mathscr{V}}(X, A)$ *et soit* $\mathscr{B}$ *un idéal à droite de* $\mathfrak{R}$; *alors*

$$\mathscr{B}^\perp + \mathfrak{S}u = (u^\perp \cap \mathscr{B})^\perp.$$

Il s'agit ici de montrer que pour tout couple d'objets (Y, B),

$$M_{\mathscr{B}^\perp+\mathfrak{S}u}(Y, B) = M_{(u^\perp \cap \mathscr{B})^\perp}(Y, B). \tag{1}$$

Lorsque $Y \neq X$, la démonstration ne pose aucun problème particulier et nous l'omettons. Lorsque $Y = X$, il est également aisé de vérifier que le membre de gauche de (1) est contenu dans le membre de droite, lorsqu'on considère séparément $M_{\mathscr{B}^\perp}(X, B)$ et $M_{\mathfrak{S}u}(X, B)$. Arrêtons-nous plutôt à l'inclusion inverse et pour ce faire considérons la $\mathfrak{R}$-sous-précatégorie $(u\mathscr{B}, \theta')$ de $\mathscr{V}$ définie pour chaque couple (Z, B), par

$$M_{u\mathscr{B}}(Z, B) = \{0\} \qquad \text{si } B \neq A,$$

$$M_{u\mathscr{B}}(Z, A) = \{ua | \, a \in M_{\mathscr{B}}(Z, X)\}.$$

Nous pouvons alors définir, pour chaque morphisme $v \in M_{(u^\perp \cap \mathscr{B})^\perp}(X, B)$, une transformation naturelle $\alpha: \theta'_A \to \theta_B$, en posant pour chaque objet Z, $\alpha_Z(ua) = va$ pour tout $a \in M_{\mathscr{B}}(Z, X)$. Maintenant, comme $\mathscr{V}$ est une $\mathfrak{R}$-précatégorie simple, et comme $0 \leqslant \theta'_A \leqslant \theta_A$, on doit avoir: ou bien $\theta'_A = 0$, ou bien $\theta'_A = \theta_A$.

(1°) Si $\theta'_A = 0$, alors pour tout $ua \in M_{u\mathscr{B}}(Z, A)$ on a $ua = 0$, donc $va = 0$, ce qui veut dire que quelle que soit la transformation ϵ qu'on choisira dans $M_{\mathfrak{S}}(A, B)$, on aura toujours l'identité (triviale)

$$\epsilon(ua) = va \qquad \text{pour tout } Z \text{ et tout } a \in M_{\mathscr{B}}(Z, X). \tag{2}$$

(2°) Si $\theta'_A = \theta_A$, alors α appartient à $M_{\mathfrak{S}}(A, B)$ et par définition

$$\alpha(ua) = va \qquad \text{pour tout } Z \text{ et tout } a \in M_{\mathscr{B}}(Z, X). \tag{3}$$

Les identités (2) et (3) montrent qu'il existe toujours un $\beta \in M_{\mathfrak{S}}(A, B)$ tel que $\beta(ua) = va$ pour tout Z et tout $a \in M_{\mathscr{B}}(Z, X)$. Ainsi $(\beta u - v)a = 0$, d'où $w = \beta u - v \in M_{\mathscr{B}^\perp}(X, B)$ et $v = \beta u + (-w) \in M_{\mathfrak{S}u}(X, B) + M_{\mathscr{B}^\perp}(X, B)$.

VI. LEMME 2. *Soient* $u_1 \in M_{\mathscr{V}}(X, A_1), \ldots, u_n \in M_{\mathscr{V}}(X, A_n)$; *on a alors*

$$\mathscr{B}^\perp + \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{S}u_i = \left(\bigcap_{i=1}^{n} u_i^\perp \cap \mathscr{B} \right)^\perp.$$

Pour $n = 1$, on reconnait le lemme 1; pour $n > 1$, on procède par induction, exactement comme s'il s'agissait d'anneaux et de modules.

VII. Posons $T_j = \mathfrak{R}^\perp + \mathfrak{S}v_1 + \ldots + \mathfrak{S}v_{j-1} + \mathfrak{S}v_{j+1} + \ldots + \mathfrak{S}v_n$; alors d'après le lemme 2,

$$T_j = \left(\bigcap_{\substack{i=1;\\ i\neq j}}^{n} v_i^\perp \cap \mathfrak{R} \right)^\perp = \left(\bigcap_{\substack{i=1;\\ i\neq j}}^{n} v_i^\perp \right)^\perp.$$

D'autre part, $\mathfrak{R}^\perp = 0$. Donc

$$T_j = \mathfrak{S}v_1 + \ldots + \mathfrak{S}v_{j-1} + \mathfrak{S}v_{j+1} + \ldots + \mathfrak{S}v_n,$$

et on remarque que $v_j \notin M_{T_j}(X, A_j)$: en effet, si on avait $v_j \in M_{T_j}(X, A_j)$, cela voudrait dire que

$$v_j \in M_{\mathfrak{S}v_1}(X, A_j) + \ldots + M_{\mathfrak{S}v_{j-1}}(X, A_j) \\ + M_{\mathfrak{S}v_{j+1}}(X, A_j) + \ldots + M_{\mathfrak{S}v_n}(X, A_j),$$

contredisant le fait que les v_i sont linéairement indépendants. Donc

$$v_j \notin M_{T_j}(X, A_j) = M_{\left(\bigcap_{\substack{i=1;\\ i\neq j}}^{n} v_i^\perp \right)^\perp}(X, A_j),$$

d'où

$$v_j M_{\left(\bigcap_{\substack{i=1;\\ i\neq j}}^{n} v_i^\perp \right)}(C_j, X) \neq \{0\}$$

pour au moins un objet C_j. Soit donc

$$e_j \in M_{\left(\bigcap_{\substack{i=1;\\ i\neq j}}^{n} v_i^\perp \right)}(C_j, X)$$

tel que $0 \neq v_j e_j = u_j \in M_{\mathscr{V}}(C_j, A_j)$. Comme $0 \neq u_j \in M_{u_j\mathfrak{R}}(C_j, A_j)$ si on pose $u_j \mathfrak{R} = (u_j \mathfrak{R}, \theta')$, on aura $\theta'_{A_j} = \theta_{A_j}$, c'est-à-dire, pour tout objet Y, $M_{u_j\mathfrak{R}}(Y, A_j) = M_{\mathscr{V}}(Y, A_j)$. Il existe donc un $a_j \in M_{\mathfrak{R}}(Y, C_j)$ tel que $u_j a_j = x_j \in M_{\mathscr{V}}(Y, A_j)$. Mais alors, pour chaque j,

$$v_j\left(\sum_{i=1}^{n} e_i a_i \right) = \sum_{i=1}^{n} v_j e_i a_i = v_j e_j a_j = u_j a_j = x_j.$$

Bibliographie

1. I. E. Burmistrovič, *Embedding of an additive category into a category with direct products*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, *132* (1960), 1235–1237 (Soviet Math. Dokl., *1*, 742–744).
2. G. M. Kelly, *On the radical of a category*, J. Austral. Math. Soc., *4* (1964), 299–307.
3. S. K. Sehgal, *Jacobson theory of ringoids*, NotreDame J. Formal Logic, *4* (1963), 206–215.
4. ——— *Ringoids with minimum condition*, Math Z., *83* (1964), 395–408.

Université de Montréal,
Montréal