Compositio Mathematica **110:** 239–250, 1998.

Sur la répartition des valeurs de la fonction d'Euler

MICHEL BALAZARD[1] et GÉRALD TENENBAUM[2]
[1] *CNRS UMR 9936, Algorithmique arithmétique, Université Bordeaux 1, 351, cours de la Libération, 33405 Talence, France*
[2] *Institut Élie Cartan, Université de Nancy 1, BP 239, 54506 Vandœuvre Cedex, France*

Received: 7 August 1996; Accepted in final form: 29 January 1997

Abstract. Let $\Phi(x)$ denote the number of those integers n with $\varphi(n) \leqslant x$, where φ denotes the Euler function. Improving on a well-known estimate of Bateman (1972), we show that $\Phi(x) - Ax \ll R(x)$, where $A = \zeta(2)\zeta(3)/\zeta(6)$ and $R(x)$ is essentially of the size of the best available estimate for the remainder term in the prime number theorem.

Mathematics Subject Classifications (1991). 11N25, 11N37, 11L07.

Key words: Euler function, exponential sums, Vinogradov method, prime number theorem, shifted primes, Vaughan's identity.

1. Introduction

Il est bien connu que la fonction d'Euler $\varphi(n)$, égale au nombre des résidus inversibles modulo n est usuellement de taille comparable à n. On a

$$\{\mathrm{e}^{-\gamma} + o(1)\}n/\log_2 n \leqslant \varphi(n) \leqslant n \quad (n \to \infty),^\star$$

où γ désigne la constante d'Euler, et les valeurs de n pour lesquelles $\varphi(n)/n$ est petit sont rares. On peut exprimer rigoureusement ce phénomène, sous forme probabiliste, en énonçant que la fonction $\varphi(n)/n$ possède une loi de répartition limite: c'est le théorème de Schoenberg (1928) [10]. Cependant, il est naturel d'attendre que le rapport $\varphi(n)/n$ se comporte de manière plus régulière en moyenne, autrement dit que la fonction

$$\Phi(x) := \sum_{\varphi(n) \leqslant x} 1,$$

soit asymptotiquement très proche d'une fonction linéaire de x. Ce problème, abordé depuis plus de cinquante ans, possède une histoire féconde sur le plan de la méthodologie, où, comme pour le théorème des nombres premiers, les méthodes élémentaires et analytiques ont entretenu une passionnante émulation réciproque.

* Ici et dans la suite nous désignons par $\log_k$ la k-ième itérée de la fonction logarithme.

Erdös et Turán ont montré en 1945 (cf. [5]), comme un corollaire simple du théorème de Schoenberg, que

$$\Phi(x) \sim Ax \quad (x \to \infty),$$

pour une constante convenable A. Un argument abélien appliqué à la série de Dirichlet

$$F(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)^s} = \zeta(s)G(s) \quad (\sigma := \Re e s > 1), \tag{1}$$

avec

$$G(s) := \prod_p \Big(1 + \frac{1}{(p-1)^s} - \frac{1}{p^s}\Big) \quad (\sigma > 0),$$

fournit alors la valeur

$$A = G(1) = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}.$$

En 1972, Bateman [3] a entrepris l'étude du terme résiduel

$$\Delta(x) := \Phi(x) - Ax.$$

Il a d'abord montré que le problème peut être plongé dans la théorie des nombres premiers généralisés de Beurling: l'étude de $\Phi(x)$ se ramène naturellement à celle du nombre des entiers généralisés n'excédant pas x lorsqu'on choisit pour nombres premiers de Beurling les nombres premiers translatés $p-1$. Il s'agit de la version abélienne du problème originel de Beurling, qui envisageait plutôt de décrire la répartition des nombres premiers à partir de celle des entiers. Un théorème général de Diamond fournit alors, grâce à la majoration de Vinogradov–Korobov pour le terme d'erreur du théorème des nombres premiers,

$$\Delta(x) \ll x\mathrm{e}^{-(\log x)^c}, \tag{2}$$

pour toute constante $c < \frac{3}{8}$.

