Can. J. Math., Vol. XXXIV, No. 2, 1982, pp. 411–422

UNE GENERALISATION D'UNE FORMULE DE MEIXNER-TRICOMI

FRANCOIS BATOLA

0. Introduction. Dans [**11**] (page 32 formule (5)), Tricomi donne la formule suivante:

$$(0.1) \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-y}y^{c+n-1}}{x+y}\,\phi^*(a, c; y)dy = (-1)^n\Gamma(1-a)x^{c+n-1}\psi(c-a, c; x)$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots, -\operatorname{Re} c < n < 1 - \operatorname{Re} a, |\arg x| < \pi).$$

Dans [**8**] (page 704, formule 36) Meixner donne une formule analogue.

La formule (0.1) peut donc être considérée comme la formule de Meixner-Tricomi, la formule de Meixner citée étant antérieure, semble-t-il, à celle de Tricomi.

L'objet de ce travail est de généraliser le résultat (0.1) qui sera considéré comme la formule de Meixner-Tricomi.

Pour cela, on va considérer l'équation différentielle ordinaire suivante:

$$(0.2) \qquad xy'' + \{1 + \alpha - \beta x - 2x^2\}y' + \{(\gamma - 2 - \alpha)x - \tfrac{1}{2}[\delta + \beta(1+\alpha)]\}y = 0.$$

Cette équation est connue comme étant l'équation biconfluente de l'équation de Heun. Elle est à l'équation de Heun [**6**] ce que l'équation confluente de Kummer [**11**], [**9**], [**10**], [**6**] est à l'équation hypergéométrique de Gauss [**10**], [**11**], [**9**].

Ses propriétés ont été étudiées d'abord dans [**7**], puis dans [**4**], [**2**], [**3**] et en détails dans [**1**].

Rappelons brièvement quelques propriétés de l'équation biconfluente de l'équation de Heun dont nous aurons besoin dans ce travail.

1. Quelques rappels.

1.1. *Equation canonique.* Généralement considérée comme l'équation canonique de la classe $(0, 1, 1_4)$, l'équation (0.2) admet dans le voisinage de l'origine deux solutions linéairement indépendantes, lorsque α n'est pas un entier relatif.

$$(1.1) \qquad \begin{aligned} y_1(x) &= N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) \\ y_2(x) &= x^{-\alpha} N(-\alpha, \beta, \gamma, \delta; x). \end{aligned}$$

Reçu le 19 novembre, 1980.

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-027-9 Published online by Cambridge University Press

La fonction $N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ est une fonction entière qu'il est commode de mettre sous la forme classique:

$$(1.2) \qquad N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A_\nu(\alpha, \beta, \gamma, \delta)}{(1+\alpha)_\nu} \frac{x^\nu}{\nu!}$$

avec

$$(1.3) \qquad \begin{aligned} &A_0(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 1; A_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \tfrac{1}{2}[\delta + \beta(1+\alpha)] \\ &A_{\nu+1}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\nu\beta + \tfrac{1}{2}[\delta + \beta(1+\alpha)]\, A_\nu(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \\ &- \nu(\nu+\alpha)(\gamma - 2 - \alpha - 2(\nu-1))A_{\nu-1}(\alpha, \beta, \gamma, \delta),\ \nu \geqq 1 \end{aligned}$$

et avec:

$$(1.4) \qquad (\alpha)_\nu = \frac{\Gamma(\alpha+\nu)}{\Gamma(\alpha)} = \begin{cases} \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1) & \nu = 1, 2, 3, \ldots \\ 1 & \nu = 0. \end{cases}$$

Lorsque α n'est pas un entier négatif, la fonction $N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ vérifie les identités suivantes:

$$(1.5) \qquad \begin{aligned} N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) &= N(\alpha, -i\beta, -\gamma, i\delta; -ix)\, e^{\beta x + x^2} \\ N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) &= N(\alpha, -\beta, \gamma, -\delta; -x). \end{aligned}$$

1.2. *Comportement asymptotique.* La fonction $N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ admet au voisinage de l'infini le comportement asymptotique suivant:

$$(1.6) \qquad N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) \sim K_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta) e^{\beta x + x^2}\, x^{-1/2(\gamma+2+\alpha)} \quad x \to \infty$$

où $K_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ représente une constante non élémentaire dépendant seulement des paramètres α, β, γ, δ et qui est définie par:

$$(1.7) \qquad K_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)\Gamma\left(1 + \frac{\alpha+\gamma}{2}\right)} \times J\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}, \beta, \frac{3\alpha-\gamma}{2}, \delta + \beta\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)\right)$$

avec

$$(1.8) \qquad J(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \int_0^\infty x^\alpha e^{-\beta x - x^2} N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x)dx$$

abolument convergente pour $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$ et $\mathrm{Re}\,(\gamma - \alpha) > 0$.

