ÜBER DIE RESTKLASSENKÖRPER BEWERTETER PERFEKTER KÖRPER

MIKAO MORIYA

Die Struktur diskret bewerteter perfekter Körper ist bisher von H. Hasse, F. K. Schmidt, O. Teichmüller und E. Witt eingehend untersucht worden.[1] Es ist schon von diesen Autoren bewiesen worden, dass der Restklassenkörper $\mathfrak{K}$ eines *diskret perfekten* Körpers K stets in K ein mit $\mathfrak{K}$ multiplikativ isomorphes Repräsentantensystem besitzt, und sogar, dass es im charakteristikgleichen Fall ein Repräsentantensystem R von $\mathfrak{K}$ gibt, welches einen mit $\mathfrak{K}$ isomorphen Körper bildet. Dabei lässt sich K als Potenzreihenkörper eines Primelementes aus K mit Koeffizienten aus R darstellen.

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir den Fall, wo die Bewertung eines perfekten Körpers K *nicht notwendig diskret* ist. Der Restklassenkörper $\mathfrak{K}$ von K besitzt dann im allgemeinen kein multiplikativ abgeschlossenes Repräsentantensystem aus K; vielmehr muss man dabei maximale Teilkörper oder Gruppen aus K bestimmen, welche bzw. Repräsentantensysteme der Teilkörper oder Gruppen mit gewissen Eigenschaften aus $\mathfrak{K}$ bilden.

§ **1.** Im folgenden bezeichnet K durchweg einen Körper, welcher in bezug auf eine nicht-triviale Exponentenbewertung w perfekt ist.[2] Bekanntlich bildet die Gesamtheit J aller derjenigen Elemente aus K, die in bezug auf w nicht negative Werte besitzen, einen Ring (*Bewertungsring* in bezug auf w). Ferner bildet die Gesamtheit $\mathfrak{p}$ aller Elemente aus K, welche in bezug auf w positive Werte besitzen, ein *Primideal* aus J. Der Restklassenring $\mathfrak{K} = J/\mathfrak{p}$ ist ein Körper, welcher der *Restklassenkörper* von K genannt ist. Eine Restklasse von J nach $\mathfrak{p}$ nennt man auch eine Restklasse aus $\mathfrak{K}$. Ein beliebiges Element aus K, welches zu einer Restklasse aus $\mathfrak{K}$ gehört, heisst ein *Vertreter* dieser Restklasse.

Received September 4, 1951.

[1] H. Hasse und F. K. Schmidt, Die Struktur diskret bewerteter Körper, Journ. f. reine u. angew. Math., **170** (1934).
O. Teichmüller, Über die Struktur diskret bewerteter perfekter Körper, Gött. Nachrichten, N.F. **1** (1936).
O. Teichmüller, Diskret bewertete perfekte Körper mit unvollkommenem Restklassenkörper, Journ. f. reine u. angew. Math., **176** (1937).
E. Witt, Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p vom Grade p^n, Journ. f. reine u. angew. Math., **176** (1937).

[2] Für die allgemeine Theorie der Bewertung siehe das Buch von V. d. Waerden; Moderne Algebra, I. (1937), X. Kapt. Bewerteter Körper.

https://doi.org/10.1017/S0027763000022947 Published online by Cambridge University Press

Es liege nun eine nicht-leere Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{K}$ vor. Greift man dann aus jeder Restklasse aus $\mathfrak{M}$ einen einzigen Vertreter heraus, so heisse die Gesamtheit M dieser Vertreter ein ***Repräsentantensystem*** von $\mathfrak{M}$ aus K. Wenn man dabei einem Element $\mathfrak{x}$ aus $\mathfrak{M}$ den Vertreter von $\mathfrak{x}$ aus M zuordnet, so entsteht eine umkehrbar eindeutige Zuordnung φ von $\mathfrak{M}$ auf M. Es sei insbesondere $\mathfrak{M}$ eine multiplikative Gruppe aus $\mathfrak{K}$ oder ein Teilkörper von $\mathfrak{K}$. Ist dann M das isomorphe Bild von $\mathfrak{M}$ in bezug auf φ, so heisse M mit $\mathfrak{M}$ ***gruppen-*** oder ***körperisomorph***.

Bekanntlich ist die Charakteristik $\chi(\mathfrak{K})$ von $\mathfrak{K}$ stets gleich der Charakteristik $\chi(K)$ von K, falls $\chi(K)$ eine Primzahl ist. Wenn aber $\chi(K)=0$ ist, so ist entweder $\chi(\mathfrak{K})=0$ oder $\chi(\mathfrak{K})=$ einer Primzahl.

§ 2. Wir betrachten zunächst den ***charakteristikgleichen*** Fall $\chi(K)=\chi(\mathfrak{K})$. Dabei kann der Restklassenkörper $\mathfrak{K}$ auch unvollkommen sein. Wie man sich leicht überzeugt, ist dann der Primkörper von K ein körperisomorphes Repräsentantensystem des Primkörpers von $\mathfrak{K}$. Nun sei $K_\alpha \subset K_\beta \subset \ldots \subset K_\lambda \subset \ldots$ eine Folge der Teilkörper von K von der Art, dass jedes K_λ ein körperisomorphes Repräsentantensystem eines Teilkörpers von $\mathfrak{K}$ ist. Bildet man jetzt die Vereinigung V der obigen Körperfolge, so ist V offenbar ein Teilkörper von K, und ferner existiert ein Teilkörper $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{K}$ derart, dass V ein körperisomorphes Repräsentantensystem von $\mathfrak{V}$ ist. Nach dem bekannten Zorn's Lemma existiert also ein maximaler Teilkörper K_0 von K, welcher ein körperisomorphes Repräsentantensystem eines Teilkörpers $\mathfrak{K}_0$ von $\mathfrak{K}$ bildet. Es sei K_0' ein Teilkörper von K, welcher K_0 als einen echten Teilkörper enthält. Nehmen wir dann an, dass zu jedem Element x' aus K_0' die x' enthaltende Restklasse aus $\mathfrak{K}$ existiert, so existieren verschiedene Elemente x', y' aus K_0', welche zu einer und derselben Restklasse aus $\mathfrak{K}$ gehören. Denn sonst gäbe es einen Teilkörper $\mathfrak{K}_0'$ $(\supset \mathfrak{K}_0)$ von $\mathfrak{K}$, der K_0' als ein körperisomorphes Repräsentantensystem besitzt; dies steht aber im Widerspruch mit der Maximaleigenschaft über K_0. Daher ist $w(x'-y')>0$. Weil $x'-y' \neq 0$ ist, so existiert keine $(x'-y')^{-1}$ enthaltende Restklasse aus $\mathfrak{K}$; d.h. jede echte Erweiterung von K_0 aus K wird niemals ein Repräsentantensystem eines Teilkörpers von $\mathfrak{K}$.

