Nagoya Math. J., **233** (2019), 87–154
DOI 10.1017/nmj.2017.30

# REPRÉSENTATIONS DE RÉDUCTION UNIPOTENTE POUR $\mathrm{SO}(2n+1)$, II : ENDOSCOPIE

J.-L. WALDSPURGER

**Abstract.** For the groups $\mathrm{SO}(2n+1, F)$, where $F$ is a $p$-adic field, we consider the tempered irreducible representations of unipotent reduction. Lusztig has constructed and parametrized these representations. We prove that they satisfy the expected endoscopic identities which determine the parametrization.

## CONTENTS



Received February 3, 2017. Revised August 12, 2017. Accepted August 13, 2017.
2010 Mathematics subject classification. 22E50, 11F70.

## Introduction

Cet article est la suite de [11], dont on utilise les définitions et notations. Ces dernières sont rappelées dans l'index à la fin de l'article. Le corps de base $F$ est local, non archimédien et de caractéristique nulle. On note $p$ sa caractéristique résiduelle. Un entier $n \geqslant 1$ est fixé pour tout l'article. On suppose que $p \geqslant 6n+4$. On s'intéresse aux groupes $G_{\text{iso}}$ et $G_{\text{an}}$ définis en [11] 1.1. Le groupe $G_{\text{iso}}$ est le groupe spécial orthogonal d'un espace $V_{\text{iso}}$ de dimension $2n+1$ sur $F$ muni d'une forme quadratique $Q_{\text{iso}}$ et $G_{\text{an}}$ est le groupe spécial orthogonal d'un espace $V_{\text{an}}$ de dimension $2n+1$ sur $F$ muni d'une forme quadratique $Q_{\text{an}}$. Le groupe $G_{\text{iso}}$ est déployé et $G_{\text{an}}$ en est la forme intérieure non déployée. Pour un indice $\sharp = \text{iso}$ ou an, on note $\text{Irr}_{\text{tunip},\sharp}$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations admissibles irréductibles de $G_\sharp(F)$ qui sont tempérées et de réduction unipotente, cf. [11] 1.3 pour la définition de cette propriété. On note $\text{Irr}_{\text{tunip}}$ la réunion disjointe de $\text{Irr}_{\text{tunip,iso}}$ et $\text{Irr}_{\text{tunip,an}}$. Pour une partition symplectique $\lambda$ de $2n$, fixons un homomorphisme algébrique $\rho_\lambda : \text{SL}(2;\mathbb{C}) \to \text{Sp}(2n;\mathbb{C})$ paramétré par $\lambda$, cf. [11] 1.3. On note $Z(\lambda)$ le commutant dans $\text{Sp}(2n;\mathbb{C})$ de l'image de $\rho_\lambda$. Soit $s \in Z(\lambda)$ un élément semi-simple dont toutes les valeurs propres sont de module 1. On note $Z(s,\lambda)$ le commutant de $s$ dans $Z(\lambda)$, $\mathbf{Z}(\lambda, s)$ son groupe de composantes connexes et $\mathbf{Z}(\lambda, s)^\vee$ le groupe des caractères de $\mathbf{Z}(\lambda, s)$. On a vu en [11] 1.3 que l'on pouvait présenter la paramétrisation de Langlands sous la forme suivante : $\text{Irr}_{\text{tunip}}$ est paramétré par l'ensemble des classes de conjugaison (en un sens facile à préciser) de triplets $(\lambda, s, \epsilon)$, où $\lambda$ et $s$ sont comme ci-dessus et $\epsilon \in \mathbf{Z}(s,\lambda)^\vee$. Le paramétrage a été obtenu par différents auteurs : Lusztig, cf. [4] ; Moeglin, cf. [5] théorème 5.2 ; Arthur, cf. [1] théorème 2.2.1. Nous utilisons les constructions de Lusztig. Le but de l'article est de prouver que les représentations qu'il a construites vérifient les propriétés relatives à l'endoscopie qui caractérisent la paramétrisation. Pour un triplet $(\lambda, s, \epsilon)$ comme ci-dessus, on note $\pi(\lambda, s, \epsilon)$ la représentation qui lui est associée par Lusztig.

Soit $(\lambda, s)$ comme ci-dessus et soit $h \in Z(\lambda, s)$ un élément tel que $h^2 = 1$. Pour $\epsilon \in \mathbf{Z}(\lambda, s)^\vee$ on note $\epsilon(h)$ la valeur de $\epsilon$ en l'image de $h$ dans $Z(\lambda, s)$. On définit la représentation virtuelle

$$\Pi(\lambda, s, h) = \sum_{\epsilon \in \mathbf{Z}(\lambda, s)^\vee} \pi(\lambda, s, \epsilon)\epsilon(h).$$

Pour $\sharp = \text{iso}$ ou an, on note $\Pi_\sharp(\lambda, s, h)$ la sous-somme où l'on se restreint aux $\epsilon$ tels que $\pi(\lambda, s, \epsilon)$ soit une représentation de $G_\sharp(F)$.

https://doi.org/10.1017/nmj.2017.30 Published online by Cambridge University Press

Soit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ deux entiers tels que $n_1 + n_2 = n$. Un tel couple détermine une donnée endoscopique de $G_{\rm iso}$ ou $G_{\rm an}$ dont le groupe endoscopique est $G_{n_1,{\rm iso}} \times G_{n_2,{\rm iso}}$ (ce sont les groupes similaires à $G_{\rm iso}$ quand on remplace $n$ par $n_1$ ou $n_2$). Soit $(\lambda_1, s_1, h_1)$ et $(\lambda_2, s_2, h_2)$ des triplets similaires au triplet $(\lambda, s, h)$ ci-dessus, relatifs aux entiers $n_1$ et $n_2$. Supposons que $h_1 = 1$ et $h_2 = 1$. Comme on l'a prouvé dans [6], les caractères de $\Pi_{\rm iso}(\lambda_1, s_1, 1)$ et $\Pi_{\rm iso}(\lambda_2, s_2, 1)$ sont des distributions stables et, en identifiant les représentations à leurs caractères, on définit le transfert à $G_{\rm iso}(F)$ ou $G_{\rm an}(F)$ de $\Pi_{\rm iso}(\lambda_1, s_1, 1) \otimes \Pi_{\rm iso}(\lambda_2, s_2, 1)$. À l'aide des triplets $(\lambda_1, s_1, h_1)$ et $(\lambda_2, s_2, h_2)$ et du couple $(n_1, n_2)$, on construit naturellement un triplet $(\lambda, s, h)$ pour l'entier $n$, cf. [11] 2.1. En particulier, $h$ a pour valeurs propres 1 avec la multiplicité $2n_1$ et $-1$ avec la multiplicité $2n_2$.