La constante $J(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ peut être commodément exprimée à l'aide de l'intégrale de Faxen [**5**] souvent notée $F_i(\alpha, \lambda; x)$ mais que nous noterons $\Gamma^*(\alpha, \lambda; x)$ pour rappeler la fonction eulérienne Gamma, et qui s'écrit:

$$(1.9) \qquad \Gamma^*(\alpha, \lambda; x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t^\alpha - t} t^{x-1} dt.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-027-9 Published online by Cambridge University Press

Cette fonction vérifie la relation de récurrence à trois termes:

$$(1.10)\quad x\Gamma^*(\alpha, \lambda; x) = \lambda\alpha\Gamma^*(\alpha, \lambda, x + \alpha) + \Gamma^*(\alpha, \lambda; x + 1).$$

On vérifie aisément que pour $\lambda = 0$, on a:

$$(1.11)\quad x\Gamma^*(\alpha, 0; x) = \Gamma^*(\alpha, 0; x + 1)$$

qui est la relation vérifiée par la fonction eulérienne Gamma. Ainsi, à l'aide de l'intégrale de Faxen (1.9) la constante $J(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ peut s'écrire:

$$(1.12)\quad J(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_k(\alpha, \beta, \gamma, \delta)}{(1 + \alpha)_k k!}\Gamma^*\left(\frac{1}{2}, \beta; \frac{\alpha + k + 1}{2}\right).$$

En introduisant la fonction non élémentaire

$$(1.13)\quad F^*(\alpha, \beta, \gamma, \delta; \sigma, t, \lambda; c; x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_k(\alpha, \beta, \gamma, \delta)}{(c)_k}\Gamma^*\left(\sigma, t; \frac{\lambda + k}{2}\right)\frac{x^k}{k!}$$

qui est une généralisation de la fonction hypergéométrique de Gauss mais dont l'étude reste encore à faire, on a:

$$(1.14)\quad J(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \tfrac{1}{2}F^*(\alpha, \beta, \gamma, \delta; \tfrac{1}{2}, \beta, 1 + \alpha; 1 + \alpha; 1).$$

L'équation (0.2) admet aussi dans le voisinage de l'infini, entre autres, deux solutions linéairement indépendantes, notées $B^+(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ et $H^+(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ dans le demi-plan de droite et deux autres solutions linéairement indépendantes notées $B^-(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ et $H^-(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ dans le demi-plan de gauche.

Ces solutions possèdent le comportement asymptotique suivant au voisinage de l'infini

$$(1.15)\quad \begin{aligned} &B^+(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) \sim x^{1/2(\gamma-2-\alpha)} \quad x \to \infty \\ &H^+(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) \sim x^{-1/2(\gamma+2+\alpha)}\, e^{\beta x + x^2} \quad x \to \infty \end{aligned}$$

avec

$$-\frac{\pi}{2} + \epsilon \leqq \arg x \leqq 3\frac{\pi}{2} - \epsilon$$

au voisinage de l'origine

$$(1.16)\quad B^+(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) \sim \frac{2^{1+(\alpha-\gamma)/2}\Gamma(\alpha)2^{-\alpha}}{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha - \gamma}{2}\right)} \times K_2\left(\frac{\alpha - \gamma}{2}, \beta, -\frac{3\alpha + \gamma}{2}, \delta + \beta\left(\frac{\gamma + \alpha}{2}\right)\right)x^{-\alpha}$$

$(\alpha - \gamma)/2$ non entier relatif $x \to 0$ où la constante $K_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ est celle définie en (1.6) et (1.7)

$$H^+(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) = O(x^{-\alpha}) \quad x \to 0.$$

Nous n'explicitons pas plus ce dernier comportement car nous n'en aurons pas besoin. Une étude détaillée de ces questions figure dans [**1**] et [**3**].

