

FONCTIONS ELLIPTIQUES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

RAOUF CHOUIKHA

RÉSUMÉ. In this paper, we detail some results of a previous note concerning a trigonometric expansion of the Weierstrass elliptic function $\{\wp(z); 2\omega, 2\omega'\}$. In particular, this implies its classical Fourier expansion. We use a direct integration method of the ODE

$$(E) \begin{cases} \frac{d^2u}{dt^2} = P(u, \lambda) \\ u(0) = \sigma \\ \frac{du}{dt}(0) = \tau \end{cases}$$

where $P(u)$ is a polynomial of degree $n = 2$ or 3 . In this case, the bifurcations of (E) depend on one parameter only. Moreover, this global method seems not to apply to the cases $n > 3$.

0. Introduction. Dans ce papier, on expose les résultats de la Note [2] concernant un type de développement de la fonction elliptique $\{\wp(z); 2\omega, 2\omega'\}$ de Weierstrass. Le Lemme (1-2) permet d'exprimer les solutions périodiques complexes de l'équation différentielle ordinaire (2). On retrouve ainsi certaines propriétés des fonctions elliptiques et, notamment les q -développements trigonométriques classiques de la fonction $\{\wp(z); g_2, g_3\}$ et, les relations entre les coefficients de ces différentes expansions.

Par ailleurs, les bifurcations des solutions périodiques de l'équation (2) dépendent exactement d'un paramètre complexe, par contre pour les équations différentielles homogènes du type

$$\frac{d^2u}{dt^2} = P(u, \lambda) \quad \text{où } P \text{ est un polynôme en } u, \text{ de degré } n > 4,$$

les bifurcations de leurs solutions périodiques dépendent d'au moins 3 paramètres indépendants. Dans ce cas, la méthode de développement envisagée plus haut pour ces solutions semble ne plus fonctionner.

1. Equation différentielle et développement trigonométrique des solutions.

Soit $u(z)$ une fonction complexe définie sur un ouvert de \mathcal{C} , solution de l'équation différentielle :

$$(1) \quad \left(\frac{du}{dz}\right)^2 = 4u^3 - au - b \quad a, b \in \mathcal{C}.$$

Reçu par les éditeurs le November 28, 1995.

Classification (AMS) par sujet : Primary: 33E05, 34A05; Secondary: 33E20, 33E30, 34A20, 34C23.

© Société mathématique du Canada 1997.

Alors, celle-ci peut s'écrire $u(z) = \wp(z + c)$ où \wp est la fonction de Weierstrass et, c une constante complexe définie par les conditions initiales sur u . Le réseau associé étant $L = \{2m\omega + 2m'\omega'; m, m' \in \mathbb{Z}\}$ avec $a = g_2(L)$ et $b = g_3(L)$. D'une manière plus précise l'équation différentielle sur \mathbb{R} :

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d^2u}{dt^2} + u^2 - u = 0 \\ u(0) = 1 + s \\ \frac{du}{dt}(0) = t \end{cases}$$

peut être intégrée au moyen de la fonction $\wp(z)$ de Weierstrass et, lorsque s et t sont tels que : $g(s, t) = \frac{3}{2}t^2 + 2s^2(2s + 3)$ soit comprise entre les valeurs 0 et 2, alors la solution réelle qui est périodique peut s'écrire $u(x) = \frac{1}{2} - 6\wp(x + x_0)$ où x_0 est défini par : $\wp(x_0) = -(1 + 2s)/6$ et $\wp'(x_0) = -t/6$.

Par ailleurs, nous savons que la fonction \wp peut s'exprimer au moyen de fonctions loxodromiques, qui sont des fonction uniformes en z par la substitution (z, qz) où le multiplicateur complexe q est tel que $|q| \neq 1$. Les points en lesquels elles prennent une même valeur sont situés sur des spirales logarithmiques, lorsque l'argument de q n'est pas multiple de π , voir Valiron [6], Lang [4].

