Compositio Math. 142 (2006) 501–528
doi:10.1112/S0010437X05001806

Groupes de Kac–Moody déployés sur un corps local, immeubles microaffines

Guy Rousseau

Abstract

If G is a (split) Kac–Moody group over a field K endowed with a real valuation ω, we build an action of G on a geometric object $\mathcal{I}$. This object is called a building, as it is an union of apartments, with the classical properties of systems of apartments. However, these apartments are more exotic: that associated to a torus T may be seen as the gluing of all Satake compactifications of affine apartments of T with respect to spherical parabolic subgroups of G containing T. Another geometric realization of these apartments makes them look more like the apartments of Λ-buildings; then the translations of the Weyl group act only on infinitely small elements of the apartment, so we call these buildings *microaffine*.

Résumé

Si G est un groupe de Kac–Moody (déployé) sur un corps K muni d'une valuation réelle ω, on construit une action de G sur un objet géométrique $\mathcal{I}$. On qualifie cet objet d'immeuble, car il est réunion d'appartements, avec les propriétés classiques des systèmes d'appartements. Mais ces appartements sont plus exotiques : celui associé à un tore T peut être vu comme le recollement de toutes les compactifications de Satake des appartements affines de T par rapport aux sous-groupes paraboliques sphériques de G contenant T. Une autre réalisation géométrique de ces appartements les fait plus ressembler aux appartements des Λ-immeubles ; alors les translations du groupe de Weyl agissent seulement sur les éléments infiniment petits de l'appartement, on appelle donc ces immeubles *microaffines*.

Introduction

L'étude des groupes réductifs sur les corps locaux non archimédiens, initiée par Iwahori et Matsumoto [IM65] a été largement développée par Bruhat et Tits [BT72, BT84]. Pour ce faire ils ont introduit un immeuble (dit affine ou de Bruhat–Tits) sur lequel le groupe réductif agit. Comme ils envisagent également une valuation réelle non discrète, cet immeuble n'est pas forcément un complexe simplicial ou polysimplicial ; il ne rentre pas dans le cadre théorique immobilier classique maintenant largement connu, voir [Bro89, Gar97, Ron89, Sch95]. Une axiomatique particulière a été développée par Tits [Tit86], voir aussi [Par00, Rou04]. Une partie de ces résultats a été étendue au cas des valuations de hauteur au moins égale à 2 [Ben90, Ben94] en introduisant des immeubles Λ-affines qui généralisent les Λ-arbres [Chi01].

Par ailleurs des groupes ont été associés aux algèbres de Kac–Moody, d'abord par Moody et Teo [MT72], puis Marcuson [Mar75], Tits [Tit81, Tit82], enfin Peterson et Kac [PK83]. Ils constituent

Received 23 November 2004, accepted in final form 17 May 2005.
2000 Mathematics Subject Classification 22E65 (primary), 17B67, 20G25, 51E24.
Keywords: Kac–Moody group, local field, building.

maintenant une généralisation bien connue des groupes réductifs. On considérera ici des groupes de Kac–Moody sur un corps quelconque comme définis par Tits [Tit85, Tit87], voir aussi [Abr96]. En particulier on ne considérera que des groupes de Kac–Moody déployés, même si la recherche d'une généralisation au cas presque déployé de [Rém02] est légitime, puisque l'ingrédient essentiel est la description du groupe par une donnée radicielle (ou un système de Tits jumelé).

Il apparaît donc naturel d'essayer d'élucider la structure d'un groupe de Kac–Moody G sur un corps valué (K, ω). Garland [Gar95] a prouvé des décompositions d'Iwasawa et de Cartan pour des groupes de lacets bornés, cf. § 4.1, remarque (2). En général la construction d'un système de Tits dont les sous-groupes paraboliques seraient compacts est, *a priori*, impossible. Mais on va construire ici un objet, que l'on appellera immeuble, avec une action du groupe de Kac–Moody G, le tout fournissant des décompositions de Bruhat ou d'Iwasawa (elles sont ici très liées) et permettant d'envisager une étude géométrique de ce groupe, cf. § 4.6. Cet immeuble est, classiquement, réunion d'appartements permutés transitivement par G et en bijection avec les sous-tores déployés maximaux de G. Mais ces appartements sont plus exotiques : les chambres doivent être considérées comme des filtres de parties de l'appartement et ne sont pas forcément conjuguées par le groupe de Weyl W (ceci arrivait déjà chez Bruhat–Tits), une chambre peut être fixe par un élément non trivial du groupe de Weyl .... Si le groupe de Kac–Moody est affine non tordu, l'immeuble construit ici est l'un des immeubles Λ-affines de Bennett [Ben90, Ben94].

Une première idée de construction vient de la notion de compactifié de Satake de l'appartement de Bruhat–Tits d'un tore déployé maximal T d'un groupe réductif. Ce compactifié, [Gér84, Lan96], est inspiré des travaux de Satake [Sat60a, Sat60b] pour les espaces symétriques ; il juxtapose, avec une topologie convenable, les appartements de Bruhat–Tits de T pour tous les sous-groupes paraboliques de G contenant T (ces appartements sont en fait associés à T et aux semi-simplifiés des sous-groupes paraboliques). Maintenant si T est un tore déployé maximal du groupe de Kac–Moody G, un sous-groupe parabolique de G contenant T est dit sphérique (ou de type fini) si le quotient par son radical unipotent est réductif. On considère donc tous les compactifiés de Satake d'appartements de Bruhat–Tits des sous-groupes paraboliques sphériques contenant T et on les recolle le long de leurs composantes communes. On obtient ainsi l'appartement $\mathbb{A}^s$ de (G, T). On construit facilement des sous-groupes parahoriques associés aux points de $\mathbb{A}^s$: ce sont des vrais sous-groupes parahoriques des quotients semi-simples de sous-groupes paraboliques sphériques auxquels on rajoute le radical du parabolique. On définit alors l'immeuble $\mathcal{I}^s$ à partir de $\mathbb{A}^s$ par le même procédé que Bruhat et Tits [BT72, 7.4.1]. C'est le recollé de tous les ('compactifiés' de Satake des) immeubles affines des sous-groupes paraboliques sphériques de G (agissant via les semi-simplifiés de leurs quotients réductifs).

Malheureusement la définition précédente conduit à un appartement pas assez rigide sous l'action du normalisateur N de T et donc du groupe de Weyl W quotient de N par le sous-groupe 'compact' maximal H de T : le fixateur dans W de certaines chambres peut ne pas être trivial et ce fait interdit, e.g. l'outil des rétractions. On construit donc d'abord une autre réalisation géométrique $\mathbb{A}$ de l'appartement : elle est inspirée de la notion d'immeuble Λ-affine [Ben90, Ben94] puisque $\mathbb{A}$ est une partie d'un module libre sur l'anneau $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ muni de la topologie associée à l'ordre lexicographique. Le sous-groupe T/H de W n'agit (par des translations) que sur les infiniment petits (second facteur de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) ; ainsi on peut qualifier cet appartement $\mathbb{A}$ (et donc l'immeuble correspondant $\mathcal{I}$) de *microaffine*. C'est à partir de cet appartement et de cet immeuble que l'on construit l'appartement $\mathbb{A}^s$ et l'immeuble $\mathcal{I}^s$. Les facettes de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{A}^s$ sont en correspondance naturelle bijective W-équivariante et ces deux appartements sont donc bien deux réalisations géométriques d'un même appartement abstrait.

Le § 1 est consacré au rappel des principaux résultats de structure des groupes de Kac–Moody sur des corps quelconques. Au § 2 on construit l'appartement $\mathbb{A}$ évoqué ci-dessus associé à un groupe de Kac–Moody sur un corps K muni d'une valuation réelle ω ; cette construction s'étend facilement au cas d'une valuation de hauteur quelconque.

Les résultats principaux de cet article sont prouvés au § 3. C'est là qu'il faut se limiter au cas d'une valuation réelle en l'absence de théorie des 'compactifiés' de Satake des immeubles Λ-affines. On obtient des décompositions de Bruhat pour les sous-groupes d'Iwahori (proposition 3.5) ainsi que deux autres résultats concernant ces groupes (propositions 3.9 et 3.10). On en déduit le théorème suivant, énoncé pour une valuation discrète (voir essentiellement la remarque (3) au-dessous de la proposition 1.5, les corollaires 3.11, 3.6, 3.13 et la proposition 3.14).

Théorème. *Si G est un groupe de Kac–Moody sur un corps K muni d'une valuation discrète, on lui associe un immeuble microaffine sur lequel il agit. Cet immeuble est un ensemble $\mathcal{I}$, muni de deux recouvrements G-invariants, l'un par des sous-ensembles appelés facettes et l'autre par des sous-ensembles appelés appartements.*

(1) *Les appartements sont permutés transitivement par G ; ils sont en correspondance bijective G-équivariante avec les tores maximaux déployés de G. Un tel tore T agit sur l'appartement $A(T)$ correspondant par des 'translations infinitésimales'. L'ensemble des facettes contenues dans $A(T)$ s'identifie (comme ensemble ordonné) à la réunion disjointe des complexes polysimpliciaux que sont les appartements de Bruhat–Tits des sous-groupes paraboliques sphériques de G contenant T.*

(2) *Les facettes et appartements vérifient les relations d'incidence classiques :*

(I1) *deux facettes de l'immeuble $\mathcal{I}$ sont contenues dans un même appartement ;*

(I2) *si A' et A'' sont deux appartements de $\mathcal{I}$, alors $A' \cap A''$ est clos dans A' et A'' ; de plus il existe $g \in G$, fixant $A' \cap A''$, tel que $A'' = gA'$.*

(3) *Pour toute chambre C contenue dans un appartement A, il existe une rétraction ρ de $\mathcal{I}$ sur A qui fixe C et ses facettes.*

(4) *La topologie de K est traduite dans l'action de G sur $\mathcal{I}$. En particulier si K est un corps local (i.e. localement compact) le fixateur (point par point) d'un appartement $A(T)$ est le sous-groupe compact maximal de T. En outre le fixateur d'un point ou d'une facette est contenu dans un sous-groupe parabolique sphérique de G et est produit semi-direct du radical unipotent de celui-ci par un sous-groupe compact de son facteur de Levi.*

Au § 4 on introduit la variante $\mathbb{A}^s$ de l'appartement expliquée ci-dessus et l'immeuble $\mathcal{I}^s$ associé. On explicite quelques exemples et on envisage quelques généralisations ou applications.

1. Groupes de Kac–Moody

On rappelle ici les principaux résultats sur les groupes de Kac–Moody et leurs immeubles. Pour cela on se réfère essentiellement à Rémy [Rém02], et au début à Bardy-Panse [Bar96].

Définitions 1.1. (1) Une *matrice de Kac–Moody* (ou matrice de Cartan généralisée) est une matrice carrée $A = (a_{i,j})_{i,j \in I}$, à coefficients entiers, indexée par un ensemble fini I et qui vérifie :

(i) $a_{i,i} = 2 \quad \forall i \in I$;

(ii) $a_{i,j} \leqslant 0 \quad \forall i \neq j$;

(iii) $a_{i,j} = 0 \iff a_{j,i} = 0$.

(2) Un *système générateur de racines* est un quintuplet $(A, X, Y, (\alpha_i)_{i \in I}, (\check{\alpha_i})_{i \in I})$ formé d'une matrice de Kac–Moody A indexée par I, de deux $\mathbb{Z}$-modules libres duaux X et Y de rang fini n, d'une famille libre $(\alpha_i)_{i \in I}$ dans X et d'une famille $(\check{\alpha_i})_{i \in I}$ dans Y. Ces données sont soumises à la condition de compatibilité suivante : $a_{i,j} = \alpha_j(\check{\alpha_i})$.

Commentaire. On a adopté la terminologie 'système générateur de racines' de Bardy-Panse, bien que l'on se place dans un cadre beaucoup plus restreint, encore plus restreint que celui de [Rém02, définition 7.1.1] où la terminologie 'donnée radicielle de Kac–Moody' est employée.

1.2 Le groupe de Weyl et les racines (réelles)

Soit $V = Y \otimes \mathbb{R}$, tout élément de X définit une forme linéaire sur ce $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Pour $i \in I$, la formule $r_i(v) = v - \alpha_i(v)\alpha_i^\vee$ définit une involution de V, plus précisément une réflexion d'hyperplan $\mathrm{Ker}(\alpha_i)$.

Le groupe de Weyl W^v est le sous-groupe de $GL(V)$ engendré par les r_i. On sait que c'est un groupe de Coxeter ; il stabilise le réseau Y de V et il agit aussi sur X.

On note Φ l'ensemble des *racines* (réelles) c'est à dire des formes linéaires sur V de la forme $\alpha = w(\alpha_i)$ avec $w \in W^v$ et $i \in I$. Si $\alpha \in \Phi$, alors $r_\alpha = w.r_i \cdot w^{-1}$ est bien déterminé par α, indépendamment du choix de w et de i tels que $\alpha = w(\alpha_i)$. Pour $v \in V$ on a $r_\alpha(v) = v - \alpha(v)\alpha^\vee$ pour un $\alpha^\vee \in Y$ avec $\alpha(\alpha^\vee) = 2$; ainsi r_α est une réflexion par rapport à l'hyperplan $M(\alpha) = \mathrm{Ker}(\alpha)$ que l'on appelle *mur* de α. Le *demi-appartement* (fermé) associé à α est $D(\alpha) = \{v \in V \mid \alpha(v) \geqslant 0\}$.

L'ensemble Φ est un système de racines (réelles) au sens de [MP95]. On n'aura pas besoin des racines imaginaires de [Kac90] ou [Bar96]. Ce système est réduit : si $\alpha \in \Phi$ alors $2\alpha \notin \Phi$.

Si $\Phi^+ = \Phi \cap (\sum_i \mathbb{N}\alpha_i)$ et $\Phi^- = -\Phi^+$, on a $\Phi = \Phi^+ \bigsqcup \Phi^-$. Une partie Ψ de Φ est dite *close* si : $\alpha, \beta \in \Psi, \alpha + \beta \in \Phi \Rightarrow \alpha + \beta \in \Psi$. La partie Ψ est dite *prénilpotente* s'il existe $w, w' \in W^v$ tels que $w\Psi \subset \Phi^+$ et $w'\Psi \subset \Phi^-$, alors Ψ est finie et contenue dans la partie $w^{-1}(\Phi^+) \cap (w')^{-1}(\Phi^-)$ qui est *nilpotente* (i.e. prénilpotente et close).

On note $Q^\vee$ (respectivement $P^\vee$) le *'réseau' des coracines* (respectivement *'réseau' des copoids*), c'est à dire le sous-groupe de Y engendré par les $\alpha_i^\vee$ (respectivement $P^\vee = \{y \in Y \otimes \mathbb{Q} \mid \alpha_i(y) \in \mathbb{Z}\ \forall i\}$) ; on a $Q^\vee \subset Y \subset P^\vee$. En fait $Q^\vee$ (respectivement $P^\vee$) n'est un réseau de V que si les $\alpha_i^\vee$ engendrent V (respectivement $|I| = n = \dim(V)$).

1.3 Le cône de Tits

Voir [Rém02, §§ 5.1 et 5.2] ou [Bar96, § 4.4]. La *chambre fondamentale* (positive) $C^v = \{v \in V \mid \alpha_i(v) > 0\ \forall i \in I\}$ est un cône convexe ouvert non vide. Son adhérence est réunion disjointe des *facettes* $F^v(J) = \{v \in V \mid \alpha_i(v) = 0\ \forall i \in J; \alpha_i(v) > 0\ \forall i \notin J\}$ pour $J \subset I$; on a $C^v = F^v(\emptyset)$. Ces facettes sont dites vectorielles car ce sont des cônes convexes de sommet 0. On dit que la facette $F^v(J)$ ou que J est *sphérique* (ou *de type fini*) si la matrice $A(J) = (a_{i,j})_{i,j \in J}$ est de Cartan (au sens classique), c'est à dire si $W(J) = \langle r_i \mid i \in J\rangle$ est fini ; c'est le cas de la chambre C^v ou des *cloisons* $F^v(\{i\})$, $\forall i \in I$.

Le *cône de Tits* (ouvert) est la réunion disjointe $\mathbb{A}^v$ des *facettes sphériques* (positives) $w.F^v(J)$ pour w dans W^v et J sphérique. C'est un cône convexe ouvert stable par W^v. L'action de W^v sur les chambres est simplement transitive. Le fixateur ou le stabilisateur de $F^v(J)$ est $W(J)$. Pour x dans $\mathbb{A}^v$, on note $F^v(x)$ la facette qui le contient.

1.4 Le groupe de Kac–Moody

Le groupe de Kac–Moody (déployé) $\mathcal{G}$ associé au système générateur de racines a été défini par Tits [Tit87], voir [Rém02, ch. 8]. On va ici considérer uniquement le groupe $G = \mathcal{G}(K)$ des points de $\mathcal{G}$ sur un corps K (quelconque). Il est engendré par des sous-groupes :

- le tore $T = \mathcal{T}(K)$ où $\mathcal{T} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X])$, donc T est isomorphe au groupe $(K^*)^n$ et le groupe des caractères (respectivement cocaractères) de $\mathcal{T}$ est X (respectivement Y) ;
- des sous-groupes radiciels U_α pour $\alpha \in \Phi$, chacun isomorphe au groupe additif $(K, +)$ par un isomorphisme (de groupes algébriques) x_α.