Cela étant, la forme particulière des nombres premiers généralisés intervenant ici permet une étude directe par voie analytique. La relation (1) fournit un prolongement analytique de $F(s)$ au demi-plan $\Re e s > 0$ dont la seule singularité est un pôle simple, de résidu A, en $s = 1$. Bateman établit facilement la majoration

$$G(s) \ll \exp\{50|\tau|^{1-\sigma} \log_2 |\tau|\} \tag{3}$$

pour $|\tau| \geqslant 8$, $\frac{1}{3} \leqslant \sigma \leqslant 1$.* Il en déduit, à l'aide de la formule de Perron, l'estimation plus fine

$$\Delta(x) \ll x\, \mathrm{e}^{-c\sqrt{\log x \log_2 x}} \tag{4}$$

pour tout $c < 1/\sqrt{2}$.

Malgré la simplicité de la preuve de Bateman, il a semblé difficile d'améliorer (4) pendant plus de deux décennies, et la recherche s'est orientée vers d'autres techniques. Ainsi Nicolas en 1984 [8], puis Smati en 1989 [11] ont exploré les possibilités offertes par une méthode élémentaire de pondération logarithmique, obtenant successivement les estimations $\Delta(x) \ll x/\log x$ et $\Delta(x) \ll x/(\log x)^2$. Balazard et Smati ont montré en 1990 [2] que l'on pouvait retrouver exactement la majoration (4) par une autre méthode élémentaire, reposant sur la décomposition canonique $n = ab$ où les facteurs premiers de a sont tous $\leqslant y$ alors que ceux de b sont $> y$.

Enfin, Balazard [1] a récemment établi que l'estimation (4) est valable pour toute constante $c < \sqrt{2}$. La méthode employée est également élémentaire et fondée sur une application du théorème de Diamond dans le problème abélien de Beurling. Il est cependant à noter que cette application est de nature différente de celle de Bateman et, en particulier, qu'elle est indépendante du théorème des nombres premiers.

Posons

$$\mathcal{L}(z) := \exp\left\{\frac{(\log z)^{3/5}}{(\log_2 z)^{1/5}}\right\} \quad (z \geqslant 3).$$

Nous nous proposons ici d'établir le résultat suivant.

THÉORÈME 1. *Il existe une constante positive* a *telle que*

$$\Delta(x) \ll x/\mathcal{L}(x)^a.$$

Notre approche est analytique et repose fondamentalement sur une amélioration de la majoration (3) de Bateman. Posant

$$\beta(T) = (\log T)^{-2/3}(\log_2 T)^{-1/3} \quad (T \geqslant 3),$$

nous obtenons dans cette direction l'estimation suivante.

THÉORÈME 2. *Il existe une constante* $\kappa > 0$ *telle que l'on ait*

$$G(s) \ll (\log T)^{4/3}(\log_2 T)^{2/3}$$

pour $\sigma \geqslant 1 - \kappa\beta(T)$, $T = |\tau| + 3$.

* Ici et dans la suite la lettre s désigne une variable complexe et nous définissons implicitement les variables réelles σ et τ par la relation $s = \sigma + i\tau$.

Remarque. On peut obtenir par la même méthode une majoration directement comparable à celle de Bateman: il existe des constantes C et D, avec $D > 0$ telles que, pour tout $\sigma_0 \in]\frac{1}{2}, 1[$, on ait

$$G(s) \ll (\log T)^{4/3}(\log_2 T)^{2/3} \exp\left\{CT^{1-\sigma-D\beta(T)}\right\}$$

uniformément pour $\sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, avec $T = |\tau| + 3$. Seule la forme apparaissant dans le théorème 2 nous sera utile dans ce travail.

Le Théorème 1 découle du Théorème 2 par intégration complexe à partir de la formule

$$\int_1^x \Phi(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \zeta(s)G(s)x^{s+1}\frac{\mathrm{d}s}{s(s+1)} \quad (b > 1), \tag{5}$$

et en utilisant la croissance de $\Phi(u)$ pour déduire une estimation de $\Phi(x)$ à partir de celle de (5). Nous omettons les détails, qui sont exposés, pour une situation générale très voisine, dans la démonstration du Théorème II.5.3 de [12].