La fonction $\rho(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{q^n z}{z - q^n}\right)^2$ vérifie l'égalité $\rho(z) = \rho(1/z)$ et la fonction $\eta(z) = \rho(z) + (1/12) - 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n}{q^n - 1}$ est solution de l'équation différentielle :

$$(3) \quad z^2(\eta'(z))^2 = 4(\eta(z))^3 - a(\eta(z)) - b$$

d'où la relation $\eta(z) = -(\omega/\pi)^2 \wp(x)$ avec $z = \exp(i\pi x/\omega)$ et $q = \exp(-2i\omega'/\omega) = \exp \tau$, ω étant la demi-période réelle, ω' la demi-période imaginaire. Ainsi, la fonction de Weierstrass peut s'exprimer sous forme d'un q -développement :

$$(4) \quad \wp(x) = (\pi/\omega)^2 \left[-\left(\frac{1}{12}\right) + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n}{q^n - 1} + \frac{1}{[2 \sin(\pi x/2\omega)]^2} - 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n \cos(n\pi x/\omega)}{q^n - 1} \right]$$

où x appartient à une bande horizontale contenant un parallélogramme des périodes.

Par l'intermédiaire de la fonction $\eta(z)$, on peut déduire d'autres expressions de $\wp(z)$ analogue à (4), par exemple :

$$(5) \quad \wp(x) = (\pi/\omega)^2 \left[-\left(\frac{1}{12}\right) + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{n}{q^n - 1}\right) + \frac{1}{4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2\omega}(x + 2n\omega')\right)} \right].$$

Nous savons par ailleurs, que la dérivée s'annule pour les trois valeurs $\omega, \omega', \omega + \omega'$ avec $\wp(\omega) = e_1, \wp(\omega + \omega') = e_2$ et $\wp(\omega') = e_3$. De plus à partir des expressions (4) et (5) on peut en déduire celle des e_i en fonction de q .

Par une intégration directe de l'équation (1), on peut trouver une autre expression de la fonction $\wp(z)$ analogue à (4), mais indépendamment de la fonction $\eta(z)$ précédente, Chouikha [2].

THÉORÈME (1-1). Lorsque les coefficients réels a_p , $p \in \mathbb{N}$, vérifient les conditions suivantes :

$$(6) \quad (p+1)(p+2)a_{p+2} = [p^2 - (\omega/\pi)^2(2s+1)]a_p - (\omega/\pi)^2 \sum_{0 < r < p} a_r a_{p-r}$$

avec $a_0 = 1 + s$, $a_1 = t$ tels que $0 \leq s < s_0$ et $|t| < t_0$ alors les solutions réelles 2ω -périodiques de l'équation (1) peuvent s'écrire :

$$(7) \quad \varphi_{s,t}(x) = a_0 + \sum_{p \geq 0} a_p \sin^p(\pi x/\omega) \quad \varphi_{0,0} \equiv 1.$$

Pour démontrer ce théorème, on a besoin essentiellement du lemme suivant.

LEMME (1-2). Sous les conditions du Théorème (1-1), pour tout réel ϵ vérifiant $0 < \epsilon \leq \frac{1}{6}$, il existe 3 constantes k , s_0 et t_0 de façon que les coefficients du développement d'une solution $\varphi_{s,t}(x)$ 2ω -périodique satisfont l'estimation :

$$|a_p| < \frac{k}{p^{\frac{3}{2}-\epsilon}} \text{ pour tout entier } p > 1$$

avec $0 < s < s_0$ et $|t| < t_0$.

DÉMONSTRATION. On établit l'existence de 2 constantes réelles $k > 0$ et $\alpha > 1$ telles que $|a_p| \leq \frac{k}{p^\alpha}$ pour tout entier p strictement positif. Pour cela, on pose

$$w(p) = \frac{p+1}{p} \left(\frac{p-1}{p+2} \right)^{\alpha-1} \text{ et}$$

$$g(p) = 1 - \frac{(p^2 - (1+2s)(\omega/\pi)^2)(p+2)^{\alpha-1}}{(p+1)p^\alpha}.$$

