Masayuki Itô
Nagoya Math. J.
Vol. 53 (1974), 115-126

SUR LA FAMILLE SOUS-ORDONNÉE AU NOYAU DE CONVOLUTION DE HUNT II

MASAYUKI ITÔ

1. Introduction et préliminaires

Dans toute la suite X désignera un groupe abélien localement compact et dénombrable à l'infini; ξ sera sa mesure de Haar. Un noyau de convolution N sur X signifie une mesure de Radon positive dans X, et, pour une mesure de Radon réelle μ dans X, $N*\mu$ s'appelle le N-potentiel de μ dès que cette convolution a un sens. En particulier, s'il est absolument continu par rapport à ξ, sa densité s'écrira $N\mu$. Pour une fonction f localement ξ-sommable dans X, on notera $N*f$ et Nf au lieu de $N*(f\xi)$ et $N(f\xi)$ dès que ceux sont définis.

Un noyau de convolution de Hunt N sur X est, par définition, un noyau de convolution sur X de la forme

$$N = \int_0^\infty \alpha_t dt ,$$

où $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est un semi-groupe vaguement continu de mesures de Radon positives $\neq 0$ dans X; c'est-à-dire, $\alpha_0 =$ mesure de Dirac, $\alpha_t*\alpha_s=\alpha_{t+s}$ ($\forall t \geqq 0, \forall s \geqq 0$) et l'application $t \to \alpha_t$ est vaguement continue. Dans ce cas, ce semi-groupe est uniquement déterminé (cf. [2]), qui s'appelle le semi-group associé au noyau N. N est borné[1] (cela est équivalent au principe complet du maximum pour N) si et seulement si, quel que soit $t \geqq 0$, $\int d\alpha_t \leqq 1$. Dan ce cas, il existe une fonction définie-négative ψ sur le groupe dual $\hat{X}$ de X, et une seule telle que, quel que soit $t \geqq 0$, $\hat{\alpha}_t = \exp(-t\psi)$ (cf. par exemple, [4])[2], où la signe ^ représente la transfor-

Received December 11, 1972.

[1] Un noyau de convolution N sur X est dit borné si, quelle que soit f de $C_K(X)$, $N*f$ est bornée sur X.

[2] Une fonction ψ complexe et continue dans $\hat{X}$ est dite définie-négative si $\psi(\hat{0}) \geqq 0$, $\psi(-\hat{x}) = \overline{\psi(\hat{x})}$ ($\forall \hat{x} \in \hat{X}$) et quels que soient n un entier >0, $(\hat{x}_i)_{i=1}^n$ une famille de points de $\hat{X}$ et $(c_i)_{i=1}^n$ une famille de nombres complexes avec $\sum_{i=1}^n c_i = 0$,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \psi(\hat{x}_i - \hat{x}_j) c_i \overline{c_j} \leqq 0 .$$

mation de Fourier. On a symboliquement $\hat{N} = 1/\psi$, et ψ s'appelle la fonction définie-négative associée au noyau N. Sous une condition additionnelle, un noyau de convolution de Hunt est un noyau de convolution N qui satisfait au principe de domination; c'est-à-dire, quelles que soient f et g de $C_K^+(X)$, $N*f \leqq N*g$ partout sur X dès que $N*f \leqq N*g$ sur le support de f, supp (f) (cf. [8]). On note ici $C_K(X)$ et $C_K^+(X)$ l'espace vectoriel topologique usuel des fonctions finies et continues dans X à support compact et son sous-ensemble des fonctions non-négatives, respectivement.

Dans l'article précédent [9], nous avons montré le théorème suivant:

Soit κ un noyau de convolution borné sur la droite réelle $\boldsymbol{R}$ porté par $\boldsymbol{R}^+ = \{t \in \boldsymbol{R}\,; t \geqq 0\}$. Pour que, quels que soient X un groupe abélien localement compact et dénombrable à l'infini, et $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$ un noyau de convolution de Hunt sur X, $N_{(\kappa)} = \int \alpha_t d\kappa(t)$ satisfasse au principe de domination, il faut et il suffit que κ satisfasse au principe de domination.

Dans cette note, on obtiendra d'abord le théorème suivant:

Soient κ un noyau de convolution non-zéro sur $\boldsymbol{R}$ porté par $\boldsymbol{R}^+$ et $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$ un noyau de convolution de Hunt sur X. Si κ satisfait au principe de domination et si $N_{(\kappa)} = \int \alpha_t d\kappa(t)$ a un sens, alors $N_{(\kappa)}$ est un noyau de convolution de Hunt. Dans ce cas, le semi-groupe associé au noyau $N_{(\kappa)}$ est explicitement représenté.

