BULL. AUSTRAL. MATH. SOC. 34C35, 54H20
VOL. 29 (1984), 207-214.

SYSTÈMES DYNAMIQUES DANS LES ESPACES ULTRAMÉTRIQUES COMPACTS

THOMAS KIVENTIDIS

We give a definition of any discrete dynamical system in compact ultrametric space and we study the behaviour of its trajectories.

1. Introduction - Définitions

On considère l'espace ultramétrique compact (X,d). On rappelle qu'une ultramétrique dans un ensemble X est une application de $X \times X$ dans l'ensemble $R^+ = \{x \in R : x \geq 0\}$, qui satisfait les conditions:

(1) $d(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$

(2) $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall x,y \in X$

(3) $d(x,y) \leq max\{d(x,z),d(z,y)\}$, $\forall x,y,z \in X$.

On démontre, aisément, que

$d(x,y) = max\{d(x,z),d(z,y)\}$, si $d(x,z) \neq d(z,y)$ et

$d(x,y) < max\{d(x,z),d(z,y)\}$, si $d(x,z) = d(z,y)$.

Quelques propriétés charactéristiques d'un espace ultramétrique (qui est non-Archimédien) sont [1]:

(i) chaque boule (ouverte ou fermée) $B(x,r)$ est à la fois un ensemble ouvert et fermé, et $B(x,r) = B(y,r)$, $\forall y \in B(x,r)$, $r > 0$,

Received 3 October 1983.

(ii) si deux boules de l'espace (X,d) ont un point commun, alors l'une est contenue dans l'autre,

(iii) la distance entre deux points, de deux boules sans point commun, dans l'espace (X,d) est indépendante de l'option des points sur chacune d'elles, et pour ça peut s'appeler, simplement, distance entre les deux boules.

Il se démontre [2, Théorème 3]:

LEMME. *Soit* (X,d) *un espace ultramétrique compact. Alors l'ensemble de toutes les valeurs non-zéro de la métrique* $d(x,y)$ *est soit fini, soit forme une suite monotone décroissante* $r_1 > r_2 > \ldots > r_n > \ldots$, $r_n > 0$, *qui converge vers le zéro.*

DÉFINITION 1. Soit (X,d) un espace ultramétrique compact. On dit système dynamique discret dans X, une application

$$\alpha : X \times \{r_n\} \to 2^X , \quad n \geq 1$$

qui se definit comme suit

$$\alpha(x,r_n) = S(x,r_n) = \{y \in X : d(x,y) = r_n\}$$

où $\{r_n\}$ est la suite du lemme ci-dessus.

Pour $r=r_n$=constante, on écrit $\alpha_r(x) = S(x,r)$.

DÉFINITION 2. Une trajectoire d'un système dynamique discret α est une suite de points $x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots$, telle que

$$x_{n+1} \in S(x_n,r_n) , \quad n = 1,2,\ldots$$

où $S(x_n,r_n)$ est la sphère de centre x_n et de rayon r_n.

A. Rubinov [3] a donné une définition similaire de la Définition 2.

2. Propositions

PROPOSITION 1. *Pour chaque trajectoire* $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ *nous avons*

$$A_n = \{x_i : i > n\} \subset S(x_n,r_n)$$

pour chaque $n = 1,2,\ldots$.

Démonstration. En effet, si $x_2 \in S(x_1,r_1)$, $x_3 \in S(x_2,r_2)$, alors

$$d(x_1,x_3) = max\{d(x_1,x_2),d(x_2,x_3)\} = r_1 > r_2$$

c'est-à-dire $x_3 \in S(x_1,r_1)$.

En général, si $x_k \in S(x_1,r_1)$, $x_{k+1} \in S(x_k,r_k)$, $r_1 > r_k$, alors

$$d(x_1,x_{k+1}) = max\{d(x_1,x_k),d(x_k,x_{k+1})\} = r_1$$

c'est-à-dire x_{k+1} $S(x_1,r_1)$.

Par conséquent, tous les points x_n , $n \geq 1$ se trouvent sur la sphère $S(x_1,r_1)$. Si nous considérions $x_{\lambda+1} \in S(x_\lambda,r_\lambda)$, $x_{\lambda+2} \in S(x_{\lambda+1},r_{\lambda+1})$, alors

$$d(x_\lambda,x_{\lambda+2}) = max\{d(x_\lambda,x_{\lambda+1}) , d(x_{\lambda+1},x_{\lambda+2})\} = r_\lambda > r_{\lambda+1}$$

etc, donc, nous aurions $A_\lambda = \{x_i : i > \lambda\} \subset S(x_\lambda,r_\lambda)$, $\lambda \geq 2$.