Il est assez facile de voir que le problème de la majoration de $G(s)$ se ramène à celui de sommes d'exponentielles du type

$$S_N = \sum_{M<p\leqslant N} (p-1)^{i\tau},$$

avec $M < N \leqslant 2M$ et $|\tau|$ grand en fonction de M. Pour ce faire, nous avons recours à des arguments différents selon la taille de $|\tau|$. Lorsque

$$\log(|\tau|/M) \ll (\log M/\log_2 M)^{1/3}, \tag{6}$$

une technique d'intégration complexe permet de majorer S_N à partir des estimations de Vinogradov–Korobov pour la fonction zêta de Riemann. Cela est rendu possible par le fait que, pour ces valeurs de τ, l'approximation de $(p-1)^{i\tau}$ par $p^{i\tau}$ est, en un certain sens, pertinente. Lorsque (6) n'est pas réalisée, nous exploitons le fait que les comportements de $(p-1)^{i\tau}$ et $p^{i\tau}$ sont effectivement dissemblables en considérant S_N comme une somme d'exponentielles du type $\sum_p \mathrm{e}^{2\pi i f(p)}$ relative à une fonction régulière f suffisamment éloignée d'une fonction additive pour que la méthode de Vaughan soit applicable. Le problème est ainsi transformé en celui de majorer non trivialement des sommes d'exponentielles du type

$$R_{jk}(M) = \sum_{M<n\leqslant N} \left(\frac{kn-1}{jn-1}\right)^{i\tau},$$

pour certaines valeurs relatives de k, j, N et τ. Nous employons à cette fin un résultat de Karatsuba obtenu par la méthode de Vinogradov.

Notre résultat n'est sans doute pas optimal. Erdös a conjecturé que (2) est valable pour tout $c < 1$ et l'on pourrait effectivement obtenir un tel résultat si l'on disposait de majorations pour S_N comparables à celles que l'on peut déduire de l'hypothèse de Riemann pour la somme

$$Z_N = \sum_{M<n\leqslant N} n^{-i\tau},$$

portant sur des entiers ordinaires. Tous les résultats arithmétiques actuellement disponibles concernant les nombres premiers translatés concourent effectivement à l'idée que ces entiers se comportent statistiquement comme des entiers pairs ordinaires. Il reste que l'estimation de S_N est *a priori* plus délicate que celle de Z_N, et que les meilleures estimations connues sur cette dernière quantité ne permettraient pas, appliquées à S_N, d'améliorer par cette méthode notre majoration de $\Delta(x)$.

Dans la direction opposée, Pomerance [9] a considéré les grandes valeurs de

$$N(m) := |\{n \in \mathbb{N} : \varphi(n) = m\}|,$$

et ses résultats entraînent que $\Delta(x) = \Omega(x^{E+o(1)})$ avec $E = 1 - 1/(2\sqrt{\mathrm{e}})$. Il développe d'autre part un argument heuristique très convaincant en faveur de l'assertion

$$\Delta(x) = \Omega(x^{1-(1+o(1))\log_3 x/\log_2 x}).$$

2. Sommes d'exponentielles

Nous ferons un usage crucial du théorème suivant, dû à Karatsuba [7], que nous énonçons sous une forme légèrement moins générale que l'original.

LEMME 0 (Karatsuba). *Soient* $P \in \mathbb{Z}, Q \in \mathbb{Z}^+$, *et* $g \in \mathcal{C}^K([P, P+Q], \mathbb{R})$, *avec* $K \geqslant 3$. *On suppose qu'il existe des constantes* c_j $(1 \leqslant j \leqslant 5)$ *vérifiant* $0 < c_3 < c_2 < c_1 < 1, 0 < c_4 < c_5 < 1$, *telles que*

$$\frac{|g^{(K)}(u)|}{K!} \leqslant Q^{-c_1 K} \quad (P \leqslant u \leqslant P+Q), \tag{7}$$

$$Q^{-c_2\ell} \leqslant \frac{|g^{(\ell)}(u)|}{\ell!} \leqslant Q^{-c_3\ell} \quad (P \leqslant u \leqslant P+Q,\, c_4 K \leqslant \ell \leqslant c_5 K). \tag{8}$$

Alors il existe des constantes positives A *et* γ, *ne dépendant que des* c_j, *telles que*

$$\max_{Q_1\leqslant Q} \Big|\sum_{P<n\leqslant P+Q_1} e(g(n))\Big| \leqslant AQ^{1-\gamma/K^2} \quad (Q \geqslant 1). \tag{9}$$

https://doi.org/10.1023/A:1000285612395 Published online by Cambridge University Press

Nous utilisons ce résultat sous la forme suivante.