Sous une condition additionnelle pour X, on obtiendra ensuite l'équivalence suivante: Soit κ un noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}$ porté par $\boldsymbol{R}^+$; alors les deux énoncés suivants sont équivalents.

(1) Quel que soit $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$ un noyau de convolution de Hunt sur X, $N_{(\kappa)}$ a un sens et il est un noyau de convolution de Hunt sur X.

(2) κ est un noyau de convolution de Hunt borné sur $\boldsymbol{R}$.

Soit $H_b(\boldsymbol{R}^+)$ la totalité des noyaux convolution de Hunt bornés sur $\boldsymbol{R}$ portés par $\boldsymbol{R}^+$. Pour un noyau de convolution de Hunt $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$ sur X, on appelle

$$H(N\,; X) = \left\{N_{(\kappa)} = \int \alpha_t d\kappa(t)\,; \kappa \in H_b(\boldsymbol{R}^+)\right\}$$

la famille sous-ordonnée au noyau N (cf. [9]). D'après la présente équivalence, cette terminologie est plus justifiée.

https://doi.org/10.1017/S002776300001607X Published online by Cambridge University Press

Dans le cas où N est borné, la fonction définie-négative associée à un élément de $H(N; X)$ sera écrite explicitement au moyen de la fonction définie-négative associée au noyau N et d'une fonction de Bernstein (voir le théorème 3).

Nous discuterons finalement une caractérisation pour qu'un noyau de convolution sur l'espace euclidien $\boldsymbol{R}^n$ $(n \geqq 3)$ appartienne à la famille sous-ordonnée au noyau newtonien sur $\boldsymbol{R}^n$.

2. La famille sous-ordonnée au noyau de convolution de Hunt

Commençons d'abord avec la définition d'une résolvante. Une famille $(N_p)_{p>0}$ de noyaux de convolution sur X est, par définition, une résolvante si l'on a

$$N_p - N_q = (q-p) N_p * N_q \qquad (\forall p > 0, \forall q > 0) .$$

Dans ce cas, il est évident que l'application $(0, +\infty) \ni p \to N_p$ est vaguement continue. Si, pour un noyau de convolution N sur X, il existe une résolvante $(N_p)_{p>0}$ telle que $\lim_{p\to 0} N_p = N$ (au sens de la topologie vague), alors elle est uniquement déterminée et $(N_p)_{p\geqq 0}$ s'appelle la résolvante associée au noyau N, où $N_0 = N$ (cf. [2]).

Soient N et $(N_p)_{p\geqq 0}$ respectivement un noyau de convolution de Hunt sur X et la résolvante associée au noyau N. Alors, quelle que soit λ une mesure de Radon positive dans $\boldsymbol{R}^+$, $\int N_p d\lambda(p)$ appartient à la famille sous-ordonnée au noyau N dès que cette intégrale a un sens. Il est connu qu'il existe la famille $(N^\alpha)_{0\leqq\alpha\leqq 1}$ des puissances fractionnaires de N (cf. par exemple, [10]). Pour une mesure de Radon positive ν quelconque sur $[0, 1]$, $\int N^\alpha d\nu(\alpha)$ appartient aussi à $H(N; X)$, car il existe une autre mesure de Radon positive λ dans $\boldsymbol{R}^+$ telle que $\int N^\alpha d\nu(\alpha) = \int N_p d\lambda(p)$ (cf. par exemple, [10]). La proposition suivante est déjà presque connue dans [8].

PROPOSITION 1. *Soit N un noyau de convolution non-zéro sur X. Pour que N soit un noyau de convolution de Hunt sur X, il faut et il suffit qu'il existe la résolvante associée au noyau N et que N soit non-périodique*[3].

---

3) N est dit périodique à un point x si $N = N * \varepsilon_x$, où ε_x est la mesure de Dirac au point x. Si, quel que soit $x \neq 0$ de X, $N \neq N * \varepsilon_x$, alors N est dit non-périodique.

En effet, la condition est évidemment nécessaire. S'il existe la résolvante associée au noyau N, alors, pour un voisinage compact V de l'origine, il existe une mesure de Radon positive ε'_{CV} dans X portée par $\overline{CV}$ telle que $N \geqq N*\varepsilon'_{CV}$ dans X et $N = N*\varepsilon'_{CV}$ dans CV[4] (cf. le lemme 3 dans [8]), et on a