THÉORÈME. *Le transfert de* $\Pi_{\rm iso}(\lambda_1, s_1, 1) \otimes \Pi_{\rm iso}(\lambda_2, s_2, 1)$ *à* $G_{\rm iso}(F)$ *est* $\Pi_{\rm iso}(\lambda, s, h)$. *Le transfert de* $\Pi_{\rm iso}(\lambda_1, s_1, 1) \otimes \Pi_{\rm iso}(\lambda_2, s_2, 1)$ *à* $G_{\rm an}(F)$ *est* $-\Pi_{\rm an}(\lambda, s, h)$.

On a énoncé ce résultat en [11] 2.1 et on va maintenant le prouver.

La preuve reprend étroitement celle de [6]. On se ramène par induction au cas où les représentations considérées sont elliptiques au sens d'Arthur. D'après le résultat de [2], il suffit alors de comparer les valeurs de leurs caractères sur des éléments elliptiques fortement réguliers de nos différents groupes. Ce sont les intégrales orbitales de leurs pseudocoefficients. On a déjà calculé ces derniers dans [6]. À l'aide des travaux de Lusztig et de l'involution que l'on a définie dans [6] (on a repris sa définition dans [11]), on obtient une expression des caractères en termes d'intégrales orbitales de fonctions de Green. Ces fonctions ont été définies sous leur forme la plus générale par Lusztig. Elle vivent sur des groupes finis mais on en déduit par un procédé usuel d'inflation des fonctions sur nos groupes $G_{\rm iso}(F)$ et $G_{\rm an}(F)$ (ou leurs groupes endoscopiques). Il reste à démontrer un résultat de transfert entre fonctions de Green. Ces fonctions étant à support topologiquement unipotent, on descend facilement aux algèbres de Lie. On se rappelle que, d'après Harish-Chandra, la transformée de Fourier d'une intégrale orbitale est une distribution localement intégrable et peut donc être considérée comme une fonction. Selon une idée qui remonte à Springer, on a exprimé dans [9] puis dans [6] les intégrales orbitales des fonctions de Green comme des combinaisons linéaires explicites de transformées de Fourier de certaines intégrales orbitales relatives à des éléments semi-simples réguliers. Puisque le transfert endoscopique commute à des constantes

https://doi.org/10.1017/nmj.2017.30 Published online by Cambridge University Press

près aux transformations de Fourier, on est ramené à transférer de telles intégrales orbitales, ce qui est à peu près tautologique.

Comme on l'a dit, ce schéma de démonstration se trouve déjà dans [6] où on s'était limité à prouver des résultats de stabilité. Pour obtenir les égalités endoscopiques, il suffit de poursuivre les calculs un peu plus loin. Ce n'est sans doute pas très passionnant, mais les calculs sont suffisamment compliqués pour mériter, à ce qu'il nous semble, d'être présentés en détail. Ces calculs sont en particulier compliqués par la présence de constantes terrifiques. À l'évidence, les normalisations de nos divers objets que nous avons choisies ne sont pas les bonnes. Il nous a toutefois semblé préférable de les conserver, car cela permet de rendre compréhensibles les références à nos articles antérieurs.

## §1. Les résultats

### 1.1 Calcul des caractères sur les éléments compacts

Pour tout groupe réductif défini sur $F$ ou $\mathbb{F}_q$ (qui est le corps résiduel de $F$), noté $H$, on note par la lettre gothique $\mathfrak{h}$ son algèbre de Lie. Fixons un caractère continu $\psi_F : F \to \mathbb{C}^\times$ de conducteur l'idéal maximal $\varpi\mathfrak{o}$. Pour $\sharp =$ iso ou an, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\sharp(F)$ s'identifie naturellement à un sous-espace de l'algèbre des endomorphismes de $V_\sharp$. Ainsi, trace$(XY)$ est bien définie pour $X, Y \in \mathfrak{g}_\sharp(F)$. On introduit une transformation de Fourier $f \mapsto \hat{f}$ dans $C_c^\infty(\mathfrak{g}_\sharp(F))$ par la formule usuelle

$$\hat{f}(X) = \int_{\mathfrak{g}_\sharp(F)} f(Y)\psi_F(\mathrm{trace}(XY))\, dY.$$

Le mesure $dY$ est la mesure de Haar sur $\mathfrak{g}_\sharp(F)$ qui est autoduale, c'est-à-dire que $\hat{\hat{f}}(X) = f(-X)$ pour tous $f$, $X$. L'exponentielle exp est bien définie dans un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}_\sharp(F)$, à valeurs dans un voisinage de 1 dans $G_\sharp(F)$. On munit $G_\sharp(F)$ de la mesure de Haar telle que le jacobien de l'exponentielle vaille 1 au point 0.

Soit $x \in G_\sharp(F)$ un élément fortement régulier et compact (cf. [11] 1.2). Soit $f \in C_c^\infty(G_\sharp(F))$. On définit l'intégrale orbitale

$$J(x, f) = D^{G_\sharp}(x)^{1/2} \int_{G_\sharp(F)} f(g^{-1}xg)\, dg,$$

où $D^{G_\sharp}$ est le module de Weyl usuel. Si maintenant $f = (f_{\mathrm{iso}}, f_{\mathrm{an}}) \in C_c^\infty(G_{\mathrm{iso}}(F)) \oplus C_c^\infty(G_{\mathrm{an}}(F))$ et si $x \in G_\sharp(F)$ est comme ci-dessus, on pose $J(x, f) = J(x, f_\sharp)$.