LEMME 1. *Soient* $P \in \mathbb{Z}$, $Q \in \mathbb{Z}^+$, *et* $g \in \mathcal{C}^\infty([P, P+Q], \mathbb{R})$ *tels que l'on ait pour des constantes convenables* $b_0,\ b_1,\ \delta$ *avec* $0 < b_0 < 1 < b_1, \delta > 0$,

$$D/(b_1 Q)^\ell \leqslant |g^{(\ell)}(u)|/\ell! \leqslant D/(b_0 Q)^\ell \quad (\ell \geqslant 1,\ P \leqslant u \leqslant P+Q),$$

où $D \geqslant Q^\delta$. *Alors il existe des constantes positives* $Q_0 = Q_0(b_0, b_1, \delta),\ A = A(\delta)$ *et* $c = c(\delta)$ *telles que*

$$\max_{Q_1 \leqslant Q} \Big| \sum_{P < n \leqslant P+Q_1} e(g(n)) \Big| \leqslant AQ \exp\Big(-c \frac{(\log Q)^3}{(\log D)^2}\Big) \quad (Q \geqslant Q_0). \tag{10}$$

Démonstration. C'est un corollaire immédiat du Lemme 0, aussi nous nous contentons de quelques indications. Soit θ un paramètre positif assez petit. Définissons $K = K(\theta, Q, D)$ comme l'unique entier tel que $Q^{2\theta^2(K-1)} \leqslant D < Q^{2\theta^2 K}$. Les hypothèses effectuées impliquent

$$D/(b_0 Q)^K \leqslant Q^{-(1-4\theta^2)K},$$

$$D/(b_0 Q)^\ell \leqslant Q^{-(1-5\theta)\ell}, \quad (\tfrac{1}{2}\theta K \leqslant \ell \leqslant \theta K),$$

$$D/(b_1 Q)^\ell \geqslant Q^{-(1-\theta)\ell}$$

dès que $Q \geqslant Q_1(\theta)$ et $4\theta^2 \leqslant \delta$, de sorte que $D \geqslant Q^{4\theta^2}$ et $K \geqslant 3$. Le Lemme 0 nous permet alors de majorer le membre de gauche de (10) par $\ll_\theta Q^{1-\gamma/K^2}$ avec $\gamma = \gamma(\theta)$. Cela fournit bien l'inégalité annoncée.

On pose

$$S_M(\tau) := \sup_{M < N \leqslant 2M} \Big| \sum_{M < n \leqslant N} \Lambda(n)(n-1)^{-i\tau} \Big|.$$

LEMME 2. *Il existe une constante* $c_0 > 0$ *telle que l'on ait*

$$S_M(\tau) \ll M^{1-c_0\beta(T)} + \frac{M}{T} + M\mathcal{L}(M)^{-c_0}, \tag{11}$$

pour $M \geqslant 3$ *et* $T := |\tau| + 3 \leqslant M^{1+c_0\beta(M)} = M \exp\Big\{c_0 \Big(\frac{\log M}{\log_2 M}\Big)^{1/3}\Big\}$.

Démonstration. En utilisant la région sans zéro de Vinogradov–Korobov

$$\{s : |\tau| \geqslant 1,\ \sigma \geqslant 1 - c_1\beta(T)\},$$

https://doi.org/10.1023/A:1000285612395 Published online by Cambridge University Press

et la majoration $\zeta'(s)/\zeta(s) \ll \log T$ valable dans le même domaine, on établit par la méthode standard d'intégration complexe (cf. par exemple la démonstration du Lemme III.5.9.1 de [12]) l'existence d'une constante absolue positive c_2 telle que l'on ait, pour $z \geqslant 3, \tau \in \mathbb{R}, \log T \leqslant (\log z)^{3/2}/(\log_2 z)^2$,

$$V_\tau(z) := \sum_{n \leqslant z} \Lambda(n) n^{-i\tau} \ll z^{1-c_2\beta(T)} + \frac{z}{T} + z\mathcal{L}(z)^{-c_2}. \tag{12}$$