L'inégalité suivante $(\omega/\pi)^2 k \leq p w(p) g(p)$ entraîne $|a_{p+2}| \leq \frac{k}{(p+2)^\alpha}$. En effet, cela résulte du fait que $|\sum_{0 < r < p} a_r a_{p-r}| \leq \frac{k^2}{(p-1)^{\alpha-1}}$ et, d'après la relation (6), on obtient l'inégalité suivante

$$[p^2 - (1+2s)(\omega/\pi)^2] \frac{k}{p^\alpha} + (\omega/\pi)^2 \frac{k^2}{(p-1)^{\alpha-1}} \leq \frac{k(p+1)}{(p+2)^\alpha}.$$

Par ailleurs, une étude de la fonction $g(p)$ montre que celle-ci est décroissante en p et que $g(p) > \frac{(3-2\alpha)}{p}$. Ainsi, pour $\alpha < \frac{3}{2}$ on a $g(p) > 0$, $\forall p \geq 1$ et, si $\alpha = \frac{3}{2}$, $g(p) < 0$ à partir d'une certaine valeur p_0 . Pour étudier la fonction $w(p)$, posons $r = \frac{p-1}{p+2}$, la fonction dérivée $\frac{dw}{dr}$ s'annule pour r_1 et $\frac{1}{r_1}$ avec $r_1 = \frac{8-5\alpha-\sqrt{3(\alpha-4)(3\alpha-4)}}{4(\alpha-1)}$. Donc si $\alpha \geq \frac{4}{3}$, alors $w(p)$ est une fonction croissante de p , et, $w(p) \geq \left(\frac{3}{2}\right)4^{1-\alpha}$. Dans ces conditions, il suffit de choisir la constante k telle que : $k \leq (\pi/\omega_0)^2 \frac{3}{2} 4^\epsilon$ où $\epsilon = \frac{3}{2} - \alpha$. Ainsi, $\forall p > 1$ on a $k < \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 p w(p) g(p)$ car $\pi \leq \omega \leq \omega_0$ lorsque $g(s, t) \leq g(s_0, t_0)$ (ce fait sera explicité plus loin en étudiant le cas $t = 0$).

En amorçant la récurrence, on détermine enfin les bornes s_0 et t_0

$$2|a_2| = s(s+1)(\omega/\pi)^2 < s_0(s_0+1)(\omega_0/\pi)^2 \leq (\pi/\omega_0)^2 \frac{3\epsilon 4^\epsilon}{2^{(\frac{3}{2}-\epsilon)}}.$$

Ainsi, $2s_0 \leq -1 + \sqrt{1 + (\pi/\omega_0)^4 3\epsilon 2^{3\epsilon + \frac{1}{2}}}$. Par ailleurs,

$$6|a_3| = |1 - (1 + 2s)(\omega/\pi)^2| |t| < |(1 + 2s_0)(\omega_0/\pi)^2 - 1| |t_0| \leq (\pi/\omega_0)^2 \frac{9\epsilon 4^\epsilon}{3^{(\frac{3}{2}-\epsilon)}}.$$

REMARQUE. En fait, une solution du système (2) dépend analytiquement des paramètres s et t lorsque la quantité $g(s, t) = 3t^2/2 + 2s^2(2s + 3)$ est différente de la valeur 2 (valeur pour laquelle la période 2ω devient infinie), voir Whittaker-Watson [7].

Par conséquent, en vertu du prolongement analytique la série mise en évidence par le théorème (1-1) est une solution réelle de (2) lorsque $0 \leq g(s, t) < 2$; ($g(s, t) = 0$ correspondant à la solution triviale $\varphi \equiv 1$). En fait, cette expression est valable pour toutes valeurs complexes des paramètres.

Par ailleurs, toutes les solutions $\varphi_{s,t}(x)$ telles que $g(s, t) = C$, pour différentes valeurs des paramètres coïncident; cela correspond à un changement d'origine sur la courbe intégrale; il est donc naturel de fixer l'un des deux paramètres. Remarquons aussi que lorsque ϵ est très petit $\varphi_{s,t}(x)$ est très proche de la solution triviale $\varphi_{0,0}(x) \equiv 1$.