$$\lim_{V\uparrow X} N*\varepsilon'_{CV} = 0$$

(au sens de la topologie vague) (cf. le lemme 5 dans [8]). Si, quel que soit V un voisinage compact de l'origine, $N \neq N*\varepsilon'_{CV}$, alors notre proposition peut être montrée de la même manière que dans la proposition 3 dans [8]. Supposons donc qu'il existe un voisinage compact V de l'origine telle que $N = N*\varepsilon'_{CV}$ dans X. On a alors, quel que soit W un voisinage compact de l'origine, $N*\varepsilon'_{CW} = (N*\varepsilon'_{CW})*\varepsilon'_{CV}$ dans X. Il existe évidemment un autre voisinage compact W de l'origine tel que $N \neq N*\varepsilon'_{CW}$, car $N \neq 0$. $N - N*\varepsilon'_{CW}$ étant une mesure de Radon positive dans X à support compact et ayant

$$(N - N*\varepsilon'_{CW}) = (N - N*\varepsilon'_{CW})*\varepsilon'_{CV}$$

dans X, on obtient que $\int d\varepsilon'_{CV} = 1$ et $N - N*\varepsilon'_{CW}$ est périodique à tout le point de $\operatorname{supp}(\varepsilon'_{CV})$ (cf. [1]). Faisant $W\uparrow X$, on obtient que N est périodique à tout le point de $\operatorname{supp}(\varepsilon'_{CV})$, d'où cela est en contradiction avec l'hypothèse que N est non-périodique.

COROLLAIRE 1. *Soit κ un noyau de convolution non-zéro sur $\boldsymbol{R}$ porté par $\boldsymbol{R}^+$. Alors pour que κ soit un noyau de convolution de Hunt sur $\boldsymbol{R}$, il faut et il suffit que κ satisfasse au principe de domination.*

En effet, il est évident que la condition est nécessaire, et on montrera son inverse. S'il existe un point $(\neq 0)$ auquel κ est périodique, alors on a $\operatorname{supp}(\kappa) \not\ni 0$, mais cela est en contradiction avec $\kappa \neq 0$ et le principe de domination pour κ, d'où κ est non-périodique. Pour une fonction f de $C_K(\boldsymbol{R})$, la fonction $\kappa*f(x)\kappa*f(-x)$ est à support compact, et donc $\kappa*\kappa$ a un sens. On a, pour deux fonctions f, g non-négatives, mesurables et bornées dans $\boldsymbol{R}$ à support compact, $\kappa f \leqq \kappa g$ presque partout sur $\boldsymbol{R}$ dès que $\kappa f \leqq \kappa g$ presque partout sur $\{x \in \boldsymbol{R}; f(x) > 0\}$, qui résulte de l'équivalence des deux sortes de principes de domination (cf. [7]). Les

[4] Cette mesure s'appelle une mesure balayée de ε sur CV relativement au noyau N.

présents deux énoncés déduisent l'existence de la résolvante associée au noyau κ (cf. [6] ou [10]). D'après la proposition, κ est un noyau de convolution de Hunt sur $\boldsymbol{R}$.

THÉORÈME 1. *Soient $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$ un noyau de convolution de Hunt sur X et κ un noyau de convolution non-zéro sur $\boldsymbol{R}$ porté par $\boldsymbol{R}^+$ satisfaisant au principe de domination. Alors $N_{(\kappa)} = \int \alpha_t d\kappa(t)$ est un noyau de convolution de Hunt sur X dès que l'intégrale $\int \alpha_t d\kappa(t)$ a un sens.*

Démonstration. D'après le présent corollaire, il existe la résolvante $(\kappa_p)_{p \geqq 0}$ associée au noyau κ. D'après $\kappa_p \leqq \kappa$,

$$N_{(\kappa_p)} = \int \alpha_t d\kappa_p(t)$$

a un sens pour tout $p \geqq 0$. On a, quels que soient $p \geqq 0$ et $q > 0$,

$$\begin{aligned} N_{(\kappa_p)} - N_{(\kappa_q)} &= \int \alpha_t d(\kappa_p - \kappa_q)(t) = (q-p) \int \alpha_t d\kappa_p * \kappa_q(t) \\ &= (q-p) \iint \alpha_{t+s} d\kappa_p(t) d\kappa_q(s) = (q-p) \iint \alpha_t * \alpha_s d\kappa_p(t) d\kappa_q(s) \\ &= (q-p) N_{(\kappa_p)} * N_{(\kappa_q)} \ , \end{aligned}$$