Entre $B^{+}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ et $B^{-}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ on a la relation de passage:

$$(1.17)\quad B^{-}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) = B^{+}(\alpha, -\beta, \gamma, -\delta; -x) \quad \operatorname{Re} x < 0.$$

1.3. *Equation transformée.* Par la transformation élémentaire suivante:

$$(1.18)\quad y(x) = x^{-\alpha} e^{\beta x + x^2} u(x)$$

l'équation canonique (0.2) se transforme en l'équation suivante:

$$(1.19)\quad xu'' + u'\{1 - \alpha + \beta x + 2x^2\} + u\{(\gamma + 2 - \alpha)x - \tfrac{1}{2}[\delta - \beta(1 - \alpha)]\} = 0$$

qui admet la solution suivante:

$$(1.20)\quad u(x) = x^{\alpha} e^{-\beta x - x^2} y(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$$

où $y(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ désigne une solution de l'équation canonique (0.2).

1.4. *Cas particuliers.* Dans le cas particulier où $\beta = \delta = 0$ on a:

$$(1.21)\quad N(\alpha, 0, \gamma, 0; x) = \phi\left(\frac{\alpha + 2 - \gamma}{4}, 1 + \frac{\alpha}{2}; x^2\right)$$

où $\phi(a, c; x)$ est la fonction confluente de Kummer souvent notée aussi ${}_1F_1(a, c; x)$.

L'équation bien connue de Kummer est un cas particulier de l'équation (0.2).

Pour les autres solutions on a les résultats suivants:

$$(1.22)\quad B^{+}(\alpha, 0, \gamma, 0; x) = \psi\left(\frac{\alpha + 2 - \gamma}{4}, 1 + \frac{\alpha}{2}; x^2\right) \quad \operatorname{Re} x > 0$$

où $\psi(a, c; x)$ est la fonction de Tricomi ([**11**] page 17)

$$(1.23)\quad H^{+}(\alpha, 0, \gamma, 0; x) = \Theta\left(\frac{\alpha + 2 - \gamma}{4}, 1 + \frac{\alpha}{2}; x^2\right) \quad \operatorname{Re} x > 0$$

où $\mathrm{H}(a, c; x)$ est la fonction que j'ai introduite dans [**1**] et qui est liée à la fonction ${}_{\frac{1}{2}}F_2(a, c; x)$ de Meixner [**8**] comme est liée la fonction $\psi(a, c; x)$ de Tricomi [**11**] à la fonction ${}_{\frac{1}{2}}F_1(a, c; x)$ de Meixner [**8**].

On a aussi les cas particuliers su vants ([**1**], [**3**])

$$(1.24)\quad K_2(\alpha, 0, \gamma, 0) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha + 2 - \gamma}{4}\right)}$$

$$(1.25)\quad J(\alpha, 0, \gamma, 0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha + 1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma - \alpha}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha + 2 + \gamma}{4}\right)}.$$

2. Une relation intégrale.

2.1. *Quelques relations préliminaires.* Considérons les trois intégrales suivantes:

$$(2.1)\quad W(s) = W(\alpha, \beta, \gamma, \delta; s) = \int_0^\infty \frac{t^{\alpha+2n+1}e^{-\beta t - t^2}}{s^2 + t^2} N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; t)dt$$

$$V_1(s) = V_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta; s) = \int_0^\infty \frac{t^{\alpha+2n}e^{-\beta t - t^2}}{s - it} N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; t)dt$$

$$V_2(s) = V_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta; s) = \int_0^\infty \frac{t^{\alpha+2n}e^{-\beta t - t^2}}{s + it} N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; t)dt.$$

Ces trois intégrales convergent absolument si

$$(2.2)\quad -(1 + \mathrm{Re}\,\alpha)/2 < n < (1 + \mathrm{Re}\,(\gamma - \alpha))/2.$$

Entre ces trois intégrales on a la relation évidente:

$$(2.3)\quad 2iW(s) = V_1(s) - V_2(s).$$

Intéressons-nous d'abord à $V_1(s)$. Pour cela considérons l'intégrale double:

$$(2.4)\quad \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(s-it)x} t^{2n} u(t) dt dx$$

où l'on a posé

$$(2.5)\quad u(t) = t^\alpha e^{-\beta t - t^2} N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; t).$$

