Can. J. Math., Vol. XL, No. 3, 1988, pp. 532-545

REGULARITE DE FONCTIONS HOLOMORPHES SUR DES WEDGES

BERNARD COUPET

Nous traitons de la régularité d'une fonction holomorphe sur un ouvert de $\mathbf{C}^n$ à partir de celle de la fonction ou de la partie réelle connue sur une sous-variété totalement réelle maximale (de dimension n) incluse dans le bord de l'ouvert de définition.

Un théorème classique de Privalov assure qu'une fonction continue sur un disque fermé de $\mathbf{C}$, holomorphe sur le disque ouvert, de partie réelle lipschitzienne d'ordre α sur le bord du disque vérifie une condition de même ordre α sur tout le disque. De façon analogue, le module de continuité d'une fonction holomorphe sur un ouvert borné de $\mathbf{C}^n$, continue sur l'adhérence est contrôlé par celui de la fonction restreinte au bord [**2**] et [**5**]. Le bord de l'ouvert peut être remplacé par la frontière de Shilov dans le cas d'un polyèdre analytique [**4**].

E. L. Stout [**9**] étudie la régularité sur une sous-variété totalement réelle maximale M de classe C^p, d'une fonction holomorphe f définie sur un ouvert Ω de classe C^q dont le bord contient M et telle que M soit l'ensemble sur lequel $|f|$ est maximum; il démontre que $f_{|M}$ est C^{p-0} lorsque $q > p$ et C^{p-1} lorsque $q = p$ pour p supérieur ou égal à 3.

Nous obtenons un théorème de type Privalov à partir d'une sous-variété totalement réelle maximale de classe C^2 et une généralisation pour tout p supérieur ou égal à 2 du théorème de Stout sans les conditions relatives de régularité de M et Ω et sans que M soit de module maximum pour f.

Plus précisément, soit M une sous-variété totalement réelle maximale de $\mathbf{C}^n$ de classe C^p ($p \geqq 2$) contenant 0; un wedge W est un ouvert de la forme $(M + i\Gamma) \cap \theta$, Γ étant un cône ouvert connexe de sommet 0 dans $\mathbf{R}^n$, θ un voisinage ouvert borné de 0 dans $\mathbf{C}^n$; un wedge W' est strictement plus fin dans W ($W' \Subset W$) si $\overline{W'}$ est inclus dans $W \cup M$. Nous obtenons les théorèmes.

THÉORÈME 1. *Soit f une fonction continue sur $\overline{W}$, holomorphe sur W. Si $f_{|M}$ est $C^{r,\alpha}$ ($r \leqq p$, $\alpha \in [0, 1[$) f est $C^{r,\alpha}$ sur tout $W' \Subset W$. Pour $r + \alpha \leqq p$.*

THÉORÈME 2. *Soit f une fonction continue sur $\overline{W}$, holomorphe sur W. Si* Re $f_{|M}$ *est $C^{r,\alpha}$ ($r \leqq p$, $\alpha \in [0, 1[$) alors pour tout $W' \Subset W$:*

Reçu le 8 décembre 1986.

1°) *Pour* $r \leqq p - 1$ *et* $\alpha \in]0, 1[$ f *est* $C^{r,\alpha}$
2°) *Pour* $r \leqq p$ *et* $\alpha = 0$ f *est* C^{r^-}.

Tous ces résultats sont locaux. La démonstration se fait par changement de variable presque analytique; aussi pour commencer, nous étudierons des régularités de fonctions non holomorphes sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n_+$. Nous démontrons, ensuite, le théorème où Ω est un "wedge" c'est-à-dire $M + i\Gamma$, Γ étant un tronc de cône ouvert connexe de sommet 0 dans $\mathbf{R}^n$.

Les résultats obtenus dans la première partie ne sont probablement pas les meilleurs possibles; en revanche les théorèmes obtenus pour les fonctions holomorphes sont optimaux puisqu'il existe des domaines inclus dans $\mathbf{C}$, dont le bord est de classe C^1 mais pour lesquels la représentation conforme sur le disque unité est C^{1^-} sans être C^1 [**10**].

1. Régularité de fonctions non holomorphes. P désigne l'ensemble des nombres complexes de partie imaginaire strictement positive et W_0 le produit P^n ($n \geqq 1$).

Conventions. Une fonction continue sur W_0 s'annule sur $\mathbf{R}^n$ si elle admet une limite nulle en tout point de $\mathbf{R}^n$.

Une fonction s'annule à l'ordre k sur $\mathbf{R}^n$ si toutes ses dérivées d'ordre inférieur à k s'annulent sur $\mathbf{R}^n$. De même une forme différentielle s'annule à l'ordre k sur $\mathbf{R}^n$ si tous ses coefficients le font.