Proposition 1.5 [Rém02, proposition 8.4.1]. *Le triplet* $(G, (U_\alpha)_{\alpha\in\Phi}, T)$ *est une donnée radicielle de type* Φ *au sens où il vérifie les axiomes suivants :*

(DR1) *Le groupe* T *est un sous-groupe de* G *et, pour tout* $\alpha \in \Phi$, U_α *est un sous-groupe de* G *non réduit à l'élément neutre et normalisé par* T.

(DR2) *Pour toute paire prénilpotente de racines* $\{\alpha, \beta\}$, *le groupe des commutateurs* $[U_\alpha, U_\beta]$ *est contenu dans le groupe engendré par les* U_γ *pour* $\gamma = p\alpha + q\beta \in \Phi$ *avec* p *et* q *entiers strictement positifs.*

(DR4) *Pour tout* $\alpha \in \Phi$ *et tout* $u \in U_\alpha$, $u \neq 1$, *il existe* u' *et* $u'' \in U_{-\alpha}$ *tels que* $m(u) := u'uu''$ *conjugue* U_β *en* $U_{r_\alpha(\beta)}$ *pour tout* $\beta \in \Phi$. *De plus, pour tous* $u, v \in U_\alpha \setminus \{1\}$ *on impose* $m(u)T = m(v)T$.

(DR5) *Si* U^+ *(respectivement* U^-*) désigne le sous-groupe de* G *engendré par les* U_α *pour* $\alpha \in \Phi^+$ *(respectivement* $\alpha \in \Phi^-$*), on a :* $ZU^+ \cap U^- = \{1\}$.
De plus cette donnée radicielle est génératrice *au sens où :*

(DRG) *Le groupe* G *est engendré par les groupes* T *et* U_α *pour* $\alpha \in \Phi$.

Remarques. (1) Pour un système de racines (réelles) Φ plus général (i.e. non réduit, voir e.g. [Rém02] ou [Bar96]) il faut ajouter l'axiome suivant à cette définition de donnée radicielle :

(DR3) Si α et 2α appartiennent à Φ, on a : $U_{2\alpha} \subset U_\alpha$ et $U_{2\alpha} \neq U_\alpha$.

Si Φ est fini (et si on pose $M_\alpha = m(u)T$ dans (DR4)), on retrouve la définition 6.1.1 de [BT72] à des variantes près discutées dans [BT72, § 6.1.2].

(2) Ces axiomes sont exactement équivalents à ceux des données radicielles jumelées entières de [Rém02, définition 6.2.5]. En effet en [Rém02, théorème 3.5.4] Rémy, utilisant une remarque d'Abramenko, montre que (DR5) est une conséquence des autres axiomes et de :

(DR5′) Pour tout $i \in I$, on a : $U_{\alpha_i} \not\subset U_-$ et $U_{-\alpha_i} \not\subset U_+$.

et ce dernier axiome est une conséquence immédiate de (DR5).

(3) On note N le groupe engendré par T et les $m(u)$ pour tout $\alpha \in \Phi$ et tout $u \in U_\alpha$.

Lemme. *Il existe un homomorphisme* ν^v *de* N *sur* W^v *tel que* $\nu^v(m(u)) = r_i$ *pour* $u \in U_{\pm\alpha_i}$ *et* $\mathrm{Ker}(\nu^v) = T$, *en particulier* N *normalise* T. *Si* K *est infini,* N *est le normalisateur de* T *dans* G *et tous les sous-tores maximaux déployés de* G *sont conjugués à* T.

Démonstration. Voir [Rém02, §§ 1.5.3, 1.4.3, 8.4.1 et 10.4.2]. □

1.6 Formules de commutation

Dans le cas des groupes de Kac–Moody l'axiome (DR2) est bien précisé par Morita [Mor87]. Tous les résultats ci-dessous sont dans [Rém02, §§ 8.3.1, 9.2 et 9.3.3].

Si $\{\alpha, \beta\}$ est une paire prénilpotente de racines (donc $\alpha \neq -\beta$), on note $]\alpha, \beta[$ l'ensemble des racines $\gamma = p\alpha + q\beta \in \Phi$ avec p et q entiers strictement positifs et $[\alpha, \beta] =]\alpha, \beta[\cup \{\alpha, \beta\}$; on munit cet ensemble d'un ordre total quelconque.

Alors l'application produit : $\prod_{\gamma\in[\alpha,\beta]} U_\gamma \to G$ est une bijection sur le groupe $U_{[\alpha,\beta]}$ engendré par ces U_γ ; c'est en fait un isomorphisme de variétés algébriques.

Pour $u, v \in K$, on a : $[x_\alpha(u), x_\beta(v)] = \prod x_\gamma(C_{p,q}u^p v^q)$ où le produit porte sur les $\gamma = p\alpha + q\beta \in]\alpha, \beta[$ (dans l'ordre fixé) et les $C_{p,q}$ sont des nombres entiers.

On précise aussi (DR1) : si $t \in T$ et $u \in K$ on a : $tx_\alpha(u)t^{-1} = x_\alpha(\alpha(t)u)$.

Enfin pour (DR4) des calculs dans SL_2 (voir [Rém02, § 8.3.3]) donnent pour $\alpha \in \Phi$ et $u, v \in K^*$:

$$\begin{aligned} m(x_\alpha(u)) &= m(x_{-\alpha}(u^{-1})) = x_{-\alpha}(u^{-1})x_\alpha(u)x_{-\alpha}(u^{-1}) \\ &= \alpha\check{}(u)m(x_\alpha(1)) = m(x_\alpha(1))\alpha\check{}(u^{-1}) \\ m(x_\alpha(u))x_\alpha(v)m(x_\alpha(u))^{-1} &= x_{-\alpha}(u^{-2}v) \\ m(x_\alpha(u))^2 &= \alpha\check{}(-1). \end{aligned}$$

L'action par conjugaison de N sur T est donnée par ν^v où W agit sur T via son action sur X ou Y [Rém02, § 8.3.3].

1.7 Sous-groupes paraboliques

Voir [Rém02, § 6.2]. A toute facette F^v de $\mathbb{A}^v$, on associe des sous-ensembles de Φ :

$$\begin{aligned} \Phi(F^v) &= \{\alpha \in \Phi \mid \alpha(F^v) \geqslant 0\}, \\ \Phi^m(F^v) &= \{\alpha \in \Phi \mid \alpha(F^v) = 0\} = \{\alpha \in \Phi \mid F^v \subset M_\alpha\} \text{ et} \\ \Phi^u(F^v) &= \Phi(F^v) \setminus \Phi^m(F^v). \end{aligned}$$

On en déduit des sous-groupes de G :

- le sous-groupe parabolique $P(F^v)$ est engendré par T et les U_α pour $\alpha \in \Phi(F^v)$,
- son facteur de Levi $M(F^v)$ est engendré par T et les U_α pour $\alpha \in \Phi^m(F^v)$,
- son radical unipotent $U(F^v)$ est le plus petit sous-groupe normal de $P(F^v)$ contenant les U_α pour $\alpha \in \Phi^u(F^v)$.

Et on a la décomposition en produit semi-direct : $P(F^v) = M(F^v) \ltimes U(F^v)$.

Le triplet $(M(F^v), (U_\alpha)_{\alpha\in\Phi^m(F^v)}, T)$ est une donnée radicielle. Plus précisément, on dit que le sous-groupe $P(F^v)$ ou le système parabolique de racines $\Phi(F^v)$ est *sphérique* si la facette F^v l'est, et dans ce cas $\Phi^m(F^v)$ est un système de racines fini et $M(F^v)$ est (le groupe des points sur K d') un groupe réductif [Rém02, § 12.5.2] ; si $F^v = F^v(J)$, c'est le groupe réductif associé au système générateur de racines $(A(J), X, Y, (\alpha_i)_{i\in J}, (\alpha\check{_i})_{i\in J})$, c'est à dire à la donnée radicielle $(X, Y, \Phi^m, \Phi^{m\check{}})$ au sens de Demazure [SGA3, tome 3].

Le groupe $N \cap P(F^v)$ est le fixateur $N(F^v)$ de F^v pour l'action de N [Rém02, théorème 6.2.2].

1.8 L'immeuble de G

1.8.1 L'immeuble $\mathcal{I}^v$ de G est construit par Rémy [Rém02, § 5.3.1] sous le nom de réalisation conique ; plus précisément on ne garde ici que les facettes sphériques de cette réalisation. Cette construction n'utilise que la structure de donnée radicielle de G, d'où découlent toutes les autres structures introduites par Rémy [Rém02, § 1.6].

Cet immeuble est un espace topologique réunion d'appartements fermés dans $\mathcal{I}^v$ et permutés transitivement par G. L'un de ces appartements A^v s'identifie avec sa topologie, ses facettes et son action de N (i.e. de W^v) à $\mathbb{A}^v$. Le fixateur (ou le stabilisateur) dans G d'une facette (sphérique) $F^v \in \mathbb{A}^v$ est $P(F^v)$; ce résultat s'étend aux facettes de $\mathcal{I}^v$ en posant $P(gF^v) = gP(F^v)g^{-1}$.

1.8.2 $\mathcal{I}^v$, muni de ses facettes et de ses appartements est un immeuble discret épais au sens classique, voir par exemple [Bro89, IV, § 1]. Il vérifie même les relations d'incidence des systèmes d'appartements du théorème de l'introduction (§ 1.10).

1.8.3 Si $x \in \mathbb{A}^v$ et $g \in G$, on a : $gx \in \mathbb{A}^v \Leftrightarrow g \in NP(F^v(x))$.
En effet si $gx \in \mathbb{A}^v$, $gF^v(x)$ est une facette de $\mathbb{A}^v$ de même type que $F^v(x)$, il existe donc $n \in N$ tel que $gF^v(x) = nF^v(x)$, ainsi $n^{-1}g \in P(F^v(x))$ puisqu'il stabilise $F^v(x)$. La réciproque est claire.

1.8.4 Il est maintenant clair que l'on peut aussi définir $\mathcal{I}^v$ par le procédé suivant, analogue à celui de [BT72, § 7.4] (et que l'on réutilisera pour les définitions 3.1) :

L'immeuble $\mathcal{I}^v$ de G est défini comme le quotient de $G \times \mathbb{A}^v$ par la relation d'équivalence :

$$(g,x) \sim (h,y) \Leftrightarrow \exists n \in N \text{ tel que } y = \nu^v(n)x \text{ et } g^{-1}hn \in P(F^v(x)).$$

La topologie sur $\mathcal{I}^v$ est la topologie quotient si l'on met sur G la topologie discrète.

L'appartement $\mathbb{A}^v$ s'identifie à son image A^v par l'application $x \mapsto cl(1,x)$. L'action à gauche de G sur $G \times \mathbb{A}^v$ passe au quotient en une action continue sur $\mathcal{I}^v$. Les appartements (respectivement facettes) de $\mathcal{I}^v$ sont les transformés par G de A^v (respectivement d'une facette de A^v).

1.8.5 Si F^v est une facette de $\mathbb{A}^v$, alors $P(F^v)$ est transitif sur les appartements de $\mathcal{I}^v$ contenant F^v (voir [Rém02, lemme 6.1.2]).

1.8.6 Si C^v est la chambre fondamentale de $\mathbb{A}^v$, le groupe $B = TU^+ = P(C^v)$ est dit *de Borel* et (G,B,N) est un système de Tits [Rém02, § 1.6]. On a en particulier la décomposition de Bruhat : $G = B.N.B$, dont on sait que (modulo § 1.8.5 ci-dessus) elle est équivalente au premier axiome d'incidence des systèmes d'appartements. Les facettes de $\mathcal{I}^v$ correspondent par $F^v \mapsto P(F^v)$ aux sous-groupes paraboliques de type fini (i.e. sphériques) de ce système de Tits.

Lemme 1.9. *Le stabilisateur de $\mathbb{A}^v$ dans G est N et son fixateur est T.*

Remarque. Dans la suite de ce paragraphe on fait souvent référence à [Rém02] par commodité, mais les résultats utilisés sont essentiellement issus de [KP85].

Démonstration. Il suffit de montrer qu'un élément $g \in G$ stabilisant $\mathbb{A}^v$ est dans N. D'après § 1.8.3 $g \in \bigcap_{w \in W^v} N \cdot P(wC^v)$. Ainsi $\forall w \in W^v$, $g \in N.U^+ \cap N.wU^+w^{-1}$, il existe donc $n \in N$ tel que $g \in n(N.U^+ \cap wU^+w^{-1})$. Mais [Rém02, condition 1.2.3 ivc] $U^+ = (U^+ \cap w^{-1}U^-w).(U^+ \cap w^{-1}U^+w)$, d'où $wU^+w^{-1} = (wU^+w^{-1} \cap U^-).(wU^+w^{-1} \cap U^+)$; par unicité dans la décomposition de Birkhoff [Rém02, proposition 1.2.4], on a donc $N.U^+ \cap wU^+w^{-1} = U^+ \cap wU^+w^{-1}$. Ainsi $g \in N.(U^+ \cap wU^+w^{-1})$. Mais, par unicité dans la décomposition de Bruhat ou Birkhoff, l'élément $n \in N$ tel que $g \in nU^+$ est bien déterminé, donc $g \in N.(\bigcap_{w \in W^v} P(wC^v)) = N$, d'après [Rém02, condition 1.2.3 v]. □

1.10 Parties closes

L'*enclos* d'une partie Ω de $\mathbb{A}^v$ est l'intersection $cl(\Omega)$ des demi-appartements $D(\alpha)$ contenant Ω. La partie Ω est dite *close* si elle est égale à son enclos ; elle est alors convexe et fermée.

Par transport de structure on peut définir ces notions dans tout appartement.

Proposition 1.10.1. *Si A et A' sont deux appartements, alors $A \cap A'$ est clos dans A et A', de plus il existe un isomorphisme de A sur A' (réalisé par un élément $g \in G$) qui fixe $A \cap A'$.*

Remarques. (1) On peut aussi présenter autrement cette amélioration du second axiome d'incidence des systèmes d'appartements : si on a $A' = g'A$ pour un $g' \in G$, il résulte du lemme 1.9 et de cette proposition qu'il existe $n \in N$ tel que $g'^{-1}x = nx$, $\forall x \in A \cap A'$.

(2) La définition et les résultats ci-dessus sont une généralisation directe de [BT72, définition 2.4.6, proposition 2.5.8 et corollaire 2.5.9].

Démonstration. (1) Supposons d'abord que $A \cap A'$ contient une chambre C. Pour toute facette $F \subset A \cap A'$, toute galerie Γ tendue de C à F est entièrement dans $A \cap A'$ (voir [Tit74, corollary 3.4]). En particulier il existe une chambre C' telle que $F \subset \overline{C'} \subset A \cap A'$: l'intersection $A \cap A'$ est réunion des chambres fermées qu'elle contient. Il existe $g \in P(C)$ qui vérifie $A' = gA$ (cf. § 1.8.5) ; alors $g\Gamma$ est, dans A', une galerie tendue de C à gF' et de même type que Γ, donc identique à Γ : on a $gF' = F'$ et $g \in P(F')$.

Une galerie non bégayante d'une chambre C_1 à une chambre C_2 d'un appartement A est tendue si et seulement si elle traverse une et une seule fois chaque mur séparant C_1 et C_2 [Bro89, theorem 2.1]. Donc l'enclos de $C_1 \cup C_2$ est la réunion des galeries tendues de C_1 à C_2 et l'enclos d'une réunion Ω de chambres s'obtient en rajoutant à Ω toutes les chambres (fermées) des galeries tendues d'une chambre de Ω à une autre et en itérant ce procédé.

D'après les deux alinéas précédents $A \cap A'$ est clos et tout $g \in P(C)$ qui envoie A sur A' fixe $A \cap A'$.

(2) Pour le cas général, soient F_1 et F_2 deux facettes de $A \cap A'$. Choisissons une chambre C_1 de A contenant F_1 et une chambre C_2 de A' contenant F_2. Il existe un appartement A'' contenant C_1 et C_2. Alors, d'après (1), $A \cap A''$ (respectivement $A' \cap A''$) contient l'enclos de C_1 et F_2 (respectivement C_2 et F_1) et donc l'enclos de F_1 et F_2 qui est le même dans A ou A'' (respectivement A' ou A''). Ainsi $A \cap A'$ contient l'enclos de F_1 et F_2 qui est le même dans A ou A'. Comme pour les chambres, l'enclos d'un ensemble de facettes s'obtient en itérant la prise d'enclos de deux facettes, donc $A \cap A'$ est clos.

