M. Kishi
Nagoya Math. J.
Vol. 37 (1970), 33–36

SUR LE PRINCIPE DE MAJORATION DE K. YOSIDA

MASANORI KISHI

dédié au Professeur K. ONO pour son soixantième anniversaire

1. Introduction.

Soit X un espace séparé localement compact et dénombrable à l'infini. Désignons par $\mathscr{C}_0$ l'espace des fonctions numériques réelles continues sur X et à support compact et par $\mathscr{B}$ l'espace complété de $\mathscr{C}_0$ par la norme uniforme, et par $\mathscr{C}_0^+$ et $\mathscr{B}^+$ les sous-ensembles de $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{B}$ constitués par des fonctions non-négatives. Considérons un opérateur potentiel positif V dont le domaine de définition contient $\mathscr{C}_0$. En accord avec YOSIDA [2] nous dirons que V satisfait au *principe de majoration* si, quels que soient f, $g \in \mathscr{C}_0^+$ et $a > 0$, l'inégalité $V_a f(x) \leq Vg(x)$ sur le support S_f de f implique la même inégalité sur tout l'espace, où $V_a f = Vf + af$. Yosida a proposé ce principe, et donné une condition suffisante pour que V satisfasse à ce principe. En termes de majoration au lieu de domination il a considéré le *principe du maximum positif:* soient $f \in \mathscr{C}_0$ et

$$P = \{x \in X;\ \ Vf(x) = \sup_{y \in X} Vf(y)\}$$

$$N = \{x \in X;\ \ Vf(x) = \inf_{y \in X} Vf(y)\}.$$

Alors $f(x) \geq 0$ sur P et $f(x) \leq 0$ sur N.

THÉORÈME [2]. *Si l'image $V(\mathscr{C}_0)$ de $\mathscr{C}_0$ est dense dans $\mathscr{B}$, et si V satisfait au principe de majoration et à la condition suivante:*
(1) *il existe une suite $\{h_n\}$ de fonctions de $\mathscr{C}_0^+$ telle que $Vh_n \uparrow 1$ sur X, alors V satisfait au principe du maximum positif.*

Notons que le principe de domination est plus fort que le principe de majoration, et que si V satisfait au principe de domination et à la condition

Received January 9, 1969

(1), et si l'image $V(\mathscr{C}_0)$ est dense dans $\mathscr{B}$, alors il satisfait au principe du maximum positif. Donc il nous faut examiner si le principe de majoration implique le principe de domination. Dans cette note nous montrerons que les deux principes sont identiques si V est strictement positif. On sait que V est strictement positif, si $V(\mathscr{C}_0)$ est dense dans $\mathscr{B}$.

2. Opérateur transposé.

Désignons par $\mathscr{M}$ l'ensemble des mesures de Radon réelles sur X et par $\mathscr{M}_0$ celui des mesures à support compact. Nous désignons par $\mathscr{M}^+$ et $\mathscr{M}_0^+$ les sous-ensembles de $\mathscr{M}$ et $\mathscr{M}_0$ constitués par des mesures positives. Pour toute mesure positive μ de $\mathscr{M}_0^+$, l'application $\varphi \in \mathscr{C}_0 \to (V\varphi, \mu) = \int V\varphi\, d\mu$ se donne une mesure positive $V^*\mu$ de $\mathscr{M}^+$, et on a l'application $V^*: \mu \in \mathscr{M}_0^+ \to V^*\mu \in \mathscr{M}^+$ telle qu'on ait

$$(\varphi, V^*\mu) = (V\varphi, \mu)$$

quelle que soit $\varphi \in \mathscr{C}_0$. Cette application s'étend sur $\mathscr{M}_0$, et elle est linéaire positive et continue par les topologies faibles. Nous l'appellerons *l'opérateur transposé de V*.

DÉFINITION. L'opérateur transposé V^* satisfait au *principe du balayage* si, quels que soient ω ouvert relativement compact et μ mesure positive de $\mathscr{M}_0^+$, il existe une mesure positive μ' de $\mathscr{M}_0^+$ telle que

i) le support $S_{\mu'}$ de $\mu' \subset \bar{\omega}$

ii) $V^*\mu' \leq V^*\mu$

iii) les restrictions à ω de $V^*\mu$ et $V^*\mu'$ soient identiques.

La mesure μ' est appelée *mesure balayée de μ sur ω*.

DÉFINITION. L'opérateur potentiel positif V est dit *strictement positif* si, quel que soit $x \in X$, il existe $\varphi \in \mathscr{C}_0^+$ telle que $V\varphi(x) > 0$.

On sait que V est strictement positif si et seulement si $V^*\varepsilon_x \neq 0$ pour tout $x \in X$, ε_x désignant la masse-unité au point x, et que si $V(\mathscr{C}_0)$ est dense dans $\mathscr{B}$, V est strictement positif.

DÉFINITION DU PRINCIPE DE DOMINATION. Quelles que soient f et g fonctions de $\mathscr{C}_0^+$, l'inégalité $Vf(x) \leq Vg(x)$ sur S_f implique $Vf \leq Vg$.

THÉORÈME DE DUALITÉ [1]. *Soit V strictement positif. L'opérateur transposé*

V^* satisfait au principe du balayage si et seulement si V satisfait au principe de domination.

3. Relation entre les principes de majoration et de domination.

D'abord notons que le principe de domination est plus fort que celui de majoration. En effet, si on a, pour $f, g \in \mathscr{C}_0^+$ et $a > 0$, $V_a f(x) \leq V g(x)$ sur S_f, on a $Vf(x) \leq Vg(x)$ sur S_f et, par le principe de domination, $Vf \leq Vg$, ce qui montre $V_a f \leq Vg$.

