



Sur la lissité du schéma Quot ponctuel emboîté

Sergej Monavari and Andrea T. Ricolfi

Abstract. Dans cet article on caractérise la lissité du schéma *Quot ponctuel emboîté* d'une variété lisse—c'est-à-dire l'espace de modules paramétrant les drapeaux de quotients de dimension 0 d'un faisceau localement libre fixé. Nos résultats étendent la classification de Cheah dans le cadre des schémas de Hilbert ponctuels emboîtés.

0 Introduction

Soit X une variété lisse et quasi-projective de dimension m , définie sur le corps \mathbb{C} . Soit E un faisceau localement libre de rang r au dessus de X . Pour un entier fixé $d > 0$ et un d -uplet $\mathbf{n} = (0 \leq n_1 \leq \dots \leq n_d)$ d'entiers non-décroissant, on considère le schéma *Quot ponctuel emboîté*

$$\text{Quot}_X(E, \mathbf{n}) = \{[E \rightarrow T_d \rightarrow \dots \rightarrow T_1] \mid \dim(T_i) = 0, \chi(T_i) = n_i\},$$

où la dimension d'un faisceau cohérent T est, par définition, la dimension de son support.

Dans cet article on donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que le schéma $\text{Quot}_X(E, \mathbf{n})$ soit lisse. Quand $d = 1$ on retrouve le schéma Quot de Grothendieck et par abus on remplace l'écriture $\mathbf{n} = (0 \leq n)$ par l'entier $n \in \mathbb{N}$ correspondant. Sans que cela impacte la généralité de notre propos, on suppose au cours du théorème suivant que \mathbf{n} est de la forme $\mathbf{n} = (0 < n_1 < \dots < n_d)$.

Théorème A Soit (X, E, \mathbf{n}) comme ci-dessus. Alors $\text{Quot}_X(E, \mathbf{n})$ est lisse dans les cas suivants:

- (1) Si $m = 1$, pour tout choix de (E, d, \mathbf{n}) ,
- (2) si $d = 1$ et $n = 1$,
- (3) si $r = 1$, dans les cas suivants:

- (a) $m = 2, d = 1$, pour tout choix de \mathbf{n} ,
- (b) $m = d = 2$ et $\mathbf{n} = (n, n + 1)$,
- (c) $m \geq 3, d = 1$ et $n \leq 3$,
- (d) $m \geq 3, d = 2$ et $\mathbf{n} = (1, 2), (2, 3)$.

Dans tous les autres cas, $\text{Quot}_X(E, \mathbf{n})$ est singulier.

Received by the editors October 14, 2021; accepted March 9, 2022.

Published online on Cambridge Core March 14, 2022.

AMS subject classification: 14C05.

Keywords: Lissité, schéma Quot.

On va démontrer le Théorème A de la façon suivante: on se ramène d'abord au cas $(X, E) = (\mathbb{A}^m, \mathcal{O}^{\oplus r})$, on généralise ensuite la classification de Cheah [3] pour $r = 1$ (listant tous les schémas de Hilbert ponctuels emboîtés lisses) au rang r arbitraire; enfin on exclut toutes les exceptions a priori possibles, en produisant explicitement des points singuliers.

On remarque ici que dans le cas $d = r = 1$, correspondant au schéma de Hilbert de n points $\text{Hilb}^n(X)$, il est connu que la lissité s'obtient si et seulement si $m \leq 2$ ou bien $n \leq 3$. Si $r > 1$, le schéma Quot de Grothendieck $\text{Quot}_X(\mathcal{O}^{\oplus r}, n)$ est lisse si X est une courbe lisse, par contre il est singulier (mais irréductible, de dimension $n(r + 1)$, voir [4] et [2, Exemple 3.3]) si X est une surface.

La cohomologie de $\text{Quot}_X(E, \mathbf{n})$ a été étudiée en détail par Mochizuki [5] lorsque X est une courbe lisse; dans ce cas-là, le motif $[\text{Quot}_X(E, \mathbf{n})] \in K_0(\text{Var}_{\mathbb{C}})$ de ce schéma a été calculé explicitement dans notre article [6].