et par suite $(N_{(\kappa_p)})_{p \geqq 0}$ est une résolvante et $N_{(\kappa_p)} \leqq N_{(\kappa)}$ $(p \geqq 0)$. La famille $(\kappa_p)_{p>0}$ converge d'une manière croissante vers κ avec $p \downarrow 0$, et par suite $(N_{(\kappa_p)})_{p>0}$ converge aussi d'une manière croissante vers $N_{(\kappa)}$ avec $p \downarrow 0$, d'où il existe la résolvante associée au noyau $N_{(\kappa)}$. Montrons ensuite que $N_{(\kappa)}$ est non-périodique. κ étant un noyau de convolution de Hunt sur $\boldsymbol{R}$, pour un entier $n > 0$ quelconque, il existe une mesure de Radon positive ε'_n dans $\boldsymbol{R}$ portée par $[1/n, +\infty)$ telle que $\kappa \geqq \kappa * \varepsilon'_n$ dans $\boldsymbol{R}$, $\kappa = \kappa * \varepsilon'_n$ dans $(-\infty, 0) \cup (1/n, +\infty)$ et $\kappa \neq \kappa * \varepsilon'_n$. Soit x un point quelconque auquel $N_{(\kappa)}$ est périodique; alors, d'après l'égalité

$$N_{(\kappa - \kappa * \varepsilon'_n)} = N_{(\kappa)} * (\varepsilon - N_{(\varepsilon'_n)}) \ ,$$

$N_{(\kappa - \kappa * \varepsilon'_n)}$ est aussi périodique au point x, où ε est la mesure de Dirac à l'origine dans X. Posons $1/a_n = \int d(\kappa - \kappa * \varepsilon'_n) > 0$; alors $\operatorname{supp}(a_n(\kappa - \kappa * \varepsilon'_n)) \subset [0, 1]$ $(\forall n \geqq 1)$ et la suite $(a_n(\kappa - \kappa * \varepsilon'_n))_{n=1}^\infty$ converge vaguement vers la mesure de Dirac dans $\boldsymbol{R}$ avec $n \to +\infty$. Donc $(a_n N_{(\kappa - \kappa * \varepsilon'_n)})_{n=1}^\infty$ converge vaguement vers ε avec $n \to +\infty$, d'où $x = 0$. Il est non-périodique, et

https://doi.org/10.1017/S002776300001607X Published online by Cambridge University Press

par suite $N_{(\kappa)}$ est un noyau de convolution de Hunt sur X. La démonstration est ainsi complète.

PROPOSITION 2. *Soient $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$ un noyau de convolution de Hunt sur X symétrique par rapport à l'origine et avec $\int dN = +\infty$, et κ un noyau de convolution de Hunt sur $\boldsymbol{R}$ porté par $\boldsymbol{R}^+$; alors pour que $N_{(\kappa)}$ ait un sens, il faut et il suffit que κ satisfasse au principe complet du maximum*[5].

Démonstration. La condition est évidemment suffisante (cf. le lemme 1 dans [9]). Montrons que la condition est nécessaire. On peut supposer $\kappa \neq 0$, et donc, d'après le présent théorème, $N_{(\kappa)}$ est un noyau de convolution de Hunt sur X et $(N_{(\kappa_p)})_{p \geqq 0}$ est la résolvante associée au noyau $N_{(\kappa)}$, où $(\kappa_p)_{p \geqq 0}$ est la résolvante associée au noyau κ. N étant symétrique par rapport à l'origine, quel que soit $t \geqq 0$, α_t l'est aussi. Donc $N_{(\kappa)}$ est symétrique par rapport à l'origine, et par suite, quel que soit $p > 0$,

$$p \int dN_{(\kappa_p)} = \iint d\alpha_t d(p\kappa_p)(t) \leqq 1$$

(cf. par exemple, [7]). Ayant $\int dN = +\infty$, on a, quel que soit $t \geqq 0$, $\int d\alpha_t = 1$, et par suite $p \int d\kappa_p \leqq 1$ ($\forall p > 0$), d'où κ satisfait au principe complet du maximum. La démonstration est ainsi complète.

Pour montrer l'inverse du théorème 1, on préparera d'abord le lemme suivant:

LEMME 1. *Pour qu'il existe un noyau de convolution de Hunt sur X associé auquel la fonction définie-négative est purement imaginaire, il faut et il suffit qu'il existe un espace vectoriel topologique sur $\boldsymbol{R}$ appartenant à X et homéomorphe avec $\boldsymbol{R}$.*

En effet, supposons qu'il existe un noyau de convolution de Hunt N sur X associé auquel la fonction définie-négative ψ est purement imaginaire. Soit $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ le semi-groupe associé au noyau N; alors la transformée de Fourier de $\alpha_t * \check{\alpha}_t$ est égale à 1 pour tout $t \geqq 0$, où $\check{\alpha}_t$ est une mesure de Radon positive dans X symétrisant avec α_t par rapport à l'origine. On a donc $\alpha_t * \check{\alpha}_t = \varepsilon$, et par suite il existe un point x_t de X