$C^{p,\alpha}$ ($p \in \mathbf{N}$, $\alpha \in [0, 1[$) désigne l'ensemble des fonctions p-fois différentiables dont la dérivée d'ordre p est α-lipschitzienne. $C^{0,\alpha}$ est donc l'espace Lip_α.

Une fonction est de classe C^{p} si elle est $p - 1$ fois différentiable ($p \in \mathbf{N}^*$) et si sa dérivée d'ordre $p - 1$ vérifie une condition de Hölder de tout ordre strictement inférieur à 1.

La première partie est divisée en deux paragraphes : dans le premier nous étudions la régularité d'une fonction u sur W_0 à partir de celle de $u_{|\mathbf{R}^n}$ et de la croissance de $\overline{\partial} u$ sur $\overline{W}_0$; dans le second, nous étudions la régularité sur $\mathbf{R}^n$ d'une fonction u à partir de celle de la restriction à $\mathbf{R}^n$ de sa partie réelle et de la croissance de $\overline{\partial} u$ sur W_0.

A) *Régularité sur* W_0. Enonçons les résultats obtenus :

PROPOSITION 1. *Soit u une fonction continue sur* $\overline{W}_0$, *de classe* C^1 *sur* W_0 *à support compact vérifiant* :

$v = u_{|\mathbf{R}_n}$ *est lipschitzienne d'ordre* α
$|\nabla u(x + iy)| \leqq A/|y|$
$|\overline{\partial} u(x + iy) \leqq A.$

Alors u appartient à $\mathrm{lip}_\beta(W_0)$ *avec* $\beta = \alpha/(1 + \alpha)$ *et*

$$\|u\|_{\mathrm{lip}_\beta} \leqq C[\, \|v\|_{\mathrm{lip}_\alpha} + A\,]$$

où C ne dépend que de α *et du diamètre du support de u.*

https://doi.org/10.4153/CJM-1988-023-2 Published online by Cambridge University Press

PROPOSITION 2. *Soit u une fonction continue sur* $\overline{w}_0$, *de classe* C^2 *sur* W_0 *à support compact vérifiant* :

$|\overline{\partial}u(x + iy)| \leqq A$

$|\nabla\overline{\partial}u(x + iy) \leqq (A/|y|^{1-\epsilon})\ (\epsilon > 0)$

$V = u_{|\mathbf{R}_n}$ *est lipschitzienne d'ordre* α.

Alors u est dans $\operatorname{lip}_\alpha(W_0)$ *et il existe* $C = C(\alpha, \operatorname{Supp} u)$ *telle que*

$$\|u\|_{\operatorname{lip}_\alpha} \leqq C[\,\|V\|_{\operatorname{lip}_\alpha} + A].$$

PROPOSITION 3. *Soit u une fonction continue sur* $\overline{W}_0$ *à support compact* C^∞ *sur* W_0 *vérifiant* :

$v = u_{|\mathbf{R}^n}$ *est* C^q $(q \in \mathbf{N}^*)$

$\exists\epsilon > o\ \forall k \leqq q \quad |\nabla^k\overline{\partial}u(x + iy)| \leqq A|y|^{q-k-1+\epsilon}.$

Alors u est C^q *sur* $\overline{W}_0$.

Démonstration de la Proposition 1. Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux points de W_0.

Distinguons quatre cas :

1er cas. $x = x' \quad y' = \lambda y \quad \lambda > 0$. Les points z et z' sont dans le même demi-plan complexe

$$\zeta \mapsto x + \zeta \cdot t \quad \left(t = \frac{y}{|y|}\right).$$

La formule de Cauchy généralisée appliquée à $g:\zeta \to u(x + \zeta \cdot t)$ permet d'écrire pour tout w de P :

$$g(w) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbf{R}}\frac{g(t)dt}{t - w} - \frac{1}{\pi}\int_P\frac{\overline{\partial}g(\zeta)}{z - w}dm(\zeta).$$

La première intégrale est la transformée de Cauchy d'une fonction à support compact α-lipschitzienne donc appartient à $\operatorname{Lip}_\alpha(P)$ et de norme inférieure à $C \cdot \|g\|_{\operatorname{Lip}_\alpha(\mathbf{R})}$.