Maintenant, il existe un $N \in]M, 2M]$ tel que

$$\begin{aligned} S_M(\tau) &= \int_M^N (1 - 1/z)^{-i\tau} \, \mathrm{d}V_\tau(z) \\ &\ll (T + M)\Big(M^{-c_2\beta(T)} + \frac{1}{T} + \mathcal{L}(M)^{-c_2}\Big), \end{aligned}$$

où l'estimation résulte d'une simple intégration par parties. Lorsque τ et M satisfont à la condition de l'énoncé avec, par exemple, $c_0 = \frac{1}{2}c_2$, on a $T \ll M^{1+(c_2/2)\beta(T)}$. Cela implique bien le résultat annoncé.

LEMME 3. *Il existe une constante absolue positive c_3 telle que l'on ait*

$$S_M(\tau) \ll M(\log M)^{7/2} \left\{ \mathrm{e}^{-c_3(\log M)^3/(\log T)^2} + \left(\frac{T}{M}\right)^{-1/2} \right\}, \tag{13}$$

pour $T = |\tau| + 3 \geqslant M \geqslant 2$.

Démonstration. Il suffit d'obtenir la majoration indiquée pour

$$S_N^*(\tau) := \sum_{n \leqslant N} \Lambda(n)(n-1)^{-i\tau} \quad (M < N \leqslant 2M, T \geqslant M).$$

L'identité de Vaughan sous la forme donnée dans [4] — formule (24.6) — permet d'écrire

$$S_N^*(\tau) \ll M^{1/3} + (\log M)\Delta_N^*(\tau) + (\log M)^3 M^{1/2} \Delta_N^{**}(\tau)^{1/2} \tag{14}$$

avec

$$R_t(w) := \sum_{w < n \leqslant N/t} (tn - 1)^{-i\tau}, \qquad \Delta_N^*(\tau) := \sum_{t \leqslant N^{2/3}} \max_w |R_t(w)|,$$

$$R_{jk}(Q) := \sum_{\substack{Q < n \leqslant 2Q \\ n \leqslant N/\max(j,k)}} \left(\frac{kn-1}{jn-1}\right)^{i\tau},$$

$$\Delta_N^{**}(\tau) := \max_{\substack{M^{1/3} \leqslant Q \leqslant N/M^{1/3} \\ M^{1/3} \leqslant j \leqslant N/Q}} \sum_{M^{1/3} \leqslant k \leqslant N/Q} |R_{jk}(Q)|.$$

On majore $R_t(w)$ en scindant la somme en intervalles

$$\max(w, N/t2^{h+1}) < n \leqslant N/t2^h \quad (h \geqslant 0)$$

et en appliquant le Lemme 1 à chaque sous-somme pour la fonction

$$g_t(u) := -(\tau/2\pi)\log(tu-1).$$

On a $|g_t^{(\ell)}(u)|/\ell! = |\tau|/(2\pi\ell|u-1/t|^\ell)$, de sorte qu'il existe des constantes absolues $b_0,\ b_1$ telles que l'on ait pour $U < u \leqslant 2U, \ell \geqslant 1$,

$$T/(b_1U)^\ell \leqslant |g_t^{(\ell)}(u)|/\ell! \leqslant T/(b_0U)^\ell.$$

Les valeurs de U que nous considérons n'excèdent pas $N/2 \leqslant M \leqslant T$, donc les hypothèses du Lemme 1 sont remplies avec $\delta = 1$. Il suit

$$\max_w |R_t(w)| \ll \frac{M}{t}\exp\left(-c_4\frac{(\log M)^3}{(\log T)^2}\right) \quad (1 \leqslant t \leqslant N^{2/3}),$$

d'où, pour $M < N \leqslant 2M, T \geqslant M$,

$$\Delta_N^*(\tau) \ll M(\log M)\exp\left(-c_4\frac{(\log M)^3}{(\log T)^2}\right). \tag{15}$$