2. Quelques propriétés des fonctions elliptiques. Pour une solution φ du système (2), faisons le changement de fonctions suivant $v(x) = \frac{1-2\varphi(x)}{12}$ alors cette fonction et sa dérivée vérifient l'équation :

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = 4v^3 - \frac{v}{12} - g \quad \text{où} \quad 6^3g = 1 - \frac{3t^2}{2} - 2s^2(3 + 2s).$$

Cette solution est périodique réelle si g vérifie la condition: $-1 \leq 6^3g \leq 1$. D'où en posant $6^3g = \cos 3\theta$ avec $0 \leq \theta < \pi/3$, on trouve :

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = 4 \left[v - \frac{\cos(4\pi/3 + \theta)}{6} \right] \left[v - \frac{\cos(2\pi/3 + \theta)}{6} \right] \left[v - \frac{\cos \theta}{6} \right].$$

On peut aussi déterminer la période ω en fonction de θ .

Pour étudier les propriétés de ces solutions et leurs liens avec des fonctions elliptiques classiques, on est ramené à l'étude du système suivant déduit de (2) en prenant pour paramètre $t = 0$

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{d^2u}{dt^2} + u^2 - u = 0 \\ u(0) = 1 + 2 \\ \frac{du}{dt}(0) = 0. \end{cases}$$

Dans ce cas, $\varphi_s(x) = \sum_{p \geq 0} a_{2p} (\sin^{2p}(\pi x/2\omega))$ (avec $\varphi_0 \equiv 1$) est une solution de ce système si les coefficients satisfont les conditions

$$(9) \quad (2p + 1)(2p + 2)a_{2p+2} = [4p^2 - (2\omega/\pi)^2(2s + 1)]a_{2p} - (2\omega/\pi)^2 \sum_{0 < r < p} a_{2r}a_{2p-2r}$$

et que $\sum_{p \geq 1} |a_{2p}|$ converge avec $a_0 = 1 + s$ alors $\cos 3\theta = 1 - 2s^2(3 + 2s)$ d'où la condition sur le paramètre s pour s'assurer que la solution est périodique réelle: $0 \leq s < \frac{1}{2}$. De plus cette solution doit être telle que $0 < \varphi_s(x) < 1 + s$ (car tous les coefficients a_{2p} sont négatifs). Par ailleurs, on a la relation avec la fonction de Weierstrass $\wp_s(x) = \frac{1 - 12\wp(x+x_0)}{6}$ avec $\wp(x_0) = \frac{-(1+2s)}{12}$ et $\wp'(x_0) = 0$. Par conséquent $x_0 = \omega'$ (la demi-période imaginaire pure) et donc $e_3 = \wp(x_0)$ d'où

$$e_2 = \wp(x_0 + \omega) = -\frac{1}{12} \left[1 + 2s + 2 \sum_{p \geq 1} a_{2p} \right];$$

$$e_1 = \wp(\omega) = -\frac{1}{12} \left[1 + 2s + 2 \sum_{p \geq 1} a_{2p} (\cosh \pi\tau)^{2p} \right]$$

avec $\tau = -2i\omega/\omega' = \ln q$ les e_i étant les zéros de la fonction $\wp'(x)$.

A partir de la formule d'addition, on en déduit la formule suivante :

$$\wp(x) = \wp(x_0) + \frac{\left[3(\wp(x_0))^2 - \frac{1}{48} \right]}{[\wp(x+x_0) - \wp(x_0)]}$$

$$= -\frac{1}{12}(1+2s) - \frac{s(s+1)}{2 \sum_{p \geq 1} a_{2p} [\sin(\pi x/2\omega)]^{2p}}.$$

On a donc le résultat suivant :

THÉORÈME (2-1). *Lorsque les coefficients a_{2p} sont définis par les conditions (9), on a alors l'expression de la fonction $\wp(z; 2\omega, 2\omega')$ relative à $g_2 = -\frac{1}{12}$ et $g_3 = 6^{-3}[1 - 2s^2(3 + 2s)]$*

$$12\wp(z + \omega') = 1 - 6 \sum_{p \geq 0} a_{2p} \sin^{2p}(\pi x/2\omega).$$

La fonction $\varphi(x)$ solution du système (8) vérifie donc l'égalité suivante

$$\varphi(x) = 1 + s + \frac{3s(s+1)}{1 + s - \varphi(x - \omega')}.$$

Ainsi le point à l'infini de la courbe intégrale (Y_s) de l'équation (8), correspondant à la valeur du paramètre $x = \omega'$ peut être ramené à "distance finie" par un changement d'origine (relativement aux conditions initiales).