Dans les conditions du début de (2) et d'après (1), il existe $g, g' \in A$ tels que $A'' = gA, A' = g'A'', g$ fixe $A \cap A''$ et g' fixe $A' \cap A''$. Ainsi $g'' = g'g \in G, A' = g''A$ et g'' fixe $cl(F_1, F_2)$, i.e. $g'' \in P(F_1) \cap P(F_2)$. Si $g_1'', g_2'' \in P(F_1)$ envoient A sur A', on a $(g_2'')^{-1}g_1'' \in N \cap P(F_1) = N(F_1)$ (en supposant $A = \mathbb{A}^v$ et d'après le lemme 1.9) ; supposons F_1 choisi de dimension maximale dans $A \cap A'$, alors, par convexité de $A \cap A'$, $N(F_1)$ agit trivialement sur $A \cap A'$ et g_1'' comme g_2'' ont la même restriction à $A \cap A'$. Ainsi un g'' choisi comme ci-dessus (avec F_1 de dimension maximale) fixe F_2 pour tout $F_2 \in A \cap A'$, i.e. g'' fixe $A \cap A'$. □

Corollaire 1.11. *Soit Ω un ensemble de facettes de $A = \mathbb{A}^v$, alors :*

(1) $\bigcap_{\omega\in\Omega} P(F_\omega) \subset P(F)$ *pour toute facette F dans l'enclos de Ω ;*

(2) $\bigcap_{\omega\in\Omega} N \cdot P(F_\omega) \subset N.(\bigcap_{\omega\in\Omega} P(F_\omega))$.

Remarque. Réciproquement, on verra au § 3 que les relations ci-dessus permettent de prouver le lemme 1.9 et la proposition 1.10.1 (démonstrations des corollaires 3.11 et 3.13).

Démonstration. Soit $g \in \bigcap_{\omega\in\Omega} N \cdot P(F_\omega)$, alors $g\Omega \subset A \cap gA$ et, d'après la proposition, il existe $g' \in G$ tel que $g'gA = A$ et que $g' \in P(F)$ pour toute facette $F \in A \cap gA$, en particulier pour F dans $cl(g\Omega)$. Alors $g'g \in N$ (lemme 1.9) et donc $g = g'g.g^{-1}g'^{-1}g$ avec $g'g \in N$ et $g^{-1}g'^{-1}g \in P(F'), \forall F' \in cl(\Omega)$, i.e. $g \in N.(\bigcap_{\omega\in\Omega} P(F_\omega))$, d'où (2).

Si de plus $g \in \bigcap_{\omega\in\Omega} P(F_\omega)$, alors $g \in N(\Omega).(\bigcap_{\omega\in cl(\Omega)} P(F_\omega))$ où $N(\Omega) = \{n \in N \mid n \text{ fixe } \Omega\}$ fixe point par point $cl(\Omega)$, d'où (1). □

2. Valuation et appartement

Pour un groupe de Kac–Moody sur un corps local, on va élaborer ici les matéraux essentiels à la construction de l'immeuble : le modèle $\mathbb{A}$ d'appartement avec son action de N et les sous-groupes parahoriques.

2.1

On suppose dorénavant le corps K muni d'une valuation non triviale ω, et on note Λ le groupe abélien totalement ordonné $\Lambda = \omega(K^*) \neq \{0\}$. Pour simplifier, à partir de § 2.3, on supposera ω de hauteur 1, c'est à dire Λ contenu dans $\mathbb{R}$.

Par convention $\omega(0) = +\infty > \lambda, \forall \lambda \in \Lambda$ et on rappelle que :

$$\forall x, y \in K^*, \quad \omega(xy) = \omega(x) + \omega(y) \quad et \quad \forall x, y \in K, \quad \omega(x+y) \geqslant \inf(\omega(x), \omega(y)).$$

Pour $\alpha \in \Phi, u \in U_\alpha$, on pose : $\varphi_\alpha(u) = \omega(t)$ si $u = x_\alpha(t)$ avec $t \in K$.

Proposition 2.2. *La famille $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$ est une* valuation *de la donnée radicielle $(G, (U_\alpha)_{\alpha\in\Phi}, T)$ au sens où elle vérifie les axiomes suivants :*

(V0) *Pour tout $\alpha \in \Phi$, φ_α est une application de U_α dans $\Lambda \cup \{+\infty\}$ où Λ est un groupe abélien totalement ordonné et l'image de φ_α a au moins trois éléments.*

(V1) *Pour tout $\alpha \in \Phi$ et tout $\lambda \in \Lambda \cup \{+\infty\}$, l'ensemble $U_{\alpha,\lambda} = \varphi_\alpha^{-1}([\lambda, +\infty])$ est un sous-groupe de U_α et on a $U_{\alpha,\infty} = \{1\}$.*

(V2) *(a) Pour tout $\alpha \in \Phi$ et tout $u \in U_\alpha \setminus \{1\}$, la fonction $v \mapsto \varphi_{-\alpha}(v) - \varphi_\alpha(m(u)vm(u)^{-1})$ est constante sur $U_{-\alpha} \setminus \{1\}$.*

(V2) *(b) Pour tout $\alpha \in \Phi$ et tout $t \in T$, la fonction $v \mapsto \varphi_\alpha(v) - \varphi_\alpha(tvt^{-1})$ est constante sur $U_\alpha \setminus \{1\}$.*

(V3) *Pour toute paire prénilpotente de racines $\{\alpha, \beta\}$ et tous $\lambda, \mu \in \Lambda$ le groupe des commutateurs $[U_{\alpha,\lambda}, U_{\beta,\mu}]$ est contenu dans le groupe engendré par les $U_{p\alpha+q\beta,p\lambda+q\mu}$ pour $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $p\alpha + q\beta \in \Phi$.*

(V5) *Pour tout $\alpha \in \Phi$, si u, u' et u'' sont comme dans l'axiome (DR3), on a $\varphi_{-\alpha}(u') = \varphi_{-\alpha}(u'') = -\varphi_\alpha(u)$.*

Démonstration. Comme x_α est un isomorphisme de groupes (V0) et (V1) sont évidents. Les 4 relations de commutation précisées successivement en § 1.6 prouvent (V3), (V2b), (V5) et (V2a). ☐

Remarques. (1) Pour un système de racines (réelles) Φ plus général (non réduit) il faut ajouter l'axiome suivant à cette définition de valuation de donnée radicielle :

(V4) Si α et 2α appartiennent à Φ, alors $\varphi_{2\alpha}$ est la restriction de $2\varphi_\alpha$ à $U_{2\alpha}$.

Si Φ est fini, on retrouve exactement la définition 6.2.1 de [BT72], voir [BT72, § 6.2.2].

(2) On ne fera pas ici d'étude systématique à partir de cette définition de valuation de donnée radicielle.

2.3 L'appartement $\mathbb{A}$

On munit l'anneau $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de la topologie associée à l'ordre lexicographique, c'est à dire la topologie produit de $\mathbb{R}$ discret et $\mathbb{R}$ usuel. Alors $Y_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = Y \otimes (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ est un module topologique sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, isomorphe et homéomorphe à $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})^n$ pour tout choix d'une base de Y. De même toute forme linéaire $\varepsilon \in X$ définit une application linéaire continue ε de $Y_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Si $Y_\mathbb{R} = Y \otimes \mathbb{R}$, il est clair que $Y_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ est isomorphe à $V \times Y_\mathbb{R}$ par l'application $y \otimes (q, q') \mapsto (y \otimes q, y \otimes q')$; c'est un homéomorphisme si on munit V de la topologie discrète et $Y_\mathbb{R}$ de sa topologie d'espace vectoriel réel. On identifiera ainsi $Y_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ et $V \times Y_\mathbb{R}$.

Notation. On note $\mathbb{A} = \mathbb{A}^v \times Y_\mathbb{R}$, c'est un ouvert de $Y_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$, convexe pour sa structure d'espace vectoriel réel. On va le munir de structures additionnelles.

Le groupe W^v agit $\mathbb{Z}$-linéairement sur Y, il agit donc continûment sur $Y_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ et $\mathbb{A}$ par $w(v, y \otimes q) = (w(v), w(y) \otimes q)$. On a aussi une action continue de $Y_\mathbb{R}$ par translation sur le second facteur. On obtient finalement une action continue sur $Y_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ et $\mathbb{A}$ du produit semi-direct $W_\mathbb{R} = W^v \ltimes Y_\mathbb{R}$.

https://doi.org/10.1112/S0010437X05001806 Published online by Cambridge University Press

Commentaires. (1) On a en fait $Y_{\mathbb{R}} = V$, mais ceci est spécial au cas, que l'on a choisi, d'une valuation de hauteur 1 ; en général il faut utiliser par exemple $Y_{\Lambda\mathbb{Q}} = Y \otimes \Lambda \otimes \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \times (\Lambda \otimes \mathbb{Q})$ à la place de $Y_{\mathbb{R}}$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(2) La topologie de $Y_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ est associée à une $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$-métrique au sens de [Ben90, Ben94] ; cette métrique est invariante par $Y_{\mathbb{R}}$, mais il ne semble pas que l'on puisse la rendre invariante par W^v (et donc par $W_{\mathbb{R}}$).

(3) On pourrait ne faire agir $W_{\mathbb{R}}$ que sur $Y_{\mathbb{R}}$ (second facteur de $\mathbb{A}$) et prendre cet $Y_{\mathbb{R}}$ comme appartement. Mais toute définition de facette dans cet appartement semble plus compliquée, voir cependant § 4.1, remarque (2).

2.4 Murs et demi-appartements

Pour $\alpha \in \Phi$ et $\lambda \in \Lambda$, on note $M(\alpha, \lambda) = M(\alpha) \times \{y \in Y_{\mathbb{R}} \mid \alpha(y) + \lambda = 0\}$; c'est le *mur* associé à (α, λ), il est fermé dans $V \times Y_{\mathbb{R}}$. On a $M(\alpha, \lambda) = M(-\alpha, -\lambda)$.

Le *demi-appartement* associé à (α, λ) est :

$$D(\alpha, \lambda) = ((D(\alpha) \setminus M(\alpha)) \times Y_{\mathbb{R}}) \cup (M(\alpha) \times \{y \in Y_{\mathbb{R}} \mid \alpha(y) + \lambda \geqslant 0\})$$

c'est à dire l'ensemble des $(v, y) \in V \times Y_{\mathbb{R}}$ tels que $\alpha(v, y) = (\alpha(v), \alpha(y)) \geqslant (0, -\lambda)$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ordonné lexicographiquement. Il est fermé dans $V \times Y_{\mathbb{R}}$.

On note $D^{\circ}(\alpha, \lambda) = D(\alpha, \lambda) \setminus M(\alpha, \lambda) = (V \times Y_{\mathbb{R}}) \setminus D(-\alpha, -\lambda)$ le demi-appartement ouvert.

Commentaire. $M(\alpha, \lambda)$ est un sous-espace affine de codimension 2 de $V \times Y_{\mathbb{R}}$ pour sa structure d'espace vectoriel réel. Mais il faut voir $M(\alpha, \lambda)$ comme un hyperplan pour la structure de module sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Définition. On appelle *mur* (respectivement *demi-appartement*) de $\mathbb{A}$ l'intersection avec $\mathbb{A}$ d'un ensemble $M(\alpha, \lambda)$ (respectivement $D(\alpha, \lambda)$) pour $\alpha \in \Phi$ et $\lambda \in \Lambda$. Cette intersection détermine entièrement $M(\alpha, \lambda)$ (respectivement $D(\alpha, \lambda)$) et on la notera souvent avec le même nom.

2.5 Facettes

Les facettes de $\mathbb{A}$ sont associées au système de murs et demi-appartements ci-dessus. Il faut cependant faire attention pour la définition si Λ n'est pas discret. Alors, comme dans [BT72], les facettes sont des filtres de parties de $\mathbb{A}$.

Définition. Une facette de $\mathbb{A}$ est le produit $F = F^v \times \mathcal{F}$ d'une facette (sphérique positive) F^v de V et d'un filtre $\mathcal{F}$ de parties de $Y_{\mathbb{R}}$ qui est une facette de l'appartement de Bruhat–Tits (au sens étendu) associé au groupe réductif $M(F^v)$ et au tore T.

Ainsi ce filtre $\mathcal{F}$ est associé aux murs $M(\alpha, \lambda)$ pour lesquels $\alpha(F^v) = 0$; on va le décrire plus précisément en utilisant la notion de majeur [Bou67, VI, § 3.5] :

Un majeur d'un ensemble totalement ordonné est un sous-ensemble qui contient tout élément plus grand que l'un de ses éléments. Un majeur de $\mathbb{R}$ est donc égal à $[\lambda, +\infty[$, $]\lambda, +\infty[$ (avec $\lambda \in \mathbb{R}$), $\mathbb{R}$ ou $\emptyset$ qui sont notés respectivement λ, λ^+, $-\infty$ et $+\infty$. L'ensemble $\widetilde{\mathbb{R}}$ des majeurs de $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{R}$ et est totalement ordonné. L'ensemble des majeurs de Λ est $\widetilde{\Lambda} = \{\mu \cap \Lambda / \mu \in \widetilde{\mathbb{R}}\}$ et on écrit $\mu \geqslant \mu'$ si $\mu, \mu' \in \widetilde{\Lambda}$ et $\mu' \supset \mu$; ainsi Λ est un sous-ensemble ordonné de $\widetilde{\Lambda}$.

Pour définir $\mathcal{F}$, on considère le système de racines fini $\Psi = \Phi^m(F^v)$. Pour chaque $\alpha \in \Psi$, on choisit un élément $\mu_\alpha \in \widetilde{\Lambda}$, $\mu_\alpha \neq \pm\infty$, et le filtre $\mathcal{F}$ est associé à ces μ_α. Une base de ce filtre est formée des parties de $Y_{\mathbb{R}}$ de la forme :

$$F((\lambda_\alpha)_{\alpha\in\Psi}) = \{y \in Y_{\mathbb{R}} \mid \alpha(y) + \lambda_\alpha \geqslant 0, \forall \alpha \in \Psi\} \quad \text{pour des } \lambda_\alpha \in \Lambda, \lambda_\alpha \geqslant \mu_\alpha.$$

Des conditions de compatibilité sont imposées aux μ_α :

(C1) Aucun des ensembles $F((\lambda_\alpha)_{\alpha\in\Psi})$ ci-dessus définis n'est vide.

(C2) Si on pose $-\mu_\alpha = \{-\lambda \mid \lambda \in \mu_\alpha\}$, alors $\mid \mu_{-\alpha} \cap -\mu_\alpha \mid \leqslant 1$ et $\mu_{-\alpha} \cup -\mu_\alpha = \Lambda$ en particulier les coupures de Λ associées à $\mu_{-\alpha}$ et $-\mu_\alpha$ diffèrent au plus par un élément.

Ces conditions de compatibilité s'exprimeraient sans doute mieux avec une notion proche de (mais plus stricte que) celle des fonctions concaves de [BT72].

2.6 Remarques et définitions

2.6.1 Si $F = F^v \times \mathcal{F}$ est une facette, alors $\mathcal{F}$ est stable par l'espace vectoriel $F^v - F^v$ engendré par F^v. Cette facette contient un point $(v, y) \in \mathbb{A}$ (avec y unique modulo $F^v - F^v$ si Λ est dense), au sens où $v \in F^v$ et tout élément du filtre $\mathcal{F}$ contient y.

2.6.2 La plus petite facette contenant un point $x = (v, y) \in \mathbb{A}$ est $F_x = F^v(v) \times \mathcal{F}_x$ où $F^v(v)$ est la plus petite facette de $\mathbb{A}^v$ contenant v et $\mathcal{F}_x$ est défini par $\mu_\alpha = \Lambda \cap [-\alpha(y), +\infty[$ pour tout $\alpha \in \Phi^m(F^v(v))$.

2.6.3 Pour $x = (v, y) \in \mathbb{A}$, on peut aussi définir autrement les facettes $F = F^v \times \mathcal{F}$ contenant x, on a $F = F^v(v)$ et $\mathcal{F}$ est l'un des $\mathcal{F}(y + F^v_y)$ définis comme suit :

On note $\Psi = \Phi^m(F^v(v))$, alors $\Psi_y = \{\alpha \in \Psi \mid \alpha(y) \in \Lambda\}$ est un sous-système de racines fini de Ψ donc de Φ, on lui associe des facettes vectorielles de V. Si F^v_y est l'une d'elles, on lui associe le filtre $\mathcal{F}(y + F^v_y)$ dont une base est constituée des ensembles ci-dessous :

$$\left(\bigcap_{\alpha_1} \alpha_1^{-1}([\lambda^1_\alpha, \lambda^2_\alpha])\right) \cap \left(\bigcap_{\alpha_2} \alpha_2^{-1}(\alpha_2(y))\right) \cap \left(\bigcap_{\alpha_3} \alpha_3^{-1}([\alpha^3(y), \lambda_{\alpha_3}])\right)$$

où les α_1 sont les $\alpha \in \Psi \setminus \Psi_y$ et $\lambda^1_\alpha, \lambda^2_\alpha \in \Lambda$ avec $\lambda^1_\alpha \leqslant \alpha(y) \leqslant \lambda^2_\alpha$, les α_2 sont les $\alpha \in \Psi_y$ tels que $\alpha(F^v_y) = 0$ et les α_3 sont les $\alpha \in \Psi_y$ tels que $\alpha(F^v_y) > 0$ et $\lambda_{\alpha_3} \in \Lambda, \lambda_{\alpha_3} > \alpha_3(y)$. Ainsi tout élément de $\mathcal{F}(y + F^v_y)$ contient l'intersection avec $y + \overline{F^v_y}$ d'un voisinage de y dans $Y_\mathbb{R}$.