PROPOSITION 2. *On a* $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n = \{x_0\}$ *une seule valeur d'adhérence de la trajectoire* $\{x_n\}$, *différent des éléments* x_n , $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Nous avons $A_n \subset S(x_n,r_n)$ qui entraîne $\overline{A}_n \subset S(x_n,r_n)$, parce que la sphère $S(x_n,r_n)$ est un ensemble fermé.

Puisque l'espace X est compact nous avons $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n \neq \phi$ (toute suite infinie dans un espace compact a au moins un valeur d'adhérence [1]).

Si un element de la suite $\{x_n\}$, soit le x_λ , etait une valeur d'adhérence, il faudrait $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 > \lambda$ tel que $\forall n \geq n_0$, $d(x_n,x_\lambda) < \varepsilon$.

Mais $A_\lambda \subset S(x_\lambda,r_\lambda)$, donc, pour $\varepsilon < r_\lambda$ nous aboutissons à une absurdité.

Si nous avions deux valeurs d'adhérence $x_0 \neq x_0'$, alors il existera $\varepsilon > 0$ tel que $B(x_0,\varepsilon) \cap B(x_0',\varepsilon) = \emptyset$.

Donc, il existera une sous-suite $\{x_{n_k}\} \to x_o$, dés lors, après certain indice m_o, $x_{n_k} \in B(x_o,\varepsilon)$, $\forall k \geq m_o$, avec $r_{n_k} \to 0$ (puisque $r_n \to 0$).

Par conséquent, il existe un voisinage $\overline{B}(x_{n_\lambda},r_{n_\lambda}) \subset B(x_o,\varepsilon)$, ce qui entraine $S(x_{n_\lambda},r_{n_\lambda}) \subset B(x_o,\varepsilon)$.

Mais $A_{n_\lambda} = \{x_i : i > n_\lambda\} \subset S(x_{n_\lambda},r_{n_\lambda})$ (Proposition 1), alors la boule $B(x_o',\varepsilon)$ contient, seulement, au plus un nombre fini des éléments de la suite $\{x_n\}$. □

REMARQUES. (α) Le point x_o est une valeur d'adhérence pour tous $A_n = \{x_i : i > n\}$ sur les sphères $S(x_n,r_n)$, $n = 1,2,\ldots$.

(β) Le point initial x_1 peut croire comme "centre" de la trajectoire, parce que tous les éléments x_n , $n \geq 2$, se trouvent sur la sphère $S(x_1,r_1)$.

(γ) Si par le même point x_1 on considere, successivement, les suites $\{r_n\}$, $n \geq i$, $i = 1,2,\ldots$ se construisent des trajectoires sur les sphères $S(x_1,r_i)$, $i = 1,2,\ldots$ avec le même "centre". □

Dans le cas particulier $\alpha_r : X \to 2^X$, $\alpha_r(x) = S(x,r)$, la trajectoire $\{x_n\}$ se fait $x_{n+1} \in S(x_n,r)$, $n = 0,1,2,\ldots$.

Nous avons
$$d(x_o,x_2) < \max\{d(x_o,x_1),d(x_1,x_2)\} = r$$
$$d(x_o,x_3) = \max\{d(x_o,x_2),d(x_2,x_3)\} = r$$

car $d(x_o,x_1) = d(x_1,x_2) = r$ et $d(x_o,x_2) < d(x_2,x_3) = r$, et, en général, les éléments de la trajectoire $\{x_n\}$, avec un indice pair, se trouvent dans la boule ouverte $B(x_o,r)$, c'est-à-dire $x_{2k} \in B(x_o,r)$, $k = 1,2,\ldots$ tandis que, avec un indice impair, sur la sphère $S(x_o,r)$, c'est-à-dire $x_{2k+1} \in S(x_o,r)$, $k = 0,1,2,\ldots$.

Puisque les deux ensembles $B(x_o,r)$ et $S(x_o,r)$ sont fermés de l'espace compact X, les suites $\{x_{2k}\}$ et $\{x_{2k+1}\}$ ont des valeurs d'adhérence (au moins une) dans ces ensembles, respectivement.