Es sei $\mathfrak{b}$ ein über $\mathfrak{K}_0$ separables Element aus $\mathfrak{K}$. Dann genügt $\mathfrak{b}$ einer irreduziblen Gleichung $\sum_{i=0}^{m} \mathfrak{a}_i x^i = 0$ in $\mathfrak{K}_0$. Bezeichnet man mit den a_i $(i=0, 1, \ldots, m)$ bzw. die in den $\mathfrak{a}_i$ enthaltenen Elemente aus K_0, so ist das Polynom $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ in $K_0[x]$ separabel. Ist nämlich $f(x)$ reduzibel in $K_0[x]$, so existieren nicht triviale Polynome $g_i(x)$ $(i=1, 2)$ aus $K_0[x]$ mit $f(x)=g_1(x)g_2(x)$. Lässt man nun die sämtlichen Koeffizienten von $g_1(x)$, $g_2(x)$ in die Restklassen von $\mathfrak{K}_0$ übergehen, so entstehen aus den $g_1(x)$, $g_2(x)$ bzw. die Polynome $\overline{g_1(x)}$, $\overline{g_2(x)}$ aus $\mathfrak{K}_0[x]$, und es gilt in $\mathfrak{K}_0[x]$:

$$\sum_{i=0}^{m} \mathfrak{a}_i x^i = \overline{g_1(x)}\,\overline{g_2(x)}\,;$$

d.h. $\sum_{i=0}^{m} \mathfrak{a}_i x^i$ ist entgegen der Annahme in $\mathfrak{K}_0[x]$ reduzibel. Es muss also $f(x)$ in $K_0[x]$ irreduzibel sein. Die die Diskriminante von $f(x)$ enthaltende Restklasse aus $\mathfrak{K}$ ist gleich der Diskriminante des separablen Polynomes $\sum_{i=0}^{m} \mathfrak{a}_i x^i$, also ist von der Nullklasse verschieden. Somit ist gezeigt, dass $f(x)$ in $K_0[x]$ separabel ist.

Nun gilt für ein Element b aus $\mathfrak{b}$ die Kongruenz :

$$f(b) \equiv 0 \qquad \text{mod } \mathfrak{p}\,;$$

d.h. es existiert ein Polynom $h(x)$ mit Koeffizienten aus J derart, dass

$$f(x) \equiv (x-b)h(x) \qquad \text{mod } \mathfrak{p}$$

ist. *Nach dem bekannten Hensel's Lemma beweist man die Existenz einer* Nullstelle β von $f(x)$ aus J, für die

$$\beta \equiv b \qquad \text{mod } \mathfrak{p}$$

gilt. Adjungiert man β zu K_0, so ist der Körper $K_0(\beta)$ durch einen solchen Isomorphismus Φ auf $\mathfrak{K}_0(\mathfrak{b})$ abgebildet, dass bei Anwendung von Φ der Isomorphismus von K_0 auf $\mathfrak{K}_0$ beibehalten und $\Phi(\beta) = \mathfrak{b}$ ist. Wegen der Maximaleigenschaft über K_0 muss $K_0(\beta) \subseteqq K_0$ sein; d.h. die β enthaltende Restklasse $\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{K}$ ist bereits ein Element aus $\mathfrak{K}_0$. Somit ist bewiesen, dass jedes über $\mathfrak{K}_0$ separable Element aus $\mathfrak{K}$ stets in $\mathfrak{K}_0$ enthalten ist; d.h. $\mathfrak{K}_0$ ist in $\mathfrak{K}$ *separabel-abgeschlossen.*

Es sei jetzt $\mathfrak{t}$ ein über $\mathfrak{K}_0$ transzendentes Element aus $\mathfrak{K}$. Ist dann t ein Element aus $\mathfrak{t}$, so ist t auch über K_0 transzendent. Denn gälte für die nicht sämtlich verschwindenden Elemente $a_0, a_1, \ldots, a_n$ aus K_0

$$a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n = 0,$$

so würde daraus folgen :

$$\bar{a}_0 + \bar{a}_1 \mathfrak{t} + \ldots + \bar{a}_n \mathfrak{t}^n = \bar{0},$$

wo die $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ bzw. die $a_0, a_1, \ldots, a_n$ enthaltenden Restklassen aus $\mathfrak{K}_0$ bezeichnen. Dies ist aber ein Widerspruch. Der Körper $K_0(t)$ ist offenbar ein körperisomorphes Repräsentantensystem von $\mathfrak{K}_0(\mathfrak{t})$. Dies steht aber wieder mit der Maximaleigenschaft über K_0 im Widerspruch. Ist also $\mathfrak{c}$ ein nicht zu $\mathfrak{K}_0$ gehöriges Element aus $\mathfrak{K}$, so muss $\mathfrak{c}$ stets über $\mathfrak{K}_0$ *inseparabel* sein. Daraus erhält man

SATZ 1. *Ist $\chi(K) = \chi(\mathfrak{K}) = 0$, so existiert in K stets ein körperisomorphes Repräsentantensystem von $\mathfrak{K}$.*

Wir wenden uns jetzt zum Fall $\chi(K) = \chi(\mathfrak{K}) = p \neq 0$. Ist dann $\mathfrak{c}$ ein nicht

https://doi.org/10.1017/S0027763000022947 Published online by Cambridge University Press

zu $\mathfrak{K}_0$ gehöriges Element aus $\mathfrak{K}$, so existiert eine Potenz $\mathfrak{c}^{p^f}$ von $\mathfrak{c}$ mit $f \geqq 1$ derart, dass $\mathfrak{c}^{p^f}$ über $\mathfrak{K}_0$ separabel ist. Weil nach dem oben Bewiesenen $\mathfrak{c}^{p^f}$ zu $\mathfrak{K}_0$ gehört, so ist $\mathfrak{c}$ über $\mathfrak{K}_0$ *rein-inseparabel.* Somit ist bewiesen:

SATZ 2. *Ist $\chi(K) = \chi(\mathfrak{K}) = p \neq 0$, so existiert in K ein maximaler Teilkörper K_0, welcher ein körperisomorphes Repräsentantensystem eines Teilkörpers $\mathfrak{K}_0$ von $\mathfrak{K}$ ist. Jede echte Erweiterung von K_0 aus K wird niemals ein Repräsentantensystem eines Teilkörpers von $\mathfrak{K}$. Ferner ist $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{K}_0$ rein-inseparabel, wenn $\mathfrak{K} \neq \mathfrak{K}_0$ ist.*

Bemerkung. Obwohl K_0 in K maximal ist, so ist $\mathfrak{K}_0$ doch nicht in $\mathfrak{K}$ maximal; d.h. es kann in $\mathfrak{K}$ eine echte Erweiterung von $\mathfrak{K}_0$ geben, welche ein körperisomorphes Repräsentantensystem aus K besitzt.