1 Propriétés de l'espace de modules

On fixe, avec les notations précédentes, un triplet (X, E, \mathbf{n}) formé d'un faisceau localement libre E au dessus d'une variété lisse X , et un d -uplet d'entiers $\mathbf{n} = (0 \leq n_1 \leq \dots \leq n_d)$ pour un entier $d > 0$. On rappelle que l'on utilise la notation $m = \dim X$ et $r = \text{rg } E$. On remarque aussi que, si $n_d = 1$, le schéma $\text{Quot}_X(E, \mathbf{n})$ est isomorphe à $\mathbb{P}(E)$, et notamment est lisse de dimension $m + r - 1$. Ce fait sera exploité dans la Section 1.3.

1.1 Espace tangent

Comme démontré en [6, Proposition 2.1], on peut décrire l'espace tangent du schéma $\text{Quot}_X(E, \mathbf{n})$ en un point $z = [E \twoheadrightarrow T_d \twoheadrightarrow \dots \twoheadrightarrow T_1]$ comme le noyau d'une application \mathbb{C} -linéaire appropriée,

$$T_z \text{Quot}_X(E, \mathbf{n}) = \ker \left(\bigoplus_{i=1}^d \text{Hom}(K_i, T_i) \xrightarrow{\Delta_z} \bigoplus_{i=1}^{d-1} \text{Hom}(K_{i+1}, T_i) \right),$$

où l'on pose $K_i = \ker(E \twoheadrightarrow T_i)$. On omet la définition précise de Δ_z . On n'en fera pas usage dans nos preuves (le lecteur pourra en trouver une définition dans [6, Section 2] ou encore, sous une forme équivalente, dans [5]).

1.2 Le morphisme somme directe

Supposons que l'on ait une décomposition $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 + \dots + \mathbf{n}_s$, où tous les $\mathbf{n}_k = (n_{k1} \leq \dots \leq n_{kd})$ sont des suites non-décroissantes d'entiers non-négatifs «plus petites» que \mathbf{n} . La notation «somme» ci-dessus signifie bien-sûr que $n_i = \sum_{1 \leq k \leq s} n_{ki}$ pour tout $i = 1, \dots, d$. Considérons l'ouvert

$$U \hookrightarrow \prod_{1 \leq k \leq s} \text{Quot}_X(E, \mathbf{n}_k),$$

paramétrant les s -uplets de quotients emboîtés

$$z_k = [E \twoheadrightarrow T_{kd} \twoheadrightarrow \dots \twoheadrightarrow T_{k1}] \in \text{Quot}_X(E, \mathbf{n}_k), \quad k = 1, \dots, s,$$

tels que le support de T_{kd} soit disjoint du support de T_{ld} pour tout $1 \leq k \neq l \leq s$. Alors on a un morphisme de schémas

$$U \xrightarrow{\oplus} \text{Quot}_X(E, \mathbf{n}),$$

qui associe à un s -uplet (z_1, \dots, z_s) le point

$$[E \rightarrow T_{1d} \oplus \dots \oplus T_{sd} \twoheadrightarrow \dots \twoheadrightarrow T_{11} \oplus \dots \oplus T_{s1}] \in \text{Quot}_X(E, \mathbf{n}).$$

Une application immédiate du critère infinitésimal montre que ce morphisme est étale.

1.3 Dimension attendue

Fixons $\mathbf{n} = (n_1 \leq \dots \leq n_d)$ et une décomposition $\mathbf{n} = \sum_{k=1}^{n_d} \mathbf{n}_k$, où tout $\mathbf{n}_k = (n_{k1} \leq \dots \leq n_{kd})$ satisfait à la condition $n_{kd} = 1$. Dans le produit