[5] Cela signifie que, quelles que soient f, g de $C_K^+(\boldsymbol{R})$, $\kappa * f \leqq \kappa * g + 1$ sur $\boldsymbol{R}$ dès que $\kappa * f \leqq \kappa * g + 1$ sur supp (f).

tel que $\alpha_t = \varepsilon_{x_t}$. On pose $E = \{x_t \in X ; t \in \boldsymbol{R}\}$, où $x_{-t} = -x_t$. En définisant $sx_t = x_{st}$ ($\forall s, \forall t \in \boldsymbol{R}$) et en induisant la topologie de X sur E, E est un espace vectoriel topologique sur $\boldsymbol{R}$. Si, pour deux nombres t et s de $\boldsymbol{R}$ avec $t \neq s$, $\alpha_t = \alpha_s$, alors $\alpha_{(t-s)} = \varepsilon$, et par suite E est compact, mais cela est en contradiction avec l'hypothese que $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$ est une mesure de Radon positive dans X. Par conséquent, E et R sont algébriquement isomorphe. Le semi-groupe $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ étant vaguement continu, l'application $t \to x_t$ est continue. Son inverse est évidemment continue, d'où la condition est nécessaire.

Montrons que la condition est suffisante. Soit E l'espace vectoriel topologique sur $\boldsymbol{R}$ appartenant à X et homéomorphe avec $\boldsymbol{R}$. Notons x_t l'image de $t \in \boldsymbol{R}$ par l'application homéomorphe de $\boldsymbol{R}$ à E et posons $\alpha_t = \varepsilon_{x_t}$; alors $(\alpha_t)_{t>0}$ est évidemment un semi-groupe vaguement continu. D'après l'hypothèse que E et $\boldsymbol{R}$ sont homéomorphes, on a $x_t \to \infty$ dans X avec $|t| \to +\infty$. Par conséquent, $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$ est un noyau de convolution de Hunt sur X. La fonction définie-négative associée au noyau N est purement imaginaire, car $\alpha_t * \check{\alpha}_t = \varepsilon$ ($\forall t \geqq 0$).

Nous montrerons notre deuxième théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Supposons qu'il existe un espace vectoriel topologique E sur $\boldsymbol{R}$ appartenant à X et homéomorphe avec $\boldsymbol{R}$, et soit κ un noyau de convolution non-zéro sur R porté par $\boldsymbol{R}^+$. Alors pour que, quel que soit $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$ un noyau de convolution de Hunt sur X, $N_{(\kappa)} = \int \alpha_t d\kappa(t)$ ait un sens et soit un noyau de convolution de Hunt sur X, il faut et il suffit que κ satisfasse an principe complet du maximum.*

Démonstration. D'après le théorème 1 et le lemme 1 dans [9], la condition est suffisante. On montrera donc que la condition est nécessaire. Notons x_t l'image de $t \in \boldsymbol{R}$ par l'application homéomorphe de $\boldsymbol{R}$ à E. D'après le présent lemme, $N = \int_0^\infty \varepsilon_{x_t} dt$ est un noyau de convolution de Hunt sur X, et donc $N_{(\kappa)} = \int \varepsilon_{x_t} d\kappa(t)$ est aussi un noyau de convolution de Hunt sur X, d'où κ est un noyau de convolution de Hunt sur $\boldsymbol{R}$. Soit α une constante avec $0 < \alpha < 1$. Pour tout $t \geqq 0$, il existe une mesure de Radon positive ν_t dans $\boldsymbol{R}$ telle que la transformée de Fourier de ν_t soit égale à $\exp(-t|x|^\alpha)$. $(\nu_t)_{t \geqq 0}$ est un semi-groupe vaguement continu sur $\boldsymbol{R}$ et on a $\int_0^\infty \nu_t dt = C_\alpha |x|^{1-\alpha} dx$ dans $\boldsymbol{R}$, où C_α est une constante positive. Posons $\tilde{\nu}_t = \int \varepsilon_{x_s} d\nu_t(s)$; Alors $\tilde{\nu}_t$ est une mesure de Radon positive dans X portée par E et $(\tilde{\nu}_t)_{t \geqq 0}$ est un semi-groupe vaguement continu. Evidemment $N_\alpha = \int_0^\infty \tilde{\nu}_t dt$ est un noyau de convolution de Hunt sur X. Il est symétrique et $\int dN_\alpha = +\infty$. D'après la proposition 2, κ doit être borné, d'où κ satisfait au principe complet du maximum. La démonstration est ainsi complète.

Remarque. Sans la présente condition pour X, la présente équivalence n'a pas toujours lieu.