On a défini un espace $\mathcal{R}^{\text{par}}$ en [11] 1.5. On définit une application linéaire $\Psi : \mathcal{R}^{\text{par}} \to C_c^\infty(G_{\text{iso}}(F)) \oplus C_c^\infty(G_{\text{an}}(F))$ de la façon suivante. Par linéarité, il suffit de fixer $\sharp = \text{iso}$ ou an et $(n', n'') \in D_\sharp(n)$, et de la définir sur la composante $C'_{n'} \otimes C''_{n'',\sharp}$ de $\mathcal{R}^{\text{par}}$. Soit donc $\varphi \in C'_{n'} \otimes C''_{n'',\sharp}$. C'est une fonction sur $\mathbf{SO}(2n'+1; \mathbb{F}_q) \times \mathbf{O}(2n'')_\sharp(\mathbb{F}_q)$. On introduit le sous-groupe $K^\pm_{n',n''}$ de $G_\sharp(F)$, cf. [11] 1.2. Le groupe précédent s'identifie à $K^\pm_{n',n''}/K^u_{n',n''}$. Alors $\varphi$ apparaît comme une fonction sur $K^\pm_{n',n''}$, invariante par $K^u_{n',n''}$. On la prolonge par 0 hors de $K^\pm_{n',n''}$ et on la multiplie par $\text{mes}(K^\pm_{n',n''})^{-1}$. On obtient un élément de $C_c^\infty(G_\sharp(F))$ qui est l'une des composantes de $\Psi(\varphi)$. L'autre composante est nulle.

Soit $\sharp = \text{iso}$ ou an et soit $\pi \in \text{Irr}_{\text{unip},\sharp}$, cf. [11] 1.3. Pour $f \in C_c^\infty(G_\sharp(F))$, on définit l'opérateur $\pi(f)$. Il est de rang fini et possède une trace. D'après Harish-Chandra, il existe une fonction localement intégrable $\Theta_\pi$ sur $G_\sharp(F)$, localement constante sur les éléments fortement réguliers, de sorte que

$$\text{trace}(\pi(f)) = \int_{G_\sharp(F)} \Theta_\pi(x) f(x)\, dx$$

pour tout $f$. Posons $f_\pi = \Psi \circ \text{proj}_{\text{cusp}} \circ \text{Res}(\pi)$, avec les notations de [11] 1.5.

Proposition. *Soit $x \in G_\sharp(F)$ un élément fortement régulier et compact. On a l'égalité*

$$D^{G_\sharp}(x)^{1/2}\overline{\Theta_\pi(x)} = J(x, f_\pi).$$

Cela résulte de [6] théorème 1.9 et lemme 4.2.

### 1.2 Un résultat de transfert de fonctions

Pour $\sharp = \text{iso}$ ou an et pour $f \in C_c^\infty(G_\sharp(F))$, on dit que $f$ est cuspidale si et seulement si ses intégrales orbitales sont nulles en tout point fortement régulier et non elliptique de $G_\sharp(F)$. On note $C^\infty_{\text{cusp}}(G_\sharp(F))$ l'espace des fonctions cuspidales. L'application $\Psi : \mathcal{R}^{\text{par}} \to C_c^\infty(G_{\text{iso}}(F)) \oplus C_c^\infty(G_{\text{an}}(F))$ introduite en 1.1 envoie l'espace $\mathcal{R}^{\text{par}}_{\text{cusp}}$ de [11] 1.5 dans $C^\infty_{\text{cusp}}(G_{\text{iso}}(F)) \oplus C^\infty_{\text{cusp}}(G_{\text{an}}(F))$. Pour un élément $f$ de ce dernier espace, on note $f_{\text{iso}}$ et $f_{\text{an}}$ ses deux composantes.

Il nous faut adapter les définitions usuelles de l'endoscopie à notre cas où nous travaillons simultanément avec nos deux groupes $G_{\text{iso}}$ et $G_{\text{an}}$. Pour $x, y \in G_{\text{iso}}(F) \cup G_{\text{an}}(F)$, on dit que $x$ et $y$ sont conjugués si et seulement si il existe $\sharp = \text{iso}$ ou an tels que $x, y \in G_\sharp(F)$ et $x$ et $y$ sont conjugués par un élément de $G_\sharp(F)$. Il y a une correspondance bijective entre les classes de

https://doi.org/10.1017/nmj.2017.30 Published online by Cambridge University Press

conjugaison stable dans $G_{\rm iso}(F)$ formées d'éléments elliptiques et fortement réguliers et les classes de conjugaison stable dans $G_{\rm an}(F)$ formées d'éléments elliptiques et fortement réguliers. Appelons classe totale de conjugaison stable (formée d'éléments elliptiques et fortement réguliers) la réunion d'une telle classe dans $G_{\rm iso}(F)$ et de celle qui lui correspond dans $G_{\rm an}(F)$. On sait d'ailleurs que chacune de ces classes contient le même nombre de classes de conjugaison (ordinaires).

Soit $f \in C^{\infty}_{\rm cusp}(G_{\rm iso}(F)) \oplus C^{\infty}_{\rm cusp}(G_{\rm an}(F))$ et soit $x \in G_{\rm iso}(F)$ un élément fortement régulier et elliptique. On définit l'intégrale orbitale stable $S(x, f)$ par

$$S(x, f) = \sum_{y} J(y, f),$$

où $y$ parcourt les éléments de la classe totale de conjugaison stable de $x$, à conjugaison près. On note $z(x)$ le nombre de termes $y$ intervenant dans cette somme. Pour $\sharp = $ iso ou an et $f \in C^{\infty}_{c}(G_{\sharp}(F))$, on définit $S(x, f)$ en considérant que $f$ est un élément de $C^{\infty}_{\rm cusp}(G_{\rm iso}(F)) \oplus C^{\infty}_{\rm cusp}(G_{\rm an}(F))$ dont la composante sur $G_{\sharp}(F)$ est la fonction donnée et dont l'autre composante est nulle.