La seconde intégrale est la transformée de Cauchy sur P d'une fonction bornée donc est dans $C^\beta(P)$ pour tout $\beta < 1$ [**1**] comme $u(z) = g(iy)$ et $u(z') = g(i\lambda y)$, on obtient

$$|u(z) - u(z')| \leqq C[\,\|v\|_\alpha + A]\,|z - z'|^\alpha.$$

2ème cas. $y' = y$. Si

$$|x - x'|^{1/\alpha+1} \leqq |y|,$$

par la théorème des accroissements finis :

$$|u(z) - u(z')| \leqq |x - x'|\frac{A}{|y|} \leqq \alpha\,|z - z'|^\beta.$$

Si

$$|y| < |x - x'|^{1/(\alpha+1)},$$

en posant

$$\lambda = \frac{|x - x'|^{1/(\alpha+1)}}{|y|},$$

λ est supérieur à 1 et

$$\begin{aligned}|u(z) - u(z')| \leqq {} & |u(z) - u(x + i\lambda y)| \\ & + |u(x + i\lambda y) - u(x' + i\lambda y)| \\ & + |u(x + i\lambda y') - u(z')|.\end{aligned}$$

Le 1er cas permet de majorer le premier et le troisième terme par

$$C[\,\|V\|_{\mathrm{lip}_\alpha} + A](\lambda - 1)^\alpha |y|^\alpha$$

et le calcul précédent le second par $A|x - x'|^\beta$ soit finalement

$$|u(z) - u(z')| \leqq C[\,\|v\|_{\mathrm{lip}_\alpha} + A]\,|z - z'|^\beta.$$

3ème cas. $x' = x$. Considérons la suite $(Y_j)_{1 \leqq j \leqq n+1}$ d'éléments de $\mathbf{R}^n$ définie par

$$Y_1 = y$$

$$Y_{j+1} = Y_j + (y_j' - y_j)e_j \quad 1 \leqq j$$

de sorte que $Y_{n+1} = y'$.

Pour tout $1 \leqq j \leqq n$, la fonction

$$y{:}z \in \overline{W}_0 \to u(x + iY_j + z)$$

est β-lipschitzienne sur $\mathbf{R}^n$ d'après le 2° cas; comme $\bar{\partial} u_j$ est borné par A, nous pouvons appliquer le 1° cas. (entre iy_je_j et $iy_j'e_j$) donc :

$$|u(x + iY_{j+1}) - u(x + iY_j)| \leqq C[\,\|v\|_{\mathrm{lip}_\alpha(\mathbf{R}^n)} + A]\,|y_{j+1} - y_j|^\beta.$$

En sommant, nous obtenons :

$$|u(z) - u(z')| \leqq C[\,\|v\|_{\mathrm{lip}_\alpha(\mathbf{R}^n)} + A]\,|z - z'|^\beta.$$

4ème cas. Cas général.

$$\begin{aligned}|u(z) - u(z')| \leqq {} & |u(x + iy) - u(x + iy')| \\ & + |u(x + iy') - u(x' + iy')|.\end{aligned}$$

Le premier terme est majoré en appliquant le troisième cas et le second terme en appliquant le second cas.

Démonstration de la Proposition 2. Soit R tel que

$$\operatorname{Supp} u \subset B(0, R) \times B(0, R),$$

$B(0, R)$ désignant la boule de centre 0 et de rayon R dans $\mathbf{R}^n$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1988-023-2 Published online by Cambridge University Press

Soit $z = x + iy \in W_0$ avec (x, y) appartenant à $B(0, R) \times B(0, R)$. Soit g la fonction définie sur $\bar{P}$ par

$$g(\zeta) = u(x + \zeta y).$$

g est continue sur $\bar{P}$, lipschitzienne d'ordre α sur $\mathbf{R}$, à support inclus dans $D(0, R/|y|)$.

Appliquant la formule de Stokes à la forme

$$\zeta \to \frac{g(\zeta)}{\zeta^2 + 1} d\zeta$$

nous obtenons la formule :

$$g(i) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{v(x + ty)dt}{t^2 + 1} - \frac{2}{\pi} \int_P \frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \frac{dm(\zeta)}{\zeta^2 + 1}.$$

C'est à dire :

$$(1) \quad u(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{v(x + ty)dt}{t^2 + 1} - \frac{2}{\pi} \int_P \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}[u(x + y\zeta)] \frac{dm(\zeta)}{\zeta^2 + 1}.$$

La première intégrale I_1 est lipschitzienne d'ordre α sur W_0. En effet

$$\begin{aligned}
&|I_1(z) - I_1(z')| \\
&\leqq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}} \|v\|_\alpha \frac{|(x - x') + t(y - y')|^\alpha}{t^2 + 1} dt \\
&\leqq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}} \|v\|_\alpha \frac{|x - x'|^\alpha + t^\alpha |y - y'|}{t^2 + 1} dt \\
&\leqq \|v\|_\alpha \left(|x - x'|^\alpha + \frac{|y - y'|^\alpha}{\cos \alpha\pi/2} \right) \\
&\leqq C_\alpha \|v\|_\alpha |z - z'|^\alpha.
\end{aligned}$$

La seconde intégrale I_2 est différentiable par rapport à z et

$$|\nabla I_2(z)| \leqq C \operatorname{Log} \frac{R}{|y|} \quad z = x + iy.$$

En effet :

$$I_2(z) = \sum_{j=1}^{n} y_j \int_P \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j}(x + \zeta y) \frac{dm(\zeta)}{\zeta^2 + 1}.$$

