BULL. AUSTRAL. MATH. SOC. 53D25
VOL. 71 (2005) [121–126]

CONJUGAISON GÉODÉSIQUE EN RANG 1

HAMID-REZA FANAÏ

Soit (M, g_0) une variété riemannienne compacte de courbure sectionnelle négative. Soit g_1 une autre métrique riemannienne sur M de rang 1. On montre que l'égalité des spectres marqués des longueurs de g_0 et g_1 implique que le flot géodésique de g_0 est un facteur de celui de g_1.

1. INTRODUCTION

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte. Il est bien connu qu'on peut représenter chaque classe de conjugaison $\langle\gamma\rangle$ de Γ le groupe fondamental de M par une classe d'homotopie libre de courbes dans M. On note $\ell_g(\gamma)$ la longueur d'une courbe de longueur minimale dans cette classe. Une telle courbe est toujours une géodésique périodique (qui peut être réduite à un point) et lorsque la métrique g est sans points conjugués, alors toutes les géodésiques périodiques dans cette classe ont même longueur $\ell_g(\gamma)$. Si g est de courbure négative, une telle géodésique périodique est unique.

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des classes de conjugaison du groupe fondamental de M. Par définition, le spectre marqué des longueurs de la métrique g est l'élément $\left(\ell_g(\gamma)\right)_{\gamma\in\mathcal{C}}$ du produit direct $\mathbb{R}^{\mathcal{C}}$. Il est important de savoir si ce spectre détermine la métrique. On aimerait surtout avoir des informations dynamiques, par exemple sur φ_t^g le flot géodésique de (M, g) défini sur S_gM le fibré unitaire tangent. Notons que s'il y a une conjugaison entre les flots géodésiques de deux métriques, alors elles ont même spectre. Inversement, en courbure négative, un résultat de Hamenstädt ([4]) dit que l'égalité des spectres marqués implique l'existence d'une conjugaison géodésique de classe C^0.

Dans cette note, nous obtenons une version plus générale de ce résultat dans le cadre des variétés riemanniennes compactes de rang 1, c'est à dire que la courbure est nonpositive mais il y a une géodésique hyperbolique, c'est à dire, une géodésique qui n'admet pas de champ de Jacobi parallèle perpendiculaire. Nous donnons une estimation valable en courbure négative ([7]) pour le cadre plus général des variétés de rang 1. Nous utilisons la notion d'intersection des métriques ([7]) et également les résultats de [8] concernant la famille de mesures de Patterson–Sullivan en rang 1. Cela nous permettra de montrer le résultat principal de ce texte (comparer avec [5, 10]).

Received 8th September, 2004
This research was in part supported by a grant from IPM (No. 83530035)

Théorème 1.1. *Soit (M, g_0) une variété reimannienne compacte de courbure sectionnelle négative. Soit g_1 une autre métrique riemannienne sur M de rang 1. Si le spectre marqué des longueurs de (M, g_0) est égal à celui de (M, g_1), alors le flot géodésique de (M, g_0) est un facteur de celui de (M, g_1), c'est à dire, il existe une application continue et surjective $F : S_{g_1}M \to S_{g_0}M$ vérifiant $F \circ \varphi_t^{g_1} = \varphi_t^{g_0} \circ F$.*

À la fin, nous donnons également quelques applications de ce théorème.

2. Préliminaires

Nous présentons tout d'abord quelques notions utiles.

Entropie topologique. Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de rang 1. Pour tout réel $T > 0$, on note $N_g(T)$ le nombre des géodésiques périodiques de période $\leqslant T$ (à classe d'homotopie libre près). Il est connu que ([**6**]) $h_{\mathrm{top}}(g)$, l'entropie topologique du flot géodésique de (M, g) est égale à

$$h_{\mathrm{top}}(g) = \lim_{T \to +\infty} \frac{\log N_g(T)}{T}.$$

Si g' est une autre métrique riemannienne sur M de rang 1 ayant même spectre marqué des longueurs que g, alors l'on a $h_{\mathrm{top}}(g') = h_{\mathrm{top}}(g)$.

Intersection. Soit (M, g) une variété riemannienne compacte. Rappelons la définition de l'intersection ([**7**]): soit g' une autre métrique riemannienne sur M. Pour toute mesure de probabilité μ sur S_gM invariante par φ_t^g le flot géodésique de (M, g), l'intersection de g' par rapport à g et μ est égale à:

$$I_\mu(g, g') = \inf_{t>0} \frac{1}{t} \int_{S_gM} a(v, t)\, d\mu(v)$$

où $a(v, t) = d_{g'}\big(\widetilde{C}_v(0), \widetilde{C}_v(t)\big)$ et pour tout vecteur $v \in S_gM$, $\widetilde{C}_v(t)$ désigne le relevé de la géodésique paramétrée par la longueur d'arc, définie par v, dans $\widetilde{M}$ le revêtement universel de M.

