QUELQUES CARACTÉRISATIONS DU RADICAL D'UN ANNEAU

G. Thierrin

(received July 7, 1967)

Le radical $R(A)$ d'un anneau A peut être caractérisé de plusieurs manières (Jacobson [1]). Rappelons seulement ici deux des caractérisations les plus importantes:

(1) $R(A)$ est l'intersection de tous les idéaux à droite (à gauche) modulaires maximaux de A.

(2) $R(A)$ est un idéal quasi-régulier contenant tout idéal à droite (à gauche) quasi-régulier.

L'objet de cet article est de donner quelques caractérisations du radical d'un anneau.

1. Un idéal à droite I d'un anneau A est dit <u>neumannien</u> si pour tout $a \in A$, il existe $b \in A$ tel que

$$aba \equiv a \quad (I)$$

Un anneau est régulier (dans le sens de von Neumann) si et seulement si l'idéal (o) est neumannien.

PROPOSITION 1. Tout idéal à droite modulaire maximal M d'un anneau A est neumannien.

<u>Preuve</u>. Soit $a \in A$. Si $a \in M$, alors $aaa \equiv a\ (M)$. Soit $a \notin M$. Si e est un élément unité à gauche modulo M, il existe b tel que $ab \equiv e\ (M)$. D'où

$$aba \equiv ea \equiv a\ (M)$$

PROPOSITION 2. L'intersection d'un nombre fini d'idéaux à droite neumanniens est un idéal à droite neumannien.

Canad. Math. Bull. vol. 10, no. 5, 1967

https://doi.org/10.4153/CMB-1967-062-8 Published online by Cambridge University Press

Preuve. Soient I_1 et I_2 deux idéaux à droite neumanniens de l'anneau A. Soit $a \in A$. Il existe b tel que $aba - a \in I_1$ et c tel que $d = (aba - a)c(aba - a) - (aba - a) \in I_2$. De plus $d \in I_1 \cap I_2$ et d peut s'écrire:

$$a(bacab - bac - cab + c - b)a + a$$

De là

$$a(-(bacab - bac - cab + c - b))a - a \in I_1 \cap I_2 .$$

Remarquons que les propositions 1 et 2 entrainent comme conséquence immédiate le résultat bien connu que tout anneau semi-simple artinien est régulier.

PROPOSITION 3. Soit I un idéal à droite neumannien de l'anneau A. Alors l'idéal à droite $I \cdot a = \{x \mid x \in A,\ ax \in I\}$ est aussi neumannien pour tout $a \in A$.

Preuve. Soit $x \in I \cdot a$, c'est-à-dire $ax \in I$. Il existe b tel que $axbax - ax \in I$. D'où $a(xbax - x) \in I$ et $xbax - x \in I \cdot a$.

PROPOSITION 4. Le radical R(A) d'un anneau A est l'intersection de tous les idéaux à droite neumanniens de A.

Preuve. Soit S l'intersection de tous les idéaux à droite neumanniens de A. De la proposition 1 suit immédiatement que $S \subseteq R(A)$. Supposons que $S \neq R(A)$ et soit $a \in R(A)$, $a \notin S$. Il existe alors un idéal à droite neumannien I tel que $a \notin I$. Soit $T = I \cap R(A)$. Il existe b tel que $aba - a \in I$ et $aba - a \in T$. Soit $e = ab$. Alors $e^2 - e \in T$. Mais $e \in R(A)$. Donc il existe x tel que $ex - x - e = o$. D'où

$$e^2x - ex - e^2 = o$$

$$(e^2 - e)x - e^2 = o$$

Comme $e^2 - e \in T$, on a $e^2 \in T$ et donc $e \in T$, $ea = aba \in T$. Mais $aba - a \in T$. Donc $a \in T \subseteq I$, contre $a \notin I$.

2. PROPOSITION 5. Un élément a de l'anneau A appartient au radical R(A) si et seulement si la relation $aba - a \in |c)$

entraine $a \in |c)$, $|c)$ désignant l'idéal à droite engendré par c.

Preuve. La condition est nécessaire. En effet, soient $a \in R(A)$ et $aba - a \in |c)$. Supposons que $a \notin |c)$ et posons $e = ab$. On a $e^2 - e \in |c)$. De plus $e \notin |c)$; en effet, si $e \in |c)$, alors $ea \in |c)$, $ea - a \in |c)$ et $a \in |c)$. D'autre part, $(1 - e)A = \{x - ex | x \in A\} \neq A$; en effet, si $(1 - e)A = A$, alors $eA = (e - e^2)A \subseteq |c)$ et $e^2 \in |c)$. Comme $e^2 - e \in |c)$, on a $a e \in |c)$, ce qui est contradictoire. L'idéal à droite modulaire $(1 - e)A$ est donc contenu dans un idéal à droite modulaire maximal M tel que $e \notin M$. De $e = ab$ suit alors $a \notin M$ et donc $a \notin R(A)$, contre l'hypothèse.