THÉORÈME. *Si V est strictement positif, les principes de majoration et de domination sont identiques.*

Démonstration. Il suffit de montrer que le principe de majoration implique celui de domination. D'abord nous montrerons que l'opérateur $V_a = V + aI$ satisfait au principe de domination pour tout $a > 0$. Soient f et g fonctions de $\mathscr{C}_0^+$ avec $V_a f(x) \leq V_a g(x)$ sur S_f. Si S_f et S_g n'ont pas de points intérieurs en commun, on a $V_a f(x) \leq V_a g(x) = Vg(x)$ sur S_f et, par le principe de majoration, $V_a f \leq Vg$ et donc $V_a f \leq V_a g$. Si l'intérieur de $S_f \cap S_g$ n'est pas vide, on considère les fonctions $(f-g)^+$ et $(f-g)^-$, et obtient l'inégalité $V_a f \leq V_a g$, ce qui montre le principe de domination pour V_a. Donc V_a^* satisfait au principe du balayage, puisque V_a est strictement positif.

Soient ω ouvert relativement compact et μ mesure positive de $\mathscr{M}_0$, et μ'_a mesure balayée de μ sur ω relativement à l'opérateur V_a^*. L'ensemble $\{\mu'_a;\ 0 < a < 1\}$ est borné pour la topologie vague. En effet, V étant strictement positif, il existe une fonction $\varphi \in \mathscr{C}_0^+$ telle qu'on ait

$$\inf_{x \in \bar{\omega}} V\varphi(x) \geq 1,$$

et on a

$$\int_{\bar{\omega}} d\mu'_a \leq \int V\varphi \ d\mu'_a = (V\varphi, \mu'_a)$$

$$\leq (V_a\varphi, \mu'_a) = (\varphi, V_a^*\mu'_a) \leq (\varphi, V_a^*\mu) = (V_a\varphi, \mu) \leq \int (V\varphi + \varphi) d\mu < \infty.$$

En conséquence on peut supposer que $\{\mu'_a\}$ converge vaguement vers une mesure positive μ' portée par $\bar{\omega}$ quand $a \downarrow 0$. Montrons que μ' est une mesure balayée de μ relativement à V^*. Soit f une fonction de $\mathscr{C}_0^+$ à support dans ω. On a

https://doi.org/10.1017/S002776300001326X Published online by Cambridge University Press

$$
\begin{aligned}
(f, V^*\mu') = (Vf, \mu') &= \lim_{a\to 0} (Vf, \mu'_a) \\
&= \lim_{a\to 0} \{(V_a f, \mu'_a) - a(f, \mu'_a)\} \\
&= \lim_{a\to 0} (V_a f, \mu'_a) = \lim_{a\to 0} (f, V_a^* \mu'_a) \\
&= \lim_{a\to 0} (f, V_a^* \mu) = \lim_{a\to 0} (V_a f, \mu) = (Vf, \mu) = (f, V^*\mu),
\end{aligned}
$$

ce qui montre l'identité des restrictions à ω de $V^*\mu$ et $V^*\mu'$. De la même manière on obtient $V^*\mu' \leq V^*\mu$. Par conséquent V^* satisfait au principe du balayage et donc V satisfait au principe de domination. *c. q. f. d.*

Remarque. Si V n'est pas strictement positif, le principe de majoration n'implique pas celui de domination. Nous donnerons un exemple. Soit X un espace séparé localement compact. Fixons deux points x_1 et x_2 dans X et un voisinage ouvert ω relativement compact de x_1 tel que $\omega \not\ni x_2$, et une fonction φ de $\mathscr{C}_0^+$ telle que $\varphi(x) > 0$ dans ω et $\varphi(x) = 0$ dans $C\omega$. Nous posons pour toute $f \in \mathscr{C}_0$

$$Vf(x) = \{f(x_1) + f(x_2)\}\varphi(x).$$

Alors V est un opérateur positif qui satisfait au principe de majoration. En effet, si $V_a f(x) \leq Vg(x)$ sur $S_f(f, g \in \mathscr{C}_0^+)$, on a $S_f \subset \bar{\omega}$, puisque $Vg(x) = 0$ sur $C\omega$. Donc pour $x \in \omega \cap S_f (\neq \phi)$

$$
\begin{aligned}
f(x_1)\varphi(x) &\leq f(x_1)\varphi(x) + af(x) = V_a f(x) \\
&\leq Vg(x) = \{g(x_1) + g(x_2)\}\varphi(x)
\end{aligned}
$$

et

$$f(x_1) \leq g(x_1) + g(x_2).$$

ce qui montre l'inégalité $V_a f(x) = Vf(x) \leq Vg(x)$ pour tout $x \in \omega \backslash S_f$. D'autre part V ne satisfait pas au principe de domination, parce que, pour $f \in \mathscr{C}_0^+$ avec $S_f \subset C\omega$ et $f(x_2) > 0$, $Vf(x) = 0$ sur S_f et donc il est dominé par tout Vg sur S_f. Mais au point x_1, $Vf(x_1) = f(x_2)\varphi(x_1)$ n'est pas nécessairement dominé par $Vg(x_1) = \{g(x_1) + g(x_2)\}\varphi(x_1)$.

Références

[1] J. Deny: Les deux aspects de la théorie du potentiel, Séminaire Bourbaki 9e année, exposé 148 (1957).

[2] K. Yosida: Positive resolvents and potentials, Z. Wahrs. verw. Geb., **8** (1967), 210–218.

Université de Nagoya