Soient γ et γ' deux géodésiques périodiques de g et g' respectivement, donnant les longueurs minimales dans une même classe d'homotopie libre. Soit δ la mesure de Dirac normalisée, associée à γ sur S_gM invariante par le flot géodésique de (M, g). Soit ℓ la g-longueur de γ et ℓ' la g'-longueur de γ'. Supposons $\ell = \ell'$. Exactement comme dans [**1**], lorsque g et g' n'ont pas de points conjugués, nous calculons $I_\delta(g, g')$, l'intersection de g' par rapport à g et δ et obtenons:

$$I_\delta(g, g') = \frac{\ell'}{\ell} = 1.$$

Par conséquent, si g et g' ont même spectre marqué des longueurs, alors l'intersection de g' par rapport à g et toute mesure de Dirac normalisée est égale à 1.

Une estimation. Maintenant, supposons que (M, g_0) est de courbure négative et que g_1 est une autre métrique riemannienne de rang 1 sur M avec le même spectre marqué des longueurs que g_0. Soit μ_{BM} la mesure de Bowen-Margulis de g_0. Il est bien connu que cette mesure est une limite des mesures de Dirac normalisées supportées sur des géodésiques périodiques. Le fait que l'intersection de g_1 par rapport à g_0 et toute mesure de Dirac normalisée est égale à 1, avec des arguments similaires à ceux utilisés dans [**1**] ou [**5**], nous donne $I_{\mu_{\mathrm{BM}}}(g_0, g_1) = 1$. Il est à noter que l'on peut utiliser également la continuité de l'intersection par rapport à la mesure (en courbure négative par exemple, voir [**2**]).

3. Preuve

Dans [**7**] lorsque g_0 et g_1 sont toutes les deux de courbure négative et ont même entropie, il est démontré que $I_{\mu_{\mathrm{BM}}}(g_0, g_1) \geqslant 1$ avec égalité si et seulement si les flots géodésiques de g_0 et g_1 sont C^0-conjugués. Le théorème 1.1 est prouvé dès que l'on montre le lemme suivant.

Lemme 3.1. *Soit (M, g_0) une variété reimannienne compacte de courbure négative. Soit g_1 une autre métrique riemannienne sur M avec la même entropie topologique que g_0. Soit μ_{BM} la mesure de Bowen-Margulis de g_0. Alors $I_{\mu_{\mathrm{BM}}}(g_0, g_1) \geqslant 1$. Si g_1 est de rang 1 et il y a l'égalité, alors il existe une application continue et surjective $F : S_{g_1}M \to S_{g_0}M$ vérifiant $F \circ \varphi_t^{g_1} = \varphi_t^{g_0} \circ F$.*

Prouvons ce lemme. En ce qui concerne l'inégalité, ceci est démontré dans [**7**]. Pour le cas d'égalité, il faut utiliser les arguments de [**7**] qui ont été adaptés pour des variétés de rang 1 dans [**8**]. L'idée principale est de construire une famille de mesures de Patterson-Sullivan $\{\mu_p\}_{p\in\widetilde{M}}$ sur $\widetilde{M}(\infty)$ le bord à l'infini et de prouver une propriété locale essentielle de cette famille. Dans le cas d'égalité, il faut constater que ceci implique l'équivalence des mesures de Patterson-Sullivan associées. Une telle équivalence implique l'existence d'une conjugaison géodésique de classe C^0 en courbure négative ([**7**]). Seulement en rang 1, on ne peut pas espérer que la conjugaison reste injective car entre deux points du bord, il peut y avoir plusieures géodésiques reliant ces deux points. C'est pour cela qu'on obtient un facteur de $\varphi_t^{g_1}$. L'autre point important est la comparaison des bords à l'infini pour les deux métriques. Par compacité de M, on sait que les deux espaces $(\widetilde{M}, \widetilde{g}_0)$ et $(\widetilde{M}, \widetilde{g}_1)$ sont quasi-isométriques. D'autre part, la métrique g_0 étant de courbure négative, il est bien connu que Γ est un espace hyperbolique au sens de Gromov et puisque cet espace est quasi-isométrique à $(\widetilde{M}, \widetilde{g}_0)$, ce dernier est donc un espace hyperbolique au sens de Gromov ainsi que $(\widetilde{M}, \widetilde{g}_1)$. Ceci implique ([**3**]) l'existence d'un homéomorphisme $P : (\widetilde{M}, \widetilde{g}_1)(\infty) \to (\widetilde{M}, \widetilde{g}_0)(\infty)$ qui est Γ équivariante. En fait, tout rayon géodésique de $(\widetilde{M}, \widetilde{g}_1)$ étant un quasi-rayon géodésique de $(\widetilde{M}, \widetilde{g}_0)$ est à distance de Hausdorff bornée d'un vrai rayon géodésique de $(\widetilde{M}, \widetilde{g}_0)$ et vice-versa.