$$\prod_{k=1}^{n_d} \text{Quot}_X(E, \mathbf{n}_k) \cong \mathbb{P}(E)^{n_d},$$

on considère le sous-schéma ouvert U_n paramétrant les n_d -uplets de quotients dont les supports sont deux à deux disjoints. L'ouvert U_n est lisse de dimension $n_d(m + r - 1)$. Comme U_n est étale au dessus de $\text{Quot}_X(E, \mathbf{n})$, à travers le morphisme somme directe, on peut définir la *dimension attendue*

$$\text{expdim Quot}_X(E, \mathbf{n}) = n_d(m + r - 1).$$

En effet, $\text{Quot}_X(E, \mathbf{n})$ contient un ouvert lisse (l'image de U_n) de cette dimension. Dans le cas du schéma de Hilbert de n points $\text{Hilb}^n(X)$, l'image de U_n paramètre les n -uplets de points distincts (à permutation près). Sa dimension est bien $n \cdot \dim(X)$. Ce nombre est la dimension de $\text{Hilb}^n(X)$ lorsqu'il est irréductible, car la clôture de Zariski de cet ouvert-là, que l'on appelle la *smoothable component*, est toujours une composante irréductible.

1.4 Connexité

Si X est irréductible, le schéma $\text{Quot}_X(E, \mathbf{n})$ est connexe [6, Theorem. 1.4]. Alors, si l'on trouve un point $z \in \text{Quot}_X(E, \mathbf{n})$ tel que

$$\dim_{\mathbb{C}} T_z \text{Quot}_X(E, \mathbf{n}) > \text{expdim Quot}_X(E, \mathbf{n}) = n_d(m + r - 1),$$

il en résulte que z est forcément un point singulier de $\text{Quot}_X(E, \mathbf{n})$.

2 Démonstration du théorème

Nous allons réduire notre analyse sur l'existence des singularités dans le cas «global» (X, E) à la même analyse dans le cas «local» $(\mathbb{A}^m, \mathcal{O}^{\oplus r})$.

Lemme 2.1 *Soit X une variété lisse et quasi-projective de dimension m sur \mathbb{C} , et soit E un faisceau localement libre de rang r au dessus de X . Alors $\text{Quot}_X(E, \mathbf{n})$ est lisse si et seulement si $\text{Quot}_{\mathbb{A}^m}(\mathcal{O}^{\oplus r}, \mathbf{n})$ est lisse.*

Démonstration L'énoncé résulte du fait que $\text{Quot}_X(E, \mathbf{n})$ est localement une carte étale pour $\text{Quot}_{\mathbb{A}^m}(\mathcal{O}^{\oplus r}, \mathbf{n})$. On détaille ce fait dans la suite.

Considérons d'abord le cas $d = 1$. Soit $U \subset X$ une sous-variété ouverte tel que $E|_U = \mathcal{O}_U^{\oplus r}$. Supposons que l'on ait un morphisme étale $\varphi: U \rightarrow \mathbb{A}^m$. Si l'on écrit $V_{r,n}^\varphi$ pour le sous-schéma ouvert de $\text{Quot}_U(\mathcal{O}_U^{\oplus r}, n)$ paramétrant les quotients $[\mathcal{O}_U^{\oplus r} \rightarrow T]$ tels que $\varphi|_{\text{supp}(T)}$ soit injectif, on peut bien définir un morphisme étale [1, Proposition A.3]

$$\Phi_n: V_{r,n}^\varphi \rightarrow \text{Quot}_{\mathbb{A}^m}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^m}^{\oplus r}, n)$$

en associant $[\mathcal{O}^{\oplus r} \rightarrow T] \mapsto [E \rightarrow \varphi_* \varphi^* E = \varphi_* \mathcal{O}^{\oplus r} \rightarrow \varphi_* T]$. En variant $(U, \varphi: U \rightarrow \mathbb{A}^m)$ pour couvrir \mathbb{A}^m tout entier, on peut facilement confirmer le résultat dans le cas $d = 1$.