2.6.4 On peut introduire des 'facettes à l'infini' en autorisant $(\mu_\alpha, \mu_{-\alpha}) = (+\infty, -\infty)$ pour certaines racines α dans la définition de § 2.5. La condition $\alpha(y) + \lambda_\alpha \geqslant 0$ disparaît alors pour ces racines α, puisque $\mu_\alpha = +\infty = \emptyset$. On obtient ainsi les germes de cheminée de [Rou77, Rou01]. On reviendra sur celles-ci en §§ 3.4 et 4.2.

2.6.5 On a ainsi 'éclaté' les facettes de $\mathbb{A}^v$, en remplaçant une facette F^v par l'*appartement affine* $F^v \times Y_\mathbb{R}$, produit de F^v avec tout un espace affine muni d'un ensemble d'hyperplans qui est l'appartement de Bruhat–Tits de $M(F^v)$ et T.

DÉFINITION 2.6.6. Une *chambre* (respectivement *cloison*) est une facette maximale (respectivement maximale hormis les chambres) dans l'appartement affine qui la contient.

Autrement dit la dimension d'une chambre (respectivement d'une cloison) est n (respectivement $n-1$) où n désigne le rang de Y, si l'on définit la dimension d'une facette $F = F^v \times \mathcal{F}$ comme la dimension minimale des éléments de $\mathcal{F}$: $\dim(F) = n -$ le rang du sous-$\mathbb{Z}$-module de X engendré par les $\alpha \in \Phi$ tels que $|\alpha(\mathcal{F})| = 1$ (au sens où $|\alpha(P)| = 1$ pour au moins un élément P de $\mathcal{F}$).

Deux chambres sont dites *mitoyennes* si elles contiennent une même cloison.

2.6.7 La topologie que l'on a définie sur $\mathbb{A}$ a certaines bonnes propriétés, mais n'est pas entièrement satisfaisante. C'est la trace sur $\mathbb{A}$ de la topologie sur un ensemble plus grand que $Y_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$

https://doi.org/10.1112/S0010437X05001806 Published online by Cambridge University Press

que l'on construit en remplaçant $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ par l'ensemble ordonné des majeurs de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (voir [Rou]). Ce nouvel espace a l'avantage de mieux faire apparaître les facettes à l'infini et de mieux se généraliser aux valuations non réelles.

2.7 Groupe de Weyl et appartement microaffine

La *réflexion* associée au mur $M(\alpha,\lambda)$ est $r_{\alpha,\lambda}:\mathbb{A}\to\mathbb{A}$ donnée par la formule :

$$r_{\alpha,\lambda}(v,y\otimes q)=(r_\alpha(v),r_\alpha(y)\otimes q-\lambda\alpha\check{}).$$

Le groupe engendré par les $r_{\alpha,\lambda}$ est $W=W^v\ltimes(Q\check{}\otimes\Lambda)\subset W_{\mathbb{R}}$.

Le sous-groupe de $W_{\mathbb{R}}$ formé des éléments qui stabilisent l'ensemble des murs est $W_P=W^v\ltimes(P\check{}\otimes\Lambda)$. On définit encore $W_Y=W^v\ltimes(Y\otimes\Lambda)$ et on a :

$$W\subset W_Y\subset W_P\subset W_{\mathbb{R}}=W^v\ltimes Y_{\mathbb{R}}.$$

On remarque que les translations agissant sur $\mathbb{A}$ (i.e. dans $Y_{\mathbb{R}}$) sont infinitésimales, d'où le qualificatif microaffine de la définition suivante.

Définition. L'ensemble $\mathbb{A}$ muni de ses facettes est *l'appartement microaffine* de G associé à T, son *groupe de Weyl* est le groupe W engendré par les réflexions par rapport aux murs (qui sont bien déterminés par les facettes).

2.8

Considérons le sous-groupe N_0 de N engendré par les $m(x_{\alpha_i}(\pm1))$ pour $i\in I$. D'après la proposition 1.5 il s'envoie surjectivement sur W^v par ν^v. On note $T_0=T\cap N_0=N_0\cap\mathrm{Ker}(\nu^v)$.

Lemme. *Le groupe T_0 est fini et distingué dans N.*

Démonstration. D'après § 1.6, T_0 contient le groupe fini T_0' engendré par les $\alpha\check{}(-1)$ pour $\alpha\in\Phi$ et ce groupe est distingué dans N. On va maintenant raisonner dans $W'=N_0/T_0'$. Pour $i\in I$, on note m_i la classe de $n_i=m(x_{\alpha_i}(1))$ dans W' et, d'après § 1.6, $m_i^2=1$. Si r_ir_j est d'ordre fini n, alors $\{i,j\}$ est sphérique et, d'après § 1.7, n_i et n_j sont dans un sous-groupe réductif de G. On sait donc, par [Tit66] ou [KP85, lemma 2.3] que n_i et n_j vérifient la relation de tresse et ainsi $(m_im_j)^n=1$ (on peut aussi utiliser [SGA3, XXIII]). Finalement W' est engendré par les m_i qui vérifient les relations de Coxeter, tandis que son quotient $W^v=N_0/T_0$ est le groupe de Coxeter. Donc $W'=W^v$ et $T_0=T_0'$ est fini et distingué dans N. □

2.9 Action de N sur $\mathbb{A}$

2.9.1 Le groupe T agit sur $\mathbb{A}$ par translation :

$$\text{si } t\in T,\quad \nu(t) \text{ est l'élément de } Y_{\mathbb{R}} \text{ tel que } \chi(\nu(t))=-\omega(\chi(t)),\quad \forall\chi\in X.$$

Cette action est W^v-équivariante.

Lemme 2.9.2. *Il existe une action ν de N sur $\mathbb{A}$ qui induit la précédente sur T et telle que pour $n\in N$, $\nu(n)$ est une application affine d'application linéaire associée $\nu^v(n)$.*

Démonstration. Comme ω est nulle sur tout sous-groupe fini de K^*, ν est également triviale sur le sous-groupe fini T_0 de T ; c'est à dire qu'elle provient d'une action de T/T_0. Or, d'après le lemme du § 2.8, on a une décomposition de N/T_0 en produit semi-direct : $N/T_0=(N_0/T_0)\ltimes(T/T_0)\simeq(W^v)\ltimes(T/T_0)$. On construit donc l'action ν de N sur $\mathbb{A}$ en décrétant que N_0/T_0 agit (linéairement) par ν^v. □

https://doi.org/10.1112/S0010437X05001806 Published online by Cambridge University Press

2.9.3 L'image de N dans $\mathrm{Aut}(\mathbb{A})$ est $\nu(N) = W_Y$ (cf. § 2.7). On note $H = \mathrm{Ker}(\nu) \subset T$.

2.9.4 Par construction $\nu(m(x_\alpha(1)))$ est la réflexion $r_\alpha = r_{\alpha,0}$ par rapport au mur $M(\alpha, 0)$. De plus $m(x_\alpha(u)) = \alpha\check{}(u)m(x_\alpha(1))$, donc l'image $\nu(m(x_\alpha(u)))$ est la réflexion $r_{\alpha,\omega(u)}$ par rapport au mur $M(\alpha, \omega(u))$, puisque par définition on a : $\alpha(\nu(\alpha\check{}(u))) = -\omega(\alpha(\alpha\check{}(u))) = -\omega(u^2) = -2\omega(u)$.

Pour un majeur $\mu \in \widetilde{\Lambda}$, on note $U_{\alpha,\mu}$ le sous-groupe de U_α formé des $x_\alpha(u), u \in K, \omega(u) \in \mu$.

2.10 Sous-groupes parahoriques

A chaque facette F de $\mathbb{A}$, on va associer un sous-groupe $P(F)$ de G.

Si $F = F^v \times \mathcal{F}$, on a déjà introduit le groupe parabolique $P(F^v) = M(F^v) \ltimes U(F^v)$ où $M(F^v)$ est le groupe réductif associé à $(X, Y, \Phi^m, \Phi^{m}\check{})$.

2.10.1 On considère le sous-groupe $N(F)$ de N engendré par $H = \mathrm{Ker}(\nu)$ et les $m(x_\alpha(u))$ pour $\alpha \in \Phi^m$ et $\mathcal{F} \subset M(\alpha, \omega(u))$. Autrement dit $N(F)$ est engendré par H et les $r_{\alpha,\lambda}$ pour $\alpha \in \Phi^m$ et $\lambda \in \Lambda$ tels que $\mathcal{F} \subset M(\alpha, \lambda)$. En particulier pour une chambre C, $N(C) = H$ et pour une cloison F dans le mur $M(\alpha, \lambda)$, $N(F) = \langle H, r_{\alpha,\lambda}\rangle$.

En fait $N(F)$ est l'ensemble des éléments n de N tels que $\nu^v(n)$ fixe F^v et $\nu(n)$ fixe (point par point) l'un des sous-ensembles de $Y_\mathbb{R}$ faisant partie de $\mathcal{F}$.

2.10.2 On définit $M(F)$ comme le sous-groupe de $M(F^v)$ engendré par H et les U_{α,μ_α} pour $\alpha \in \Phi^m(F^v)$ et μ_α définissant F comme en § 2.5. Ce groupe $M(F)$ est un sous-groupe parahorique de $M(F^v)$ au sens de Bruhat–Tits.

Définition 2.10.3. Le sous-groupe *parahorique* associé à la facette $F = F^v \times \mathcal{F}$ est $P(F) = M(F) \ltimes U(F^v)$.

Lemme 2.10.4. *On a $N(F) = N \cap M(F)$.*

Démonstration. Pour $\alpha \in \Phi$ et $u \in K^*$, $m(x_\alpha(u)) = x_{-\alpha}(u^{-1})x_\alpha(u)x_{-\alpha}(u^{-1})$, cet élément est donc dans $M(F)$ dès que $\omega(u) \in \mu_\alpha$ et $-\omega(u) \in \mu_{-\alpha}$. Étant données les conditions de compatibilité des μ_α, ceci équivaut à $\mu_\alpha = [\omega(u), +\infty[$ et $\mu_{-\alpha} = [-\omega(u), +\infty[$, c'est à dire à $\mathcal{F} \subset M(\alpha, \omega(u))$. On a donc $N(F) \subset N \cap M(F)$. L'inclusion inverse est prouvée dans [BT72, § 7.1.8]. □

2.10.5 Pour $x \in \mathbb{A}$, le groupe $\widehat{N}_x = \{n \in N \mid \nu(n)x = x\}$ normalise $P_x = P(F_x)$ (cf. § 2.6.2) et on définit $\widehat{P}_x = \widehat{N}_x P_x$; d'après le lemme on a $\widehat{P}_x \cap N = \widehat{N}_x$.

Il est clair que, pour $n \in N$, on a $P(\nu(n)F) = nP(F)n^{-1}$, $P_{\nu(n)x} = nP_x n^{-1}$, etc.

On peut aussi définir, par les mêmes formules, le groupe $P(F)$ pour $F = F^v \times \mathcal{F}$ où $\mathcal{F}$ est un filtre de parties de $Y_\mathbb{R}$ défini comme en § 2.5 mais avec la seule condition de compatibilité (C1).

3. L'immeuble microaffine

On construit ci-dessous l'immeuble $\mathcal{I}$ à partir des matériaux du § 2 selon le procédé classique de Bruhat–Tits. En combinant les décompositions de Bruhat dans les groupes de Kac–Moody [Tit87] et de Bruhat–Cartan ou d'Iwasawa dans les groupes réductifs sur les corps locaux [BT72, BT84], on obtient des décompositions dans G qui prouvent les relations d'incidence attendues pour le système d'appartements de $\mathcal{I}$.

Définitions 3.1. L'*immeuble microaffine* $\mathcal{I}$ de G est défini comme le quotient de $G \times \mathbb{A}$ par la relation :

$$(g, x) \sim (h, y) \Leftrightarrow \exists n \in N \text{ tel que } y = \nu(n)x \text{ et } g^{-1}hn \in \widehat{P}_x.$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X05001806 Published online by Cambridge University Press

On montre facilement [BT72, § 7.4.1] que c'est une relation d'équivalence. De plus, d'après § 2.10, on a $\widehat{P}_x \cap N = \widehat{N}_x$. Ainsi l'application $x \mapsto cl(1,x)$ identifie $\mathbb{A}$ à son image A.

L'action à gauche de G sur $G \times \mathbb{A}$ passe au quotient en une action sur $\mathcal{I}$. Les *appartements* (respectivement *facettes*) de $\mathcal{I}$ sont les transformés par G de A (respectivement d'une facette de A).

Si l'on munit G de la topologie discrète, l'immeuble $\mathcal{I}$ est muni de la topologie quotient. L'action de G est alors continue.

3.2 Premières propriétés

L'action de N stabilise $\mathbb{A} = A$ et se fait via ν ; en particulier H fixe A point par point. Par construction le fixateur de $x \in \mathbb{A}$ est $\widehat{P}_x$ et, pour $g \in G$, on a $gx \in \mathbb{A} \Leftrightarrow g \in N\,\widehat{P}_x$.

D'après la définition des groupes $\widehat{P}_x$, pour $\alpha \in \Phi$ et $u \in K$, $x_\alpha(u)$ fixe $D(\alpha, \omega(u))$. Ainsi, pour μ majeur de $\widetilde{\Lambda}$, le groupe $HU_{\alpha,\mu}$ fixe $D(\alpha,\mu) = \bigcap_{\lambda\in\mu} D(\alpha,\lambda)$.

Pour une facette $F = F^v \times \mathcal{F}$ de $\mathbb{A}$, tout élément de $P(F)$ fixe point par point un ensemble $F^v \times \Omega$ où $\Omega \in \mathcal{F}$.

Le groupe $\widehat{P}_x$ est transitif sur les appartements de $\mathcal{I}$ contenant x. En effet si $gA \ni x$, $\exists y \in A$ et $n \in N$ tels que $y = \nu(n)x$ et $gn \in \widehat{P}_x$ et alors $gA = gnA \in \widehat{P}_x A$.

Proposition 3.3. *Soit $F = F^v \times \mathcal{F}$ une facette de $\mathbb{A}$ définie par des majeurs μ_α pour $\alpha \in \Phi^m(F^v)$. Soit E^v une facette de $\mathbb{A}^v$ contenue dans l'adhérence de F^v, et soit $p \in P(F)$. Alors p fixe (point par point) un ensemble $E^v \times Q$ où Q est défini par les inéquations suivantes :*

- *pour $\alpha \in \Phi^m(F^v)$, $\exists \lambda_\alpha \in \mu_\alpha$ tel que : $\alpha(y) + \lambda_\alpha \geqslant 0$, $\forall y \in Q$;*
- *pour $\alpha \in \Phi^u(F^v) \cap \Phi^m(E^v)$, $\exists \lambda_\alpha \in \Lambda$ tel que : $\alpha(y) + \lambda_\alpha \geqslant 0$, $\forall y \in Q$.*

Démonstration. Comme $p \in P(F^v) \subset P(E^v)$, l'action de p sur le premier facteur de $\mathbb{A} = \mathbb{A}^v \times Y_\mathbb{R}$ fixe bien E^v. L'élément p fait intervenir un nombre fini des générateurs de $P(F)$ décrits en § 2.10 ; il suffit donc de vérifier que chacun de ceux-ci fixe un ensemble Q de la forme ci-dessus.

Si $n \in N(F)$, $\nu^v(n)$ fixe $E^v \times Q$ où $Q \in \mathcal{F}$.

Si $u \in U_{\alpha,\mu_\alpha}$, $\alpha \in \Phi^m(F^v)$ et $\lambda_\alpha = \varphi_\alpha(u) \in \mu_\alpha$ alors u fixe $D(\alpha,\lambda_\alpha) \supset E^v \times \{y \mid \alpha(y) + \lambda_\alpha \geqslant 0\}$.

Si $u \in U_\alpha$, $u \neq 1$, $\alpha \in \Phi^u(F^v) \cap \Phi^m(E^v)$ et $\lambda_\alpha = \varphi_\alpha(u)$ alors u fixe $D(\alpha,\lambda_\alpha) \supset E^v \times \{y \mid \alpha(y) + \lambda_\alpha \geqslant 0\}$.

Si $u \in U_\alpha, \alpha \in \Phi^u(F^v) \cap \Phi^u(E^v)$ alors u fixe tout $E^v \times Y_\mathbb{R}$.