On procède similairement pour estimer $R_{jk}(Q)$. Posant

$$g_{jk}(u) := \frac{\tau}{2\pi}\log\left(\frac{ju-1}{ku-1}\right),$$

on a, sous les conditions $Q < u \leqslant 2Q, \min(j,k,\ell) \geqslant 1$, et pour des constantes convenables $b_0^*,\ b_1^*$,

$$\frac{T}{Q}\left|\frac{1}{j}-\frac{1}{k}\right|(b_0^*Q)^{-\ell} \leqslant \frac{|g_{jk}^{(\ell)}(u)|}{\ell!} \leqslant \frac{T}{Q}\left|\frac{1}{j}-\frac{1}{k}\right|(b_1^*Q)^{-\ell}. \tag{16}$$

Pour $\max(j,k) \leqslant N/Q$ et $|j-k| > N^{1/4}$, on a $|1/j - 1/k| \geqslant Q^2/N^{7/4}$. La condition du Lemme 1 relative à δ est donc certainement remplie dès que l'on a $TQ/N^{7/4} \geqslant Q^\delta$, c'est-à-dire $T \geqslant N^{7/4}/Q^{1-\delta}$. Elle est en particulier satisfaite avec $\delta = \frac{1}{2}$ dès que $T > 4M^{19/12}$. On obtient dans ce cas

$$R_{jk}(Q) \ll Q\exp\left(-c_5\frac{(\log M)^3}{(\log T)^2}\right)$$

https://doi.org/10.1023/A:1000285612395 Published online by Cambridge University Press

dès que $M^{1/3} \leqslant Q \leqslant N/M^{1/3}, |j-k| > N^{1/4}$. Lorsque l'on somme ces quantités pour $k \leqslant N/Q$, la contribution des indices k tels que $|j-k| \leqslant N^{1/4}$ est $\ll QN^{1/4} \ll M^{11/12}$. On obtient donc l'existence d'une constante positive c_5 telle que, pour $T > 4M^{19/12}$,

$$\Delta_N^{**}(\tau) \ll M \exp\left(-c_5 \frac{(\log M)^3}{(\log T)^2}\right). \tag{17}$$

Lorsque $M \leqslant T \leqslant 4M^{19/12}$, nous estimons $R_{jk}(Q)$ grâce à la méthode de van der Corput. Nous pouvons employer, par exemple, le théorème 2.9 de [6] qui énonce que l'on a

$$\sup_{Q<Q_1\leqslant 2Q} \left| \sum_{Q<n\leqslant Q_1} e(f(n)) \right| \ll F^{1/6}Q^{1/2} + Q/F$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^3[Q, 2Q]$ satisfaisant à

$$|f^{(\ell)}(u)| \asymp F/Q^\ell \quad (\ell = 1, 2, 3;\ Q \leqslant u \leqslant 2Q).$$

La relation (16) montre que les conditions sont satisfaites pour $f = g_{jk}$ lorsque $j \neq k$ avec

$$F = F_{jk} := \frac{T}{Q}\left|\frac{1}{j} - \frac{1}{k}\right| \leqslant \frac{T}{M^{2/3}} \ll M^{11/12},$$

pour $T \leqslant 4M^{19/12}, \min(j, k, Q) \geqslant M^{1/3}$. On a donc, sous la condition supplémentaire $\max(j, k) \leqslant 2M/Q$,

$$R_{jk}(Q) \ll M^{11/72}Q^{1/2} + \frac{M^2}{T|k-j|} \quad (j \neq k),$$

d'où, pour $M \leqslant T \leqslant 4M^{19/12}$,

$$\Delta_N^{**}(\tau) \ll M^{71/72} + \frac{M^2}{T} \log M. \tag{18}$$

On obtient l'estimation (13) en insérant (15), (17) et (18) dans (14).

3. Démonstration du Théorème 2

Pour tout $\sigma_0 > \frac{1}{2}$ et uniformément pour $\sigma \geqslant \sigma_0$ on a

$$G(s) \ll \mathrm{e}^{H(s)}$$

https://doi.org/10.1023/A:1000285612395 Published online by Cambridge University Press

avec

$$H(s) := \sum_p \frac{1}{(p-1)^s} - \frac{1}{p^s}.$$

La majoration $|(p-1)^{-s} - p^{-s}| \leqslant |s|(p-1)^{-\sigma-1}$ nous permet, pour tout choix de la constante positive κ de l'énoncé, de tronquer la somme à $T_1 := T^{1+2\kappa\beta(T)}$. Il découle en effet d'une majoration élémentaire que

$$\sum_{p>T_1} \frac{|s|}{(p-1)^{\sigma+1}} \ll T/T_1^{1-\kappa\beta(T)} \ll 1.$$