On a:

$$(2.6)\quad \int_0^\infty \int_0^\infty |e^{-(s-it)x} t^{2n} u(t)| dt dx \leqq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\mathrm{Re}\, s)x} t^{2n} |u(t)| dt dx$$

avec $\mathrm{Re}\, s > 0$. L'application

$$(2.7)\quad (t, x) \mapsto e^{-(\mathrm{Re}\, s)x} t^{2n} |u(t)|$$

est continue sur $[0, \infty[\times[0, \infty[$ et donc mesurable.

On peut donc appliquer le théorème de Fubini et on a:

$$(2.8)\quad \int_0^\infty \int_0^\infty |e^{-(s-it)x} t^{2n} u(t)| dt dx \leqq \int_0^\infty e^{-(\mathrm{Re}\, s)x} dx \int_0^\infty t^{2n} |u(t)| dt \leqq \frac{M}{\mathrm{Re}\, s}$$

où M est une constante ne dépendant pas de s. Donc l'intégrale double (2.4) converge absolument si $\mathrm{Re}\, s > 0$. On a donc:

$$(2.9)\quad V_1(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \left(\int_0^\infty e^{ixt} t^{2n} u(t) dt \right) dx \quad \text{avec } \mathrm{Re}\, s > 0.$$

Posons

$$(2.10) \quad S(x) = \int_0^\infty e^{ixt} u(t)dt \quad x \in \mathbf{R}$$

où $u(t)$ est définie en (2.5). Cette intégrale est absolument convergente si

$$(2.11) \quad \operatorname{Re} \alpha > -1 \text{ et } \operatorname{Re}\, (\gamma - \alpha)/2 > 0.$$

On peut donc dériver sous le signe somme et on a:

$$\int_0^\infty e^{ixt} t^{2n} u(t)dt = (-1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} S(x).$$

D'où

$$V_1(s) = (-1)^n \int_0^\infty e^{-sx} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} S(x)dx.$$

En intégrant plusieurs fois par parties on a:

$$V_1(s) = (-1)^n s^{2n} \int_0^\infty S(x)e^{-sx}dx \quad \text{avec } \operatorname{Re} s > 0.$$

Si l'on pose:

$$(2.12) \quad T(s) = \int_0^\infty S(x)e^{-s(x)}dx \quad \text{avec } \operatorname{Re} s > 0$$

où $S(x)$ est définie en (2.10) alors on a:

$$V_1(s) = (-1)^n s^{2n} T(s).$$

Cette relation nous sera très utile dans la suite de ce travail.

2.2. *Equation différentielle vérifiée par $T(s)$.* On va maintenant établir l'équation différentielle ordinaire vérifiée par $T(s)$. Pour cela on a besoin de connaître celle vérifiée par $S(x)$.

Pour cela considérons l'intégrale (2.10) qui définit $S(x)$.

L'équation différentielle ordinaire vérifiée par $u(x)$ est donnée par (1.19) que l'on ré-écrit par souci de commodité:

$$(1.19) \quad tu'' + u'\{1 - \alpha + \beta t + 2t^2\} + u\{(\gamma + 2 - \alpha)t - \tfrac{1}{2}[\delta + \beta(\alpha - 1)]\} = 0.$$

Observons tout d'abord que les intégrales de Fourier unilatérales des fonctions suivantes:

$$u(t)\,;\, tu(t)\,;\, u'(t)\,;\, tu'(t)\,;\, t^2u'(t)\,;\, tu''(t)$$

qui rentrent dans l'expression de l'équation (1.19) convergent absolument si on a:

$$(2.13) \quad \operatorname{Re} \alpha > 0 \quad \text{et } \operatorname{Re}\, (\gamma - \alpha)/2 > 1 \quad \text{avec} \quad x \in \mathbf{R}.$$

Ainsi en prenant la transformée de Fourier unilatérale de (1.19) telle qu'elle est définie en (2.10) on obtiendra l'équation différentielle ordinaire suivante vérifiée par $S(x)$:

$$(2.14) \quad 2ixS'' + S'\{ix^2 - \beta x - (\gamma - 2 - \alpha)i\} + S\{(1+\alpha)ix - \tfrac{1}{2}[\delta + \beta(1+\alpha)]\} = 0.$$

Considérons maintenant l'intégrale (2.12) qui définit $T(s)$ à savoir:

$$(2.16) \quad T(s) = \int_0^\infty e^{-sx} S(x)dx \quad \text{avec} \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Cette intégrale converge absolument, ainsi que celles de $T'(s)$ et de $T''(s)$.