Comme

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j}(x + \zeta y) \right| \leqq \frac{A}{(\operatorname{Im} \zeta)^{1-\epsilon} |y|^{1-\epsilon}}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1988-023-2 Published online by Cambridge University Press

et

$$\zeta \to \frac{1}{(\operatorname{Im} \zeta)^{1-\epsilon}|\zeta^2 + 1|}$$

est intégrable sur P, on voit par différentiation sous l'intégrale que I_2 est différentiable par rapport à x_k et

$$\frac{\partial I_2}{\partial x_k}(z) = \sum_{j=1}^{n} y_j \int_P \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial \bar{z}_j}(x + \zeta y) \frac{dm(\zeta)}{\zeta^2 + 1},$$

d'où

$$\left|\frac{\partial I_2(z)}{\partial x_k}\right| \leqq A|y|^{\epsilon} \int_P \frac{dm(\zeta)}{(\operatorname{Im} \zeta)^{1-\epsilon}|\zeta^2 + 1|};$$

u étant C^2 sur W_0, $\partial I_2/\partial x_k$ est continue. De même :

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial}{\partial y_k}\left[\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} u(x + \zeta y)\right]\right] &= \frac{\partial}{\partial y_k}\left[\sum_{j=1}^{n} y_j \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j}(x + \zeta y)\right] \\ &= \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_k}(x + \zeta y) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} y_i\left(\operatorname{Re} \zeta \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial \bar{z}_j} + \operatorname{Im} \zeta \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial \bar{z}_j}\right),\end{aligned}$$

d'ou la majoration :

$$\left|\frac{\partial}{\partial y_k}\left[\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} u(x + \zeta y)\right]\right| \leqq A\left(1 + |y|^{\epsilon} \frac{|\zeta|}{(\operatorname{Im} \zeta)^{1-\epsilon}}\right).$$

En remarquant que l'intégration ne se fait que sur un compact de $\bar{P}$, on en déduit que I_2 est différentiable par rapport à y_k et

$$\frac{\partial I_2}{\partial y_k}(z) = \int_P \frac{\partial}{\partial y_k}\left[\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} u(x + \zeta y)\right]\bigg| \leqq \frac{dm(\zeta)}{\zeta^2 + 1}.$$

Comme précédemment $\partial I_2/\partial y_k$ est continue sur W_0 et majorée par

$$A \int_{D(0, \sqrt{5R/|y|})}\left(1 + \frac{|y|^{\epsilon}|\zeta|}{(\operatorname{Im} \zeta)^{1-\epsilon}}\right)\frac{dm(\zeta)}{|\zeta^2 + 1|}$$

soit par

$$A\left(\operatorname{Log} \frac{R}{|y|} + C_{\epsilon} R^{\epsilon}\right).$$

Par conséquent I_2 est C^1 sur W_0 et

$$|\nabla I_2(x + iy)| \leqq CA \log \frac{R}{|y|}.$$

Il en découle que I_2 est lipschitzienne de tout ordre strictement inférieur à 1. En particulier

$$\|I_2\|_{\mathrm{lip}_\alpha} \leqq C_\alpha A$$

ce qui achève la démonstration de la proposition.

Démonstration de la Proposition 3. La démonstration se fait par récurrence sur q. Fixons $z = x + iy$ un élément W_0.

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{v(x + ty)}{t^2 + 1} dt - \frac{2}{\pi} \int_P \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} [u(x + y\zeta)] \frac{dm(\zeta)}{\zeta^2 + 1}.$$

v étant C^1 sur $\mathbf{R}^n$, et à support compact, la première intégrale est de classe C^1 sur W_0 de dérivée partielle par rapport à x_l

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial v}{\partial x_l}(x + ty) \frac{dt}{t^2 + 1}$$

qui admet $\partial v/\partial x_l$ comme prolongement à $\mathbf{R}^n$.

La seconde intégrale est dérivable par rapport à x_l de dérivée :

$$-\frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{n} y_j \int_P \frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial \bar{z}_j}(x + \zeta y) \frac{dm(\zeta)}{\zeta^2 + 1}$$

qui se prolonge par 0 à $\mathbf{R}^n$. En effet, cette intégrale est majorée par :

$$C \int \frac{|y|^\epsilon}{|\mathrm{Im}\, z|^{1-\epsilon}} \frac{dm(\zeta)}{|\zeta^2 + 1|}$$

(R désignant le rayon d'une boule centrée en 0 contenant le support de u). Cette dernière intégrale est $O(|y|^\epsilon)$. Par suite $\partial u/\partial x_l$ se prolonge par $\partial v/\partial x_l$ sur $\mathbf{R}^n$ et comme $\partial u/\partial x_l + i(\partial u/\partial y_l)$ se prolonge par 0 sur $\mathbf{R}^n$, $\partial u/\partial y_l$ se prolonge par $-i(\partial v/\partial x_l)$ d'où la proposition pour $q = 1$.