Pour le cas général, fixons $\mathbf{n} = (0 < n_1 \leq \dots \leq n_d)$ et (U, φ) comme ci-dessus. Le produit des morphismes étales Φ_{n_i} nous donne un morphisme étale Φ_n qui apparaît dans un diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z_n^\varphi & \xrightarrow{\quad} & \prod_{1 \leq i \leq d} V_{r,n_i}^\varphi \\ \text{étale} \downarrow & \square & \downarrow \Phi_n \\ \text{Quot}_{\mathbb{A}^m}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^m}^{\oplus r}, \mathbf{n}) & \xrightarrow{\quad} & \prod_{1 \leq i \leq d} \text{Quot}_{\mathbb{A}^m}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^m}^{\oplus r}, n_i) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont des immersions fermées.

On peut facilement vérifier que Z_n^φ est aussi l'intersection schématique

$$\begin{array}{ccc} Z_n^\varphi & \xrightarrow{\quad} & \prod_{1 \leq i \leq d} V_{r,n_i}^\varphi \\ \downarrow & \square & \downarrow \text{ouvert} \\ \text{Quot}_U(\mathcal{O}_U^{\oplus r}, \mathbf{n}) & \xrightarrow{\text{fermé}} & \prod_{1 \leq i \leq d} \text{Quot}_U(\mathcal{O}_U^{\oplus r}, n_i) \end{array}$$

dans un produit de schémas Quot classiques; comme $\text{Quot}_U(\mathcal{O}_U^{\oplus r}, \mathbf{n}) \subset \text{Quot}_X(E, \mathbf{n})$ est ouvert, on a trouvé un sous-schéma ouvert $Z_n^\varphi \subset \text{Quot}_X(E, \mathbf{n})$ qui admet un morphisme étale vers $\text{Quot}_{\mathbb{A}^m}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^m}^{\oplus r}, \mathbf{n})$. En faisant varier $(U, \varphi: U \rightarrow \mathbb{A}^m)$ tout comme dans le cas $d = 1$ on obtient le résultat. \square

On aborde désormais la démonstration de notre résultat principal.

Démonstration du Théorème A. Grâce au Lemme 2.1 on peut supposer que $(X, E) = (\mathbb{A}^m, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^m}^{\oplus r})$. La lissité dans le cas $m = 1$, voir (1), est démontrée dans notre article [6, Proposition 2.1] et dans [5, Proposition 2.1]. La lissité dans les cas (3a)–(3d) a été démontrée par Cheah [3, Theorem, p. 43]. Enfin, (2) découle de l'isomorphisme $\text{Quot}_{\mathbb{A}^m}(\mathcal{O}^{\oplus r}, 1) \cong \mathbb{A}^m \times \mathbb{P}^{r-1}$ (voir aussi Remarque 2.2). Il reste à prouver qu'il n'existe pas d'autres schémas Quot ponctuels emboîtés lisses.

On note que si $\text{Hilb}^n(\mathbb{A}^m) = \text{Quot}_{\mathbb{A}^m}(\mathcal{O}, \mathbf{n})$ est singulier, alors il en est de même de $\text{Quot}_{\mathbb{A}^m}(\mathcal{O}^{\oplus r}, \mathbf{n})$ pour tout $r > 1$. En effet, le tore \mathbb{G}_m^r opère canoniquement sur $\text{Quot}_{\mathbb{A}^m}(\mathcal{O}^{\oplus r}, \mathbf{n})$, et $\text{Hilb}^n(\mathbb{A}^m)$ est une composante connexe du sous-schéma des points fixes [6, Proposition 3.1].

Comme Cheah a démontré que $\text{Hilb}^n(\mathbb{A}^m)$ est singulier chaque fois qu'il ne tombe pas dans les cas (1),(2),(3a)–(3d), on déduit que, si $r > 1$, le schéma $\text{Quot}_{\mathbb{A}^m}(\mathcal{O}^{\oplus r}, \mathbf{n})$ est singulier dans les cas suivants:

- (1) si $d \geq 3$, pour tout choix de \mathbf{n} ,
- (2) si $m = 2, d = 2, \mathbf{n} = (n, n')$ et $n' - n \geq 2$,
- (3) si $m \geq 3, d = 1, n \geq 4$,
- (4) si $m \geq 3, d = 2, \mathbf{n} \neq (1, 2), (2, 3)$.