Soit $(n_1, n_2) \in D(n)$. Ce couple détermine (à conjugaison près) un élément $h \in \mathrm{Sp}(2n; \mathbb{C})$ tel que $h^2 = 1$ et une donnée endoscopique de $G_{\rm iso}$ ou $G_{\rm an}$ dont le groupe endoscopique est $G_{n_1,{\rm iso}} \times G_{n_2,{\rm iso}}$, cf. [11] 2.1. On note $\Delta_h$ le facteur de transfert relatif à cette donnée (il est uniquement déterminé).

*Remarque.* Comme on l'a expliqué en [11] 2.1, quand on travaille comme nous le faisons avec nos deux groupes $G_{\rm iso}$ et $G_{\rm an}$, les données endoscopiques associées à $(n_1, n_2)$ et $(n_2, n_1)$ ne sont pas équivalentes si $n_1 \neq n_2$ (les facteurs de transfert $\Delta_h$ et $\Delta_{-h}$ sont égaux sur $G_{\rm iso}(F)$ mais opposés sur $G_{\rm an}(F)$). Dans le cas $n_1 = n_2$, la permutation des deux facteurs du groupe endoscopique n'est pas un automorphisme de la donnée.

Soit $f \in C^{\infty}_{\rm cusp}(G_{\rm iso}(F)) \oplus C^{\infty}_{\rm cusp}(G_{\rm an}(F))$ et $(x_1, x_2) \in G_{n_1,{\rm iso}}(F) \times G_{n_2,{\rm iso}}(F)$ un couple $n$-régulier formé d'éléments elliptiques. On entend par $n$-régulier le fait que la classe de conjugaison stable de $(x_1, x_2)$ correspond par endoscopie à une classe de conjugaison stable fortement régulière dans $G_{\rm iso}(F)$. On pose

$$J^{\rm endo}(x_1, x_2, f) = \sum_{x} \Delta_h((x_1, x_2), x) J(x, f),$$

où $x$ parcourt les éléments de $G_{\rm iso}(F) \cup G_{\rm an}(F)$ fortement réguliers et elliptiques, à conjugaison près. Bien sûr, on peut se limiter aux éléments dans la classe totale de conjugaison stable qui correspond à $(x_1, x_2)$ (en dehors, les facteurs de transfert sont nuls). La somme est donc finie. Dans le cas où $n_1 = n$ et $n_2 = 0$, où $(x_1, x_2)$ se réduit à un seul élément $x = x_1$, on retrouve la définition précédente : $J^{\text{endo}}(x_1, x_2, f) = S(x, f)$. Comme ci-dessus, pour $\sharp = \text{iso}$ ou an et $f \in C_c^\infty(G_\sharp(F))$, on définit $J^{\text{endo}}(x_1, x_2, f)$ en considérant $f$ comme un élément de $C^\infty_{\text{cusp}}(G_{\text{iso}}(F)) \oplus C^\infty_{\text{cusp}}(G_{\text{an}}(F))$ dont une composante est nulle.

Soit $(n_1, n_2) \in D(n)$, $f \in C^\infty_{\text{cusp}}(G_{\text{iso}}(F)) \oplus C^\infty_{\text{cusp}}(G_{\text{an}}(F))$, $f_1 \in C^\infty_{\text{cusp}}(G_{n_1,\text{iso}}(F)) \oplus C^\infty_{\text{cusp}}(G_{n_1,\text{an}}(F))$ et $f_2 \in C^\infty_{\text{cusp}}(G_{n_2,\text{iso}}(F)) \oplus C^\infty_{\text{cusp}}(G_{n_2,\text{an}}(F))$. On dit que $f_1 \otimes f_2$ est un transfert de $f$ relatif à $(n_1, n_2)$ (ou à $h$) si et seulement si on a l'égalité

$$S(x_1, f_1)S(x_2, f_2) = J^{\text{endo}}(x_1, x_2, f)$$

pour tout couple $n$-régulier $(x_1, x_2) \in G_{n_1,\text{iso}}(F) \times G_{n_2,\text{iso}}(F)$ formé de deux éléments elliptiques.

Soit $(r', r'', N', N'') \in \Gamma$, cf. [11] 1.8, et soit $\varphi' \in \mathbb{C}[\hat{W}_{N'}]_{\text{cusp}}$ et $\varphi'' \in \mathbb{C}[\hat{W}_{N''}]_{\text{cusp}}$. Pour un nombre réel $x$, on note $[x]$ sa partie entière. Posons

$$\begin{aligned}
r_1' &= \sup\left(\left[\frac{r'+r''}{2}\right], -\left[\frac{r'+r''}{2}\right] - 1\right), \qquad r_1'' = \left|\left[\frac{r'+r''+1}{2}\right]\right|,\\
r_2' &= \sup\left(\left[\frac{r'-r''}{2}\right], -\left[\frac{r'-r''}{2}\right] - 1\right), \qquad r_2'' = \left|\left[\frac{r'-r''+1}{2}\right]\right|,\\
n_1 &= r_1'^2 + r_1' + r_1''^2 + N', \qquad n_2 = r_2'^2 + r_2' + r_2''^2 + N'',\\
&(N_1', N_1'') = (N', 0), \qquad (N_2', N_2'') = (N'', 0),\\
\gamma_1 &= (r_1', r_1'', N_1', N_1''), \qquad \gamma_2 = (r_2', r_2'', N_2', N_2'').
\end{aligned}$$

D'après la relation (2) du paragraphe 4 ci-dessous, la définition de $n_1$ et $n_2$ peut se récrire

$$\begin{aligned}
n_1 &= \frac{(r'+r'')^2 + (r'+r''+1)^2 - 1}{4} + N',\\
n_2 &= \frac{(r'-r'')^2 + (r'-r''+1)^2 - 1}{4} + N''.
\end{aligned}$$