La démonstration se termine aisément par récurrence.

B) *Régularité sur* $\mathbf{R}^n$. Enonçons les résultats obtenus dans ce paragraphe.

PROPOSITION 4. *Soient q un entier naturel et α un réel de*]0, 1[. *Soit u une fonction continue sur $\overline{W}_0$ à support compact, C^∞ sur W_0 vérifiant*

(i) $v = \mathrm{Re}\, u_{|\mathbf{R}^n}$ *appartient à* $C^{q,\alpha}(\mathbf{R}^n)$

(ii) $|\nabla^k \bar{\partial} u(x + iy)| \leqq A|y|^{q-k-1+\alpha} \quad k \leqq q.$

Alors $u_{|\mathbf{R}^n}$ appartient à $C^{q,\alpha}(\mathbf{R}^n)$.

Démonstration de la Proposition 4.

1er cas. $n = 1$. Soit u une fonction continue par $\bar{P}$ à support compact C^1 sur P telle que $|(\partial u/\partial \bar{z})(x + iy)|$ soit majoré par $A/|y|^{1-\alpha}$ et $v = u_{|\mathbf{R}}$ soit α-lipschitzienne. Appliquant la formule de Cauchy généralisée, nous obtenons pour tout réel x :

$$\operatorname{Im} u(x) = \frac{-1}{\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{v(t)dt}{t - x} - \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_P \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}(z) \frac{dm(z)}{z - x}.$$

Scient w_1 et w_1' deux points de $\mathbf{R}$. Posons $d = |w_1 - w_1'|$. Supposons $d < R$. En divisant le domaine d'intégration en $\{\zeta | |\zeta - w_1| \leqq 2d\}$ et son complémentaire on obtient :

$$\begin{aligned} |F(w_1) - F(w_1')| \leqq & A \int_{\substack{|\zeta - w_1| \leqq 2d \\ \zeta \in K}} \frac{dm(\zeta)}{(\operatorname{Im} \zeta)^{1-\alpha} |\zeta - w_1|} \\ & + A \int_{\substack{|\zeta - w_1| \leqq 2d \\ \zeta \in K}} \frac{dm(\zeta)}{(\operatorname{Im} \zeta)^{1-\alpha} |\zeta - w_2|} \\ & + dA \int_{|\zeta - w_1| > 2d} \frac{dm(\zeta)}{(\operatorname{Im} \zeta)^{1-\alpha} |\zeta - w_1|\, |\zeta - w_2|}. \end{aligned}$$

Or si

$$\begin{aligned} |\zeta - w_1| \geqq 2d \quad & |\zeta - w_2| \geqq |\zeta - w_1| - |w_1 - w_2| \\ & \geqq |\zeta - w_1| - d \\ |\zeta - w_1| \leqq 2d \quad & |\zeta - w_2| \leqq 3d. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} |F(w_1) - F(w_1')| \leqq & 2A \int_{|\zeta - w_1| \leqq 3d} \frac{dm(\zeta)}{(\operatorname{Im} \zeta)^{1-\alpha} |\zeta - w_1|} \\ & + Ad \int_{2d \leqq |\zeta - w_1|} \frac{dm(\zeta)}{(\operatorname{Im} \zeta)^{1-\alpha} |\zeta - w_1| \,(|\zeta - w_1| - d}. \end{aligned}$$

Ces intégrales s'estiment alors en passant en coordonnées polaires centrées en w_1. La première est

$$\int_0^{3d} \int_0^{\pi} \frac{d\rho \cdot d\theta}{\rho^{1-\alpha} (\sin \theta)^{1-\alpha}} = C_\alpha d^\alpha.$$

La seconde est

$$\int_{2d}^{2R} \int_0^{\pi} \frac{d\rho}{\rho^{1-\alpha} (\sin \theta)(\rho - d)} = c_\alpha \int_{2d}^{2R} \frac{d\rho}{\rho^{1-\alpha} (\rho - d)}$$

par changement de variable :

$$= \frac{C_\alpha}{d^{1-\alpha}} \int_2^{2R/d} \frac{d\rho}{\rho^{1-\alpha}(\rho - 1)}$$

qui est majorée par

$$\frac{2C_\alpha}{d^{1-\alpha}} \int_2^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho^{2-\alpha}}$$

d'où le résultat.