Setzt man aber voraus, dass jeder Teilkörper von $\mathfrak{K}$ höchstens ein körperisomorphes Repräsentantensystem aus K besitzt, so ist $\mathfrak{K}_0$ in $\mathfrak{K}$ maximal; d.h. jede echte Erweiterung von $\mathfrak{K}_0$ aus $\mathfrak{K}$ besitzt kein körperisomorphes Repräsentantensystem aus K. Besässe nämlich eine echte Erweiterung $\mathfrak{K}_1$ von $\mathfrak{K}_0$ aus $\mathfrak{K}$ ein körperisomorphes Repräsentantensystem K_1 aus K, so wäre nach Voraussetzung $K_1 \supsetneqq K_0$, was aber ein Widerspruch ist.

ZUSATZ ZU SATZ 2. *Wenn jeder Teilkörper von $\mathfrak{K}$ höchstens ein körperisomorphes Repräsentantensystem aus K besitzt, so existiert ein maximaler Teilkörper $\mathfrak{K}_0$ von $\mathfrak{K}$ derart, dass $\mathfrak{K}_0$ ein körperisomorphes Repräsentantensystem aus K besitzt, aber jede echte Erweiterung von $\mathfrak{K}_0$ aus $\mathfrak{K}$ kein körperisomorphes Repräsentantensystem aus K besitzt.*

Wir betrachten nun den *charakteristikungleichen* Fall $\chi(K) \neq \chi(\mathfrak{K})$, und bezeichnen mit p die Charakteristik von $\mathfrak{K}$. Ferner bezeichnen wir mit K^* bzw. $\mathfrak{K}^*$ die multiplikative Gruppe aller von Null verschiedenen Elemente aus K bzw. $\mathfrak{K}$.

Ist nun i $(p-1 \geqq i \geqq 0)$ eine ganze rationale Zahl und $\bar{i}$ die i enthaltende Restklasse aus $\mathfrak{K}$, so genügt $\bar{i}$ der Gleichung

$$x^{p-1} - \bar{1} = \bar{0}.$$

Mit Hilfe des Hensel's Lemmas kann man leicht beweisen, dass die Gleichung $x^{p-1} - 1 = 0$ $p-1$ verschiedene Wurzeln aus K besitzt, welche im ganzen mod p mit den Zahlen $1, 2, \ldots, p-1$ kongruent sind; d.h. K^* enthält die zyklische Gruppe Z_{p-1} aller $(p-1)$-ten Einheitswurzeln, welche ein gruppenisomorphes Repräsentantensystem der Untergruppe $\{\bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{p-1}\}$ aus $\mathfrak{K}^*$ ist. Daher existiert nach dem Zorn's Lemma eine maximale Untergruppe G_0 von K^*, welche ein gruppenisomorphes Repräsentantensystem einer Untergruppe $\mathfrak{G}_0$ von $\mathfrak{K}^*$ bildet.

Nun sei $\mathfrak{b}$ ein Element aus $\mathfrak{K}^*$, dessen Ordnung n nach $\mathfrak{G}_0$ zu p prim ist.

Dann existiert ein Element $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{G}_0$ mit $\mathfrak{b}^n = \mathfrak{a}$. Da es in G_0 ein Element $a \in \mathfrak{a}$ gibt, so betrachten wir die Gleichung $x^n - a = 0$ in K. Offenbar genügt ein Element b aus $\mathfrak{b}$ der Kongruenz :

$$x^n - a \equiv 0 \qquad \bmod \mathfrak{p}.$$

Wie man leicht bestätigt, besitzt wegen $p \nmid n$ die obige Kongruenz keine mehrfachen Wurzeln. Hieraus schliesst man leicht nach dem Hensel's Lemma, dass es in K eine Wurzel β von $x^n - a = 0$ mit $\beta \equiv b \bmod \mathfrak{p}$ gibt; es gilt also $\beta^n = a$. Weil die Ordnung $\mathfrak{b}$ nach $\mathfrak{G}_0$ gleich n ist, so ist die Ordnung von β nach G_0 auch n. Betrachtet man jetzt die Menge $G_1 = \{G_0, G_0\beta, \ldots, G_0\beta^{n-1}\}$, so ist G_1 ein gruppenisomorphes Repräsentantensystem einer Untergruppe von K^*. Es muss also $G_0 = G_1$ sein; d.h. es ist $n = 1$.

Nun sei $\mathfrak{t}$ ein Element aus $\mathfrak{K}^*$, dessen Ordnung nach $\mathfrak{G}_0$ gleich 0 ist; d.h. eine Potenz $\mathfrak{t}^m$ von $\mathfrak{t}$ gehöre dann und nur dann zu $\mathfrak{G}_0$, wenn $m = 0$ ist. Ist dann t ein zu $\mathfrak{t}$ gehöriges Element aus K, so bestätigt man leicht, dass die Ordnung von t nach G_0 auch 0 ist. Ferner beweist man ohne Schwierigkeit, dass die Menge $G_2 = \{G_0 t^{\pm i};\ i = 0, 1, \ldots\}$ ein gruppenisomorphes Repräsentantensystem einer Untergruppe von $\mathfrak{K}^*$ bildet, was aber mit der Maximaleigenschaft über G_0 im Widerspruch steht. Aus dem oben Gezeigten schliesst man sofort, dass ein nicht zu $\mathfrak{G}_0$ gehöriges Element aus $\mathfrak{K}^*$ von einer Ordnung p^f $(f \geqq 1)$ ist.

Satz 3. *Es sei $\chi(K) \neq \chi(\mathfrak{K}) = p (\neq 0)$. Dann existiert in K^* eine maximale Untergruppe G_0 von der Art, dass G_0 ein gruppenisomorphes Repräsentantensystem einer Untergruppe $\mathfrak{G}_0$ von $\mathfrak{K}^*$ bildet und jede echte Obergruppe von G_0 aus K^* niemals ein gruppenisomorphes Repräsentantensystem einer Untergruppe von $\mathfrak{K}^*$ wird. Ferner ist die Ordnung eines nicht zu $\mathfrak{G}_0$ gehörigen Elementes aus $\mathfrak{K}^*$ nach $\mathfrak{G}_0$ eine Potenz von p.*

Bemerkung. Wie bei Satz 2 kann man ohne Schwierigkeit folgenden Satz beweisen :

Zusatz zu Satz 3. *Besitzt jede Untergruppe aus $\mathfrak{K}^*$ höchstens ein gruppenisomorphes Repräsentantensystem aus K^*, so ist $\mathfrak{G}_0$ eine maximale Untergruppe aus $\mathfrak{K}^*$, welche ein gruppenisomorphes Repräsentantensystem aus K^* besitzt.*

§ **3.** In diesem Paragraphen beschränken wir uns auf den Fall, wo der Restklassenkörper $\mathfrak{K}$ *vollkommen von einer Primzahlcharakteristik p* ist. Bekanntlich besitzt jede Restklasse aus $\mathfrak{K}$ stets ihre p^i-ten Wurzeln $(i = 1, 2, \ldots)$ in $\mathfrak{K}$.