On vérifie que $(n_1, n_2) \in D(n)$, que $\gamma_1 \in \Gamma_{n_1}$ et $\gamma_2 \in \Gamma_{n_2}$. L'élément $\varphi'$ peut être considéré comme un élément de $\mathcal{R}_{\text{cusp}}(\gamma_1)$ et l'élément $\varphi''$ peut être considéré comme un élément de $\mathcal{R}_{\text{cusp}}(\gamma_2)$. Posons $\varphi = \varphi' \otimes \varphi''$. C'est un élément de $\mathcal{R}_{\mathrm{cusp}}(\gamma)$. Posons

$$f=\Psi\circ k\circ\rho\iota(\varphi),\qquad f_1=\Psi\circ k\circ\rho\iota(\varphi'),\qquad f_2=\Psi\circ k\circ\rho\iota(\varphi''),$$

avec les notations de [11] 1.9, 1.10. Bien sûr, dans les deux dernières définitions, ce sont les applications $\Psi$, $k$ et $\rho\iota$ relatives à $n_1$ et $n_2$ qui interviennent.

PROPOSITION.

(i) *Sous les hypothèses ci-dessus,* $f_1\otimes f_2$ *est un transfert de* $f$ *relatif à* $(n_1,n_2)$.

(ii) *Pour* $(\bar{n}_1,\bar{n}_2)\in D(n)$ *différent de* $(n_1,n_2)$, *le transfert de* $f$ *relatif à* $(\bar{n}_1,\bar{n}_2)$ *est nul.*

Nous démontrerons cette proposition dans la section 3. Nous l'admettons pour la suite de la présente section.

### 1.3 Transfert de représentations elliptiques

Soit $(n_1,n_2)\in D(n)$, auquel on associe un élément $h\in \mathrm{Sp}(2n;\mathbb{C})$ tel que $h^2=1$. Soit $(\lambda_1,s_1;1)\in\mathfrak{St}_{n_1,\mathrm{unip,disc}}$ et $(\lambda_2,s_2,1)\in\mathfrak{St}_{n_2,\mathrm{unip,disc}}$, cf. [11] 2.4. Comme en [11] 2.1, on associe à ces données un triplet $(\lambda,s,h)\in\mathfrak{Endo}_{\mathrm{unip-disc}}$.

THÉORÈME. *On a les égalités*

$$\textit{transfert}_{h,\mathrm{iso}}(\Pi_{\mathrm{iso}}(\lambda_1,s_1,1)\otimes\Pi_{\mathrm{iso}}(\lambda_2,s_2,1))=\Pi_{\mathrm{iso}}(\lambda,s,h)\,;$$
$$\textit{transfert}_{h,\mathrm{an}}(\Pi_{\mathrm{iso}}(\lambda_1,s_1,1)\otimes\Pi_{\mathrm{iso}}(\lambda_2,s_2,1))=-\Pi_{\mathrm{an}}(\lambda,s,h).$$

*Preuve.* Notons respectivement $\Theta_{1,\mathrm{iso}}$, $\Theta_{1,\mathrm{an}}$, $\Theta_{2,\mathrm{iso}}$, $\Theta_{2,\mathrm{an}}$, $\Theta_{\mathrm{iso}}$ et $\Theta_{\mathrm{an}}$ les caractères-fonctions des représentations $\Pi_{\mathrm{iso}}(\lambda_1,s_1,1)$, $\Pi_{\mathrm{an}}(\lambda_1,s_1,1)$, $\Pi_{\mathrm{iso}}(\lambda_2,s_2,1)$, $\Pi_{\mathrm{an}}(\lambda_2,s_2,1)$, $\Pi_{\mathrm{iso}}(\lambda,s,h)$ et $\Pi_{\mathrm{an}}(\lambda,s,h)$. Les égalités à démontrer se traduisent par des égalités entre ces caractères. Toutes les représentations intervenant sont elliptiques. D'après [2] théorème 6.2, il suffit donc de démontrer ces égalités restreintes aux éléments elliptiques des différents groupes. Écrivons ces égalités. Posons $\mathrm{sgn}_{\mathrm{iso}}=1$ et $\mathrm{sgn}_{\mathrm{an}}=-1$. Pour $\sharp=\mathrm{iso}$ ou an et pour $x\in G_\sharp(F)$ fortement régulier et elliptique, on doit avoir

$$\begin{aligned}&D^{G_\sharp}(x)^{1/2}\Theta_\sharp(x)\\&\quad=\mathrm{sgn}_\sharp\sum_{x_1,x_2}D^{G_{n_1,\mathrm{iso}}}(x_1)^{1/2}D^{G_{n_2,\mathrm{iso}}}(x_2)^{1/2}\Delta_h((x_1,x_2),x)\\&\qquad\times\Theta_{1,\mathrm{iso}}(x_1)\Theta_{2,\mathrm{iso}}(x_2),\end{aligned}\tag{1}$$

où $x_1$, respectivement $x_2$, parcourt les éléments fortement réguliers et elliptiques de $G_{n_1,\mathrm{iso}}(F)$, respectivement $G_{n_2,\mathrm{iso}}(F)$, à conjugaison stable près. Ici encore, on peut se limiter aux couples $(x_1, x_2)$ correspondant par endoscopie à la classe de conjugaison stable de $x$. La somme est finie.