La condition est suffisante. Supposons que $a \notin R(A)$. Il existe alors un idéal à droite modulaire maximal M tel que $a \notin M$. Si e est un élément unité à gauche modulo M, il existe b tel que $ab - e \in M$. D'où $aba - ea \in M$ et, puisque $ea - a \in M$, $aba - a \in M$. Posons $c = aba - a$. On a $aba - a \in |c) \subseteq M$ et donc $a \in |c) \subseteq M$, ce qui est impossible.

COROLLAIRE. Soit A un anneau avec élément unité. Un élément $a \in R(A)$ si et seulement si pour tout $b \in A$, il existe $x \in A$ tel que $(aba - a)x = a$.

3. Une partie non vide H de l'anneau A est dite un co-idéal à droite s'il existe un idéal à droite I de A et un élément $a \in A$ tel que

$$H = I + a$$

Remarquons qu'un co-idéal à droite H est un idéal à droite si et seulement si $o \in H$.

Un co-idéal à droite H est dit régulier s'il existe $x \in A$ tel que $HxH \subseteq H$.

PROPOSITION 6. Un élément a de l'anneau A appartient au radical $R(A)$ si et seulement si tout co-idéal à droite régulier contenant a est un idéal à droite.

Preuve. La condition est nécessaire. Soit $a \in R(A)$ et soit H un co-idéal à droite régulier contenant a. Puisque $a \in H$, H est de la forme $H = I + a$, où I est un idéal à droite. De plus, il existe x tel que $HxH \subseteq H$, ce qui entraine en particulier $axa \in H = I + a$ et $axa - a \in I$. Pour montrer que H est un idéal à droite, il suffit de montrer que $a \in I$. Supposons que $a \notin I$ et posons $e = ax$. Alors $e^2 - e \in I$ et $e \notin I$. On a $(1 - e)A \neq A$, car si $(1 - e)A = A$, alors $eA = (e - e^2)A \subseteq I$; d'où $e^2 \in I$ et $e \in I$. Il suit de là que $(1 - e)A$ est contenu dans un idéal à droite modulaire maximal M tel que $e \notin M$. Donc $e = ax \notin R(A)$ et $a \notin R(A)$, contre l'hypothèse.

La condition est suffisante. Supposons que $a \notin R(A)$. Il existe alors un idéal à droite modulaire maximal M tel que $a \notin M$. Soit $H = M + a$ et soit e un élément unité à gauche modulo M. Il existe x tel que $ax \equiv e \ (M)$ et $axa \equiv ea \equiv a (M)$ Soient $r_1, r_2 \in M$. On a

$$(r_1 + a)x(r_2 + a) = r_1x(r_2 + a) + axr_2 + axa$$

L'élément $r_1x(r_2 + a) \in M$. Il en est de meme pour axr_2; en effet, de $ax \equiv e \ (M)$ suit $axr_2 \equiv er_2 \equiv r_2 \ (M)$. Quant à l'élément axa, il est de la forme $axa = r_3 + a$, où $r_3 \in M$. De ce qui précède, il résulte que $HxH \subseteq H$. Donc H est un co-idéal à droite régulier contenant a. Par conséquent, H est un idéal à droite et $a \in M$, ce qui est contradictoire.

4. Un élément $e \neq o$ de l'anneau A est dit <u>g-idempotent</u> à droite (globalement idempotent) s'il existe un idéal à droite I tel que

$$(1) \quad e \notin I$$

$$(2) \quad e^2 - e \in I$$

L'élément o est considéré également comme un élément g-idempotent.

PROPOSITION 7. Un élément $e \neq o$ est g-idempotent si et seulement si

$$eA \not\subseteq (1 - e)A$$

<u>Preuve.</u> La condition est nécessaire. Supposons que $ea \subseteq (1 - e)A$. Alors e^2 est de la forme $e^2 = x - ex$. Il existe un idéal à droite I tel que $e^2 - e \in I$ et $e \notin I$. De là suit $e^3 \in I$, $e^2 \in I$ et $e \in I$, ce qui est contradictoire.

La condition est suffisante. Posons $I = (1 - e)A$. Alors $e^2 - e \in I$ et $e \notin I$.

PROPOSITION 8. Un élément a de l'anneau A appartient au radical $R(A)$ si et seulement si la relation $eA \subseteq aA$, ou e est un élément g-idempotent, entraine $e = o$.

Preuve. La condition est nécessaire. Supposons que $e \neq o$. D'après la proposition 7, on a $eA \not\subseteq (1 - e)A$. Par conséquent, il existe un idéal à droite modulaire maximal M tel que $e \notin M$. D'où $a \notin M$ et $a \notin R(A)$, contre l'hypothèse.

La condition est suffisante. Supposons que $a \notin R(A)$. Il existe alors un idéal à droite modulaire maximal M tel que $a \notin M$. Si e est un élément unité à gauche modulo M, il existe x tel que $ax \equiv e\ (M)$. De là $axax \equiv eax \equiv ax\ (M)$ et $(ax)^2 - ax \in M$, $ax \notin M$. Donc ax est un élément g-idempotent. De $axA \subseteq aA$ suit alors $ax = o$, ce qui est contradictoire.

RÉFÉRENCES

1. N. Jacobson, Structure of rings, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. Vol. 37.

Université de Montréal

https://doi.org/10.4153/CMB-1967-062-8 Published online by Cambridge University Press