Zunächst betrachten wir den *charakteristikgleichen* Fall. Da der Primkörper von K vollkommen und ein körperisomorphes Repräsentantensystem des Primkörpers von $\mathfrak{K}$ ist, so beweist man leicht mit Hilfe des Zorn's Lemmas die

https://doi.org/10.1017/S0027763000022947 Published online by Cambridge University Press

Existenz eines maximalen *vollkommenen* Teilkörpers K_0 aus K von der Art, dass K_0 ein körperisomorphes Repräsentantensystem eines Teilkörpers $\mathfrak{K}_0$ aus $\mathfrak{K}$ bildet.

Ist nun $\mathfrak{b}$ ein über $\mathfrak{K}_0$ algebraisches Element aus $\mathfrak{K}$, so muss $\mathfrak{b}$ über $\mathfrak{K}_0$ separabel sein, weil $\mathfrak{K}_0$ vollkommen ist. Ebenso wie in §2 kann man leicht beweisen, dass es ein Element β aus $\mathfrak{b}$ gibt, so dass $K_0(\beta)$ ein körperisomorphes Repräsentantensystem von $\mathfrak{K}_0(\mathfrak{b})$ ist. Da $K_0(\beta)$ über K_0 algebraisch ist, so ist es vollkommen; wegen der Maximaleigenschaft über K_0 muss $K_0(\beta) \leqq K_0$ sein, und infogedessen ist $\mathfrak{b} \in \mathfrak{K}_0$. Somit ist bewiesen:

Satz 4. *Es sei $\chi(K) = \chi(\mathfrak{K}) = p \neq 0$ und $\mathfrak{K}$ vollkommen. Dann enthält K einen maximalen vollkommenen Körper K_0 von der Art, dass K_0 ein körperisomorphes Repräsentantensystem eines Teilkörpers $\mathfrak{K}_0$ von $\mathfrak{K}$ bildet. Dabei ist $\mathfrak{K}_0$ in $\mathfrak{K}$ algebraisch abgeschlossen.*

Wenn insbesondere $\mathfrak{K}$ *absolut-algebraisch* ist, so ist bekanntlich $\mathfrak{K}$ vollkommen, und jedes Element aus $\mathfrak{K}$ ist stets über dem Primkörper von $\mathfrak{K}$ algebraisch. Hieraus folgt

Zusatz zu Satz 4. *Es sei $\chi(K) = \chi(\mathfrak{K}) = p \neq 0$ und $\mathfrak{K}$ absolut-algebraisch. Dann enthält K stets ein körperisomorphes Repräsentantensystem von $\mathfrak{K}$.*

Nun wollen wir folgenden Satz beweisen:

Satz 5. *Ist $\chi(K) = \chi(\mathfrak{K}) = p \neq 0$ und $\mathfrak{K}$ vollkommen, so existiert in K dann und nur dann ein körperisomorphes Repräsentantensystem von $\mathfrak{K}$, wenn für jede Restklasse $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{K}$ der Durchschnitt $\bigcap_{i=0}^{\infty} \mathfrak{M}_i(\mathfrak{c})$ nicht leer ist. Dabei bezeichnet $\mathfrak{M}_i(\mathfrak{c})$ die Menge der p^i-ten Potenzen aller Elemente aus $\mathfrak{c}^{p^{-i}}$ $(i \geqq 0)$.*

Beweis. Wenn ein Teilkörper K_0 von K ein körperisomorphes Repräsentantensystem von $\mathfrak{K}$ ist, so gibt es zu einer Restklasse $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{K}$ ihren (einzigen) Vertreter c aus K_0. Da K_0 vollkommen ist, so besitzt c in K_0 seine p^i-te Wurzel $c^{p^{-i}}$ $(i \geqq 0)$, und $c^{p^{-i}}$ ist der Vertreter von $\mathfrak{c}^{p^{-i}}$ aus K_0. Also gehört c zu $\mathfrak{M}_i(\mathfrak{c})$. Hieraus folgt ohne weiteres, dass $\bigcap_{i=0}^{\infty} \mathfrak{M}_i(\mathfrak{c})$ nicht leer ist.

Umgekehrt sei für jede Restklasse $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{K}$ $\bigcap_{i=0}^{\infty} \mathfrak{M}_i(\mathfrak{c})$ nicht leer. Dann betrachten wir einen maximalen vollkommenen Teilkörper K_0 von K, welcher mit einem in $\mathfrak{K}$ algebraisch-abgeschlossenen Teilkörper $\mathfrak{K}_0$ körperisomorph ist (Satz 4). Ist nun $\mathfrak{t}$ ein über $\mathfrak{K}_0$ transzendentes Element aus $\mathfrak{K}$, so existiert nach Voraussetzung ein Element t aus $\bigcap_{i=0}^{\infty} \mathfrak{M}_i(\mathfrak{t})$. Wie leicht bestätigt, ist t über K_0 transzendent. Ferner existiert in jedem $\mathfrak{t}^{p^{-i}}$ ein Element t_i aus K mit $t_i^{p^i} = t$. Da $\chi(K) = p$ ist, so gilt für jedes $i \geqq 0$:

$$t_i = t_{i+1}^p ,$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000022947 Published online by Cambridge University Press

wo $t_0 = t$ gesetzt ist. Bildet man nun den Vereinigungskörper K_1 von den Körpern $K_0(t_i)$ $(i = 0, 1, \ldots)$, so ist K_1 ersichtlich ein vollkommener Teilkörper von K, weil K_0 vollkommen ist. Da für jeden Index i $(\geqq 0)$ $K_0(t_i)$ ein körperisomorphes Repräsentantensystem von $\mathfrak{K}_0(\mathfrak{t}^{p^{-i}})$ aus $\mathfrak{K}$ ist, so bildet K_1 ein körperisomorphes Repräsentantensystem des Vereinigungskörpers von den $\mathfrak{K}_0(\mathfrak{t}^{p^{-i}})$ $(i = 0, 1, \ldots)$. Dies steht aber mit der Maximaleigenschaft über K_0 im Widerspruch. Es muss also $\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{K}$ sein, w.z.b.w.