Posons ensuite

$$T_0 = \exp\left(2/\kappa\beta(T)\right).$$

Nous estimons la contribution à $H(s)$ des nombres premiers p n'excédant pas T_0 en employant l'inégalité triviale $|(p-1)^{-s} - p^{-s}| \leqslant 2(p-1)^{-\sigma}$. Il suit

$$\begin{aligned}\left|\sum_{p\leqslant T_0} \frac{1}{(p-1)^s} - \frac{1}{p^s}\right| &\leqslant 2\sum_{p\leqslant T_0} \frac{1+O(\beta(T)\log p)}{p-1} \\ &\leqslant \tfrac{4}{3}\log_2 T + \tfrac{2}{3}\log_3 T + O(1).\end{aligned}$$

Nous avons ainsi réduit la preuve du théorème à montrer que, pour un choix convenable de $\kappa > 0$, on a

$$\sum_{T_0<p\leqslant T_1} \frac{1}{(p-1)^s} - \frac{1}{p^s} \ll 1. \tag{19}$$

La contribution à (19) des quantités p^{-s} peut être estimée à partir de la variante suivante de (12): on a pour une constante positive convenable κ_0

$$\sum_{n\leqslant z} \frac{\Lambda(n)}{n^{1+i\tau}} = -\frac{\zeta'(1+i\tau)}{\zeta(1+i\tau)} + O(z^{-\kappa_0\beta(T)}\log z) \quad (\mathrm{e}^{1/\beta(T)} \leqslant z \leqslant T^2).$$

Cette formule résulte de la majoration de Vinogradov–Korobov

$$\zeta'(s)/\zeta(s) \ll 1/\beta(T) \quad (\sigma \geqslant 1 - c_1\beta(T)),$$

par application d'une formule de Perron (cf., par exemple, [12], théorème II.2.3) pour $U(z) := \sum_{n\leqslant z} \Lambda(n)\log(z/n)/n^{1+i\tau}$ avec un terme d'erreur $\ll (\log z)^2 z^{-c_1\beta(T)/2}$. Ensuite, on considère $U(z+y) - U(z)$, et l'on utilise

https://doi.org/10.1023/A:1000285612395 Published online by Cambridge University Press

le théorème de Brun–Titchmarsh pour majorer dans cette expression la contribution des entiers n de $]z, z+y]$. On choisit finalement le paramètre y tel que $\log(1+y/z) = z^{-c_1\beta(T)/4}(\log z)$. Nous omettons les détails. Une simple intégration par parties fournit alors, lorsque $\kappa \leqslant \frac{1}{2}\kappa_0$,

$$\begin{aligned}\sum_{T_0<p\leqslant T_1} \frac{1}{p^s} &= \int_{T_0}^{T_1} \frac{z^{1-\sigma}}{\log z}\,\mathrm{d}O(z^{-\kappa_0\beta(T)}\log z)\\ &\ll 1 + \left(|1-\sigma| + \frac{1}{\log T_0}\right)\int_{T_0}^{T_1} z^{-1-\kappa_0\beta(T)/2}\,\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

et donc finalement

$$\sum_{T_0<p\leqslant T_1} \frac{1}{p^s} \ll 1. \tag{20}$$

Il reste à majorer

$$W := \sum_{T_0<p\leqslant T_1} (p-1)^{-s}.$$

Nous introduisons $T_2 := T^{1-c_0\beta(T)/2}$, désignons par W_1 la sous-somme de W correspondant au domaine de sommation $T_0 < p \leqslant T_2$, et par W_2 la sous-somme complémentaire.