La démonstration n'est achevée que si $U(F^v)$ est engendré par les U_α, $\alpha \in \Phi^u(F^v)$, par exemple si F^v est une chambre. Mais, d'après [Rém02, théorème 6.2.2], $U(F^v)$ est l'intersection des $U(C_i^v)$ pour les chambres C_i^v de $\mathbb{A}^v$ contenant F^v dans leur adhérence. On en déduit qu'un élément $u \in U(F^v)$ fixe pour tout i un quartier $E^v \times (y_i + C_i^v)$ de l'appartement affine $E^v \times Y_\mathbb{R}$ et donc, par convexité dans cet appartement [BT72, § 7.1.2 et proposition 7.4.4], il fixe un ensemble de la forme annoncée. □

3.4 Remarques et définitions

À une facette $F = F^v \times \mathcal{F}$ de $\mathbb{A}$ (définie par des majeurs μ_α), on associe un filtre $\mathcal{F}_g(F)$ de parties de $\mathbb{A}$ comme suit :

Une base de ce filtre est formée des parties $Q((\lambda_\alpha)_\alpha)$ de $\mathbb{A}$ indexées par des familles $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in\Phi(F^v)}$ vérifiant $\lambda_\alpha \in \mu_\alpha$ si $\alpha \in \Phi^m(F^v)$ et ainsi définies :

$$Q((\lambda_\alpha)_\alpha) \text{ est la réunion des } E^v \times \{y \in Y_\mathbb{R} \mid \alpha(y) + \lambda_\alpha \geqslant 0, \forall \alpha \in \Phi(F^v) \cap \Phi^m(E^v)\}$$

pour toutes les facettes E^v de $\mathbb{A}^v$ contenues dans l'adhérence de F^v.

On vient de montrer que tout élément de $P(F)$ fixe point par point un élément de ce filtre.

La trace de $\mathcal{F}_g(F)$ sur $F^v \times Y_{\mathbb{R}}$ est $F^v \times \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_g(F)$ est entièrement déterminé par sa trace sur $E^v \times Y_{\mathbb{R}}$ pour toute facette E^v de $\mathbb{A}^v$ contenue dans l'adhérence de F^v.

On voit ainsi réapparaître les facettes à l'infini dans $E^v \times Y_{\mathbb{R}}$, suggérées en § 2.6.2, comme traces sur $E^v \times Y_{\mathbb{R}}$ des filtres $\mathcal{F}_g(F)$ associés aux facettes F de $F^v \times Y_{\mathbb{R}}$ pour F^v contenant E^v dans son adhérence. L'ensemble de toutes ces facettes est l'ensemble des facettes du compactifié de Satake de l'appartement affine dans $Y_{\mathbb{R}}$ associé à $\Phi^m(E^v)$ et Λ, cf. [Lan96] ou [Gér84]. La trace de $\mathcal{F}_g(F)$ sur $E^v \times Y_{\mathbb{R}}$ décrit essentiellement un voisinage dans $E^v \times Y_{\mathbb{R}}$ de cette facette du compactifié de Satake.

On peut en particulier considérer que l'ensemble des facettes de $\mathbb{A}$ est le recollé des ensembles de facettes des compactifiés de Satake des appartements affines associés aux facettes (sphériques) de $\mathbb{A}^v$. On reviendra sur ce point en § 4.2 où l'on définira une autre réalisation géométrique des appartements.

Proposition 3.5 (Décomposition de Bruhat). *Pour toutes facettes E et F de $\mathbb{A}$, on a : $G = P(F)NP(E)$.*

Remarque. Ce résultat combine la décomposition de Bruhat classique de G (cf. § 1.8.6) et les décompositions de Bruhat et Iwasawa (sur le corps local K) pour les sous-groupes réductifs de G. Il équivaut essentiellement aux décompositions associées aux facettes et cheminées dans [Rou77]. En particulier il démontre, pour les immeubles de Bruhat–Tits, les hypothèses (α) et (β) de [Rou01, § 3.2].

Démonstration. Soient F^v et E^v les facettes de $\mathbb{A}^v$ associées à F et E. Si $g \in G$, il existe $n \in N$ tel que $g \in P(F^v)nM(E^v)U(E^v)$. Mais $\Phi(n^{-1}F^v) \cap \Phi^m(E^v)$ est un système parabolique de racines dans $\Phi^m(E^v)$; la décomposition d'Iwasawa de $M(E^v)$ donne donc :

$$M(E^v) = (M(E^v) \cap P(n_{-1}F^v)).(N \cap M(E^v)).M(E)$$

d'où $g \in P(F^v).N.M(E).U(E^v)$ et il existe $m \in M(F^v)$ et $n_1 \in N$ tels que :

$$g \in U(F^v)mn_1P(E) = U(F^v)mP(n_1E)n_1.$$

Mais $\Phi(n_1E^v) \cap \Phi^m(F^v)$ est un système parabolique de racines dans $\Phi^m(F^v)$; la décomposition d'Iwasawa de $M(F^v)$ donne donc :

$$M(F^v) = M(F).(N \cap M(F^v)).M(n_1E^v, F^v).(U(n_1E^v) \cap M(F^v))$$

où on note $M(n_1E^v, F^v)$ le sous-groupe réductif de $M(F^v)$ associé au sous-système de racines $\Phi^m(n_1E^v) \cap \Phi^m(F^v)$. Ainsi il existe $n_2 \in N \cap M(F^v)$ tel que $m \in n_2M(n_2^{-1}F).M(n_1E^v, F^v).(U(n_1E^v) \cap M(F^v))$.

Mais $n_2^{-1}F$ est une facette attachée à F^v (car $n_2 \in M(F^v)$), donc $n_2^{-1}F$ est définie par des majeurs μ_α pour $\alpha \in \Phi^m(F^v)$. On en déduit une facette F' dans $Y_{\mathbb{R}}$ pour le groupe réductif $M(n_1E^v, F^v)$ qui est définie par les μ_α pour $\alpha \in \Phi^m(n_1E^v) \cap \Phi^m(F^v)$ et donc vérifie $M(F') \subset M(n_2^{-1}F)$.

De même n_1E est une facette attachée à n_1E^v, donc n_1E est définie par des majeurs ν_α pour $\alpha \in \Phi^m(n_1E^v)$. On en déduit une facette E' dans $Y_{\mathbb{R}}$ pour le groupe réductif $M(n_1E^v, F^v)$ qui est définie par les ν_α pour $\alpha \in \Phi^m(n_1E^v) \cap \Phi^m(F^v)$ et donc vérifie $M(E') \subset M(n_1E)$.

La décomposition de Bruhat dans $M(n_1E^v, F^v)$ donne :

$$M(n_1E^v, F^v) = M(F').(N \cap M(n_1E^v, F^v)).M(E') \subset M(n_2^{-1}F).N.M(n_1E).$$

Ainsi $m \in n_2M(n_2^{-1}F).N.M(n_1E)U(n_1E^v) = M(F).N \cdot P(n_1E)$

$$\text{et } g \in U(F^v).M(F).N \cdot P(n_1E)n_1 = P(F)NP(E). \qquad \square$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X05001806 Published online by Cambridge University Press

Corollaire 3.6. *Deux facettes de $\mathcal{I}$ sont contenues dans un même appartement.*

Démonstration. Ces deux facettes sont de la forme gF et hE avec $g, h \in G$ et F, E deux facettes de $A = \mathbb{A}$. D'après la proposition 3.5, on a : $g^{-1}h = p_F n p_E$ avec $p_F \in P(F)$, $p_E \in P(E)$ et $n \in N$. Alors $hE = gp_F np_E E = gp_F nE \in gp_F(A)$ et $gF = gp_F F \in gp_F(A)$. □

Corollaire 3.7. *Deux facettes de $\mathbb{A}$ sont conjuguées par G si et seulement si elles le sont par N.*

Démonstration. Si $E = gF$, on écrit $g = p_E n p_F$ et alors $E = p_E^{-1}E = np_F F = nF$. □

Définition 3.8. Soit $(F_\omega)_{\omega\in\Omega}$ une famille non vide de facettes ou de points de $\mathbb{A}$; en remplaçant un point x par la facette $F(x)$ associée, on ne va considérer ci-dessous que des facettes. L'*enclos* de cette famille Ω est le filtre $cl(\Omega)$ de parties de $\mathbb{A}$ dont une base est formée des ensembles de la forme :

$$\bigcap_{\alpha\in\Phi} D(\alpha, \lambda_\alpha) \quad \text{pour } \lambda_\alpha \in \Lambda \quad \text{et} \quad F_\omega \subset D(\alpha, \lambda_\alpha), \forall \omega \in \Omega.$$

Commentaires. (1) Un filtre est contenu dans un sous-ensemble (respectivement un second filtre) si ce sous-ensemble (respectivement tout élément du second filtre) est un élément du (premier) filtre. On identifie un sous-ensemble au filtre des parties qui le contiennent.

(2) La réunion des F^v pour $F \subset cl(\Omega)$ est l'enclos des F^v_ω.

(3) Une partie Ω de $\mathbb{A}$ est dite *close* si elle s'identifie à son enclos. Cela signifie en particulier que cet enclos est une partie de $\mathbb{A}$; ainsi si Ω est close elle est fermée et convexe dans $\mathbb{A}$.

Proposition 3.9. *Avec les notations ci-dessus, et pour toute facette $F \subset cl(\Omega)$, on a :*

$$\bigcap_{\omega\in\Omega} P(F_\omega) \subset P(F).$$

Commentaire. Dans ce résultat on peut remplacer certaines facettes, parmi F et les F_ω, par des points x et le groupe correspondant par $\widehat{P}_x$.

Démonstration. (1) Si $F = F^v \times \mathcal{F}$ et $F^v \subset \overline{F^v_1}$, alors $P(F) \cap P(F^v_1) = (M(F) \cap P(F^v_1)).U(F^v)$ et $M(F) \cap P(F^v_1)$ est engendré par H et les $U_{\alpha,\lambda}$, $\alpha \in \Phi^m(F^v) \cap \Phi(F^v_1)$, $\lambda \in \Lambda$ tels que $\alpha(F) + \lambda \geqslant 0$ d'après [BT72, § 7.1.8].

En particulier $P(F) \cap P(F^v_1)$ fixe la cheminée $F^v \times (\mathcal{F} + \overline{F^v_1})$ de l'appartement affine $F^v \times Y_\mathbb{R}$ (ou $Y_\mathbb{R}$) ; plus précisément il est contenu dans $P(F')$ pour toute facette F' contenue dans cette cheminée. De plus $P(F) \cap P(F^v_1) \subset P(F''_2)$ où $F''_2 = F^v_1 \times (\mathcal{F} + F^v_1 - F^v_1)$ est une facette de $F^v_1 \times Y_\mathbb{R}$.

(2) Si $F = F^v \times \mathcal{F}$ et $F^v_1 \subset \overline{F^v}$, on a vu à la proposition 3.3 que tout élément g de $P(F)$ fixe une cheminée $F^v_1 \times (\mathcal{F}_1 + \overline{F^v})$ où $\mathcal{F}_1 + \overline{F^v} \subset \mathcal{F}$ ($P(F)$ fixe le germe de cette cheminée). Plus précisément g est contenu dans $P(F')$ pour toute facette F' contenue dans cette cheminée.

(3) Soit $g \in \bigcap_\omega P(F_\omega) \subset \bigcap_\omega P(F^v_\omega)$, alors $g \in P(F^v)$ pour tout F^v dans la clôture $cl(\Omega^v)$ de $\Omega^v = \{F^v_\omega \mid \omega \in \Omega\}$, cf. corollaire 1.11.

En particulier $g \in P(F^v)$ pour tout $F = F^v \times \mathcal{F} \in cl(\Omega)$, cf. définition 3.8, commentaire (2).

D'après (1) et (2) si $F \in \Omega$ et $F^v \subset \overline{F^v_1}$ ou $F^v_1 \subset \overline{F^v}$ avec $F^v_1 \in cl(\Omega^v)$, il existe une facette $F_1 = F^v_1 \times \mathcal{F}_1$ telle que $g \in P(F_1)$. Par connexité de la clôture de Ω^v, on peut donc, en rajoutant de telles facettes à Ω, supposer Ω^v clos.

Plus précisément si g fixe dans $F^v_{\omega_0} \times Y_\mathbb{R}$ un point (v_0, y_0) tel que $\alpha(y_0) = \lambda \in \mathbb{R}$ pour $\alpha \in \Phi^m(F^v_{\omega_0})$, alors, pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $\alpha(F^v_\omega) = 0$, g fixe dans $F^v_\omega \times Y_\mathbb{R}$ un point (v, y) tel que $\alpha(y) = \lambda$.

Par ailleurs par construction les facettes de $F^v_\omega \times Y_\mathbb{R}$ avec $\alpha(F^v_\omega) \neq 0$ ne sont limitées par aucune inégalité en α, puisqu'elles sont stables par $F^v_\omega - F^v_\omega$. Enfin, dans chaque $F^v_\omega \times Y_\mathbb{R}$ les facettes fixes par g forment un ensemble clos [BT72, § 7.1.2 et proposition 7.4.4].

Il est maintenant clair qu'un $g \in \bigcap_{\omega\in\Omega} P(F_\omega)$ fixe toutes les facettes F dans l'intersection des $D(\alpha, \lambda)$ qui contiennent Ω. □

https://doi.org/10.1112/S0010437X05001806 Published online by Cambridge University Press

Proposition 3.10. *Avec les notations de la définition 3.8, on a :*

$$\bigcap_{\omega\in\Omega} N\cdot P(F_\omega) \subset N.\Big(\bigcap_{\omega\in\Omega} P(F_\omega)\Big).$$

Démonstration. On connaît déjà les relations analogues pour les F^v_ω, d'après le corollaire 1.11.

(1) Si $F = F^v \times \mathcal{F}$ et $F^v \subset \overline{F^v_1}$, on a $N\cdot P(F)\cap N\cdot P(F^v_1) = N.(NM(F)\cap P(F^v_1)).U(F^v)$. Si $n\in N$ et $nM(F)\cap P(F^v_1)\neq\emptyset$, on a $n\in N(F^v) = N\cap P(F^v)$ car $M(F)\subset P(F^v)\supset P(F^v_1)$; d'après [BT72, §§ 7.1.8 et 6.1.15] on a aussi $nM(F)\cap P(F^v_1)\subset nP(F+\overline{F^v_1})$ où $F+\overline{F^v_1} = F^v\times(\mathcal{F}+\overline{F^v_1})$ est une cheminée.

On peut aussi donner une démonstration entièrement pour fumiste de ce résultat : tout élément g de $nM(F)$ envoie F sur nF. Tout élément de $P(F^v_1)$ fixe les directions de demi-droites dans F^v_1 [Rou77, proposition 1.3.4]. Or deux demi-droites de même origine et même direction sont égales [Rou77, proposition 1.3.3] ou [Rou01, proposition 1.12]. Donc si $g\in nM(F)\cap P(F^v_1)$ les actions de g et n coïncident sur $F+\overline{F^v_1}$.

Mais $P(F+\overline{F^v_1})\subset P(F_2)$ où $F_2 = F^v_1\times(\mathcal{F}+F^v_1-F^v_1)$ est une facette de $F^v_1\times Y_\mathbb{R}$ et donc $N\cdot P(F)\cap N\cdot P(F^v_1)\subset N.(P(F)\cap P(F_2))$.

(2) Si $F = F^v\times\mathcal{F}$ et $F^v_1\subset\overline{F^v}$, on a vu à la proposition 3.3 que tout élément g de $P(F)$ est contenu dans $P(F_2)$ pour toute facette F_2 dans une cheminée $F^v_1\times(\mathcal{F}_1+\overline{F^v})$ où $\mathcal{F}_1+\overline{F^v}\subset\mathcal{F}$. On a donc $NP(F)\cap NP(F^v_1)\subset\bigcup_{F_2} N.(P(F)\cap P(F_2))$.

(3) Soit $g\in\bigcap_{\omega\in\Omega} N\cdot P(F_\omega)\subset\bigcap_{\omega\in\Omega} N\cdot P(F^v_\omega)\subset N.(\bigcap_{\omega\in\Omega} P(F^v_\omega))$, d'après le corollaire 1.11. En particulier (proposition 3.9) $g\in N\cdot P(F^v), \forall F^v\in cl(\Omega^v)$. D'après (1) et (2) on peut donc rajouter des facettes à Ω de façon que Ω^v soit clos.

Par utilisation répétée de (1) et (2), à partir d'une facette $F_\omega = F^v_\omega\times\mathcal{F}_\omega$ on construit dans chaque appartement affine $F^v_{\omega'}\times Y_\mathbb{R}$, avec $\omega'\in\Omega$, une facette $E = F^v_{\omega'}\times\mathcal{F}$ telle que $g\in N\cdot P(E)$ (on peut donc supposer $E\in\Omega$) et que la dimension de $\mathcal{F}$ soit au moins celle de $\mathcal{F}_\omega$.

Dans chaque appartement affine $F^v_{\omega'}\times Y_\mathbb{R}$, le résultat de la proposition 3.10 est valable d'après [BT72, proposition 7.4.8]. Compte-tenu de la proposition 3.9, on peut donc rajouter à Ω toutes les facettes de l'enclos de Ω contenues dans cet appartement affine. Ainsi, d'après l'alinéa précédent, dans chacun de ces appartements toute facette de Ω est dans l'adhérence d'une facette $F_\omega = F^v_\omega\times\mathcal{F}_\omega$ avec $\dim(\mathcal{F}_\omega)$ maximale (parmi toutes les dimensions des $\mathcal{F}_{\omega'}$).