2ème cas. $n > 1$. Soient x et x' deux éléments de $\mathbf{R}^n$. Nous reprenons la méthode utilisée dans la démonstration de la proposition 2° (3° cas). Soit la suite $(X_j)_{1 \leqq j \leqq n+1}$ d'éléments de $\mathbf{R}^n$ définie par

$$X_1 = x$$

$$X_{j+1} = X_j + (x_j' - x_j)e_j \quad 1 \leqq j \leqq n$$

le résultat pour $n = 1$ s'applique à la fonction

$$z \in P \rightarrow u(X_j + ze_j).$$

D'où

$$|u(x) - u(x')| \leqq C[\, \|v\|_{\mathrm{lip}_\alpha(\mathbf{R}^n)} + A] \, |x_j' - x_j|^\alpha$$

et en sommant

$$|u(x) - u(x')| \leqq C[\, \|v\|_{\mathrm{lip}_\alpha(\mathbf{R}^n)} + A] \, |x - x'|^\alpha.$$

Supposons désormais $q \geqq 1$. Soit Φ l'application de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}^n$ définie par :

$$\Phi(w, \zeta) = (w_1 + \zeta, \dots, w_n + \zeta)$$

dont les propriétés suivantes sont immédiates : Φ est C^∞, $(w, \cdot)$ est holomorphe $\Phi(w, 0) = w$, la distance de $\Phi(w, \zeta)$ à $\mathbf{R}^n$ est $|\mathrm{Im}\, \zeta|$, Φ est linéaire.

Posons pour $w \in \mathbf{R}^n$

$$g_w(\zeta) = u \circ \Phi(w, \zeta).$$

Il est immédiat que

g_w est C^∞ sur P

g_w est continue sur $\bar{P}$

g_w est à support compact, inclus dans une boule de centre 0 et de rayon R indépendant de w lorsque celui-ci varie dans un compact de $\mathbf{R}^n$.

Re g_w appartient à $C^{q,\alpha}(\mathbf{R})$

$\bar{\partial} g_w$ est bornée par A

$g_w(0) = u(w)$.

Par conséquent, en appliquant la formule généralisée de Cauchy :

$$\operatorname{Im} g_w(0) = \frac{1}{\pi} V \cdot P \cdot \int \frac{\operatorname{Re} g_w(t)}{t} dt - \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_P \frac{\partial gw(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{dm(\zeta)}{\zeta}.$$

Il s'agit donc de démontrer que chacune des deux intégrales est de classe $C^{q,\alpha}$ en w.

La première intégrale s'écrit :

$$I_1(w) = \int_0^R [v \circ \Phi(w, t) - v \circ \Phi(w, -t)] \frac{dt}{t}.$$

Par dérivation sous l'intégrale, I_1 est de classe C^q et pour toute dérivation L de longueur inférieure ou égale à q :

$$LI_1(w) = \int_0^R [Lv \circ \Phi(w, t) - Lv \circ \Phi(w, -t)] \frac{dt}{t}.$$

La seconde intégrale s'écrit

$$I_2(w) = \sum_{j=1}^n \int_{[-R,R]\times[0,R]} - \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} \circ \Phi(w, \zeta) \frac{dm(\zeta)}{\zeta}.$$

Comme

$$z \longrightarrow \frac{1}{|\operatorname{Im} \zeta|^{1-\alpha} |\zeta|}$$

est intégrable sur $[-R, R] \times [0, R]$, l'hypothèse (ii) entraîne que I_2 est de classe C^q sur $\mathbf{R}^n$ et pour toute dérivation L de longueur inférieure à q

$$LI_2(w) = \sum_{j=1}^n \int_P \left[L \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} \right] \circ \Phi(w, \zeta) \frac{dm(\zeta)}{\zeta}.$$

Démontrons maintenant que u est $C^{q,\alpha}$ sur $\mathbf{R}^n$. L'hypothèse (ii) et le fait que u est C^q sur $\mathbf{R}^n$ entraine que u est C^q sur $\bar{W}_0$ (Proposition 3).

Soit L une dérivation sur $\mathbf{R}^n$ de longueur égale à q. Lu est continue sur $\bar{W}_0$ à support compact et $|\bar{\partial} Lu(x + iy)|$ est majoré par $A/|y|^{1-\alpha}$ (hypothèse ii).

Comme $\operatorname{Re}(Lu)$ est égale à $L(\operatorname{Re} u)$, $\operatorname{Re}(Lu)$ est α lipschitzienne sur $\mathbf{R}^n$. Le cas $q = 0$ permet de conclure que Lu est aussi α lipschitzienne sur $\mathbf{R}^n$.

Remarque 1. La proposition est valable pour tout cône linéairement isomorphe à $(\mathbf{R}_+)^n$.

2. Regularité sur des wedges de fonctions holomorphes. Soit maintenant une sous-variété totalement réelle maximale M de $\mathbf{C}^n$ de classe $C^P (P \geqq 2)$ définie au voisinage de 0 par l'équation

$$\operatorname{Im} w = Z(\operatorname{Re} w)$$

où Z est de classe C^P au voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^n$ vérifiant $Z(0) = 0$ $dZ(0) = 0$ et soit Γ un cône ouvert connexe de $\mathbf{R}^n$ de sommet 0. On considère l'ouvert W (le wedge) défini dans $\mathbf{C}^n$ par l'équation

$$W = \operatorname{Re} w + iZ(\operatorname{Re} w) + it$$

au voisinage de 0 et t dans Γ, c'est-à-dire

$$W = (M + i\Gamma) \cap \theta$$

où θ est un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^n$.