Jetzt wenden wir uns zum *charakteristikungleichen* Fall, und wir bedienen uns aller Bezeichnungen im vorigen Paragraphen. Die zyklische Gruppe Z_{p-1} aller $(p-1)$-ten Einheitswurzeln aus K^* ein gruppenisomorphes Repräsentantensystem einer Untergruppe von $\mathfrak{K}^*$. Ferner ist $Z_{p-1} = Z_{p-1}^p$, wo Z_{p-1}^p die Menge aller p-ten Potenzen der Elemente aus Z_{p-1} bezeichnet. Nach dem Zorn's Lemma existiert eine maximale Untergruppe G_0 mit $G_0 = G_0^p$ aus K^*, welche ein gruppenisomorphes Repräsentantensystem einer Untergruppe $\mathfrak{G}_0$ von $\mathfrak{K}^*$ bildet.

Es sei $\mathfrak{b}$ ein Element aus $\mathfrak{K}^*$, dessen eine Potenz $\mathfrak{b}^m$ $(m > 0)$ zu $\mathfrak{G}_0$ gehört. Dann setzen wir $m = m_0 p^f$, wo $(m_0, p) = 1$ ist, und $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^{m_0}$. Weil aber $\mathfrak{a}^{p^f}$ ein Element aus $\mathfrak{G}_0$ ist, so gibt es in G_0 seinen Vertreter a_f. Wegen $G_0 = G_0^p = \ldots = G_0^{p^f}$ existiert ein Element a_1 aus G_0 mit $a_f = a_1^{p^f}$. Es gilt also für die a_1 enthaltende Restklasse $\mathfrak{a}_1$ aus $\mathfrak{K}$:

$$\mathfrak{a}^{p^f} = \mathfrak{a}_1^{p^f};$$

weil $\chi(\mathfrak{K}) = p$ ist, so folgt aus der obigen Gleichung

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \in \mathfrak{G}_0 .$$

Da $\mathfrak{b}^{m_0} = \mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{G}_0$ gehört und m_0 zu p prim ist, so ist die Ordnung von $\mathfrak{b}$ nach $\mathfrak{G}_0$ prim zu p. Wie in § 2 kann man leicht beweisen, dass $\mathfrak{b}$ bereits zu $\mathfrak{G}_0$ gehören muss. Somit ist bewiesen:

SATZ 6. *Es sei $\chi(K) \neq \chi(\mathfrak{K}) = p$ und $\mathfrak{K}$ vollkommen. Dann existiert eine maximale Untergruppe G_0 von K^* mit $G_0 = G_0^p$ von der Art, dass G_0 ein gruppenisomorphes Repräsentantensystem einer Untergruppe $\mathfrak{G}_0$ von $\mathfrak{K}^*$ bildet. Dabei besitzt die Faktorgruppe $\mathfrak{K}^*/\mathfrak{G}_0$ ausser dem Einheitselement kein Element von einer positiven Ordnung.*

Ist insbesondere $\mathfrak{K}$ *absolut-algebraisch*, so ist jedes Element aus $\mathfrak{K}^*$ von einer positiven Ordnung. Daraus folgt nach Satz 6:

ZUSATZ ZU SATZ 6. *Es sei $\chi(K) \neq \chi(\mathfrak{K}) = p$ und $\mathfrak{K}$ absolut-algebraisch. Dann besitzt K^* ein gruppenisomorphes Repräsentantensystem von $\mathfrak{K}^*$.*

Wir beweisen nun folgenden

SATZ 7. *Ist $\chi(K) \neq \chi(\mathfrak{K}) = p$ und $\mathfrak{K}$ vollkommen, so enthält K^* dann und*

https://doi.org/10.1017/S0027763000022947 Published online by Cambridge University Press

nur dann ein gruppenisomorphes Repräsentantensystem von $\mathfrak{K}^*$, wenn aus den p^i-ten Wurzeln $\mathfrak{c}^{p^{-i}}$ $(i=0, 1, \ldots)$ einer beliebigen Restklasse $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{K}^*$ stets die Vertreter c_i derart herausgegriffen werden können, dass für jeden Index i $(\geqq 0)$ die Relation

$$c_i = c_{i+1}^p$$

gilt.

Beweis. Es sei G_0 ein gruppenisomorphes Repräsentantensystem von $\mathfrak{K}^*$ aus K^*. Dann ist $\mathfrak{K}^* = \mathfrak{K}^{*p}$, weil $\mathfrak{K}$ vollkommen ist. Dabei bezeichnet $\mathfrak{K}^{*p}$ die Menge der p-ten Potenzen aller Elemente aus $\mathfrak{K}^*$. Weil G_0 mit $\mathfrak{K}^*$ gruppenisomorph ist, so gilt $G_0 = G_0^p$. Ist nun $\mathfrak{c}$ ein Element aus $\mathfrak{K}^*$, so gibt es in G_0 den Vertreter c_0 von $\mathfrak{c}$. Wegen $G_0 = G_0^p$ existiert zu jedem Index i $(\geqq 0)$ ein Element c_i aus G_0 mit $c_i = c_{i+1}^p$. Offenbar ist c_1 der Vertreter von $\mathfrak{c}^{p^{-1}}$ aus G_0. Durch vollständige Induktion beweist man, dass c_i der Vertreter von $\mathfrak{c}^{p^{-i}}$ aus G_0 ist.

Umgekehrt sei die Voraussetzung des Satzes erfüllt. Dann betrachten wir eine maximale Untergruppe G_0 mit $G_0 = G_0^p$ von K^* von der Art, dass G_0 ein gruppenisomorphes Repräsentantensystem einer Untergruppe $\mathfrak{G}_0$ von $\mathfrak{K}^*$ bildet. Dabei hat in der Faktorgruppe $\mathfrak{K}^*/\mathfrak{G}_0$ nur das Einheitselement eine positive Ordnung (Satz 6).

Es sei $\mathfrak{t}$ ein Element aus $\mathfrak{K}^*$, welches in bezug auf $\mathfrak{G}_0$ die Ordnung 0 hat. Dann kann man nach Voraussetzung aus den Restklassen $\mathfrak{t}^{p^{-i}}$ $(i=0, 1, \ldots)$ bzw. diejenigen Elemente t_i herausgreifen, für die Relationen $t_i = t_{i+1}^p$ $(i=0, 1, \ldots)$ gelten. Offenbar ist jedes t_i $(i=0, 1, \ldots)$ in bezug auf G_0 von der Ordnung 0. Bildet man nun die Gruppe $H_i = \{G_0 t_i^{\pm\nu};\ \nu = 0, 1, \ldots\}$, so ist H_i in $\mathfrak{K}^*$ gruppenisomorph abgebildet. Ferner ist

$$H_i = H_{i+1}^p \subset H_{i+1},$$

weil $G_0 = G_0^p$ und $t_i = t_{i+1}^p$ sind. Offenbar ist die Vereinigungsmenge G_1 von den H_i $(i=0, 1, \ldots)$ eine Untergruppe von K^* mit $G_1 = G_1^p$ und in $\mathfrak{K}^*$ gruppenisomorph abgebildet. Dies ist aber ein Widerspruch, weil G_1 eine echte Obergruppe von G_0 ist. Daher muss $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{K}^*$ sein, w.z.b.w.