Par conséquent, la trajectoire initial $\{x_n\}$ a au moins deux valeurs d'adhérence. En outre, puisque $d(x_1,x_3) < max\{d(x_1,x_2),d(x_2,x_3)\} = r$, car $d(x_1,x_2) = d(x_2,x_3) = r$, s'entraîne $x_3 \in B(x_1,r)$ et, en général, $x_{2k+1} \in B(x_1,r)$, $k = 1,2,\ldots$. Nous avons, aussi, $d(x_1,x_4) =$ $= max\{d(x_1,x_3),d(x_3,x_4)\} = r$, car $d(x_1,x_3) < d(x_3,x_4) = r$ et, en général, $x_{2k} \in S(x_1,r)$, $k = 1,2,\ldots$.

On trouve, d'une manière similaire, que $x_{2k} \in B(x_2,r)$, $k = 2,3,\ldots$ et $x_{2k+1} \in S(x_2,r)$, $k = 2,3,\ldots$.

Par conséquent, nous avons

$$x_{2k+1} \in S(x_o,r) \cap B(x_1 r) \ , \ x_{2k} \in B(x_o,r) \cap S(x_1,r) \qquad k = 1,2,\ldots$$

tandis que

$$B(x_o,r) = B(x_2,r) = \ldots = B(x_{2\lambda},r) = \ldots$$

$$B(x_1,r) = B(x_3,r) = \ldots = B(x_{2\lambda+1},r) = \ldots$$

et $B(x_o,r) \cap B(x_1,r) = \emptyset$.

Puisque $\overline{B}(x_o,r)$ (boule fermée) $= \overline{B}(x_1,r)$ et $B(x_o,r) \subset \overline{B}(x_o,r)$, $B(x_1,r) \subset \overline{B}(x_o,r)$, nous observons que, en ce cas, la trajectoire $\{x_n\}$ se trouve dans la boule fermée $\overline{B}(x_o,r)$, avec $x_{2k} \in B(x_o,r), x_{2k+1} \in B(x_1,r)$, $k = 1,2,\ldots$.

Si nous avons $r_1 > r_2 > \ldots > r_m$ (nombre fini), on peur definir la trajectoire $\{x_n\}$ comme il suit

$$x_2 \in S(x_1,r_1) \ , \ x_3 \in S(x_2,r_2) \ , \ \ldots \ , \ x_m \in S(x_{m-1},r_{m-1})$$

et $x_{m+p} \in S(x_{m+p-1},r_m)$, $p \geq 1$, $p \in \mathbb{N}$.

https://doi.org/10.1017/S0004972700021444 Published online by Cambridge University Press

On voit, donc, qu'après l'indice m la trajectoire $\{x_n\}$ se comporte comme une trajectoire de α_{r_m} système dynamique (comme si-dessus).

3. Magistraux Ensembles

L'espace compact X, évidemment, il s'écrira

$$X = \bigcup_{m \in J} \overline{B}_m(y_m, r_n) \; , \; r_n = const., \; J(r_n) \; \textit{indices finis}$$

i.e. pour $r_\lambda = const.$, soit $m = 1, 2, \ldots, k$, alors

$$X = \overline{B}_1(y_1, r_\lambda) \cup \ldots \cup \overline{B}_k(y_k, r_\lambda) \; , \; B_i \cap B_j = \emptyset \; , \; i \neq j \; .$$

Dès lors, si la trajectoire commence par $r_\lambda > r_{\lambda+1} > \ldots > r_n > \ldots \to 0$, $\lambda \geq 1$, c'est-à-dire $x_{n+1} \in S(x_n, r_n)$, $n = \lambda, \lambda+1, \ldots$ nous voyons que, si $x_\lambda \in \overline{B}_j(y_j, r_\lambda)$, $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, alors

$$\overline{B}(x_\lambda, r_\lambda) = \overline{B}_j(y_j, r_\lambda) \quad \text{qui entraine} \quad S(x_\lambda, r_\lambda) \subset \overline{B}_j(y_j, r_\lambda).$$

Or, la trajectoire reste (Proposition 2) dans la boule $\overline{B}_j$ de la r_λ-séparation de X, où il appartient le premier élément x_λ, $\lambda \geq 1$.

Par conséquent, chaque trajectoire x_n, après un nombre fini n_o, s'enferme dans une boule fermée de X, de rayon aussi petit que nous le voulons car $r_n \to 0$.