Il ne reste plus qu'à démontrer que $\text{Quot}_{\mathbb{A}^m}(\mathcal{O}^{\oplus r}, \mathbf{n})$ est singulier dans les cas suivants:

- (A) si $m \geq 2, r \geq 2, d = 1$ et $n \geq 2$,
- (B) si $m \geq 2, r \geq 2, d = 2$ et $\mathbf{n} = (n, n + 1)$.

Le cas (A) (resp. (B)) est l'énoncé du Lemme 2.3 (resp. Lemme 2.4). \square

Remarque 2.2 Soit E un faisceau cohérent au dessus d'une variété X . L'isomorphisme $\text{Quot}_X(E, 1) = \mathbb{P}(E)$ s'obtient en comparant les foncteurs de modules. En revanche, le cas $(X, E) = (\mathbb{A}^m, \mathcal{O}^{\oplus r})$, qui entraîne $\text{Quot}_{\mathbb{A}^m}(\mathcal{O}^{\oplus r}, 1) = \mathbb{A}^m \times \mathbb{P}^{r-1}$, s'obtient également à travers une présentation explicite du schéma $\text{Quot}_{\mathbb{A}^m}(\mathcal{O}^{\oplus r}, n)$ en tant que sous-schéma fermé du schéma *Quot non-commutatif*

$$\text{ncQuot}_m^{n,r} = \left\{ (A_1, \dots, A_m, v_1, \dots, v_r) \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)^m \times (\mathbb{C}^n)^r \mid \begin{array}{l} (v_1, \dots, v_r) \text{ est} \\ (A_1, \dots, A_m)\text{-stable} \end{array} \right\} / \text{GL}_n,$$

où GL_n opère par conjugaison sur les endomorphismes et par multiplication à gauche sur les vecteurs; enfin, la condition de stabilité se lit de la façon suivante: le sous-espace de \mathbb{C}^n engendré par les vecteurs obtenus en appliquant tous les monômes possibles en A_1, \dots, A_m au vecteurs v_1, \dots, v_r coïncide avec \mathbb{C}^n tout entier. On voit facilement que la variété $\text{ncQuot}_m^{n,r}$ est lisse de dimension $(m - 1)n^2 + rn$. Au cas où $n = 1$, l'immersion (qui dans le cas général est définie par les relations $[A_i, A_j] = 0$) est triviale, et l'action de GL_1 est aussi triviale sauf sur les r -uplets de nombres complexes $(v_1, \dots, v_r) \in \mathbb{C}^r$, qui ne peuvent pas être tous 0 grâce à la condition de stabilité. Ceci fournit une démonstration directe de la décomposition $\text{Quot}_{\mathbb{A}^m}(\mathcal{O}^{\oplus r}, 1) = \mathbb{A}^m \times \mathbb{P}^{r-1}$.

Pour compléter la démonstration du Théorème A il nous reste à traiter les cas (A) et (B).

Lemme 2.3 Soit $m \geq 2, r \geq 2, n \geq 2$. Alors $\text{Quot}_{\mathbb{A}^m}(\mathcal{O}^{\oplus r}, n)$ est singulier.

Démonstration Nous commençons par démontrer l'énoncé dans le cas $n = 2$.

Considérons un point $z \in \text{Quot}_{\mathbb{A}^m}(\mathcal{O}^{\oplus r}, 2)$ représenté par une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathfrak{m}_0^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}^{\oplus r-2} \rightarrow \mathcal{O}^{\oplus r} \rightarrow \mathcal{O}_0^{\oplus 2} \rightarrow 0,$$

où $\mathfrak{m}_0 = (x_1, \dots, x_m) \subset \mathcal{O} = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$ est l'idéal de l'origine $0 \in \mathbb{A}^m$ et $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}/\mathfrak{m}_0$ est son faisceau structural. On obtient