Wir nehemn nun an, dass K keine primitive p-te Einheitswurzel enthält und für jede Restklasse $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{K}^*$ stets $\bigcap_{i=0}^{\infty} \mathfrak{M}_i(\mathfrak{c})$ nicht leer ist. Ist nun c ein Element aus $\bigcap_{i=0}^{\infty} \mathfrak{M}_i(\mathfrak{c})$, so existiert zu jedem i $(\geqq 0)$ ein Element c_i aus $\mathfrak{c}^{p^{-i}}$ derart, dass

$$c = c_0 = c_i^{p^i}$$

ist. Da offenbar $c_i^{p^i} = (c_{i+1}^p)^{p^i}$ ist und K keine primitive p-te Einheitswurzel enthält, so schliesst man ohne Schwierigkeit, dass $c_i = c_{i+1}^p$ $(i \geqq 0)$ ist. Hieraus folgt:

ZUSATZ 1 ZU SATZ 7. *Es sei $\chi(K) \neq \chi(\mathfrak{K}) = p$ und $\mathfrak{K}$ vollkommen. Enthält dann K^* keine primitive p-te Einheitswurzel, so existiert in K^* ein gruppenisomorphes Repräsentantensystem von $\mathfrak{K}^*$, wenn für jede Restklasse $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{K}^*$ stets $\bigcap_{i=0}^{\infty}\mathfrak{M}_i(\mathfrak{c})$ nicht leer ist.*

Enthält aber für jede Restklasse $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{K}^*$ der Durchschnitt $\bigcap_{i=0}^{\infty}\mathfrak{M}_i(\mathfrak{c})$ *genau ein* Element, so betrachten wir für eine beliebige, nicht negative Zahl ν den Durchschnitt

$$\bigcap_{i=0}^{\infty}\mathfrak{M}_i(\mathfrak{c}^{p^{-\nu}}).$$

Nach Voraussetzung enthält dieser Durchschnitt ein einziges Element c_ν aus K. Wegen $c_{\nu+1} \in \mathfrak{M}_i(\mathfrak{c}^{p^{-\nu-1}})$ ist offenbar

$$c_{\nu+1}^p \in \mathfrak{M}_{i+1}(\mathfrak{c}^{p^{-\nu}}).$$

Hieraus folgt sofort:

$$c_{\nu+1}^p = \bigcap_{i=0}^{\infty}\mathfrak{M}_{i+1}(\mathfrak{c}^{p^{-\nu}}) = \bigcap_{i=0}^{\infty}\mathfrak{M}_i(\mathfrak{c}^{p^{-\nu}}) = c_\nu.$$

Aus Satz 7 folgt also

ZUSATZ 2 ZU SATZ 7. *Es sei $\chi(K) \neq \chi(\mathfrak{K}) = p$ und $\mathfrak{K}$ vollkommen. Besitzt dann für jede Restklasse $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{K}^*$ der Durchschnitt $\bigcap_{i=0}^{\infty}\mathfrak{M}_i(\mathfrak{c})$ genau ein Element, so existiert (genau) eine Untergruppe aus K^*, welche mit $\mathfrak{K}^*$ gruppenisomorph ist.*

Bemerkung. Im Fall, wo die Bewertung w von K *diskret* ist, so greifen wir aus den p^{-i}-ten Wurzeln $\mathfrak{c}^{p^{-i}}$ einer beliebigen Restklasse $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{K}$ bzw. die (beliebigen) Vertreter a_i heraus. Da $\mathfrak{c}^{p^{-i}} \supseteqq \mathfrak{M}_1(\mathfrak{c}^{p^{-(i+1)}})$ ist, so gilt:

$$a_i \equiv a_{i+1}^p \quad \bmod \pi \quad (i \geqq 0),$$

wo π ein Primelement von w bezeichnet. Dann gilt offenbar:

$$a_i^{p^i} \equiv a_{i+1}^{p^{i+1}} \quad \bmod \pi^{i+1}.$$

Also konvergiert die Folge $a_0, a_1^p, \ldots, a_i^{p^i}, \ldots$ zu einem Element c_0 aus J. Da offenbar $a_i^{p^i} \in \mathfrak{M}_i(\mathfrak{c}) \subseteqq \mathfrak{c}$ ist, so ist $c = c_0$ ein Element aus $\mathfrak{c}$. Ebenso beweist man, dass die Folge $a_1, a_2^p, \ldots, a_{i+1}^{p^i}, \ldots$ zu einem Element c_1 aus $\mathfrak{c}^{p^{-1}}$ konvergiert. Da aber c_1^p das Grenzelement der konvergenten Folge $a_1^p, a_2^{p^2}, \ldots, a_{i+1}^{p^{i+1}}, \ldots$ ist, so erhält man:

$$c = c_0 = c_1^p.$$

Durch vollständige Induktion beweist man leicht, dass es in jedem $\mathfrak{c}^{p^{-i}}$ ein Ele-

https://doi.org/10.1017/S0027763000022947 Published online by Cambridge University Press

ment c_i mit $c_i = c_{i+1}^p$ gibt. Ferner gilt:

$$c = c_0 = c_1^p = \ldots = c_i^{p^i} = \ldots ;$$

d.h. der Durchschnitt $\bigcap_{i=0}^{\infty} \mathfrak{M}_i(\mathfrak{c})$ ist nicht leer.

Nun gibt es für ein Element c' aus $\bigcap_{i=0}^{\infty} \mathfrak{M}_i(\mathfrak{c})$ ein Element c_i' aus $\mathfrak{c}^{p^{-i}}$ mit $c' = c_i'^{p^i}$. Da aber für jeden Index i ($\geqq 0$) stets die Kongruenz

$$c_i \equiv c_i' \qquad \mathrm{mod}\ \pi$$

besteht, so erhält man für eine beliebige natürliche Zahl m stets

$$c = c_m^{p^m} \equiv c_m'^{p^m} = c' \qquad \mathrm{mod}\ \pi^m ;$$

d.h. es ist $c = c'$. Der Durchschnitt $\bigcap_{i=0}^{\infty} \mathfrak{M}_i(\mathfrak{c})$ enthält also ein einziges Element. Daraus schliesst man im charakteristikgleichen Fall nach Satz 5, dass es in K genau ein körperisomorphes Repräsentantensystem von $\mathfrak{K}$ gibt. Im charakteristikungleichen Fall existiert aber nach Satz 7 ein einziges gruppenisomorphes Repräsentantensystem G von $\mathfrak{K}$. Die Gruppe G bildet mit der Null zusammen ein multiplikativ abgeschlossenes System R, und R ist mit $\mathfrak{K}$ multiplikativ isomorph. Zusammenfassend die beiden obigen Tatsachen, erhält man einen Teil der am Anfang erwähnten Tatsache:

Ist K ein diskret bewerteter perfekter Körper und $\mathfrak{K}$ vollkommen von einer Primzahlcharakteristik p, so gibt es in J ein einziges, mit $\mathfrak{K}$ multiplikativ isomorphes Repräsentantensystem R von $\mathfrak{K}$ mit $R^p = R$. Wenn K die Charakteristik p hat, so ist R mit $\mathfrak{K}$ körperisomorph.