Nous considérerons ensuite une caractérisation d'un élément de la famille sous-ordonnée au noyau de convolution de Hunt donnée, en utilisant les fonctions définie-négatives.

LEMME 2. *Soit κ un noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}$ porté par $\boldsymbol{R}^+$. Pour que κ soit un noyau de convolution de Hunt borné sur $\boldsymbol{R}$, il faut et il suffit que la transformée de Laplace de κ soit de la forme $\tilde{\kappa} = 1/F$ dans $(0, +\infty)$, où F est une fonction de Bernstein.*

On dit qu'une fonction non-négative et infiniment dérivable F dans $(0, +\infty)$ est une fonction de Bernstein si $F^{(2k)}(t) \leqq 0$ et $F^{(2k-1)}(t) \geqq 0$ dans $(0, +\infty)$ $(k = 1, 2, \cdots)$, où, pour un entier $m \geqq 0$, $F^{(m)}$ désigne la dérivée de F d'ordre m. Il est connu qu'une fonction de Bernstein est de la forme

$$F(t) = c_1 + c_2 t + \int (1 - \exp(-tu)) d\sigma(u) ,$$

où c_i $(i = 1, 2)$ et σ sont respectivement une constante non-négative et une mesure de Radon positive dans $(0, +\infty)$ avec

$$\int_0^\infty \frac{t}{1+t} d\sigma(t) < +\infty$$

(cf. par exemple, [4]).

Montrons le lemme 2. Supposons d'abord que κ est un noyau de convolution de Hunt borné sur R, et soit $(\kappa_p)_{p \geqq 0}$ la résolvante associée au noyau κ. Alors $p \int d\kappa_p \leqq 1$ $(\forall p > 0)$. On a, quel que soit $p > 0$, $\tilde{\kappa}_p(t) < 1/p$ dans $(0, +\infty)$. En effet, si $\operatorname{supp}(\kappa_p) \neq \{0\}$, alors cela est évident. S'il existe un nombre $p > 0$ tel que $\operatorname{supp}(\kappa_p) = \{0\}$, alors, quel que soit

$q \geqq 0$, $\operatorname{supp}(\kappa_q) = \{0\}$, et par suite $q \int d\kappa_q < 1$. D'après l'égalité

$$\kappa = \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} (p\kappa_p)^n \;, \quad \text{où} \quad (p\kappa_p)^m = (p\kappa_p)^{m-1} * (p\kappa_p) \qquad (m \geqq 2) \;,$$

la transformée de Laplace $\tilde{\kappa}$ de κ est une fonction positive et continue dans $(0, +\infty)$. On a, quels que soient $p > 0$ et $q > 0$,

$$\frac{1 - p\tilde{\kappa}_p}{\tilde{\kappa}_p} = \frac{1 - q\tilde{\kappa}_p}{\tilde{\kappa}_q} \;.$$

Notons F cette fonction dans $(0, +\infty)$; alors $\tilde{\kappa} = 1/F$. La famille $(p(1 - p\tilde{\kappa}_p))_{p>0}$ converge uniformément vers F sur tout compact de $(0, +\infty)$ avec $p \to +\infty$, car

$$\tilde{\kappa} + \frac{1}{p} = \frac{1}{p(1 - p\tilde{\kappa}_p)} \;.$$

Donc F est une fonction de Bernstein, d'où la condition est nécessaire.

Montron ensuite que la condition est suffisante. Pour cela, il suffit de voir que, quel que soit $p > 0$, il existe un noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}$ porté par $\boldsymbol{R}^+$ tel que $\tilde{\kappa}_p = 1/(p + F)$, car si c'est vrai, $(\kappa_p)_{p \geqq 0}$ est évidemment la résolvante associée au noyau κ, où $\kappa_0 = \kappa$. Écrivons

$$F(t) = c_1 + c_2 t + \int (1 - \exp(-tu)) d\sigma(u) \;,$$

où c_i $(i = 1, 2)$ et σ sont respectivement une constante non-négative et une mesure de Radon positive dans $(0, +\infty)$ avec $\int \frac{t}{1 + t} d\sigma(t) < +\infty$. Posons

$$\nu_n = \frac{c_2 n \varepsilon_{1/n} + \sigma_n}{p + c_1 + c_2 n + \int d\sigma_n} \;,$$

où $\varepsilon_{1/n}$ est la mesure de Dirac au point $1/n$ dans $\boldsymbol{R}$ et σ_n est la restreinte de σ sur $[1/n, +\infty)$. Alors la suite

$$\left(\left(p + c_1 + c_2 n + \int d\sigma_n\right)(1 - \tilde{\nu}_n)\right)_{n=1}^{\infty}$$

converge uniformément vers $p + F$ sur tout compact de $\boldsymbol{R}^+$ avec $n \to +\infty$, et par suite la suite

$$\left(\frac{1}{p + c_1 + c_2 n + d\sigma_n} \sum_{m=0}^{\infty} (\nu_n)^m\right)_{n=1}^{\infty}$$

https://doi.org/10.1017/S002776300001607X Published online by Cambridge University Press

converge vaguement, où $(\nu_n)^0$ est la mesure de Dirac dans $\boldsymbol{R}$. Notons κ_p sa limite; alors $\tilde{\kappa}_p = 1/(p+F)$, d'où la condition est suffisante.