Posons $f_1 = \Psi \circ \mathrm{proj}_{\mathrm{cusp}} \circ \mathrm{Res} \circ D \circ \Pi(\lambda_1, s_1, 1)$, $f_2 = \Psi \circ \mathrm{proj}_{\mathrm{cusp}} \circ \mathrm{Res} \circ D \circ \Pi(\lambda_2, s_2, 1)$, $f = \Psi \circ \mathrm{proj}_{\mathrm{cusp}} \circ \mathrm{Res} \circ D \circ \Pi(\lambda, s, h)$. Pour $\sharp = \mathrm{iso}$ ou an, on a l'égalité $\mathrm{proj}_{\mathrm{cusp}} \circ \mathrm{Res} \circ D \circ \Pi_\sharp(\lambda, s, h) = (-1)^n \,\mathrm{sgn}_\sharp\, \mathrm{proj}_{\mathrm{cusp}} \circ \mathrm{Res} \circ \Pi_\sharp$ $(\lambda, s, h)$, cf. [6] corollaire 5.7. D'après la proposition 1.1, on a donc l'égalité

$$D^{G_\sharp}(x)^{1/2}\overline{\Theta_\sharp(x)} = (-1)^n \,\mathrm{sgn}_\sharp\, J(x, f).$$

On a des égalités analogues pour $\Theta_1(x_1)$ et $\Theta_2(x_2)$. Ces dernières égalités entraînent

(2) soit $j = 1, 2$, $\sharp_j = \mathrm{iso}$ ou an, $x_j \in G_{n_j,\mathrm{iso}}(F)$ et $y_j \in G_{n_j,\sharp_j}(F)$ ; supposons que $x_j$ et $y_j$ sont fortement réguliers et elliptiques et que leurs classes de conjugaison stable sont égales si $\sharp_j = \mathrm{iso}$ ou se correspondent si $\sharp_j = \mathrm{an}$, alors $J(x_j, f_j) = J(y_j, f_j)$.

Cela traduit le fait que $\Theta_{j,\mathrm{iso}}$ est stable et que $-\Theta_{j,\mathrm{an}}$ en est son transfert, cf. [11] 2.1.

Parce que les facteurs de transfert valent $\pm 1$ et sont donc à valeurs réelles, l'égalité (1) se récrit

$$J(x, f) = \sum_{x_1,x_2} \Delta_h((x_1, x_2), x) J(x_1, f_1) J(x_2, f_2) \tag{3}$$

pour tout $x \in G_{\mathrm{iso}}(F) \cup G_{\mathrm{an}}(F)$ fortement régulier et elliptique.

La propriété de base de l'endoscopie est que les intégrales orbitales $J(x, f)$ sont déterminées par les intégrales endoscopiques $J^{\mathrm{endo}}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, f)$ quand $(\bar{n}_1, \bar{n}_2)$ décrit $D(n)$ et $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in G_{\bar{n}_1,\mathrm{iso}}(F) \times G_{\bar{n}_2,\mathrm{iso}}(F)$ décrit les couples $n$-réguliers formés d'éléments elliptiques. Donc (3) équivaut, pour toutes données $(\bar{n}_1, \bar{n}_2)$ et $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ comme ci-dessus, à ce que l'on ait l'égalité

$$\begin{aligned} J^{\mathrm{endo}}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, f) &= \sum_{x} \Delta_{\bar{h}}((\bar{x}_1, \bar{x}_2), x) J(x, f) \\ &= \sum_{x} \Delta_{\bar{h}}((\bar{x}_1, \bar{x}_2), x) \sum_{x_1,x_2} \Delta_h((x_1, x_2), x) J(x_1, f_1) J(x_2, f_2), \end{aligned}$$

où l'on somme sur les éléments $x \in G_{\mathrm{iso}}(F) \cup G_{\mathrm{an}}(F)$ fortement réguliers et elliptiques modulo conjugaison. On a noté $\bar{h}$ l'élément de $\mathrm{Sp}(2n; \mathbb{C})$ tel que

$\bar{h}^2 = 1$ associé à $(\bar{n}_1, \bar{n}_2)$. On récrit l'égalité ci-dessus :

$$J^{\text{endo}}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, f) = \sum_{x_1, x_2} J(x_1, f_1)J(x_2, f_2) \sum_{x} \Delta_{\bar{h}}((\bar{x}_1, \bar{x}_2), x)\Delta_h((x_1, x_2), x).$$

La somme intérieure en $x$ est nulle sauf si $(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = (n_1, n_2)$ et, à conjugaison stable près, $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (x_1, x_2)$. Si ces conditions sont vérifiées, la somme vaut le nombre de $x$, pris à conjugaison près, qui interviennent dans la somme. C'est le nombre $z(x)$ défini en 1.2 pour un quelconque de ces $x$. Or on vérifie facilement l'égalité $z(x) = z(\bar{x}_1)z(\bar{x}_2)$. Dans le cas où $(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = (n_1, n_2)$, on obtient donc

$$J^{\text{endo}}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, f) = z(\bar{x}_1)z(\bar{x}_2)J(\bar{x}_1, f_1)J(\bar{x}_2, f_2).$$

Mais la propriété (2) entraîne que, pour $j = 1, 2$, $z(\bar{x}_j)J(\bar{x}_j, f_j) = S(\bar{x}_j, f_j)$. L'égalité ci-dessus se transforme en

$$J^{\text{endo}}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, f) = S(\bar{x}_1, f_1)S(\bar{x}_2, f_2).$$

Autrement dit, $f_1 \otimes f_2$ est un transfert de $f$. Résumons : l'égalité (3) équivaut aux assertions

(4)(a) $f_1 \otimes f_2$ est un transfert de $f$ relatif à $(n_1, n_2)$ ;

(4)(b) pour $(\bar{n}_1, \bar{n}_2) \in D(n)$ différent de $(n_1, n_2)$, le transfert de $f$ relatif à $(\bar{n}_1, \bar{n}_2)$ est nul.