La condition de récurrence (9) sur les coefficients de la série nous donne explicitement l'expression de a_{2p} en fonction de s , on peut aussi calculer leur somme $\sum_p a_{2p}$ ou déterminer des valeurs particulières de $\varphi(x)$ en fonction de s , tel le minimum. Par exemple, un calcul nous donne

$$e_1 = -\left(\frac{1}{12}\right)(1+2s) - \frac{s(s+1)}{2 \sum_{p \geq 1} a_{2p}} \quad \text{et}$$

$$e_2 = -\left(\frac{1}{12}\right)(1+2s) - \frac{s(s+1)}{2 \sum_{p \geq 1} a_{2p} (\cosh \pi\tau)^{2p}}.$$

On en déduit les égalités suivantes :

$$\left[\sum_{p \geq 1} a_{2p} (\cosh \pi \tau)^{2p} \right] \left[\sum_{p \geq 1} a_{2p} \right] = 3s(s + 1);$$

$$\sum_{p \geq 1} a_{2p} (\cosh \pi \tau)^{2p} + \sum_{p \geq 1} a_{2p} = -\left(\frac{3}{2}\right)(1 + s),$$

(la deuxième égalité résulte du fait que $e_1 + e_2 + e_3 = 0$).

COROLLAIRE (2-2). *Sous les hypothèses du Théorème (2-1), on a les formules suivantes :*

$$\sum_{p \geq 1} a_{2p} = \left(\frac{1}{4}\right) \sqrt{3(1 - 2s)(3 + 2s)} - \left(\frac{3}{4}\right)(1 + 2s)$$

$$\sum_{p \geq 1} a_{2p} (\cosh \pi \tau)^{2p} = -\left(\frac{1}{4}\right) \sqrt{3(1 - 2s)(3 + 2s)} - \left(\frac{3}{4}\right)(1 + 2s).$$

On déduit les e_i en fonctions du paramètre s

$$e_1 = \frac{(1 + 2s) + \sqrt{3(1 - 2s)(3 + 2s)}}{24} \quad e_2 = \frac{(1 + 2s) - \sqrt{3(1 - 2s)(3 + 2s)}}{24}.$$

REMARQUE (2-3). a) On peut déduire du Théorème (2-1) le développement en série de Fourier proprement dit de la fonction $\wp(z + \omega')$. En effet :

$$\wp(z + \omega') = \sum_{n \geq 0} \beta_{2n} \cos 2nx \quad \text{où} \quad x = \frac{\pi z}{\omega}.$$

Les coefficients de Fourier sont donnés par les relations

$$\beta_0 = \sum_{p \geq 0} \frac{a_{2p}}{2^p} \binom{p}{2p} \quad \text{et} \quad \beta_{2n} = (-1)^n \sum_{p \geq n} \frac{a_{2p}}{2^{2p-1}} \binom{p-n}{2p}.$$

Notons que les coefficients de Fourier vérifient l'estimation $|\beta_{2n}| \leq \frac{k'}{(2n)^{2-\epsilon}}$ (où $k' = \left(\frac{2k}{\sqrt{\pi}}\right) \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n)^{2-\epsilon}}$ k étant la constante établie par le Lemme (1-2)). Cela résulte d'abord du Lemme (1-2) qui établit une estimation sur les coefficients a_{2p} et du fait que

$$\binom{p-n}{2p} \leq \binom{p}{2p} \sim \frac{2^{2p}}{\sqrt{\pi p}}$$

pour $n \leq p$ assez grand (cette inégalité découle d'une propriété de la fonction Gamma, à savoir $\Gamma(p+n+1)\Gamma(p-n+1) \geq \Gamma^2(p+1)$ pour tout $n \geq 0$). D'une manière générale, comme l'a précisé. H. Lebesgue [5] p. 29, une fonction $f(x)$ périodique admettant un développement du type $\sum_{p \geq 0} \sin^{2n} x$ admet aussi un développement en série de Fourier. Mais réaliser la réciproque, cela exige des hypothèses supplémentaires; il faut s'assurer de la convergence de la série des puissances des sinus.