Dans l'écriture $g = n_\omega p_\omega$, avec $n_\omega\in N$ et $p_\omega\in P(F_\omega)$, l'élément n_ω est bien déterminé à $N(F_\omega)$ près. D'après l'alinéa précédent il suffit de comparer les n_ω pour $\dim(\mathcal{F}_\omega)$ maximale. Ces facettes se correspondent de proche en proche par les procédés de (1), de (2) ou de l'alinéa précédent, et, à chaque étape, on peut supposer $n_\omega = n_{\omega'}$ et $N(F_\omega) = N(F_{\omega'})$. Il y a donc transitivité et on peut supposer n_ω indépendant de ω. □

Corollaire 3.11. *Le groupe N est le stabilisateur de $A = \mathbb{A}$ pour l'action de G.*

Démonstration. $Stab(A) = \{g\in G \mid gx\in A, \forall x\in A\} = \bigcap_{x\in\mathbb{A}} N.\widehat{P}_x$ (d'après § 3.2) $= N.(\bigcap_{x\in\mathbb{A}}\widehat{P}_x)$ $\subset N.(\bigcap_{x\in\mathbb{A}} P(F^v_x)) = N.\mathrm{fix}(\mathbb{A}^v) = N.T = N$. □

Corollaire 3.12. *Pour une partie Ω de $\mathbb{A}$, le groupe $P_\Omega = \bigcap_{x\in\Omega} P(F_x)$ agit transitivement sur les appartements contenant Ω. En particulier P_Ω ne dépend pas de l'appartement contenant Ω.*

Démonstration. Si $A' = g^{-1}A$ contient Ω, alors $gx\in A$, $\forall x\in\Omega$, donc $g\in\bigcap_{x\in\Omega} N.\widehat{P}_x = \bigcap_{x\in\Omega} N\cdot P_x = N\cdot P_\Omega$. Il existe donc $n\in N$ et $p\in P_\Omega$ tels que $g = np$; ainsi $A' = p^{-1}n^{-1}A = p^{-1}A\in P_\Omega.A$. □

Corollaire 3.13. *Soient A' et A'' deux appartements de $\mathcal{I}$. Alors $\Omega = A'\cap A''$ est clos dans A' et A'' et il existe $g\in G$ fixant Ω et tel que $A'' = gA'$.*

https://doi.org/10.1112/S0010437X05001806 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. On peut supposer $A' = \mathbb{A}$; d'après le corollaire 3.12 il existe $g \in P_\Omega$ tel que $A'' = g\mathbb{A}$ et, d'après la proposition 3.9, P_Ω fixe l'enclos de Ω. Donc $cl(\Omega) \subset A' \cap A''$ et Ω est clos. □

Proposition 3.14. *Pour toute chambre C contenue dans un appartement A, il existe une rétraction ρ de $\mathcal{I}$ sur A donnée par $\rho(x) = gx$ si $g \in P(C)$ et $gx \in A$.*

Démonstration. D'après les corollaires 3.6 et 3.12, il suffit de montrer que $g_1 x = g_2 x$ si $g_1, g_2 \in P(C)$ et $g_1 x, g_2 x \in A$. Quitte à remplacer A par $g_2^{-1}A$ on peut supposer $g_2 = 1$; mais alors $g_1 \in P(C) \cap N.\widehat{P}_x \subset N.(P(C) \cap \widehat{P}_x)$. Or $N \cap P(C) = N(C) = H \subset \widehat{P}_x$, donc $g_1 \in P(C) \cap \widehat{P}_x$ et $g_1 x = x = g_2 x$. □

Remarques 3.15. (1) D'après le corollaire 3.11 un appartement a une topologie et une structure convexe (notion de segment) bien déterminées et isomorphes à celles de $\mathbb{A}$. Par la définition 3.1 de la topologie, une partie de $\mathcal{I}$ est ouverte (respectivement fermée) si et seulement si son intersection avec tout appartement l'est. Ainsi, d'après le corollaire 3.13 et la définition 3.8, un appartement est fermé dans $\mathcal{I}$ et sa topologie coïncide avec celle induite par celle de $\mathcal{I}$. Compte tenu du corollaire 3.6, on peut définir le segment joignant deux points de $\mathcal{I}$, mais, en général, il n'est pas image continue de $[0, 1]$.

Cette topologie et cette structure convexe semblent moins intéressants que ce qui apparaît dans la réalisation de Satake (§ 4.2 ci-dessous).

(2) L'immeuble $\mathcal{I}$ relève de l'axiomatique développée dans [Rou] ; mais on a dû adapter celle-ci pour tenir compte de ce que, dans certains cas, aucune chambre de $\mathbb{A}$ n'a un stabilisateur (dans W) réduit à l'identité. On ne le voit pas apparaître ici car on a choisi une réalisation géométrique pour laquelle le fixateur (point par point) dans W d'une chambre est toujours réduit à l'identité. Le problème ressurgira quand on définira une nouvelle réalisation géométrique (de Satake, cf. § 4.2.6).

Avec cette axiomatique on obtient quelques résultats au parfum classique :

Une *galerie* d'une chambre C à une chambre C' est une suite Γ de paires de chambres $(C_1, C_1'), \dots, (C_n, C_n')$ telle que $C_1 = C$, $C_n' = C'$ et $\forall i < n, C_i'$ et C_{i+1} sont mitoyennes. On visualise la galerie sous la forme de la suite $E_1, \dots, E_n$ des enclos : $E_i = cl(C_i, C_i')$. La galerie est dite *classique* si $\forall i\, C_i = C_i'$, i.e. $E_i = C_i = C_i'$; elle est dite *tendue* de C à C' si $\forall i < j, E_i \cup E_{i+1} \cup \dots \cup E_j \subset cl(C_i, C_j')$ et $\forall i \leqslant j < j+1 \leqslant k, cl(C_i, C_j') \cap cl(C_{j+1}, C_k')$ ne contient aucune chambre. Une galerie tendue de $C \in A$ à $C' \in A$ est entièrement contenue dans A. Une galerie classique est tendue si et seulement si elle est tendue au sens classique : la galerie ne traverse qu'une fois au plus chaque mur. Une *sous-galerie* de Γ est ce que l'on obtient en remplaçant, pour certains i, E_i par une galerie de C_i à C_i' contenue dans E_i.

On peut alors montrer que, pour toute rétraction ρ et toute galerie Γ, il existe une sous-galerie Γ' qui s'envoie sur une galerie de $A = \rho(\mathcal{I})$ au sens où ρ induit un isomorphisme de E_i' sur son image. Si Γ est tendue, on peut supposer Γ' tendue.

4. Exemples, dessins et questions

On étudie ici quelques cas particuliers pour faire le lien avec d'autres types d'immeubles et on introduit l'autre réalisation géométrique de l'immeuble, celle de Satake déjà largement évoquée dans l'introduction.

4.1 Cas d'un groupe de Kac–Moody affine

Alors $\mathbb{A}^v$ est le demi-espace ouvert de V défini par $\delta(v) > 0$ où δ est la plus petite racine imaginaire positive du système de racines au sens de [Kac90] ou [Bar96] associé à Φ, c'est à dire le système de racines de l'algèbre de Lie de G.

On sait [Hum90, § 6.5] qu'il est plus pratique de considérer l'hyperplan $\mathbb{H}$ de V d'équation $\delta(v) = 1$; il est stable par W^v (qui fixe δ). Les murs (respectivement facettes) de $\mathbb{A}^v$ découpent sur $\mathbb{H}$ des hyperplans affines encore appelés murs (respectivement des facettes) de $\mathbb{H}$ et le groupe W^v s'identifie au groupe de Weyl affine engendré par les réflexions par rapport à ces murs. On quotiente également $\mathbb{H}$ par le sous-espace vectoriel intersection des noyaux des racines et on obtient alors, dans le quotient $\mathbb{A}^{va}$ la réalisation habituelle de W^v comme groupe de réflexions affines. L'appartement $\mathbb{A}^{va}$ a les 'mêmes' facettes ou murs que $\mathbb{A}^v$.

On fait la même opération dans $Y_{\mathbb{R}}$: on quotiente par l'intersection des noyaux de racines et on ne garde que l'hyperplan d'équation $\delta = 1$. On note $Y_{\mathbb{R}}^a$ le résultat obtenu et $\mathbb{A}^a = \mathbb{A}^{va} \times Y_{\mathbb{R}}^a$. L'appartement 'affine' $\mathbb{A}^a$ a les 'mêmes' facettes ou murs que $\mathbb{A}$.

On ne peut faire agir le groupe T entier sur $\mathbb{A}^a$, seulement $T' = \mathrm{Ker}(\delta)$. On ne pourra donc faire agir que le groupe dérivé G' de G sur l'immeuble ci-dessous.

On obtient par le procédé des définitions 3.1 (avec G' et N') un immeuble $\mathcal{I}^a$ qui est $\mathbb{Z}\times\Lambda$-affine au sens de [Ben90, Ben94]. Ses facettes ou appartements sont en bijection avec ceux de $\mathcal{I}$, on dit que c'est l'*immeuble affine* associé à $\mathcal{I}$. Si $\mathcal{G}$ est de rang 1, on obtient un $\mathbb{Z} \times \Lambda$-arbre, cf. [Chi01].

Si le groupe de Kac–Moody G est affine non tordu, c'est à dire le groupe des lacets (algébriques) d'un groupe semi-simple G° sur K, alors $\mathcal{I}^a$ est l'immeuble $\mathbb{Z} \times \Lambda$-affine de $G^\circ(K((t)))$ associé à la valuation ω' de $K((t))$ définie par $\omega'(\sum a_i t^i) = (n, \lambda)$ où $n = \inf\{i \mid a_i \neq 0\}$ et $\lambda = \omega(a_n)$.

Remarques. (1) Si $\mathcal{I}^v$ est l'immeuble Λ-affine d'un groupe semi-simple sur un corps K muni d'une valuation ω à valeurs dans Λ et de corps résiduel k muni lui même d'une valuation à valeurs dans Λ', on peut essayer d'introduire une notion d'éclatement de $\mathcal{I}^v$ analogue à celle de cet article, afin d'obtenir un immeuble $\Lambda\times\Lambda'$-affine. Cela ne semble raisonnable que sous une hypothèse de scindage de ω en particulier d'égale caractéristique de K et k, par exemple si on peut combiner les 2 valuations en une valuation à valeurs dans $\Lambda \times \Lambda'$ ordonné lexicographiquement.

(2) Les groupes de lacets sur un corps local ont déjà été étudiés par Garland [Gar95]. Il introduit, dans le groupe $G^\circ(K((t)))$, les analogues des décompositions de Cartan ou Iwasawa classiques de $G^\circ(K)$. Les sous-groupes qu'il considère sont essentiellement des sous-groupes d'Iwahori associés aux deux valuations discrètes ω_1 et ω_2 définies par $\omega_1(\sum a_i t^i) = \inf\{\omega(a_i)\}$ (pour l'analogue du sous-groupe compact maximal du cas classique) et $\omega_2(\sum a_i t^i) = \inf\{i \mid a_i \neq 0\}$ (pour l'analogue du sous-groupe de Borel du cas classique, qui est notre sous-groupe de Borel). Il n'y a donc pas vraiment de rapport avec la présente étude. L'espace géométrique associé à ces groupes devrait sans doute être construit à partir de l'appartement envisagé en § 2.3, commentaire (3).

4.2 La réalisation de Satake

4.2.1 L'appartement $\mathbb{A}$ est réunion des appartements affines $F^v \times Y_{\mathbb{R}}$ où tous les points de F^v jouent le même rôle et on a donc envie de les identifier. D'autre part l'appartement de Bruhat–Tits $Y_{\mathbb{R}}$ est inessentiel et on a donc envie de le quotienter. Cela va permettre de faire apparaître de manière plus claire les compactifiés de Satake de ces appartements affines.

On quotiente chaque $F^v \times Y_{\mathbb{R}}$ par la relation d'équivalence suivante :

$$(v, y) \sim (v', y') \Leftrightarrow \alpha(y) = \alpha(y') \quad \forall \alpha \in \Phi^m(F^v).$$

On note $\pi_{F^v} : F^v \times Y_{\mathbb{R}} \longrightarrow Y_{\mathbb{R}}(F^v)$ l'application de passage au quotient correspondante et $\pi = \coprod \pi_{F^v} : \mathbb{A} = \coprod (F^v \times Y_{\mathbb{R}}) \longrightarrow \coprod Y_{\mathbb{R}}(F^v) = \mathbb{A}^s$.

Les murs ou facettes de l'appartement $F^v \times Y_{\mathbb{R}}$ sont saturés pour cette relation d'équivalence. On obtient donc, dans le quotient $\mathbb{A}^s = \pi(\mathbb{A})$ de $\mathbb{A}$ ainsi défini, des facettes ou murs en bijection (par $F \mapsto F^s = \pi(F)$ ou $M \mapsto M^s = \pi(M)$) avec ceux de $\mathbb{A}$. On dit que $\mathbb{A}^s$ est l'*appartement de Satake* associé.

4.2.2 On peut décrire plus directement $\mathbb{A}^s$. On a une application π de $Y_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ dans $[-\infty,+\infty]^\Phi$ définie par $(\pi(v,y))_\alpha = \alpha(y)$ (respectivement $-\infty$, $+\infty$) si $\alpha(v)=0$ (respectivement $\alpha(v)<0$, $\alpha(v)>0$) pour $\alpha\in\Phi$. Alors $\mathbb{A}$ est l'image réciproque de l'ensemble $[-\infty,+\infty]^\Phi_{\text{sph}}$ des $(q_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$ tels que $\Phi((q_\alpha)_\alpha)=\{\alpha\in\Phi \mid q_\alpha\neq-\infty\}$ soit un système parabolique de racines sphérique contenant un conjugué (par W) de Φ^+. De plus $\mathbb{A}^s=\pi(\mathbb{A})$ est (intrinsèquement) défini comme l'ensemble des $(q_\alpha)_{\alpha\in\Phi}\in[-\infty,+\infty]^\Phi_{\text{sph}}$ tels que $q_\alpha=+\infty \Leftrightarrow q_{-\alpha}=-\infty$ et que, pour toute relation linéaire finie $\sum n_\alpha\alpha=0$ (à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et portant sur les $\alpha\in\Phi$ avec $q_\alpha\neq\pm\infty$), on a $\sum n_\alpha q_\alpha=0$.

Les murs (respectivement demi-appartements) de $\mathbb{A}^s$ sont les sous-ensembles définis par une équation (respectivement inéquation) du type $q_\alpha=\lambda_\alpha$ (respectivement $q_\alpha\leqslant\lambda_\alpha$) pour $\alpha\in\Phi$ et $\lambda_\alpha\in\Lambda$ fixés. On en déduit facilement une définition des facettes.

4.2.3 L'action de N (i.e. de W_Y) sur $\mathbb{A}$ passe au quotient en une action sur $\mathbb{A}^s$. On peut la décrire directement sur $[-\infty,+\infty]^\Phi$: $w\in W^v$ agit par $w((q_\alpha)_\alpha)=(q'_\alpha)_\alpha$ où $q'_\alpha=q_{w^{-1}\alpha}$ et $y\in Y_\mathbb{R}$ agit par $(q_\alpha)_\alpha\mapsto(q_\alpha+\alpha(y))_\alpha$. Le fixateur (point par point) de $\mathbb{A}^s$ dans N est $H^s=\{t\in T \mid \omega(\alpha(t))=0\ \forall\alpha\in\Phi\}$.

Les groupes $P(F)$ ou $\widehat{P}_x$ ne dépendent que de l'image de F ou x dans le quotient. Par contre pour $F^s=\pi(F)$ facette de $\mathbb{A}^s$ ou $x^s=\pi(x)\in\mathbb{A}^s$, il est naturel de rajouter à $P(F)$ ou $\widehat{P}_x$ un sous-groupe de T qui stabilise F^s ou x^s : on pose $T(F^v)=\{t\in T \mid \alpha(t)=1,\forall\alpha\in X\cap\mathbb{Q}\Phi^m(F^v)\}$, ainsi $H.T(F^v)=\{t\in T \mid \omega(\alpha(t))=0,\forall\alpha\in\Phi^m(F^v)\}$. On peut définir $P^s(F)=P(F).T(F^v)=M(F).T(F^v).U(F^v)$ et $\widehat{P}^s_x=\widehat{P}_x.T(F^v(x))$; le groupe $T(F^v).U(F^v)$ est le radical de $P(F^v)$.

La construction des définitions 3.1 (en utilisant les $\widehat{P}^s_x$ et l'action de N sur $\mathbb{A}^s$) fournit un immeuble $\mathcal{I}^s$, dont les facettes ou appartements sont en bijection avec ceux de $\mathcal{I}$; on dit que c'est l'*immeuble de Satake* associé à $\mathcal{I}$.