§4. In diesem Paragraphen wollen wir durch ein Beispiel zeigen, dass es im *charakteristikgleichen* Fall einen perfekten Körper K mit dem *vollkommenen* Restklassenkörper $\mathfrak{K}$ gibt, welcher kein körperisomorphes Repräsentantensystem von $\mathfrak{K}$ besitzt.

Zu diesem Zweck betrachten wir einen *vollkommenen* Körper k_0 von einer Primzahlcharakteristik p, und eine *einfache transzendente* Erweiterung $k_0(t)$ von k_0 mit einem über k_0 transzendenten Element t. Ferner betrachten wir für eine zu p prime natürliche Zahl q (>1) eine additive Gruppe W aller derjenigen rationalen Zahlen, die, dargestellt als reduzierter Bruch, lauter Potenzen von q als Nenner besitzen. Dann bezeichnen wir mit $I(t, x)$ den Integritätsbereich aller *verallgemeinerten* Polynome $a_0(t) + a_1(t)x^{\alpha_1} + \ldots + a_n(t)x^{\alpha_n}$ von x mit Koeffizienten $a_i(t)$ ($i = 0, 1, \ldots, n$) aus $k_0(t)$, wo $0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n$ ($\alpha_i \in W$) ist. Jedes Element $y \neq 0$ aus dem Quotientenkörper Q von $I(t, x)$ ist von der Form:

$$y = x^{\alpha} \frac{a_0(t) + a_1(t)x^{\alpha_1} + \ldots + a_n(t)x^{\alpha_n}}{b_0(t) + b_1(t)x^{\beta_1} + \ldots + b_m(t)x^{\beta_m}}.$$

Dabei sind $a_0(t) + a_1(t)x^{\alpha_1} + \ldots + a_n(t)x^{\alpha_n}$ und $b_0(t) + b_1(t)x^{\beta_1} + \ldots + b_m(x)x^{\beta_m}$

Polynome aus $I(t, x)$ mit $a_0(t)b_0(t) \neq 0$. Ferner heisst die Zahl α der Exponent von y, weil α in der obigen Darstellung durch y eindeutig bestimmt ist. Setzt man nun $w(y) = \alpha$,[3] so definiert w, wie leicht bestätigt, eine *Exponentenbewertung* von Q mit W als der Wertgruppe. Offenbar ist dabei ein von Null verschiedenes Element aus $k_0(t)$ stets die Bewertung 0. Wir bilden nun die *perfekte Hülle* K von Q in bezug auf w und bezeichnen mit J den Bewertungsring von K in bezug auf w. Bezeichnet nun $\mathfrak{p}$ das zu w gehörige Primideal aus J, so ist der Restklassenkörper $\mathfrak{K} = J/\mathfrak{p}$ von K mit $k_0(t)$ körperisomorph.

Nun seien $\rho_1 = x^{q^{-1}}$, $\rho_2 = \rho_1 + x^{pq^{-2}}, \ldots, \rho_n = \rho_{n-1} + x^{p^{n-1}q^{-n}}, \ldots$ gesetzt. Bezeichnet man dann mit $\overline{t + \rho_n}$ die $t + \rho_n$ enthaltende Restklasse aus $\mathfrak{K}$, so ist das Polynom $F(X) = X^{p^n} - \overline{t + \rho_n}$ irreduzibel in $\mathfrak{K}[X]$. Angenommen, es wäre $F(X)$ reduzibel in $\mathfrak{K}[X]$. Dann gäbe es ein Element $\dfrac{a(t)}{b(t)}$ aus $k_0(t)$ derart, dass die Kongruenz

$$\left(\frac{a(t)}{b(t)}\right)^{p^\nu} \equiv t \quad \bmod \mathfrak{p} \quad (n \geqq \nu \geqq 1)$$

gilt, weil $\overline{t + \rho_n} = \bar{t}$ ist. Dies ist aber ein Widerspruch. Hieraus folgt sofort, dass das Polynom $X^{p^n} - (t + \rho_n)$ auch in $K[X]$ irreduzibel ist. Adjungiert man jetzt die Wurzel θ_n von $X^{p^n} - (t + \rho_n) = 0$ zu K, so ist $K_n = K(\theta_n)$ vom Grade p^n über K. Da

$$\theta_n^p = (t + \rho_{n-1} + x^{p^{n-1}q^{-n}})^{p^{-(n-1)}} = \theta_{n-1} + x^{q^{-n}} \in K_n$$

ist, so ist K_{n-1} ein Teilkörper von K_n. Bezeichnet man nun mit $\mathfrak{K}_n$ den Restklassenkörper von K_n, so ist die θ_n enthaltende Restklasse offenbar eine Nullstelle des Polynomes $X^{p^n} - \overline{t + \rho_n}$; d.h. $\mathfrak{K}_n$ ist vom Grade p^n über $\mathfrak{K}$. Also ist K_n über K *unverzweigt*. Bildet man nun den Vereinigungskörper L von den K_n $(n = 1, 2, \ldots)$, so ist L über K unverzweigt, also besitzt die perfekte Hülle $\bar{L}$ von L die Wertgruppe W.