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} T_z \text{Quot}_{\mathbb{A}^m}(\mathcal{O}^{\oplus r}, 2) &= \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathfrak{m}_0^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}^{\oplus r-2}, \mathcal{O}_0^{\oplus 2}) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathfrak{m}_0^{\oplus 2}, \mathcal{O}_0^{\oplus 2}) + \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}^{\oplus r-2}, \mathcal{O}_0)^{\oplus 2} \\ &= 4m + 2(r-2), \end{aligned}$$

qui est plus grand que $\text{expdim Quot}_{\mathbb{A}^m}(\mathcal{O}^{\oplus r}, 2) = 2(m+r-1)$ comme $m \geq 2$. En exploitant la connexité du schéma Quot (voir la Section 1.4), le calcul ci-dessus montre que z est bien un point singulier.

On suppose désormais que $n \geq 3$. Considérons le sous-schéma ouvert

$$U \hookrightarrow \text{Quot}_{\mathbb{A}^m}(\mathcal{O}^{\oplus r}, 2) \times \text{Quot}_{\mathbb{A}^m}(\mathcal{O}^{\oplus r}, 1)^{n-2},$$

paramétrant les $(n-1)$ -uplets de quotients dont les supports sont deux à deux disjoints. Choisissons un point $u \in U$ de la forme $u = (\mathfrak{m}_0^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}^{\oplus r-2}, \mathfrak{m}_{p_1} \oplus \mathcal{O}^{\oplus r-1}, \dots, \mathfrak{m}_{p_{n-2}} \oplus \mathcal{O}^{\oplus r-1})$, où $0 \neq p_i \in \mathbb{A}^m$ pour tout $1 \leq i \leq n-2$ et $p_i \neq p_j$ pour $1 \leq i \neq j \leq n-2$. Le schéma U est étale au dessus de $\text{Quot}_{\mathbb{A}^m}(\mathcal{O}^{\oplus r}, n)$ par le morphisme somme directe. On note v l'image du point u par ce morphisme. On trouve

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} T_v \text{Quot}_{\mathbb{A}^m}(\mathcal{O}^{\oplus r}, n) &= \dim_{\mathbb{C}} T_u U \\ &= 4m + 2(r-2) + (n-2)(m+r-1) \\ &= n(m+r-1) + 2m - 2, \end{aligned}$$

qui est plus grand que $\text{expdim Quot}_{\mathbb{A}^m}(\mathcal{O}^{\oplus r}, n) = n(m+r-1)$ comme $m \geq 2$. Encore une fois grâce à la connexité du schéma Quot, ceci prouve le résultat.

Lemme 2.4 Soit $m \geq 2, r \geq 2$ et $\mathbf{n} = (n, n+1)$ pour $n \geq 1$. Alors $\text{Quot}_{\mathbb{A}^m}(\mathcal{O}^{\oplus r}, \mathbf{n})$ est singulier.

Démonstration On commence par montrer l'énoncé dans le cas $n = 1$.

Considérons un point $z \in \text{Quot}_{\mathbb{A}^m}(\mathcal{O}^{\oplus r}, (1, 2))$ représenté par les quotients emboîtés

$$[\mathcal{O}^{\oplus r} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_0^{\oplus 2} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_0],$$

et écrivons encore une fois $\mathfrak{m}_0 = (x_1, \dots, x_m) \subset \mathcal{O} = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$ pour l'idéal de l'origine $0 \in \mathbb{A}^m$. Comme on l'a rappelé à la Section 1.1, l'espace tangent en z est donné par:

$$\begin{aligned} T_z \text{Quot}_{\mathbb{A}^m}(\mathcal{O}^{\oplus r}, (1, 2)) &= \ker \left(\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathfrak{m}_0 \oplus \mathcal{O}^{\oplus r-1}, \mathcal{O}_0) \oplus \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathfrak{m}_0^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}^{\oplus r-2}, \mathcal{O}_0^{\oplus 2}) \right. \\ &\quad \left. \xrightarrow{\Delta_z} \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathfrak{m}_0^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}^{\oplus r-2}, \mathcal{O}_0) \right). \end{aligned}$$