4.2.4 On peut mettre une topologie sur $\mathbb{A}^s$: une base de voisinages ouverts de $x^s\in Y_\mathbb{R}(F^v)$ est indexée par une base de voisinages ouverts $\mathcal{V}$ de x^s dans $Y_\mathbb{R}(F^v)$ et des $\lambda_\alpha\in\mathbb{R}$ pour α dans une base Π de Φ contenue dans $\Phi(F^v)$; l'ouvert U associé à un $\Omega\in\mathcal{V}$ et à des λ_α est réunion de ses intersections avec les $Y_\mathbb{R}(F^v_1)$ tels que $F^v_1\subset\overline{F^v}$:

$$U\cap Y_\mathbb{R}(F^v_1)=\{y\in\pi_{F^v_1}(\pi^{-1}_{F^v}(\Omega)) \mid \beta(y)\geqslant\lambda_\beta,\forall\beta\in\Phi^m(F^v_1)\cap\Phi^u(F^v)\}$$

où $\lambda_\beta=\sum_{\alpha\in\Pi}n_\alpha\lambda_\alpha$ si $\beta=\sum_{\alpha\in\Pi}n_\alpha\alpha$ avec $n_\alpha\in\mathbb{N}$.

Cette topologie est en fait induite par la topologie naturelle de $[-\infty,+\infty]^\Phi$.

Pour cette topologie l'adhérence de $Y_\mathbb{R}(F^v)$ est la réunion de $Y_\mathbb{R}(F^v)$ et des $Y_\mathbb{R}(F^v_2)$ pour $\overline{F^v_2}\supset F^v$. Cette adhérence est compacte, c'est le compactifié de Satake de $Y_\mathbb{R}(F^v)$, que l'on appelle aussi souvent compactifié polyédrique.

Ainsi $\mathbb{A}^s$ est le recollement des compactifiés de Satake des appartements affines $Y_\mathbb{R}(F^v)$ associés aux facettes vectorielles (sphériques) F^v de $\mathbb{A}^v$. On en déduit que $\mathcal{I}^s$ est le recollement de tous les 'compactifiés' de Satake des immeubles affines des sous-groupes paraboliques sphériques de G (agissant via les semi-simplifiés de leurs quotients réductifs).

4.2.5 On peut aussi, selon la même démarche et d'après la proposition 3.3, élargir le filtre de parties de $\mathbb{A}^s$ associé à une facette F^s. Le filtre $\mathcal{F}^s$ a une base indexée par $\mathcal{F}$ et des $\lambda_\alpha\in\mathbb{R}$ pour α dans une base Π de Φ contenue dans $\Phi(F^v)$; l'élément $\Omega^s((\lambda_\alpha)_\alpha)$ associé à un $\Omega\in\mathcal{F}$ et à des λ_α est réunion de ses intersections avec les $Y_\mathbb{R}(F^v_1)$ tels que $F^v_1\subset\overline{F^v}$:

$$\Omega^s\cap Y_\mathbb{R}(F^v_1)=\{y\in\pi_{F^v_1}(\Omega) \mid \beta(y)\geqslant\lambda_\beta,\ \forall\beta\in\Phi^m(F^v_1)\cap\Phi^u(F^v)\}$$

où $\lambda_\beta=\sum_{\alpha\in\Pi}n_\alpha\lambda_\alpha$, si $\beta=\sum_{\alpha\in\Pi}n_\alpha\alpha$ avec $n_\alpha\in\mathbb{N}$.

Le lecteur pourra aussi définir $\mathcal{F}^s$ directement dans $[-\infty,+\infty]^\Phi$.

https://doi.org/10.1112/S0010437X05001806 Published online by Cambridge University Press

4.2.6 D'après les définitions 3.1, tout élément de $P(F)$ fixe (point par point) l'un des éléments de ce filtre $\mathcal{F}^s$ et $P^s(F)$ est le stabilisateur de F^s ; on dit que $P(F)$ est le *fixateur au sens fort* de F^s. Par contre le fixateur (point par point) de F^s (ou plutôt d'éléments assez petits de $\mathcal{F}^s$) est un groupe, intermédiaire entre $H^s P(F)$ et $P^s(F)$; il est réduit à $H^s P(F)$ si et seulement si l'intersection des $T(F_1^v)$ (pour $F_1^v \subset \overline{F^v}$) est réduite à H^s, c'est à dire si et seulement si toute facette de codimension 1 de F^v est sphérique (ce qui peut être rare, si F^v n'est pas une chambre).

Cet état de fait pose problème pour l'étude abstraite de l'ensemble des facettes de $\mathcal{I}^s$ (voir [Rou]), en particulier pour définir les rétractions. Heureusement ici $P(F)$ est transitif sur les appartements contenant F, et, si F est une chambre, l'intersection de $P(F)$ avec le stabilisateur N de $\mathbb{A}$ est le fixateur H de $\mathbb{A}$.

4.3 Cas d'un groupe de Kac–Moody de type fini

Alors G est un groupe réductif, toutes les facettes de V sont sphériques i.e. $\mathbb{A}^v = V$. L'immeuble affine de G correspond à la facette vectorielle contenant $\{0\}$. L'immeuble $\mathcal{I}^s$ construit ci-dessus est connu comme le 'compactifié' de Satake (ou compactifié polyédrique) de cet immeuble affine, voir [Gér84] ou [Lan96] ; c'est un espace compact si K est localement compact (corps local).

D'ailleurs, si V est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps local (K, ω) (d'anneau d'entiers $\mathcal{O}$ et d'uniformisante u) et si $G = PGL(V)$, on peut donner une description de $\mathcal{I}^s$ dans l'esprit adopté ici :

On considère les $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$-normes additives sur V, c'est à dire les applications $\gamma : V \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ telles que, pour tous $v, w \in V$ et $\lambda \in K$, on a $\gamma(\lambda v) = \gamma(v) + (0, \omega(\lambda))$, $\gamma(v) = +\infty \Leftrightarrow v = 0$ et $\gamma(v + w) \geqslant \inf\{\gamma(v), \gamma(w)\}$ (pour l'ordre lexicographique sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$). On considère deux normes comme équivalentes si elles se déduisent l'une de l'autre par une bijection de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, croissante et équivariante pour l'action de $\{0\} \times \mathbb{R}$ par translation. L'ensemble quotient des classes de normes s'identifie alors à $\mathcal{I}^s$: si γ est une norme et si, pour $n \in \mathbb{R}$, on définit $V_n = \{v \in V \mid \gamma(v) = (n', m)$ avec $n' \geqslant n\}$, on obtient un drapeau de V (c'est à dire une facette F^v de $\mathcal{I}^v$) et γ induit une $\mathbb{R}$-norme additive sur tous les sous-quotients, donc un élément de l'immeuble de Bruhat–Tits (du quotient par son radical unipotent) du sous-groupe parabolique (sphérique) $P(F^v)$.

Une facette de $\mathcal{I}^s$ s'interprète comme une filtration de V par des sous-$\mathcal{O}$-modules, c'est à dire comme un ensemble $\mathcal{M}$ de sous-$\mathcal{O}$-modules de V, totalement ordonné par l'inclusion, tel que :

- Si $M \in \mathcal{M}$ et $k \in K \setminus \{0\}$, alors $kM \in \mathcal{M}$ et M n'est pas un sous-espace vectoriel de V.
- Si $v \in V \setminus \{0\}$, il existe $M \in \mathcal{M}$ tel que $v \in M$ et $v \notin uM$.

Des compactifications moins fines que la compactification de Satake de PGL sont décrites dans [Wer01, Wer04], en utilisant partiellement ces deux idées de description. Celles-ci sont développées dans un cadre plus général dans [Rou].

4.4 Un exemple hyperbolique

On va dessiner $\mathbb{A}^s$ pour le groupe de Kac–Moody de diagramme de Dynkin

c'est à dire de matrice de Kac–Moody

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

en choisissant $Y = Q^\vee$ et $\Lambda = \mathbb{Z}$.

https://doi.org/10.1112/S0010437X05001806 Published online by Cambridge University Press

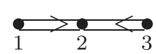
La base est un dessin de [Dun03] essentiellement reproduit dans la figure 1 ; il représente le pavage du plan hyperbolique par des triangles d'angles $\pi/2$, $\pi/4$ et $\pi/6$. C'est la représentation de $\mathbb{A}^v$ (quotienté par le sous-espace vectoriel intersection des noyaux des racines et par les homothéties de rapport positif) et de ses facettes, puisque le groupe de Weyl W^v a pour générateurs r_1, r_2 et r_3 avec pour relations : $r_i^2 = 1 = (r_1r_3)^2 = (r_1r_2)^4 = (r_2r_3)^6$.

On considère la subdivision barycentrique de ce pavage et on associe à chaque barycentre $b(F^v)$ d'une facette F^v le polyèdre $p(F^v)$ (point, segment, carré, octogone ou dodécagone) réunion de certaines de ces subdivisions. Plus précisément l'adhérence de ce polyèdre est l'enveloppe convexe des barycentres $b(F_1^v)$ des facettes F_1^v de $\mathbb{A}^v$ contenant F^v dans leur adhérence et $p(F^v)$ en est l'intérieur relatif. On obtient ainsi le pavage dual du précédent, il est représenté figure 2 et vient aussi de [Dun03].

Il faut imaginer le polyèdre $p(F^v)$ comme homéomorphe à l'espace affine $Y_{\mathbb{R}}(F^v)$ (de dimension 0, 1 ou 2) et le munir de l'ensemble de ses murs qui forment donc un système discret d'hyperplans. La topologie du dessin décrit la topologie expliquée en § 4.2.4. Plus précisément l'adhérence de $p(F^v) = Y_{\mathbb{R}}(F^v)$ est la réunion des $p(F_1^v) = Y_{\mathbb{R}}(F_1^v)$ pour $\overline{F_1^v} \supset F^v$ et on obtient ainsi le compactifié de Satake de l'appartement affine $Y_{\mathbb{R}}(F^v)$.

Dans la figure 3 on a fait figurer les murs de $\mathbb{A}^s$ (en tout cas une partie d'entre eux). Ils se prolongent d'un polyèdre à l'autre, mais on ne peut les représenter sous forme de droites hyperboliques. En effet par exemple dans un polyèdre de type 1 (dodécagone), les murs de même direction (il y a 6 directions) doivent couvrir régulièrement le polyèdre mais passer par les deux faces opposées correspondantes.

Remarque. On peut faire un dessin semblable pour un groupe de Kac–Moody de type (affine) $\widetilde{C}_2$, i.e. de diagramme de Dynkin



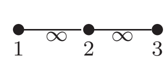
On a un pavage du plan affine euclidien par des triangles rectangles isocèles. On prend le pavage dual réunion de carrés et d'octogones et on trace les murs de façon à obtenir dans chaque octogone (respectivement carré) le compactifié de Satake d'un appartement affine de type $\widetilde{C}_2$ (respectivement $\widetilde{A}_1 \times \widetilde{A}_1$). On visualise ainsi un appartement $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-affine, cf. § 4.1.

4.5 Un exemple plus exotique

On prend l'exemple de [Rém02, 4.3.3 à 4.3.5], il correspond (par exemple) à la matrice de Kac–Moody

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

et son diagramme de Coxeter est



On choisit de plus $Y = Q^\vee$ et $\Lambda = \mathbb{Z}$.

L'appartement $\mathbb{A}^v$ peut se représenter dans la réalisation métrique de Moussong et Davis, en recollant des chambres en forme de poêle à frire carrée (avec pour cloisons deux segments et un point) ; le résultat est représenté dans la figure 4 où les cloisons sont numérotées selon leur type.

L'appartement dual est donc réunion disjointe de segments (ouverts) associés aux cloisons (de type 1, 2 ou 3), de carrés (ouverts) associés à l'unique type ($\{1, 3\}$) de facette sphérique de codimension 2 et de points associés aux chambres, voir figure 5. Ces carrés ou segments sont homéomorphes à $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}$, et on obtient donc l'appartement $\mathbb{A}^s$ en faisant figurer les murs à l'intérieur. On voit sur la figure 6 que $\mathbb{A}^s$ est le recollé (par les coins) d'exemplaires du compactifié de Satake de l'appartement affine de type $\widetilde{A}_1 \times \widetilde{A}_1$ et du compactifié de Satake de l'appartement affine de type $\widetilde{A}_1$.

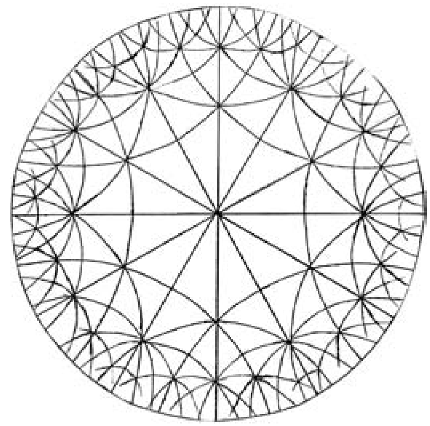


Figure 1. Pavage hyperbolique.

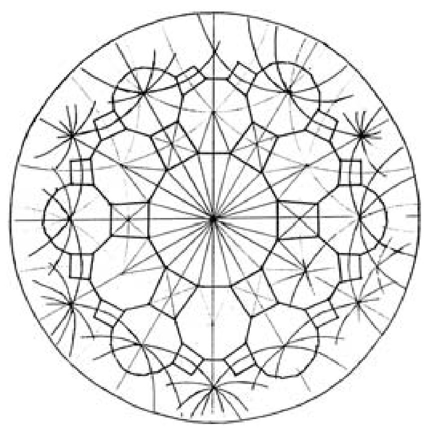


Figure 2. Pavage hyperbolique dual.

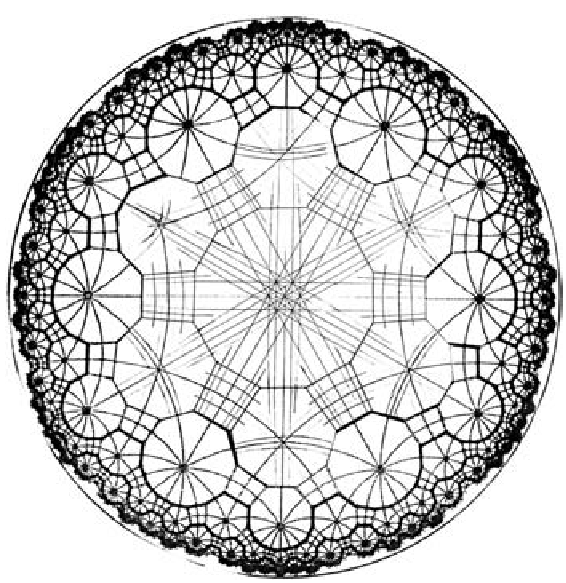


Figure 3. Pavage hyperbolique valué.

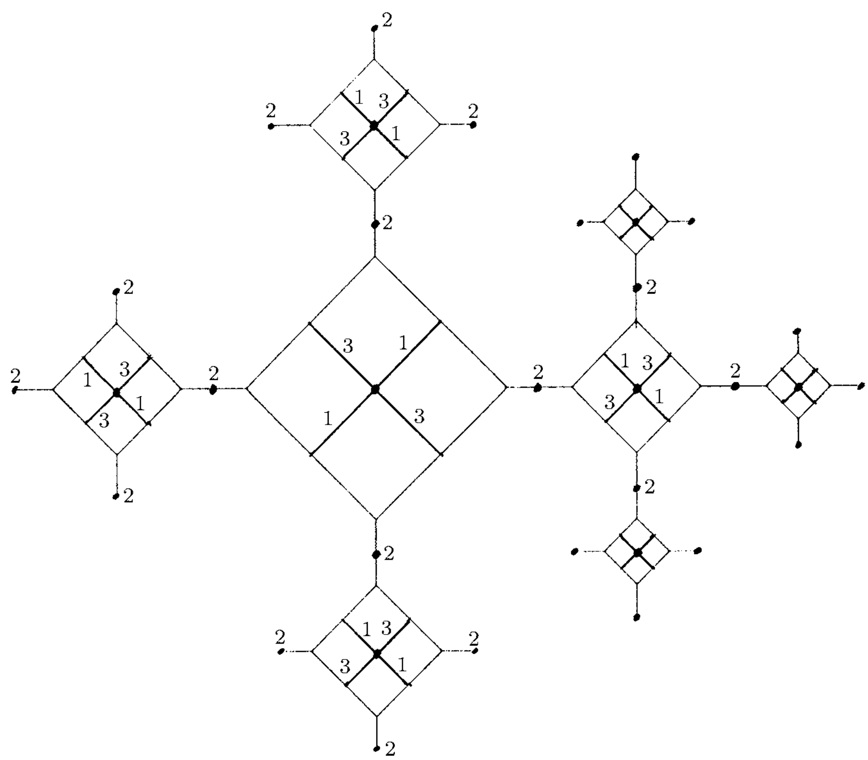


Figure 4. Appartement de Moussong–Davis.