Par ailleurs, on connaît bien le développement trigonométrique de la fonction de Weierstrass ([7]) :

$$\wp(z + \omega'; 2\omega, 2\omega') = e_3 + \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^2 \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{n}{q^{n/2} - q^{-n/2}} \sin^2\left(\frac{n\pi z}{2\omega}\right)$$

où $q = \exp(-2i\omega'/\omega)$. Ainsi $\beta_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{n}{2(q^{n/2} - q^{-n/2})}$.

b) En considérant le système suivant :

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} + u^2 - u + \frac{1-c^2}{4} = 0 \\ u(0) = \frac{1+c}{2} + s \\ \frac{du}{dt}(0) = 0 \end{cases}$$

où c est un réel, on peut établir un résultat analogue au Théorème (1-1) grâce à la même méthode d'intégration ; les solutions de ce système peuvent s'écrire :

$$\varphi_s(x) = \frac{1+c}{2} + s + \sum_{p \geq 1} a_{2p} (\sin^{2p}(\pi x/2\omega)) \quad \left(\text{avec } \varphi_0 \equiv \frac{1+c}{2}\right).$$

On peut alors déduire l'expression de $\wp(z + \omega'; 2\omega, 2\omega')$ relative à

$$g_2 = \frac{1+3c^2}{48} \text{ et } g_3 = 6^{-3} \left[1 - 2s^2(3+2s) - \frac{1-c^2}{96} \left(s + \frac{1}{2} \right) \right]$$

du fait que $\varphi_s(x) = \frac{1-12\wp(x+\omega')}{6}$.

3. Paramètres de bifurcation de certaines équations. D'après l'étude précédente, la famille des courbes intégrales (Y_s) du système (8) dégénère pour les valeurs réelles de s égales à 0 et $\frac{1}{2}$; (Y_0) admet deux composantes connexes, l'une le point de coordonnées $(1,0)$ qui est un vrai centre pour l'équation (8), l'autre est de période imaginaire, tandis que $(Y_{\frac{1}{2}})$ est un foyer pour (8). La période réelle 2ω d'une solution est une fonction croissante de s sur l'intervalle $I = [0, 1/2]$.

Pour les valeurs complexes, s paramètre le processus d'éclatement autour de la dégénérescence (Y_0) de la famille (Y_s) considérées comme variétés complexes de dimension 1, homéomorphes à un tore $C/L(\omega, \omega')$. Toutes ces courbes sont birationnellement isomorphes et, ce processus d'éclatement décrit un certain type d'isomorphisme non régulier, résultant en particulier du fait que les transformations birationnelles d'une courbe de genre 1 en elle-même dépendent analytiquement d'un seul paramètre. Auquel cas toute courbe plane (Y) d'équation $F(x, y) = 0$, peut être paramétrée par des fonctions elliptiques $x = \varphi(z)$; $y = \psi(z)$. Mais si une courbe (Y) est de genre $g > 1$, le point à l'infini devient nécessairement singulier pour toute paramétrisation $x = \varphi(z)$; $y = \psi(z)$, en ce sens que les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ ne sont plus méromorphes ; les courbes de genre $g > 1$ se paramétrisant au moyen des fonctions automorphes.

Du point de vue des équations différentielles d'après un résultat d'Hermite l'équation $F(u, \frac{du}{dt}) = 0$ admet une solution générale uniforme seulement si la courbe intégrale $F(x, y) = 0$ est de genre ≤ 1 . Si de plus, on fait dépendre cette équation différentielle d'un

paramètre λ complexe (essentiel) : la famille des courbes intégrales (Y_λ) dégénère pour une certaine valeur λ_0 du paramètre, il en résulte alors un cas de bifurcation pour cette équation au passage de la valeur critique $\lambda = \lambda_0$, qui admet deux courbes de solutions, dont l'une est triviale.