L'application $\zeta \to \zeta + iZ(\zeta)$ se prolonge en une application $Z^{\neq}$ de $\mathbf{C}^n$ dans lui-même vérifiant :

$Z^{\neq}$ est de classe C^P et de classe C^∞ sur $\mathbf{C}^n \backslash \mathbf{R}^n$

$\bar{\partial} Z^{\neq}$ est nul à l'ordre $p - 1$ sur $\mathbf{R}^n$

$$|\nabla^q Z^{\neq}(x + iy)| \leqq \frac{C_q}{|y|^{q-p}} \quad \text{pour tout } q > p.$$

[**3**] et [**6**] (Théorème 3-2 et son complément 3-3).

Comme l'espace tangent en 0 à M est $\mathbf{R}^n$, $Z^{\neq}$ définit un C^P difféomorphisme local en 0 dans $\mathbf{C}^n$.

Nous dirons que le "wedge" W' construit à partir de M et $\Gamma' \Subset \Gamma$ est strictement plus fin que W et écrirons $W' \Subset W$ si $\overline{W'}$ est inclus dans $W \cup M$.

Nous pouvons démonter les théorèmes :

THÉORÈME 1. *Soit f une fonction continue sur $\bar{W}$ holomorphe sur W telle que sa restriction à M soit $C^{r,\alpha}$ ($r \leqq p$, $\alpha \in [0, 1[$) ($r + \alpha \leqq p$). Alors pour tout $W' \Subset W$ f est $C^{r,\alpha}$.*

THÉORÈME 2. *Soit f une fonction continue sur $\bar{W}$ holomorphe sur W telle que la restriction à M de sa partie réelle soit $C^{r,\alpha}$ ($r \leqq p$, $\alpha \in [0, 1[$). Alors pour tout $W' \Subset W$:*

f est $C^{r,\alpha}$ pour $r \leqq p - 1$, $\alpha \in]0, 1[$
f est C^{r-} pour $r \leqq p$, $\alpha = 0$.

Introduisons les notations communes aux démonstrations de ces deux théorèmes.

Fixons $\Gamma' \Subset \Gamma$ et considérons un troisième cône Γ'' tel que $\Gamma' \Subset \Gamma'' \Subset \Gamma$. Il existe N cônes Λ_j isomorphes à $\mathbf{R}^n_+$ telles que

$$W' \subset \bigcup_{j=1}^{N} Z^{\neq}(W_j) \subset W'' \Subset W$$

où $W_j = \mathbf{R}^n + i\Lambda_j$ au voisinage de 0. On supposera dans la suite Λ_j égal à $\mathbf{R}^n_+$.

Considérons χ une fonction C^∞ sur $\mathbf{C}^n$ à support compact valant 1 au voisinage de 0 et à $\bar{\partial}$ plat sur $\mathbf{R}^n$ réelle sur $\mathbf{R}^n$ et soit $u = \chi \cdot f \circ Z^{\neq}$.

Les estimations de Cauchy à l'intérieur de W'' donnent pour tout multi-indice s :

$$\left|\frac{\partial^s f(Z)}{\partial z^s}\right| \leqq \frac{C_s\|f\|_\infty}{d(z, bw'')^{|s|}} \leqq \frac{C_s\|f\|_\infty}{d(z, M)^{|s|}}.$$

Comme

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{w}} = \chi \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j} \circ Z^{\neq} \frac{\partial Z_j^{\neq}}{\partial \bar{w}} + f \circ Z^{\neq} \frac{\partial x}{\partial \bar{w}}$$

et

$$d(Z^{\neq}(x + iy), M) \simeq |y|$$

on obtient

$$\left|\frac{\partial u}{\partial \bar{w}}\right| \leqq C\|f\|_\infty$$

où C ne dépend que du choix de χ et W''. De plus

$$|\nabla u(x + iy)| \leqq \frac{C\|f\|_\infty}{|y|}.$$

Démonstration du Théorème 1.

Cas $r = 0$. Supposons $f_{|M}$ α-lipschitzienne. Les estimations précédentes et la proposition 1 permettent de conclure que f est lip_β ($\beta = \alpha/(1 + \alpha)$). Les estimations de Cauchy donnent alors :

$$\left|\frac{\partial^s f}{\partial z_j^s}(z)\right| \leqq \frac{C\|f\|_\beta}{\operatorname{dist}(z, bW'')^{s-\beta}} \leqq \frac{C\|f\|_\beta}{d(z, M)^{s-\beta}}$$

et par suite

$$\left|\nabla \frac{\partial u}{\partial \bar{w}_K}(x + iy)\right| \leqq \frac{C\|f\|_\beta}{|y|^{1-\beta}}$$

$$|\bar{\partial} u| \leqq C \cdot \|f\|_\infty.$$

La Proposition 2 permet de conclure que u et donc f est α-lipschitzienne.