D'autre part, les espaces vectoriels apparaissant en Δ_z satisfont

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathfrak{m}_0 \oplus \mathcal{O}^{\oplus r-1}, \mathcal{O}_0) &= m + r - 1, \\ \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathfrak{m}_0^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}^{\oplus r-2}, \mathcal{O}_0^{\oplus 2}) &= 4m + 2(r - 2), \\ \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathfrak{m}_0^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}^{\oplus r-2}, \mathcal{O}_0) &= 2m + r - 2. \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} T_z \text{Quot}_{\mathbb{A}^m}(\mathcal{O}^{\oplus r}, (1, 2)) &\geq (m + r - 1) + (4m + 2(r - 2)) - (2m + r - 2) \\ &> 2(m + r - 1) = \text{expdim Quot}_{\mathbb{A}^m}(\mathcal{O}^{\oplus r}, (1, 2)). \end{aligned}$$

Ceci entraîne que z est un point singulier par notre remarque à la Section 1.4.

On va maintenant supposer que $n \geq 2$. Considérons le sous-schéma ouvert

$$U \hookrightarrow \text{Quot}_{\mathbb{A}^m}(\mathcal{O}^{\oplus r}, (1, 2)) \times \text{Quot}_{\mathbb{A}^m}(\mathcal{O}^{\oplus r}, (1, 1))^{n-1},$$

paramétrant les n -uplets de quotients dont les supports sont deux à deux disjoints. Choisissons un point $u = (z, z_1, \dots, z_{n-1}) \in U$, où z est comme ci-dessus et z_i est représenté par des quotients emboîtés

$$[\mathcal{O}^{\oplus r} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{p_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{p_i}], \quad p_i \in \mathbb{A}^m.$$

On va supposer également que $0 \neq p_i \in \mathbb{A}^m$ pour tout i et que $p_i \neq p_j$ pour $1 \leq i \neq j \leq n - 1$. Le schéma U est étale au dessus de $\text{Quot}_{\mathbb{A}^m}(\mathcal{O}^{\oplus r}, (n, n + 1))$, par le morphisme somme directe. On note ν l'image du point u par ce morphisme. On trouve

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} T_{\nu} \text{Quot}_{\mathbb{A}^m}(\mathcal{O}^{\oplus r}, (n, n + 1)) &= \dim_{\mathbb{C}} T_u U \\ &> 2(m + r - 1) + (n - 1)(m + r - 1) \\ &= (n + 1)(m + r - 1) \\ &= \text{expdim Quot}_{\mathbb{A}^m}(\mathcal{O}^{\oplus r}, (n, n + 1)). \end{aligned}$$

Le point ν est donc un point singulier.

Remerciements S.M. est financé par NWO grant TOP2.17.004.

References

- [1] S. Beentjes and A. T. Ricolfi, *Virtual counts on Quot schemes and the higher rank local DT/PT correspondence*. Math. Res. Lett. 28(2021), no. 4, 967–1032.
- [2] A. Cazzaniga and A. T. Ricolfi, *Framed sheaves on projective space and Quot schemes*. Math. Z. 300(2022), no. 1, 745–760.
- [3] J. Cheah, *Cellular decompositions for nested Hilbert schemes of points*. Pacific J. Math. 183(1998), no. 1, 39–90.
- [4] G. Ellingsrud and M. Lehn, *Irreducibility of the punctual quotient scheme of a surface*. Ark. Mat. 37(1999), no. 2, 245–254.
- [5] T. Mochizuki, *The structure of the cohomology ring of the filit schemes*. Preprint, 2003. arXiv:0301184
- [6] S. Monavari and A. T. Ricolfi, *On the motive of the nested Quot scheme of points on a curve*. Preprint, 2021. arXiv:2106.11817

Mathematical Institute, Utrecht University, P.O. Box 80010, 3508 TA Utrecht, The Netherlands
 e-mail: s.monavari@uu.nl

Department of Mathematics, Università degli Studi di Bologna, Piazza di Porta San Donato 5, Bologna, Italy
 e-mail: andreatobia.ricolfi@unibo.it