Es sei nun $\mathfrak{L}$ der Restklassenkörper von $\bar{L}$. Dann besitzt jede Restklasse $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{L}$ ein Element c aus L als ihren Vertreter. Da c bereits zu einem passend gewählten Körper K_n gehört, so kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass c von der Form

$$\sum_{i=0}^{m} \frac{a_i(t)}{b_i(t)} (t + \rho_n)^{ip^{-n}}$$

ist. Dabei sind die $a_i(t)$, $b_i(t)$ Polynome von t mit Koeffizienten aus k_0. Da offenbar

$$w(a_i(t) - a_i(t + \rho_1)) > 0, \quad w(b_i(t) - b_i(t + \rho_1)) > 0$$

und

[3] Für $y = 0$ setzen wir in üblicher Weise $w(0) = \infty$.

https://doi.org/10.1017/S0027763000022947 Published online by Cambridge University Press

$$w((t+\rho_n)^{p^{-n}}-(t+\rho_{n+1})^{p^{-n}})>0$$

sind, so gehört das Element

$$c'=\sum_{i=0}^{m}\frac{a_i(t+\rho_1)}{b_i(t+\rho_1)}(t+\rho_{n+1})^{ip^{-n}}=\sum_{i=0}^{m}\frac{a_i(\theta_1^p)}{b_i(\theta_1^p)}\theta_{n+1}^{ip}$$

auch zu $\mathfrak{c}$. Da $k_0=k_0^p$ ist, so gibt es die Polynome $a_i'(\theta_1)$ und $b_i'(\theta_1)$ aus K_1 derart, dass

$$a_i'(\theta_1)^p=a_i(\theta_1^p)\quad\text{und}\quad b_i'(\theta_1)^p=b_i(\theta_1^p)\quad(i=0,\ 1,\ \ldots)$$

gelten. Daher ist das Element $\sum_{i=0}^{m}\frac{a_i'(\theta_1)}{b_i'(\theta_1)}\theta_{n+1}^i$ die p-te Wurzel von c' aus L; d.h. der Restklassenkörper $\mathfrak{L}$ ist *vollkommen.*

Nun unterscheiden wir zwei Unterfälle:

$$\text{i) } p<q \quad\text{und}\quad \text{ii) } p>q.$$

Fall i). Bezeichnet man mit $\mathfrak{t}$ die t enthaltende Restklasse aus $\mathfrak{L}$, so ist die θ_n enthaltende Restklasse aus $\mathfrak{L}$ gleich $\mathfrak{t}^{p^{-n}}$. Wir nehmen an, dass der Durchschnitt $\bigcap_{i=0}^{\infty}\mathfrak{M}_i(\mathfrak{t})$ nicht leer ist, und bezeichnen mit z ein Element aus diesem Durchschnitt. Weil die Restklasse $\mathfrak{t}^{p^{-n}}$ aus $\mathfrak{L}$ die p^{-n}-te Wurzel $z^{p^{-n}}$ von z enthält, so kann man

$$z^{p^{-n}}=\theta_n+\sigma_n\qquad\text{mit } w(\sigma_n)>0\quad(n=0,\ 1,\ \ldots)$$

setzen;[4] hieraus folgt ohne weiteres:

$$z^{p^{-(n-1)}}=\theta_n^p+\sigma_n^p=\theta_{n-1}+x^{q^{-n}}+\sigma_n^p=\theta_{n-1}+\sigma_{n-1}\quad(n\geqq 1).$$

Da $w(x^{q^{-n}})=q^{-n}$ und $w(\sigma_n^p)=pw(\sigma_n)$ sind, so folgt aus der Struktur der Wertgruppe W:

$$w(x^{q^{-n}})\neq w(\sigma_n^p).$$

Es muss also $w(\sigma_{n-1})=\mathrm{Min}(q^{-n},\ pw(\sigma_n))$ sein; d.h. $w(\sigma_{n-1})\leqq q^{-n}$. Anderseits gilt aber:

$$w(\rho_{n-1})=\frac{p^{n-2}}{q^{n-1}}=\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2}\frac{1}{q}>\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}\frac{1}{q}\geqq w(\sigma_{n-1}^{p^{n-1}}).$$

Weil $\sigma_0=x^{q^{-1}}+\sigma_1^p$, $\sigma_1^p=x^{pq^{-2}}+\sigma_2^{p^2}$, $\ldots$, und $\sigma_{n-2}^{p^{n-2}}=x^{p^{n-2}q^{n-1}}+\sigma_{n-1}^{p^{n-1}}$ sind, so ist $\sigma_0=\rho_{n-1}+\sigma_{n-1}^{p^{n-1}}$, woraus

$$w(\sigma_0)=w(\sigma_{n-1}^{p^{n-1}})\leqq\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}\frac{1}{q}$$

folgt. Da $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}\to 0$ ist, so muss $w(\sigma_0)=0$ sein, was aber ein Widerspruch

[4] Dabei ist $\theta_0=t$ gesetzt.

https://doi.org/10.1017/S0027763000022947 Published online by Cambridge University Press

ist. Also ist $\bigcap\limits_{=0}^{\infty}\mathfrak{M}_i(t)$ leer. Nach Satz 5 besitzt $\bar{L}$ kein körperisomorphes Repräsentantensystem von $\mathfrak{L}$.

Fall ii). Wegen $p > q$ konvergiert die unendliche Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} x^{p^i q^{-i-1}}$ zu einem Element y aus K. Das Element $t+y$ ist offenbar über k_0 transzendent, und $k_0(t+y)$ ist auch ein körperisomorphes Repräsentantensystem von $\mathfrak{K}$. Da

$$t+y = t+\rho_n+\sum_{i=n+1}^{\infty} x^{p^i q^{-i-1}}$$

ist, so ist $(t+y)^{p^{-n}} = \theta_n+\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} x^{p^{i-n} q^{-i-1}}$, wo $\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} x^{p^{i-n} q^{-i-1}}$ als eine konvergente Reihe aus K Element aus K ist. Daher ist

$$K((t+y)^{p^{-n}}) = K(\theta_n),$$

und infolgedessen ist

$$L = \bigcup_{i=1}^{\infty} K((t+y)^{p^{-n}}).$$

Weil jede Restklasse aus dem Restklassenkörper $\mathfrak{K}_n$ von $K_n = K(\theta_n)$ ein Polynom von $(t+y)^{p^{-n}}$ mit Koeffizienten aus $k_0(t+y)$ als einen Vertreter besitzt, so ist $k_0((t+y)^{p^{-n}})$ ein körperisomorphes Repräsentantensystem von $\mathfrak{K}_n$ aus K_n. Hieraus folgt sofort, dass

$$L_0 = \bigcup_{i=0}^{\infty} k_0((t+y)^{p^{-n}})$$

ein körperisomorphes Repräsentantensystem des Restklassenkörpers von L ist. Bekanntlich ist dabei L_0 auch ein körperisomorphes Repräsentantensystem von $\mathfrak{L}$. Daher besitzt $\bar{L}$ ein körperisomorphes Repräsentantensystem des Restklassenkörpers $\mathfrak{L}$.

Bemerkung. Der Körper K enthält verschiedene körperisomorphe Repräsentantensysteme von $\mathfrak{K}$, etwa $k_0(t)$ und $k_0(t+y)$.

Nach der Struktur der Wertgruppe W besitzt $\bar{L}$ genau ein körperisomorphes Repräsentantensystem von $\mathfrak{L}$.

Mathematisches Institut,
Universität zu Okayama

https://doi.org/10.1017/S0027763000022947 Published online by Cambridge University Press