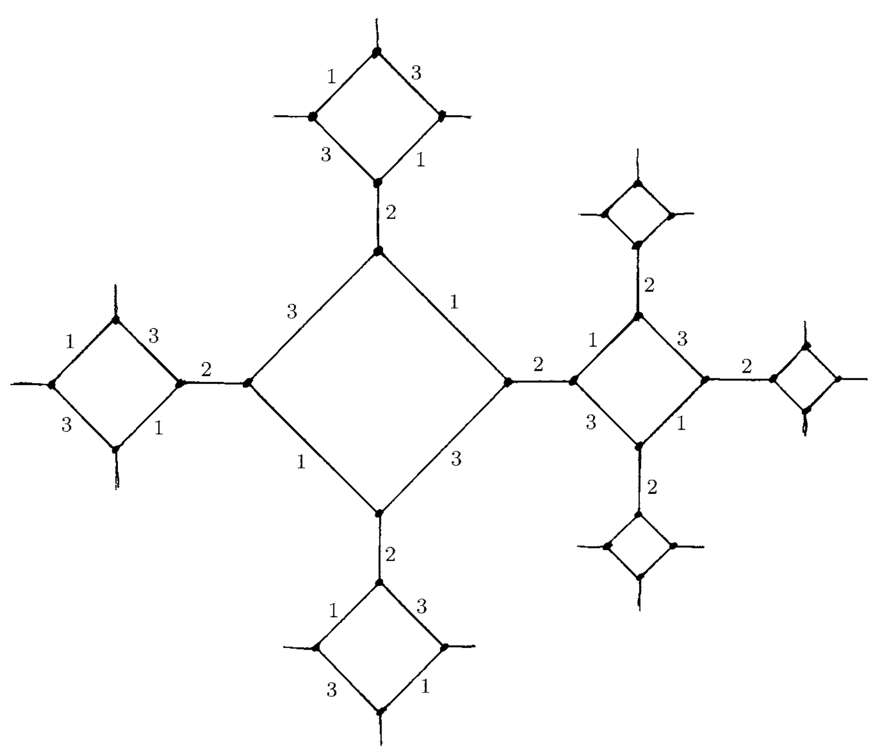


Figure 5. Appartement dual.

https://doi.org/10.1112/S0010437X05001806 Published online by Cambridge University Press

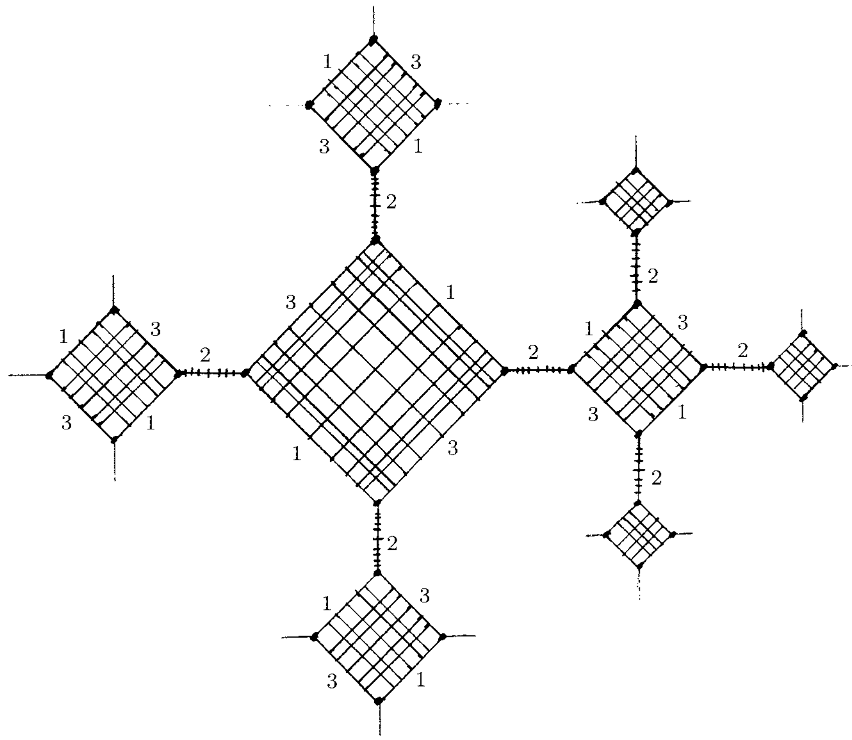


Figure 6. Appartement valué.

4.6 Questions

4.6.1 Pourquoi cet immeuble ? On a déjà discuté en § 2.3, commentaire (3) et § 4.1, remarque (2) d'une définition alternative pour un espace sur lequel G agirait de manière tenant compte de la topologie sur K. Mais l'immeuble microaffine défini ici semble avoir une structure plus proche de celle des immeubles de Bruhat–Tits, cf. § 4.3. Il constitue un exemple nouveau d'immeuble dense au sens de [Rou]. C'est *a priori* le premier exemple d'immeuble non combinatoire qui ne soit pas affine réel au sens de [BT72, Tit86, Par00, Rou04] (cf. § 4.3 avec Λ dense dans $\mathbb{R}$) ou Λ-affine au sens de [Ben90, Ben94].

Par ailleurs cet immeuble semble susceptible d'applications analogues à celles des immeubles de Bruhat–Tits, voir § 4.6.4 ci-après.

4.6.2 Il est naturel d'envisager la généralisation des résultats de cet article aux groupes de Kac–Moody presque déployés. Elle ne devrait pas poser de problème théorique majeur en combinant comme ici les résultats connus pour ces groupes de Kac–Moody presque déployés [Rém02] et pour les immeubles de Bruhat–Tits des groupes réductifs non déployés. Mais il y a quand même du travail !

La généralisation au cas presque anisotrope, étudié sur les réels dans [BR03], est plus hypothétique.

4.6.3 On sait, d'après [Tit92] ou [Rou90], qu'un groupe de Kac–Moody possède en fait un second immeuble $\mathcal{I}^v_-$ qui est jumelé avec l'immeuble $\mathcal{I}^v$ considéré ici. Si $K = k(t)$ est un corps de fractions rationnelles d'une variable et si ω (respectivement ω_-) est la valuation bien connue de ce corps d'uniformisante t (respectivement t^{-1}), on peut construire, outre l'immeuble $\mathcal{I}$ associé à $\mathcal{I}^v$ et ω , un immeuble $\mathcal{I}_-$ associé à $\mathcal{I}^v_-$ et ω_-. Il est naturel de se demander si $\mathcal{I}$ et $\mathcal{I}_-$ sont jumelés

https://doi.org/10.1112/S0010437X05001806 Published online by Cambridge University Press

en un sens à définir. Vraisemblablement on peut prouver des décompositions de Birkhoff reliant les sous-groupes parahoriques associés à $\mathcal{I}$ et $\mathcal{I}_-$. Par contre le jumelage est plus hypothétique : d'abord parce que, les chambres n'étant pas conjuguées par le groupe de Weyl W, une notion de W-codistance est inadaptée. Mais surtout, pour avoir l'immeuble $\mathcal{I}^v$, on doit, semble-t'il, prendre $K = k(t)$ et non $K = k[t, t^{-1}]$ et donc le noyau H de l'action du tore $T = \mathcal{T}(K)$ sur son appartement $\mathbb{A}$ a encore une action non triviale sur l'appartement correspondant $\mathbb{A}_-$ dans $\mathcal{I}_-$.

4.6.4 Si K est localement compact (non archimédien) et si on munit G d'une topologie raisonnable, par exemple inspirée de celle de $G = G^{\min}_{an}$ dans [Kum02, theorem 7.4.14], il est vraisemblable que les fixateurs (au sens fort cf. § 4.2.6) des sommets (ou de certains barycentres de facettes) de $\mathcal{I}^s$ sont les sous-groupes compacts maximaux (ou plutôt distaux maximaux) de G.

Plus précisément la définition raisonnable d'un sous-groupe distal M dans ce cadre semble être : Pour tout poids dominant entier λ, tout vecteur du module L_λ (irréductible de plus haut poids λ) est contenu dans un espace vectoriel M-stable de dimension finie, dans lequel M induit un groupe distal (extension d'un groupe compact par un groupe unipotent). Le résultat espéré ci-dessus devrait alors résulter (au moins pour un corps local de caractéristique zéro) de [KW92, theorem 2.9], d'un peu de descente galoisienne et de [GR05]. La généralisation au cas presque déployé devrait s'appuyer sur [Bar03].

On notera que, pour un groupe de Kac–Moody de dimension infinie, il y a plusieurs notions de sous groupe distal associées aux choix d'une classe de conjugaison de sous-groupe de Borel. Une définition indépendante de ce choix conduirait à la notion de sous-groupe 'algébrique' distal (selon [KW92, § 2.11] ou petit sous-groupe distal selon [Rém02, § 10.2.2]) ou une notion de sous-groupe 'compact'. La classification des maximaux parmi ces sous-groupes devrait utiliser $\mathcal{I}$ et $\mathcal{I}^v_-$.

4.6.5 Si $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on peut définir $\mathbb{A}^s$ comme en § 4.2 (mais sans facettes ni murs) en recollant les compactifiés de Satake des plats maximaux associés à T dans les espaces symétriques des groupes réductifs réels $M(F^v)$ associés aux facettes F^v de $\mathbb{A}^v$. Et on doit donc pouvoir définir un espace intéressant en recollant les compactifiés de Satake des espaces symétriques des groupes réductifs réels $M(F^v)$ associés aux facettes F^v de $\mathcal{I}^v$. Cet espace devrait pouvoir remplacer l'immeuble $\mathcal{I}^s$ du cas non archimédien pour l'usage décrit en § 4.6.4, cf. [GJT98, § 9.27].

References

Abr96 P. Abramenko, *Twin buildings and applications to S-arithmetic groups*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1641 (Springer, Berlin, 1996).

Bar96 N. Bardy-Panse, *Systèmes de racine infinis*, Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.), vol. 65 (Société Mathématique de France, Paris, 1996).

Bar03 C. Barlet-Mathieu, *Représentations des formes d'une algèbre de Kac–Moody*, J. Lie Theory **13** (2003), 591–612.

Ben90 C. D. Bennett, *Affine Λ-buildings*, PhD thesis, The University of Chicago (1990).

Ben94 C. D. Bennett, *Affine Λ-buildings I*, Proc. London Math. Soc. (3) **68** (1994), 541–576.

BR03 H. Ben Messaoud and G. Rousseau, *Classification des formes réelles presque compactes des algèbres de Kac–Moody affines*, J. Algebra **267** (2003), 443–513. (Misprints corrected in J. Algebra **279** (2004), 850–851.)

Bou67 N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Chapters I–VII (Hermann, Paris, 1967).

Bro89 K. S. Brown, *Buildings* (Springer, Berlin, 1989).

BT72 F. Bruhat and J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local I, Données radicielles valuées*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **41** (1972), 5–251.

https://doi.org/10.1112/S0010437X05001806 Published online by Cambridge University Press

BT84 F. Bruhat and J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local II, Schémas en groupes, Existence d'une donnée radicielle valuée*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **60** (1984), 5–184.

Chi01 I. Chiswell, *Introduction to Λ-trees* (World Scientific, Singapore, 2001).

Dun03 D. Dunham, *Creating repeating hyperbolic patterns – old and new*, Notices Amer. Math. Soc. **50** (2003), 452–455.

Gar95 H. Garland, *A Cartan decomposition for p-adic loop groups*, Math. Ann. **302** (1995), 151–175.

Gar97 P. Garrett, *Buildings and classical groups* (Chapman and Hall, London, 1997).

Gér84 P. Gérardin, *Harmonic functions on buildings of reductive split groups*, in *Operator algebras and group representations II* (Neptun, 1980), Pitman Monographs in Mathematics, vol. 18 (Pitman, London, 1984), 208–221.

GJT98 Y. Guivarc'h, L. Ji and J. C. Taylor, *Compactifications of symmetric spaces*, Progress in Mathematics, vol. 156 (Birkhäuser, Basel, 1998).

GR05 Y. Guivarc'h and B. Rémy, *Group theoretic compactifications of Bruhat–Tits buildings*, Preprint (2005).

Hum90 J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 29 (Cambridge University Press, Cambridge, 1990).

IM65 N. Iwahori and H. Matsumoto, *On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of $\mathfrak{p}$-adic Chevalley groups*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **25** (1965), 5–48.

Kac90 V. G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, third edition (Cambridge University Press, Cambridge, 1990).

KP85 V. G. Kac and D. H. Peterson, *Defining relations of certain infinite dimensional groups*, in *Élie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui (Lyon, 1984)*, Astérisque n$^{\text{o}}$ hors série (1985), 165–208.

KW92 V. G. Kac and S. P. Wang, *On automorphisms of Kac–Moody algebras and groups*, Adv. Math. **92** (1992), 129–195.

Kum02 S. Kumar, *Kac–Moody groups, their flag varieties and representation theory*, Progress in Mathematics, vol. 204 (Birkhäuser, Basel, 2002).

Lan96 E. Landvogt, *A compactification of the Bruhat–Tits building*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1619 (Springer, Berlin, 1996).

Mar75 R. Marcuson, *Tits' systems in generalized nonadjoint Chevalley groups*, J. Algebra **34** (1975), 84–96.

MP95 R. Moody and A. Pianzola, *Lie algebras with triangular decompositions* (Wiley, New York, 1995).

MT72 R. Moody and K. L. Teo, *Tits' systems with crystallographic Weyl groups*, J. Algebra **21** (1972), 178–190.

Mor87 J. Morita, *Commutator relations in Kac–Moody groups*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **63** (1987), 21–22.

Par00 A. Parreau, *Immeubles affines : construction par les normes et étude des isométries*, Contemp. Math. **262** (2000), 263–302.

PK83 D. H. Peterson and V. G. Kac, *Infinite flag varieties and conjugacy theorems*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **80** (1983), 1778–1782.

Rém02 B. Rémy, *Groupes de Kac–Moody déployés et presque déployés*, Astérisque **277** (2002).

Ron89 M. A. Ronan, *Lectures on buildings*, Perspectives in Mathematics, vol. 7 (Academic Press, New York, 1989).

Rou G. Rousseau, *Immeubles denses*, in preparation.

Rou77 G. Rousseau, *Immeubles des groupes réductifs sur les corps locaux*, Thèse d'état, Université Paris-Sud Orsay (1977).

Rou90 G. Rousseau, *L'immeuble jumelé d'une forme presque déployée d'une algèbre de Kac–Moody*, Bull. Soc. Math. Belg. **42** (1990), 673–694.

Rou01 G. Rousseau, *Exercices métriques immobiliers*, Indag. Math. (N.S.) **12** (2001), 383–405.

Rou04 G. Rousseau, *Euclidean buildings*, Preprint (2004) in *Géométries à courbure négative ou nulle, groupes discrets et rigidité*, École d'été, Grenoble, 14 June–2 July 2004
(http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ECOLETE/ecole2004/notecours.html).

Sat60a I. Satake, *On representations and compactifications of symmetric Riemannian spaces*, Ann. of Math. (2) **71** (1960), 77–110.

Sat60b I. Satake, *On compactifications of the quotient spaces for arithmetically defined discontinuous groups*, Ann. of Math. (2) **72** (1960), 555–580.

Sch95 R. Scharlau, *Buildings*, in *Handbook of incidence geometry*, ed. F. Buekenhout (Elsevier, Amsterdam, 1995), 477–645.

SGA3 M. Demazure and A. Grothendieck (with the collaboration of M. Artin, J. E. Bertin, P. Gabriel, M. Raynaud and J. P. Serre), *SGA3 : Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1962/64, Schémas en groupes*, Lecture Notes in Mathematics, vols 151–153 (Springer, Berlin, 1970).

Tit66 J. Tits, *Normalisateurs de Tores, groupes de Coxeter étendus*, J. Algebra **4** (1966), 96–116.

Tit74 J. Tits, *Buildings of spherical type and finite BN pairs*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 386 (Springer, Berlin, 1974).

Tit81 J. Tits, *Algèbres de Kac–Moody et groupes associés I, Résumé de cours*, Annuaire Coll. France 1980–1981 (1981), 75–86.

Tit82 J. Tits, *Algèbres de Kac–Moody et groupes associés II, Résumé de cours*, Annuaire Coll. France 1981–1982 (1982), 91–106.

Tit85 J. Tits, *Groups and group functors attached to Kac–Moody data*, in *Arbeitstagung (Bonn, 1984)*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1111 (Springer, Berlin, 1985), 193–223.

Tit86 J. Tits, *Immeubles de type affine*, in *Buildings and the geometry of diagrams (Como, 1984)*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1181 (Springer, Berlin, 1986), 159–190.

Tit87 J. Tits, *Uniqueness and presentation of Kac–Moody groups over fields*, J. Algebra **105** (1987), 542–573.

Tit92 J. Tits, *Twin buildings and groups of Kac–Moody type*, in *Groups combinatorics and geometry (Durham, 1990)*, ed. M. W. Liebeck and J. Saxl, London Mathematical Society Lecture Notes, vol. 165 (Cambridge University Press, Cambridge, 1992), 249–286.

Wer01 A. Werner, *Compactification of the Bruhat–Tits building of PGL by lattices of smaller rank*, Doc. Math. **6** (2001), 315–342.

Wer04 A. Werner, *Compactification of the Bruhat–Tits building of PGL by seminorms*, Math. Z. **248** (2004), 511–526.

Guy Rousseau rousseau@iecn.u-nancy.fr
Institut Élie Cartan, Unité mixte de recherche 7502, CNRS-INRIA-UHP, Université Henri Poincaré Nancy 1, BP 239, 54506 Vandœuvre lès Nancy cedex, France