On peut donc prendre la transformée de Laplace de l'équation (2.14) et on a:

$$(2.17) \quad sT'' + T'\{-2s^2 - i\beta s + 1 - \alpha\} + T\{-(\gamma + 2 - \alpha)s + \tfrac{1}{2}[i\delta + i\beta(\alpha - 1)]\} = 0.$$

C'est une équation de la forme (0.2) qui admet une solution du type $y(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}; s)$ avec

$$(2.18) \quad \tilde{\alpha} = -\alpha; \tilde{\beta} = i\beta; \tilde{\gamma} = -\gamma; \tilde{\delta} = -i\delta$$

de sorte que pour $V_1(s)$ on a l'expression suivante:

$$(2.19) \quad V_1(s) = (-1)^n s^{2n} y(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}; s).$$

Pour préciser la nature de la fonction $y(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}; s)$ on va étudier le comportement asymptotique de $V_1(s)$.

2.3. *Comportement asymptotique de* $V_1(s)$. On a besoin du lemme suivant:

LEMME 1.

$$\int_0^\infty \frac{x^\nu}{i + x} dx = -\frac{\pi}{\sin \pi\nu} \exp\left(\frac{i\pi\nu}{2}\right).$$

Preuve. Par la méthode classique des résidus.

COROLLAIRE 1.

$$\int_0^\infty \frac{x^\nu}{1 - ix} dx = -i\frac{\pi}{\sin \pi\nu} e^{i(\pi\nu)/2}.$$

Preuve. Evidente.

On a aussi besoin du lemme suivant:

LEMME 2.

$$\int_0^\infty \frac{t^{2n}u(t)}{s-it}\,dt \sim (-1)^n K_2(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\, i\, \frac{\pi e^{-i(\pi)/4(\gamma+2-\alpha)2n+d-1/2(\gamma+2+d)}}{\sin\frac{\pi}{2}(\gamma+2-\alpha)} \quad s\to\infty$$

avec $u(t) = t^\alpha e^{-\beta t-t^2}N(\alpha,\beta,\gamma,\delta;t)$ *et* $K_2(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ *déjà définie en* (1.7) *et* (1.8).

Preuve. On écrit l'intégrale sous la forme

$$\int_0^\infty \frac{u(t)t^{2n}}{s-it}\,dt = \int_0^s \frac{u(t)t^{2n}}{s-it}\,dt + \int_s^\infty \frac{u(t)t^{2n}}{s-it}\,dt. \tag{2.20}$$

Considérons la 1ère intégrale du second membre. On a:

$$\int_0^s \frac{u(t)t^{2n}}{s-it}\,dt \sim \int_0^\infty \frac{u(t)t^{2n}}{s-it}\,dt \quad s\to\infty. \tag{2.21}$$

Posons $t = sx$; on a:

$$\int_0^\infty \frac{u(t)t^{2n}}{s-it}\,dt = s^{\alpha+2n}\int_0^\infty \frac{x^{\alpha+2n}}{1-ix}\,v(sx)dx \tag{2.22}$$

avec $v(x) = e^{-\beta x-x^2}N(\alpha,\beta,\gamma,\delta;x)$. On a donc:

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha+2n}}{1-ix}\,v(sx)dx \sim K_2(\alpha,\beta,\gamma,\delta)s^{-1/2(\gamma+2+\alpha)} \times \int_0^\infty \frac{x^{2n-1/2(\gamma+2-\alpha)}}{1-ix}\,dx \quad s\to\infty. \tag{2.23}$$

Et (2.22) devient

$$\int_0^\infty \frac{u(t)t^{2n}}{s-it}\,dt \sim K_2(\alpha,\beta,\gamma,\delta)s^{2n+\alpha-1/2(\gamma+2+\alpha)} \times \int_0^\infty \frac{x^{2n-1/2(\gamma+2-\alpha)}}{1-ix}\,dx \quad s\to\infty. \tag{2.24}$$