Cas $r \geqq 1$. Si $r \geqq 1$, la Proposition 3 s'applique maintenant à u avec $q = r$. En effet, les estimations de Cauchy à l'intérieur de W'' donnent :

$$\frac{\partial^s f(z)}{\partial z^s} = O(d(z, bW'')^{-|s|+\alpha}) = O(d(z, M)^{-|s|+\alpha}).$$

Comme

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{W}_h} = \chi \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j} \circ Z^{\neq} \frac{\partial Z_j^{\neq}}{\partial \bar{W}_h} + f \circ Z^{\neq} \frac{\partial \chi}{\partial \bar{W}_h}$$

et

$$d(Z(x + iy), M) \simeq |y|$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{W}_h}(x + iy) = O(|y|^{p-2+\alpha}).$$

De même, par la règle de Leibniz, pour $|s| \leqq p$, $\partial^s[\partial U/\partial \bar{W}_h]$ est somme de termes du type

$$\partial^{s-t}\left[\frac{\partial f}{\partial z_j} \circ Z^{\neq}\right]\partial^t\left[\frac{\partial z_j^{\neq}}{\partial \bar{W}_h}\right], \ |t| \leqq p - 1$$

qui sont

$$O(|y|^{p-2-|s|+\alpha}) = O(|y|^{r-1-|s|+\alpha}).$$

La Proposition 3 permet d'affirmer que u est C^r sur $\bar{W}_0$.

Par suite f est C^r jusqu'au bord sur W'. Les dérivées partielles d'ordre r sont alors α-lipschitziennes sur M (par l'hypothèse que $f_{|M}$ est $C^{r,\alpha}$); le cas $r = 0$ s'applique à chacune de ces dérivées et f est $C^{r,\alpha}$ sur W'.

Démonstration du Théorème 2. Conservons les notations de la démonstration précédente.

Cas $r = 0$. Supposons Re f α-lipschitzienne sur M. Re u est donc α-lipschitzienne sur $\mathbf{R}^n$; $\bar{\partial} u$ étant borné, la Proposition 4 permet de conclure que u est α-lipschitzienne sur $\mathbf{R}^n$ donc f l'est sur M. Par le Théorème 1, f l'est sur W'.

Cas $1 \leqq r \leqq p - 1$ $\alpha \in]0, 1[$. La Proposition 4 s'applique avec $q = r$. En effet les estimations de $\bar{\partial} u$ faites précédemment sont :

$$\bar{\partial} u(x + iy) = O(|y|^{r-1-|s|+\alpha}).$$

Par l'hypothèse, Re u est $C^{r,\alpha}$ sur $\mathbf{R}^n$; par conséquent (Proposition 4) u est $C^{r,\alpha}$ sur $\mathbf{R}^n$ et f l'est sur M. Le Théorème 1 permet de conclure que f l'est sur W'.

Cas $r \leqq p$ $\alpha = 0$. Il suffit de remarquer l'égalité

$$C^{r-} = \bigcap_{0<\alpha<1} C^{r,\alpha}$$

et d'appliquer le résultat précédent.

Bibliographie

1. L. Bers, *Partial differential equations*, Lectures in applied mathematics (American Mathematical Society, 1966).
2. E. M. Circa, *Analytic representation of CR functions*, Math. USSR Sbornik *27* (1975), 526-553.

3. ——— *Regularity of the boundaries of analytic sets*, Math. USSR Sbornik *45* (1983), 291-335.

4. B. Erikke, *The relation between the solid modulus of continuity and the modulus of continuity along the shilov boundaries for analytic functions of several variables*, Math USSR Sbornik *50* (1985), 495-511.

5. Harvey-Lawson, *On boundary of complex analytic varieties*, Ann. of Math. *102* (1975), 223-290.

6. B. Malgrange, *Ideals of differentiable functions*, Tata Inst. Fund. Res. Bombay and Oxford Univ. Press (1967).

7. J. P. Rosay, *A propos de "wedges" et d'"edges" et de prolongements holomorphes* (à paraître).

8. W. Rudin, *Lectures on the edge of the wedge theorem*, Regional conference series in math *6* AMS (1971).

9. E. L. Stout, *Smooth boundary values along totally real submanifolds*, Can. J. Math. *36* (1984), 240-248.

10. M. Tsuji, *Potential theory in modern function theory* (Maruzen, Tokyo).

Université de Provence,
Marseille, France