Calculons $f$. D'après le lemme 2.3 de [11] et parce que $\mathcal{F}^{\text{par}}$ est une involution, on a $\text{proj}_{\text{cusp}} = \mathcal{F}^{\text{par}} \circ \text{proj}_{\text{cusp}} \circ \mathfrak{F}^{\text{par}}$. Par définition de $\mathfrak{F}^{\text{par}}$, on a aussi $\mathfrak{F}^{\text{par}} \circ \text{Res} \circ D = \text{Res} \circ D \circ \mathcal{F}$. D'où

$$\begin{aligned} f &= \Psi \circ \mathcal{F}^{\text{par}} \circ \text{proj}_{\text{cusp}} \circ \text{Res} \circ D \circ \mathcal{F} \circ \Pi(\lambda, s, h) \\ &= \Psi \circ \mathcal{F}^{\text{par}} \circ \text{proj}_{\text{cusp}} \circ \text{Res} \circ D \circ \Pi(\lambda, h, s). \end{aligned}$$

La décomposition de $\lambda$ associée à $h$ est $\lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2$. Il résulte des définitions que

$$\Pi(\lambda, h, s) = \sum_{\epsilon_1, \epsilon_2} \pi(\lambda_1, \epsilon_1, \lambda_2, \epsilon_2)\epsilon_1(s_1)\epsilon_2(s_2),$$

où $(\epsilon_1, \epsilon_2)$ parcourt $\{\pm 1\}^{\text{Jord}_{\text{bp}}(\lambda_1)} \times \{\pm 1\}^{\text{Jord}_{\text{bp}}(\lambda_2)}$ et les termes $\epsilon_1(s_1)$ et $\epsilon_2(s_2)$ sont définis en interprétant $\epsilon_1$ et $\epsilon_2$ comme des éléments de $\mathbf{Z}(\lambda_1, 1)^\vee$ et $\mathbf{Z}(\lambda_2, 1)^\vee$, cf. [11] 1.3. La proposition [11] 1.11 calcule $\text{Res} \circ D$ $(\pi(\lambda_1, \epsilon_1, \lambda_2, \epsilon_2))$.

*Changement de notations.* Dans la formule de cette proposition figure un isomorphisme $j$ entre deux espaces, l'un d'eux étant l'espace $\mathcal{R}$. Distinguer ces deux espaces nous a été utile dans la deuxième section de [11]. Maintenant, cela ne nous sert plus. Pour simplifier, on identifie par $j$ les deux espaces en question et on fait disparaître $j$ de la notation.

On obtient

$$\mathrm{Res} \circ D \circ \Pi(\lambda, h, s) = \sum_{\epsilon_1,\epsilon_2} \epsilon_1(s_1)\epsilon_2(s_2)\mathrm{Rep} \circ \rho\iota(\boldsymbol{\rho}_{\lambda_1,\epsilon_1} \otimes \boldsymbol{\rho}_{\lambda_2,\epsilon_2}).$$

Les applications Rep, $k$, $\mathcal{F}^{\mathrm{par}}$ et $\rho\iota$ commutent aux projections cuspidales. De plus, $\mathcal{F}^{\mathrm{par}} \circ \mathrm{Rep} = k$. Il en résulte que

$$f = \sum_{\epsilon_1,\epsilon_2} \epsilon_1(s_1)\epsilon_2(s_2)\Psi \circ k \circ \rho\iota \circ \mathrm{proj}_{\mathrm{cusp}}(\boldsymbol{\rho}_{\lambda_1,\epsilon_1} \otimes \boldsymbol{\rho}_{\lambda_2,\epsilon_2}).$$

Un calcul analogue s'applique à $f_1$ et $f_2$. On a cette fois $\mathcal{F}(\lambda_j, s_j, 1) = (\lambda_j, 1, s_j)$ pour $j = 1, 2$ et la décomposition de $\lambda_j$ associée à 1 est $\lambda_j = \lambda_j \cup \emptyset$. Autrement dit, les secondes composantes de la formule ci-dessus disparaissent. On obtient

$$f_1 = \sum_{\epsilon_1} \epsilon_1(s_1)\Psi \circ k \circ \rho\iota \circ \mathrm{proj}_{\mathrm{cusp}}(\boldsymbol{\rho}_{\lambda_1,\epsilon_1}),$$
$$f_2 = \sum_{\epsilon_2} \epsilon_2(s_2)\Psi \circ k \circ \rho\iota \circ \mathrm{proj}_{\mathrm{cusp}}(\boldsymbol{\rho}_{\lambda_2,\epsilon_2}),$$

où les représentations $\boldsymbol{\rho}_{\lambda_1,\epsilon_2}$ et $\boldsymbol{\rho}_{\lambda_2,\epsilon_2}$ sont assimilées à des produits tensoriels dont le second terme est trivial. Pour $(\epsilon_1, \epsilon_2) \in \{\pm 1\}^{\mathrm{Jord_{bp}}(\lambda_1)} \times \{\pm 1\}^{\mathrm{Jord_{bp}}(\lambda_2)}$, posons

$$\begin{aligned} f_{\epsilon_1,\epsilon_2} &= \Psi \circ k \circ \mathrm{proj}_{\mathrm{cusp}}(\boldsymbol{\rho}_{\lambda_1,\epsilon_1} \otimes \boldsymbol{\rho}_{\lambda_2,\epsilon_2}),\\ f_{\epsilon_1} &= \Psi \circ k \circ \mathrm{proj}_{\mathrm{cusp}}(\boldsymbol{\rho}_{\lambda_1,\epsilon_1}),\\ f_{\epsilon_2} &= \Psi \circ k \circ \mathrm{proj}_{\mathrm{cusp}}(\boldsymbol{\rho}_{\lambda_2,\epsilon_2}). \end{aligned}$$

Les propriétés (4) résultent des propriétés suivantes, pour tout $(\epsilon_1, \epsilon_2)$ :

(5)(a) $f_{\epsilon_1} \otimes f_{\epsilon_2}$ est un transfert de $f_{\epsilon_1,\epsilon_2}$ relatif à $(n_1, n_2)$ ;

(5)(b) pour $(\bar{n}_1, \bar{n}_2) \in D(n)$ différent de $(n_1, n_2)$, le transfert de $f_{\epsilon_1,\epsilon_2}$ relatif à $(\bar{n}_1, \bar{n}_2)$ est nul.