Et donc en tenant compte du Corollaire 1 on a:

$$\int_0^\infty \frac{u(t)t^{2n}}{s-it}\,dt \sim (-i)K_2(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\,\frac{\pi s^{2n+\alpha-1/2(\gamma+2+\alpha)}}{\sin\pi[2n-\frac{1}{2}(\gamma+2-\alpha)]} \times e^{i(\pi)/2[2n-1/2(\gamma+2-\alpha)]} \quad s\to\infty \tag{2.25}$$

c'est à dire

$$\int_0^\infty \frac{u(t)t^{2n}}{s-it}\,dt \sim (-1)^n i K_2(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\,\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}(\gamma+2-\alpha)} \times e^{-i(\pi)/4(\gamma+2-\alpha)}s^{2n+\alpha-1/2(\gamma+2+\alpha)} \quad s\to\infty. \tag{2.26}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-027-9 Published online by Cambridge University Press

On peut montrer que la 2ème intégrale du second membre de (2.20) est négligeable par rapport à la 1ère intégrale du même membre.

2.4. *Notre résultat principal.* Les fonctions $B^+(\alpha, \beta, \gamma, \delta; s)$ et $H^+(\alpha, \beta, \gamma, \delta; s)$ constituent un système fondamental de l'équation canonique (0.2) dans le demi-plan de droite. On peut donc écrire la fonction $y(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}; s)$ de (2.19) sous la forme:

(2.27) $$y(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}; s) = \tau_1 B^+(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \delta; s) + \tau_2 H^+(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}; s)$$

où τ_1 et τ_2 sont deux constantes.

On a donc en revenant à (2.19)

(2.28) $$V_1(s) = (-1)^n s^{2n}\{\tau_1 B^+(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}; s) + \tau_2 H^+(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}; s)\}$$

ce que l'on peut aussi écrire:

(2.29) $$V_1(s) = (-1)^n s^{2n+\alpha}\{\tau_1 B^+(\alpha, i\beta, -\gamma, -i\delta; s) + \tau_2 H^+(\alpha, i\beta, -\gamma, -i\delta; s)\}.$$

Le premier membre de (2.29), d'après le Lemme 2, a un comportement asymptotique polynômial au voisinage de l'infini, alors que le second d'après (1.15) a un comportement exponentiel au voisinage de l'infini. Il en résulte $\tau_2 = 0$. D'où:

(2.30) $$V_1(s) = (-1)^n s^{2n+\alpha} \tau_1 B^+(\alpha, i\beta, -\gamma, i\delta; s).$$

En comparant maintenant le comportement asymptotique des deux membres de (2.30) au voisinage de l'infini on obtient:

(2.31) $$\tau_1 = iK_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}(\gamma + 2 - \alpha)} e^{-i(\pi)/4(\gamma+2-\alpha)}$$

et donc

(2.32) $$V_1(s) = (-1)^n i K_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \frac{\pi e^{-i(\pi)/4(\gamma+2-\alpha)}}{\sin \frac{\pi}{2}(\gamma + 2 - \alpha)} \times s^{2n+\alpha} B^+(\alpha, i\beta, -\gamma, -i\delta; s).$$

De la même manière on obtiendra:

(2.32) $$V_2(s) = (-1)^n (-i) K_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \frac{\pi e^{i(\pi)/4(\gamma+2-\alpha)}}{\sin \frac{\pi}{2}(\gamma + 2 - \alpha)} \times s^{2n+\alpha} B^+(\alpha, -i\beta, -\gamma, i\delta; s).$$

Il en résulte:

$$(2.34)\quad 2iW(s) = V_1(s) - V_2(s) = (-1)^n iK_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta)\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}(\gamma + 2 - \alpha)}$$
$$\times\, s^{2n+\alpha}\{e^{-i(\pi)/4(\gamma+2-\alpha)}B^+(\alpha, i\beta, -\gamma, -i\delta; s)$$
$$+\, e^{i(\pi)/4(\gamma+2-\alpha)}B^+(\alpha, -i\beta, -\gamma, i\delta; s)\}.$$

On a donc obtenu le résultat important suivant:

THÉORÈME. *Entre la fonction* $B^+(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ *et la fonction* $N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ *on a la relation intégrale suivante:*

$$(2.35)\quad \int_0^\infty \frac{t^{\alpha+2n+1}e^{-\beta t - t^2}N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; t)}{s^2 + t^2}\,dt = \tfrac{1}{2}(-1)^n K_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$
$$\times\, \frac{\pi s^{2n+\alpha}}{\sin\frac{\pi}{2}(\gamma + 2 - \alpha)}\{e^{-i(\pi)/4(\gamma+2-\alpha)}B^+(\alpha, i\beta, -\gamma, -i\delta; s)$$
$$+\, e^{i(\pi)/4(\gamma+2-\alpha)}B^+(\alpha, -i\beta, -\gamma, i\delta; s)\}$$

valable pour:

$$|\arg s| < \pi/2;\ \mathrm{Re}\,\alpha > 0;\ \mathrm{Re}\,(\gamma - \alpha)/2 > 1$$
$$-(1 + \mathrm{Re}\,\alpha)/2 < n < (1 + \mathrm{Re}\,(\gamma - \alpha)/2)/2;\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ceci est notre résultat principal qui généralise le résultat de Tricomi [**11**] qui a été rappelé en (0.1) de notre introduction. Notre méthode peut donner aussi le résultat de Meixner [**8**] (formule 36 page 704). On va maintenant étudier le cas particulier de ce résultat.

3. Cas particulier important.

COROLLARIE 2.

$$(3.1)\quad \int_0^\infty \frac{x^{c+n-1}e^{-x}\phi^*(a, c; x)}{z + x}\,dx = (-1)^n\Gamma(1 - a)z^{c+n-1}\psi(c - a, c; z)$$
$$|\arg z| < \pi/2;\ \mathrm{Re}\,c > 1;\ \mathrm{Re}\,a < 0;\ \tfrac{1}{2} - \mathrm{Re}\,c < n < 1 - \mathrm{Re}\,a$$

n entier naturel avec

$$\phi^*(a, c; x) = \frac{1}{\Gamma(c)}\,\phi(a, c; x).$$

Preuve. Considérons la relation (2.35) de notre théorème. Prenons

$\beta = \delta = 0$; on a:

$$\text{(3.2)} \quad \int_0^\infty \frac{t^{2n+\alpha+1} e^{-t^2} \phi\left(\frac{\alpha+2-\gamma}{4}, 1+\frac{\alpha}{2}; t^2\right)}{s^2+t^2} dt =$$

$$\tfrac{1}{2}(-1)^n K_2(\alpha, 0, \gamma, 0) \frac{\pi s^{2n+\alpha}}{\sin \frac{\pi}{2}(\gamma+2-\alpha)}$$

$$\times\, (e^{-i(\pi)/4(\gamma+2-\alpha)} + e^{i(\pi)/4(\gamma+2-\alpha)}) \psi\left(\frac{\alpha+2+\gamma}{4}, 1+\frac{\alpha}{2}; s^2\right)$$

$|\arg s| < \pi/2$; $\operatorname{Re}\alpha > 0$; $\operatorname{Re}(\gamma-\alpha)/2 > 1$;

$-(1+\operatorname{Re}\alpha)/2 < n < (1+\operatorname{Re}(\gamma-\alpha)/2)/2)$.

Ce que l'on écrit aussi:

$$\int_0^\infty \frac{t^{2n+\alpha+1} e^{-t^2} \phi\left(\frac{\alpha+2-\gamma}{4}, 1+\frac{\alpha}{2}; t^2\right)}{s^2+t^2} dt =$$

$$(-1)^n K_2(\alpha, 0, \gamma, 0) \frac{\pi s^{2n+\alpha}}{\sin \frac{\pi}{2}(\gamma+2-\alpha)}$$

$$\times \cos\frac{\pi}{4}(\gamma+2-\alpha) \psi\left(\frac{\alpha+2+\gamma}{4}, 1+\frac{\alpha}{2}; s^2\right)$$

$|\arg s| < \pi/2$; $\operatorname{Re}\alpha > 0$; $\operatorname{Re}(\gamma-\alpha)/2 > 1$;

$-(1+\operatorname{Re}\alpha)/2 < n < (1+\operatorname{Re}(\gamma-\alpha)/2)/2$.