On traite W_1 à l'aide du Lemme 3. On introduit un découpage dyadique de bornes $M_r = \min(2^r T_0, T_2)$ $(0 \leqslant r \leqslant R)$ avec $R \ll \log T$. On peut alors écrire grâce à (13)

$$\begin{aligned}|W_1| &\leqslant \sum_{0\leqslant r\leqslant R} M_r^{\kappa\beta(T)-1} S_{M_r}(\tau)\\ &\ll (\log T)^{7/2} \sum_{0\leqslant r\leqslant R} 2^{\kappa r\beta(T)}\{\mathrm{e}^{-c_3(\log M_r)^3/(\log T)^2} + T^{-c_0\beta(T)/4}\}.\end{aligned}$$

En observant que

$$\frac{(\log M_r)^3}{(\log T)^2} \geqslant \frac{r^3}{8(\log T)^2} + \frac{\log_2 T}{\kappa^3},$$

il suit

$$\begin{aligned}|W_1| &\ll (\log T)^{9/2}\left\{\frac{\sup_{0\leqslant r\leqslant R}\left(2^{\kappa r\beta(T)}\,\mathrm{e}^{-c_3 r^3/8(\log T)^2}\right)}{(\log T)^{c_3/\kappa^3}} + T^{(\kappa-c_0/4)\beta(T)}\right\}\\ &\ll 1,\end{aligned}$$

dès que $\kappa \leqslant \min\left((\frac{2}{9}c_3)^{1/3}, \frac{1}{5}c_0\right)$, ce que l'on peut pleinement supposer.

https://doi.org/10.1023/A:1000285612395 Published online by Cambridge University Press

On procède similairement pour estimer W_2 mais en employant maintenant le Lemme 2. Le choix de T_2 garantit que les conditions d'application sont remplies. Posant

$$N_j := \min(2^j T_2, T_1) \quad (0 \leqslant j \leqslant J)$$

avec $J \ll \log T$, on déduit de (11) que

$$|W_2| \leqslant \sum_{0 \leqslant j \leqslant J} N_j^{\kappa\beta(T)-1} S_{N_j}(\tau)$$

$$\ll \sum_{0 \leqslant j \leqslant J} N_j^{\kappa\beta(T)} \left(N_j^{-c_0\beta(T)} + \frac{1}{T} + \mathcal{L}(N_j)^{-c_0} \right).$$

On a $\mathcal{L}(N)^{c_0} \gg N^{2\kappa\beta(T)}$ pour $N \leqslant T^2$. La majoration précédente est donc

$$\ll (\log T)\{T_2^{(\kappa - c_0)\beta(T)} + T^{-1/2} + T_2^{-\kappa\beta(T)}\} \ll 1,$$

en supposant de plus $\kappa < c_0$.

Nous avons ainsi établi que $W \ll 1$. Compte tenu de (20), cela prouve (19) et achève la démonstration du Théorème 2.

Bibliographie

1. Balazard, M.: Une remarque sur la fonction d'Euler, prépublication.
2. Balazard, M. and Smati, H.: Elementary proof of a theorem of Bateman, in: B. Berndt, H. Diamond, H. Halberstam and A. Hildebrand (eds.), *Analytic Number Theory* (Urbana, 1989), Prog. Math. 85, 41–46 (Birkhäuser).
3. Bateman, P.: The distribution of values of the Euler function, *Acta Arith.* 21 (1972), 329–345.
4. Davenport, H.: *Multiplicative Number Theory* (2nde édition), Springer, New York, Heidelberg, Berlin (1980).
5. Erdös, P.: Some remarks on Euler's φ function and some other related problems, *Bull. Amer. Math. Soc.* 51 (1945), 540–544.
6. Graham, S.W., and Kolesnik, G.: *Van der Corput's method of exponential sums*, London Math. Soc. Lecture Notes 126, Cambridge University Press (1991).
7. Karatsuba, A.A.: Estimates for trigonometric sums by Vinogradov's method and some applications, *Proc. Steklov Inst. Math.* 112 (1971), 251–265.
8. Nicolas, J.-L.: Distribution des valeurs de la fonction d'Euler, *L'Enseignement Mathématique* 30 (1984), 331–338.
9. Pomerance, P.: Popular values of Euler's function, *Mathematika* 27 (1980), 84–89.
10. Schoenberg, I.J.: Über die asymptotische Verteilung reeller Zahlen mod 1, *Math. Z.* 28 (1928), 171–200.
11. Smati, A.: Répartition des valeurs de la fonction d'Euler, *L'Enseignement Mathématique* 35 (1989), 61–76.
12. Tenenbaum, G.: *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours spécialisés, no. 1, Société Mathématique de France (1995), xv + 457 pp.