Soit (Y) une courbe elliptique et j l'invariant modulaire attaché à cette courbe, on sait que j est un invariant d'isomorphisme sur C , agissant sur le domaine fondamental (pour l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur le demi-plan $H^+ = \{\tau \in C \mid \text{Im}\tau > 0\}$), mais n'est pas un invariant d'isomorphisme sur R pour les courbes elliptiques réelles, alors que lorsque $q' = \exp(2i\omega'/\omega)$ varie dans la couronne $0 < |q'| < 1$, il paramètre une famille $(F_{q'})$ analytique non triviale de courbes elliptiques : ainsi, deux courbes elliptiques réelles sont analytiquement isomorphes, si elles ont le même invariant (réel) q' .

Quant à la famille des courbes intégrales (Y_s) du système (8) mise en évidence, le paramètre s joue le même rôle que q' : s est un invariant d'isomorphisme sur R lorsqu'il varie dans l'intervalle $I = [0, 1/2]$. En effet, à chaque valeur de cet intervalle, il correspond une courbe elliptique réelle, dont les périodes qui dépendent analytiquement de s peuvent être calculées explicitement. Donc $q' = h(s) = \exp(2i\omega'(s)/\omega(s))$ est une fonction holomorphe du paramètre effectif s . Ainsi, la famille analytique complexe (Y_s, I, β) définie par $\beta^{-1}(s) = Y_s$ est une famille induit de $(Y_{q'})$ par l'application holomorphe h , et les déformations infinitésimales $\Theta(s) = \frac{dY_s}{ds}$ sont des éléments non nuls, Kodaira [3].

Pour une courbe (E) de genre $g > 1$, sa structure analytique complexe dépend de $m = 3g - 3$ paramètres ; il existe alors g différentielles abéliennes linéairement indépendants sur (E) . De plus, toute déformation analytique complexe (Y_λ, I, β) doit dépendre exactement de ces m paramètres complexes. Une étude complète des bifurcations d'une telle famille au voisinage d'une courbe dégénérée s'avère plus difficile, car on perd le caractère global qui lui est typique du cas $m = 1$, Arnold [1]. L'étude des solutions non singulières de l'équation différentielle correspondante :

$$F\left(\lambda, u, \frac{du}{dt}\right) = 0 \quad \text{avec } \lambda \in C^m$$

s'effectue en examinant le comportement de la courbe C_λ , qui à chaque valeur de $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ associe la solution $u_\lambda(t)$ le voisinage de la solution singulière $(\lambda_0, u_{\lambda_0}(t))$ doit être indépendant de λ , [1].

Ainsi, soit $P(u, \lambda)$ un polynôme en u , sans racine multiple de degré impair $n > 3$ et, à coefficients dépendant d'un paramètre λ complexe, les bifurcations de l'équation différentielle :

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{d^2u}{dt^2} = P(u, \lambda) \\ u(0) = \sigma \\ \frac{du}{dt}(0) = \tau \end{cases}$$

dépendent de $3(n - 1)/2$ paramètres indépendants, car les courbes intégrales dont des courbes hyperelliptiques de genre $g = \frac{n-1}{2}$, et à l'encontre de l'analyse précédente, l'étude de ses bifurcations n'a plus de caractère global.

RÉFÉRENCES

1. V. Arnold, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Traduction française, Ed. Mir, Moscou, 1980.
2. R. Chouikha, *Nouveau développement de fonctions elliptiques*, C.R. Acad. Sci. **306**, Série I, 655–658, Paris, 1988.
3. K. Kodaira, *Complex manifolds and deformation of complex structures*, Tokyo (1981), Springer, 1986.
4. S. Lang, *Elliptic functions*, Addison-Wesley, New York, 1973.
5. H. Lebesgue, *Leçons sur les séries trigonométriques*, Rééd. A. Blanchard, Paris, 1975.
6. G. Valiron, *Théorie des fonctions*, Ed. Masson, Paris, 1948.
7. E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge, 1963.

Université Paris-Nord

Institut Galilée

Laboratoire d'Analyse, Géométrie et applications

Unité Associée C.N.R.S. 742

93430 Villetaneuse

Paris, France