D'où:

$$\int_0^\infty \frac{t^{2n+\alpha+1} e^{-t^2} \phi\left(\frac{\alpha+2-\gamma}{4}, 1+\frac{\alpha}{2}; t^2\right)}{s^2+t^2} dt =$$

$$(-1)^n \frac{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+2-\gamma}{4}\right)} \frac{\pi}{2} \frac{s^{2n+\alpha}}{\sin \frac{\pi}{4}(\gamma+2-\alpha)}$$

$$\times\, \psi\left(\frac{\alpha+2+\gamma}{4}, 1+\frac{\alpha}{2}; s^2\right)$$

$|\arg s^2| < \pi$; $\operatorname{Re}\alpha > 0$; $\operatorname{Re}(\gamma-\alpha)/2 > 1$;

$-(1+\operatorname{Re}\alpha)/2 < n < (1+\operatorname{Re}(\gamma-\alpha)/2)/2$.

On pose $(\alpha + 2 - \gamma)/4 = a$; $1 + \alpha/2 = c$ et on a:

$$\int_0^\infty \frac{t^{2n+2c-1}e^{-t^2}\phi(a, c; t^2)}{s^2 + t^2}\,dt = (-1)^n \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \frac{\pi}{2} \frac{s^{2n+2c-2}}{\sin \pi(1 - a)} \times \psi(c - a, c; s^2)$$

$|\arg s^2| < \pi$; $\operatorname{Re} c > 1$; $\operatorname{Re} a < 0$; $\frac{1}{2} - \operatorname{Re} c < n < 1 - \operatorname{Re} a$.

On pose ensuite $s^2 = z$, $t^2 = x$ et on utilise la formule du complément pour $\pi/\sin \pi a$ et on a:

$$\tfrac{1}{2} \int_0^\infty \frac{x^{c+n-1}e^{-x}\phi(a, c; x)}{z + x}\,dx = (-1)^n \tfrac{1}{2}\Gamma(c)\Gamma(1 - a)z^{c+n-1} \times \psi(c - a, c; z)$$

$|\arg z| < \pi$; $\operatorname{Re} c > 1$; $\operatorname{Re} a < 0$; $\frac{1}{2} - \operatorname{Re} c < n < 1 - \operatorname{Re} a$.

Ensuite en posant

$$\phi^*(a, c; x) = \frac{1}{\Gamma(c)}\,\phi(a, c; x)$$

on obtient le résultat cherché.

On a ainsi retrouvé le résultat de Tricomi ([**11**] page 32, formule 5). Le résultat de Meixner ([**8**] page 704, formule 36) analogue au résultat de Tricomi s'obtient de la même manière.

Bibliographie

1. F. Batola, *Quelques propriétés de l'équation biconfluente de l'équation de Heun*, Thèse de 3ème cycle, Université Pierre et Marie Curie, Paris (1977).

2. ——— *Sur une généralisation des polynômes d'Hermite*, Annales de la Société Scientifique de Bruxelles T *93* (1979), 17–38.

3. ——— *Une généralisation d'un cas particulier de la transformée de Hankel de la fonction de Kummer* $\phi(a, c; -x^2)$, a paraître.

4. A. Decarreau, P. Maroni et A. Robert, *Sur les équations confluentes de l'équation de Heun*, Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, T *92* (1978), 151–189.

5. H. Faxen, *Expansion in series of the integral* $\int_y^x \exp[-x(t \pm t^{-n})]t^2 dt$, Ark Math Astr. Fys. *15* (1921), 1–57.

6. E. L. Ince, *Ordinary differential equations* (Dover Publications, New York, 1926).

7. P. Maroni, *Sur la forme biconfluente de l'équation de Heun*, C.R. Acad. Sc. Paris *264*A (1967), 503–505.

8. J. Meixner, Mathematische Zeitschrift *36* (1933), 677–707.

9. E. D. Rainville, *Special functions* (MacMillan Company, New York, 1960).

10. F. G. Tricomi, *Differential equations* (Blackie and Sons, 1966).

11. ——— *Fonctions hypergéométriques confluentes*, Mémorial des Sciences Mathématiques Fascicule CXL (Gauthier-Villars, Paris, 1960).

Université Pierre et Marie Curie,
Paris, France