En outre, si nous considérions la r_λ-séparation de l'espace compact X, $X = B_1(y_1, r_\lambda) \cup \ldots \cup B_k(y_k, r_\lambda)$, alors si $x \in B_j(y_j, r_\lambda)$, nous aurions $S(x, r_\lambda) = S(y_j, r_\lambda)$.

Par conséquent, l'ensemble $M_{r_\lambda} = S(y_1, r_\lambda) \cup \ldots \cup S(y_k, r_\lambda) \subset X$ est l'ensemble qui contient toutes les trajectoires de α système dynamique qui ont un indice plus grand que $\lambda + 1$.

Dans le cas de la α_r système dynamique, puisque l'espace X est compact il y a une r-séparation $X = B_1(y_1,r) \cup \ldots \cup B_k(y_k,r)$.

Alors, si la trajectoire commence par certain voisinage $x_o \in B_j(y_j,r)$ on a $B(x_o,r) = B_j(y_j,r)$. Egalement, le x_1 appartient à une autre boule qui a une distance r par la boule $B_j(y_j,r)$ et, par conséquent, est coincidente avec la boule $B(x_1,r)$.

On observe, donc, en ce cas, que chaque trajectoire de α_r système dynamique balance entre les deux boules de la r-séparation de X qui ont une distance entre eux r et ils sont contenus dans la boule fermée $\overline{B}(x_o,r)$, où x_o est le point initial.

Comme pour tous $x \in B_j(y_j,r)$, $S(x,r) = S(y_j,r)$, l'ensemble $M_r = S(y_1,r) \cup \ldots \cup S(y_k,r)$ contient toutes les trajectoires de α_r système dynamique, moins peut être les points initiaux.

Note. On considère $P_c(X)$ la collection des tous les ensembles compacts de l'espace X muni de la distance de Hausdorff, [1].

On dit qu'un point $x \in X$ est Poisson stable si pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe une trajectoire $\{x_n\} \subset X$ telle que $x_1 = x$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} d(x_n,x) \leq \varepsilon$. [4]

On dénote tous les points qui sont Poisson stable par Π_α et le plus petit ensemble fermé de X qui contient les points limites des toutes les trajectoires du système dynamique $\alpha : X \to P_c(X)$ se dénote par M_α.

On sait que [4] s'il est une application continue telle que

$$\rho(\alpha(x), \alpha(y)) \leq d(x,y), \forall x,y \in X$$

alors, on a $\Pi_\alpha = M_\alpha$.

On observe que (§2) dans le système dynamique α (§1, Définition 1) nous n'avons pas de points Poisson stable, c'est-à-dire $\Pi_\alpha = \emptyset$.

Par conséquent, si on avait

$$\rho(S(x,\tau_\kappa),\ S(y,\tau_\lambda)) \leq d(x,y),\ \forall x,y \in X$$

$\kappa \neq \lambda$, $\kappa,\lambda = 1,2,\ldots,$ alors il n'existerait pas de points limites, c'est-à-dire $M_\alpha = \emptyset$ qui est absurde (§2, Proposition 2).

Mais, dans le cas particulier α_τ (§2) puisque $x_{2\kappa} \in B(x_o,\tau)$, ($x_o$ le point initial), on peut avoir $\underline{\lim}_{\kappa\to\infty} d(x_{2\kappa},x_o) \leq \varepsilon$, $\forall\varepsilon > 0$, c'est-à-dire, en général, $\Pi_\alpha \neq \emptyset$.

Donc, en ce cas, on peut avoir $\rho(S(x,\tau),\ S(y,\tau)) \leq d(x,y)$, $\forall x,y \in X$.

Références

[1] J. Dieudonné, *Eléments d'Analyse:Tome 1*, (Gauthier-Villars, Paris, 1969).

[2] V.Z. Feinberg, "Compact ultrametric spaces", *Soviet Math. Dokl.* 15 (1974), 324-329.

[3] A.M. Rubinov, "Dynamical system and preorders", *Soviet Math. Dokl.* 23 (1981), 80-82.

[4] A.Y. Zasiavskii, "Magistral sets of continuous transformations in compact metric spaces", *Siberian Math. J.* 23 (1982), 198-203.

Département de Mathematiques,
Université de Thessaloniki,
Thessaloniki,
Grèce.