Maintenant, expliquons comment on a l'équivalence entre les mesures de Patterson-Sullivan de g_0 et g_1 lorsque $I_{\mu_{\mathrm{BM}}}(g_0, g_1) = 1$. Pour simplifier, supposons que $h_{\mathrm{top}}(g_0) = h_{\mathrm{top}}(g_1) = 1$. Comme dans [**7**], pour tout $p \in \widetilde{M}$, il existe une constante L telle que pour $\mu_p^{g_0}$-presque tout $\xi \in (\widetilde{M}, \widetilde{g}_0)(\infty)$, il existe une suite $t_n \to \infty$ telle que si $y_n = \pi\varphi_{t_n}^{g_0} v_p(\xi)$ (où π est la projection naturelle et $v_p(\xi)$ est le vecteur tangent à p pointant vers ξ), alors

$$\left|d_{g_1}(p, y_n) - I_{\mu_{\mathrm{BM}}}(g_0, g_1)t_n\right| \leqslant L.$$

D'où $\left|d_{g_1}(p, y_n) - t_n\right| \leqslant L$. Ceci avec la propriété locale des mesures de Patterson–Sullivan ([**8**]) donne pour $R > 0$ constante:

$$\frac{1}{c_1} e^{-d_{g_1}(p,y_n)} \leqslant \mu_p^{g_1}\left(\mathrm{pr}_p^{g_1}(B(y_n, R))\right) \leqslant c_1 e^{-d_{g_1}(p,y_n)}$$

où $B(y, R)$ est la boule centrée en y de rayon R et pr_p désigne la projection sur le bord à l'infini le long des géodésiques. Ceci implique

$$\frac{1}{c_2} e^{-d_{g_0}(p,y_n)} \leqslant \mu_p^{g_1}\left(\mathrm{pr}_p^{g_1}(B(y_n, R))\right) \leqslant c_2 e^{-d_{g_0}(p,y_n)}.$$

Si R est plus grande que la distance de Hausdorff maximale r des rayons géodésiques associés pour g_0 et g_1, on a

$$\mathrm{pr}_p^{g_0}(B(y_n, R - r)) \subset \mathrm{pr}_p^{g_1}(B(y_n, R)) \subset \mathrm{pr}_p^{g_0}(B(y_n, R + r))$$

et on obtient

$$\mu_p^{g_0}\left(\mathrm{pr}_p^{g_1}(B(y_n, R))\right) \leqslant \mu_p^{g_0}\left(\mathrm{pr}_p^{g_0}(B(y_n, R + r))\right) \leqslant c_3 e^{-d_{g_0}(p,y_n)}$$

et aussi

$$c_4 e^{-d_{g_0}(p,y_n)} \leqslant \mu_p^{g_0}\left(\mathrm{pr}_p^{g_0}(B(y_n, R - r))\right) \leqslant \mu_p^{g_0}\left(\mathrm{pr}_p^{g_1}(B(y_n, R))\right).$$

On a alors

$$\frac{1}{c_5} \leqslant \frac{\mu_p^{g_0}(\mathrm{pr}_p^{g_1}(B(y_n, R)))}{\mu_p^{g_1}(\mathrm{pr}_p^{g_1}(B(y_n, R)))} \leqslant c_5$$

c'est à dire que $(d\mu_p^{g_0})/(d\mu_p^{g_1})(\xi)$ existe. À l'aide de ceci, comme dans [**7**], nous pouvons définir l'application F de la manière suivante. Soit $v \in S_{g_1}\widetilde{M}$ et posons $\xi = \varphi_{+\infty}^{g_1}(v)$ et $\eta = \varphi_{-\infty}^{g_1}(v)$. On sait qu'il existe une unique géodésique de $(\widetilde{M}, \widetilde{g}_0)$ reliant η à ξ. Il y a un unique $w \in S_{g_0}\widetilde{M}$ tangent à cette géodésique tel que $(d\mu_{\pi w}^{g_0})/(d\mu_{\pi v}^{g_1})(\xi) = 1$. L'application $F : S_{g_1}\widetilde{M} \to S_{g_0}\widetilde{M}$ définie par $F(v) = w$ est la bonne puisqu'elle est Γ invariante.