THÉORÈME 3. *Soient N_0 un noyau de convolution de Hunt borné sur X et ψ_0 la fonction définie-négative associée au noyau N_0. Pour qu'un noyau de convolution N sur X appartienne à $H(N_0; X)$, il faut et il suffit que N soit un noyau de convolution de Hunt borné sur X et que la fonction définie-négative associée au noyau N soit de la forme $F(\psi_0)$, où F est une fonction de Bernstein.*

On remarque, d'après la représentation d'une fonction de Bernstein, qu'une fonction de Bernstein est considérée comme une fonction sur $\{z \in C; \operatorname{Re} z \geqq 0\}$, où C est le champ complexe.

Démonstration du théoème 3. Supposons d'abord que N appartient à $H(N_0; X)$. Alors il existe un noyau de convolution de Hunt borné sur $\boldsymbol{R}$ porté par $\boldsymbol{R}^+$ tel que $N = \int \alpha_t d\kappa(t)$, où $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ est le semi-groupe associé au noyau N_0. Soit $(\kappa_p)_{p \geqq 0}$ la résolvante associée au noyau κ; alors, quel que soit $p > 0$, $\iint d\alpha_t d\kappa_p(t) \leqq 1/p$ et

$$\int \hat{\alpha}_t d\kappa_p(t) = \int \exp(-t\psi_0) d\kappa_p(t) = \frac{1}{p + F(\psi_0)},$$

où F est une fonction de Bernstein telle que $\tilde{\kappa} = 1/F$ dans $(0, +\infty)$, et donc la fonction définie-négative associée au noyau N est égale à $F(\psi_0)$.

Montrons ensuite que la condition est suffisante. De la même manière que dans le présent lemme, pour un nombre $p > 0$ quelconque, il existe un noyau de convolution de Hunt borné κ_p sur $\boldsymbol{R}$ porté par $\boldsymbol{R}^+$ tel que $\tilde{\kappa}_p = 1/(p+F)$. Evidemment $(\kappa_p)_{p>0}$ est une résolvante. On a, quelle que soit φ de $C_K^+(X)$,

$$N * \varphi \geqq \int \alpha_t * \varphi d\kappa_p(t) \qquad (\forall p > 0).$$

$(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ étant semi-groupe et ayant $\alpha_t \to \varepsilon$ (vaguement) avec $t \to 0$, $(\kappa_p)_{p>0}$ est vaguement bornée. Par conséquent, il existe un noyau de convolution de Hunt borné κ sur $\boldsymbol{R}$ porté par $\boldsymbol{R}^+$ tel que $\tilde{\kappa} = 1/F$ dans $(0, \infty)$. Donc $N = \int \alpha_t d\kappa(t)$, d'où $N \in H(N_0; X)$. La démonstration est ainsi complète.

https://doi.org/10.1017/S002776300001607X Published online by Cambridge University Press

3. La famille sous-ordonnée au noyau newtonien

Dès maintenant, soit X l'espace euclidien $\boldsymbol{R}^n$ à n ($\geqq 3$) dimensions. Pour un point x de $\boldsymbol{R}^n$, on note $|x|$ la distance entre x et l'origine. On notera symboliquement r^{2-n} le noyau newtonien $|x|^{2-n}\,dx$ sur $\boldsymbol{R}^n$. Rappelons d'abord le théorème de Schoenberg.

PROPOSITION 3 (*cf. par exemple*, [3]). *Soit $F(t)$ une fonction finie et continue sur $\boldsymbol{R}^+$. Pour que, quel que soit n un entier $\geqq 1$, $F(|x|)$ soit de type positif dans $\boldsymbol{R}^n$, il faut et il suffit que F soit de la forme*

$$F(t) = \int \exp(-t^2 u)\,d\mu(u)\ ,$$

où μ est une mesure de Radon positive dans $\boldsymbol{R}^+$ de masse totale finie.

La présente proposition porte naturellement la définition suivante.

DÉFINITION. Soient φ une fonction finie et continue sur $\boldsymbol{R}^+$ et k un entier > 0. On dit que φ appartient à DN_k si la fonction $\varphi(|x|)$ dans $\boldsymbol{R}^k$ est définie-négative. Si l'on a, quel que soit k un entier positif, $\varphi \in DN_k$, alors on écrit $\varphi \in DN_\infty$.

Il est évident que si $k_1 \leqq k_2$, $DN_{k_1} \supset DN_{k_2}$. Notre quatrième théorème est une caractérisation de la famille sous-ordonnée au noyau newtonien r^{2-n}.

THÉORÈME 4. *Soit N un noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$. Pour que N appartienne à $H(r^{2-n}; \boldsymbol{R}^n)$, il faut et il suffit que N soit un noyau de convolution de Hunt sur $\boldsymbol{R}^n$ et qu'il existe une fonction φ de DN_∞ telle que la fonction définie-négative associée au noyau N soit égale à $\varphi(|x|)$ sur $\boldsymbol{R}^n$.*

Démonstration. Supposons d'abord $N \in H(r^{2-n}; \boldsymbol{R}^n)$ et soit ψ la fonction définie-négative associée au noyau N; alors, d'après le théorème 3, il existe constantes $c_1 \geqq 0$, $c_2 \geqq 0$ et une mesure de Radon positive σ dans $(0, +\infty)$ avec $\int \frac{t}{1+t}\,d\sigma(t) < +\infty$ telles que

$$\psi(x) = c_1 + c_2|x|^2 + \int (1 - \exp(-t|x|^2))\,d\sigma(t)\ ,$$

car il existe une constante $c > 0$ telle que $\widehat{r^{2-n}} = c|x|^{-2}$. Quel que soit k un entier positif, la fonctions $|x|^2$ et $1 - \exp(-t|x|^2)$ ($\forall t \geqq 0$) dans $\boldsymbol{R}^k$

https://doi.org/10.1017/S002776300001607X Published online by Cambridge University Press

sont définie-négatives, d'où la condition est nécessaire.

Montrons que la condition est suffisante. Pour tout entier $k>0$, la fonction $\varphi(|x|)$ est définie-négative dans $\boldsymbol{R}^k$, et par suite, quel que soit $p>0$, la fonction $1/(p+\varphi(|x|))$ dans $\boldsymbol{R}^k$ est de type positif. D'après la proposition 3, il existe une mesure de Radon positive κ_p dans $\boldsymbol{R}^+$ de masse totale finie telle que

$$\frac{1}{p+\varphi(|x|)} = \int \exp(-t|x|^2)d\kappa_p(t)$$

dans $\boldsymbol{R}^k$. On a, quels que soient $p>0$ et $q>0$,

$$\begin{aligned}\int \exp(-ts)d\kappa_p(s) - \int \exp(-ts)d\kappa_q(s) \\ = (q-p)\int \exp(-ts)d\kappa_p(s)\int \exp(-ts)d\kappa_q(s)\end{aligned}$$

pour tout t de $\boldsymbol{R}^+$. D'après le fait que la transformation de Laplace est injective, on obtient que $(\kappa_p)_{p>0}$ est une résolvante de noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}$. De la même manière que dans le théorème 3, on peut montrer $N \in H(r^{2-n};\boldsymbol{R}^n)$. La démonstration est ainsi complète.

BIBLIOGRAPHIES

[1] J. Deny: Sur l'équation de convolution $\mu=\mu*\sigma$. Sém. B-C-D, 4ème année, 1959/60, no. 5.

[2] ——: Noyaux de convolution de Hunt et noyaux associés à une famille fondamentale. Ann. Inst. Fourier, **12**, 1962, 643–667.

[3] W. F. Donoghue, Jr: Distributions and Fourier transforms. Acad. press, New York, 1969.

[4] C. S. Herz: Analyse harmonique à plusieurs variables. Sém. Math. d'Orsay, 1965/66.

[5] I. Higuchi et M. Itô: Characterization of the relative domination principle. Nagoya Math. J., **50**, 1973, 175–184.

[6] M. Itô: Sur les principes divers du maximum et le type positif. Nagoya Math. J., **44**, 1971, 133–164.

[7] ——: Sur le principe de domination pour les noyaux de convolution. Nagoya Math. J., **50**, 1973, 149–173.

[8] ——: Caractérisation du principe de domination pour les noyaux de convolution, à paraître.

[9] ——: Sur la famille sous-ordonnée au noyau de convolution de Hunt, Nagoya Math. J., **51**, 1973, 45–56.

[10] M. Kishi: Puissance fractionnaire d'un noyau positif dont le carré est encore un noyau. Nagoya Math. J., **44**, 1971, 79–88.

Université de Nagoya