4. Applications

On a un facteur seulement, car F n'est pas injective, mais si l'on considère la partie régulière du fibré, alors sur cette partie, F est injective. Rappelons que la partie régulière du fibré unitaire tangent est tous les vecteurs tangents à des géodésiques hyperboliques. Il est connu que cette partie est un ouvert dense dans le fibré unitaire tangent. On a donc

https://doi.org/10.1017/S0004972700038077 Published online by Cambridge University Press

Corollaire 4.1. *Soit (M, g_0) une variété reimannienne compacte de courbure sectionnelle négative. Soit g_1 une autre métrique riemannienne sur M de rang 1. Si le spectre marqué des longueurs de (M, g_0) est égal à celui de (M, g_1), alors il y a une conjugaison géodésique entre un ouvert dense de $S_{g_1}M$ sur son image dans $S_{g_0}M$.*

Il est intéressant de constater qu'avec les notations du lemme 3.1, si les entropies topologiques de g_0 et g_1 sont égales et qu'il y a une inégalité entre les spectres marqués des longueurs $\mathrm{SML}(g_1) \leqslant \mathrm{SML}(g_0)$, c'est à dire que pour toute classe de conjugaison $\langle\gamma\rangle$ du groupe fondamental de M, on a $\ell_{g_1}(\gamma) \leqslant \ell_{g_0}(\gamma)$, alors la même démarche montre que $I_{\mu_{\mathrm{BM}}}(g_0, g_1) \leqslant 1$ et on est donc dans le cas d'égalité du lemme.

Corollaire 4.2. *Soit (M, g_0) une variété reimannienne compacte de courbure sectionnelle négative. Soit g_1 une autre métrique riemannienne de rang 1 sur M avec la même entropie topologique que g_0. Si $\mathrm{SML}(g_1) \leqslant \mathrm{SML}(g_0)$, alors le flot géodésique de g_0 est un facteur de celui de g_1. En particulier, on a $\mathrm{SML}(g_1) = \mathrm{SML}(g_0)$.*

Il est naturel de considérer également l'inégalité $\mathrm{SML}(g_0) \leqslant \mathrm{SML}(g_1)$. Pour ceci, nous pouvons obtenir un corollaire similaire. En effet, d'après les résultats de [**9**], on sait que la mesure d'entropie maximale $\mu_{\max}$ pour la métrique g_1 est unique et qu'elle est une limite des combinaisons des mesures de Dirac. Dans ce cas, avec l'inégalité supposée, on obtient $I_{\mu_{\max}}(g_1, g_0) \leqslant 1$. Maintenant le Lemme 3.1 reste vrai si l'on travaille avec $I_{\mu_{\max}}(g_1, g_0)$ car tous les arguments restent valables. On a donc

Corollaire 4.3. *Soit (M, g_0) une variété reimannienne compacte de courbure sectionnelle négative. Soit g_1 une autre métrique riemannienne de rang 1 sur M avec la même entropie topologique que g_0. Si $\mathrm{SML}(g_0) \leqslant \mathrm{SML}(g_1)$, alors le flot géodésique de g_0 est un facteur de celui de g_1. En particulier, on a $\mathrm{SML}(g_0) = \mathrm{SML}(g_1)$.*

References

[**1**] H.-R. Fanaï, 'Spectre marqué des longueurs et métriques conformément équivalentes', *Bull. Belg. Math. Soc.* **5** (1998), 525–528.

[**2**] A. Fathi et L. Flaminio, 'Infinitesimal conjugacies and Weil-Petersson metric', *Ann. Inst. Fourier* **43** (1993), 279–299.

[**3**] E. Ghys et P. de la Harpe, *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Progress in Mathematics **83** (Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1990).

[**4**] U. Hamenstädt, 'Time preserving conjugacies of geodesic flows', *Ergodic Theory Dynamical Systems* **12** (1992), 67–74.

[**5**] I. Kim, 'Ergodic theory and rigidity on the symmetric space of non-compact type', *Ergodic Theory Dynamical Systems* **21** (2001), 93–114.

[**6**] G. Knieper, 'Das Wachstum der Äquivalenzklassen geschlossener Geodätischer in kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten', *Arch. Math. (Basel)* **40** (1983), 559–568.

[**7**] G. Knieper, 'Volume growth, entropy and the geodesic stretch', *Math. Res. Lett.* **2** (1995), 39–58.

[8] G. Knieper, 'On the asymptotic geometry of nonpositively curved manifolds', *Geom. Funct. Anal.* **7** (1997), 755–782.

[9] G. Knieper, 'The uniqueness of the measure of maximal entropy for geodesic flows on rank 1 manifolds', *Ann. Math.* **148** (1998), 291–314.

[10] C.B. Yue, 'The ergodic theory of discrete isometry groups on manifolds of variable negative curvature', *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996), 4965–5005.

Department of Mathematical Sciences
Sharif University of Technology
P.O.Box 11365-9415
Tehran
Iran

Institute for Studies in Theoretical
Physics and Mathematics (IPM)
Tehran
Iran
e-mail: fanai@sharif.ac.ir