Fixons $\epsilon_1$ et $\epsilon_2$. À $(\lambda_1, \epsilon_1)$ et $(\lambda_2, \epsilon_2)$ sont associés des couples $(k_1, N_1)$ et $(k_2, N_2)$, puis un triplet $\gamma = (r', r'', N_1, N_2) \in \Gamma$, cf. [11] 1.11. L'élément

$\mathrm{proj}_{\mathrm{cusp}}(\boldsymbol{\rho}_{\lambda_1,\epsilon_1} \otimes \boldsymbol{\rho}_{\lambda_2,\epsilon_2})$ appartient à $\mathcal{R}_{\mathrm{cusp}}(\gamma)$. De même, en remplaçant $n$ par $n_j$ pour $j=1,2$, à $(\lambda_j,\epsilon_j)$ sont associés des termes $\gamma_1$ et $\gamma_2$ analogues. Ainsi qu'on l'a remarqué ci-dessus, il faut considérer que $(\lambda_j,\epsilon_j)$ est le premier couple d'un quadruplet $(\lambda_j^+,\epsilon_j^+,\lambda_j^-,\epsilon_j^-)$ dont le second couple est trivial. On voit que $\gamma_j$ est de la forme $(r'_j,r''_j,N_j,0)$. L'élément $\mathrm{proj}_{\mathrm{cusp}}(\boldsymbol{\rho}_{\lambda_j,\epsilon_j})$ appartient à $\mathcal{R}_{\mathrm{cusp}}(\gamma_j)$. En considérant la recette de [11] 1.11 qui calcule $r',r'',r'_1,r''_1,r'_2,r''_2$ en fonction de $k_1$ et $k_2$, on constate que $r'_1,r''_1,r'_2,r''_2$ se déduisent de $(r',r'')$ par les formules de 1.2. On est alors dans la situation de ce paragraphe, les fonctions $\varphi'$ et $\varphi''$ étant respectivement $\mathrm{proj}_{\mathrm{cusp}}(\boldsymbol{\rho}_{\lambda_1,\epsilon_1})$ et $\mathrm{proj}_{\mathrm{cusp}}(\boldsymbol{\rho}_{\lambda_2,\epsilon_2})$. La proposition 1.2 affirme que les propriétés (5)(a) et (5)(b) sont vérifiées. Cela achève la démonstration. $\square$

### 1.4 Démonstration du théorème 2.1 de [11]

Soit $h\in \mathrm{Sp}(2n;\mathbb{C})$ tel que $h^2=1$, auquel est associé un couple $(n_1,n_2)\in D(n)$. Pour $j=1,2$, soit $(\lambda_j,s_j,1)\in \mathfrak{St}_{n_j,\mathrm{tunip}}$. Pour $j=1,2$, notons $\cup_{b\in B_j}\{s_{j,b},s_{j,b}^{-1}\}$ l'ensemble des valeurs propres de $s_j$ autres que $\pm 1$ et notons

$$\lambda_j=\lambda_j^+\cup\lambda_j^-\cup\bigcup_{b\in B_j}(\lambda_{j,b}\cup\lambda_{j,b})$$

la décomposition de $\lambda_j$ associée à $s_j$, cf. [11] 2.1. Posons $\lambda_{j,0}=\lambda_j^+\cup\lambda_j^-$, $n_{j,0}=S(\lambda_{j,0})/2$ et $m_{j,b}=S(\lambda_{j,b})$ pour $b\in B_j$. Introduisons un sous-groupe parabolique $P_j$ de $G_{n_j,\mathrm{iso}}$ de composante de Levi

$$M_j=\left(\prod_{b\in B_j}\mathrm{GL}(m_{j,b})\right)\times G_{n_{j,0},\mathrm{iso}}.$$

Pour tout $b\in B_j$, soit $\chi_{j,b}$ le caractère non ramifié de $F^\times$ tel que $\chi_{j,b}(\varpi)=s_{j,b}$. L'élément $s_j$ se restreint en un élément $s_{j,0}\in \mathrm{Sp}(2n_{j,0};\mathbb{C})$ de sorte que $\lambda_{j,0}=\lambda_j^+\cup\lambda_j^-$ soit la décomposition de $\lambda_{j,0}$ associée à cet élément. Introduisons la représentation de $M_j(F)$

$$\sigma_j=\left(\bigotimes_{b\in B_j}(\chi_{j,b}\circ\det)st_{\lambda_{j,b}}\right)\otimes\Pi_{\mathrm{iso}}(\lambda_{j,0},s_{j,0},1)$$

(on rappelle que $st_m$ est la représentation de Steinberg de $\mathrm{GL}(m;F)$). Il est connu que

$$\Pi_{\mathrm{iso}}(\lambda_j,s_j,1)=\mathrm{Ind}_{P_j}^{G_{n_j,\mathrm{iso}}}(\sigma_j).$$

Introduisons le triplet $(\lambda,s,h)$ associé à $h$, $(\lambda_1,s_1,1)$ et $(\lambda_2,s_2,1)$. Posons $n_0=n_{0,1}+n_{0,2}$. Soit $\sharp=$ iso ou an. Dans le cas $\sharp=an$, supposons

https://doi.org/10.1017/nmj.2017.30 Published online by Cambridge University Press

provisoirement que $n_0 \geqslant 1$. On introduit un sous-groupe parabolique $P$ de $G_\sharp$ de composante de Levi

$$M = \left( \prod_{j=1,2,b\in B_j} \mathrm{GL}(m_{j,b}) \right) \times G_{n_0,\sharp}.$$

Parce que l'élément $h$ commute à $s$, il se restreint en un élément $h_0 \in \mathrm{Sp}(2n_0;\mathbb{C})$ et la représentation $\Pi_\sharp(\lambda_0, s_0, h_0)$ de $G_{n_0,\sharp}(F)$ est bien définie. On introduit la représentation de $M(F)$

$$\sigma = \left( \bigotimes_{j=1,2,b\in B_j} (\chi_{j,b} \circ \det) st_{\lambda_{j,b}} \right) \otimes \Pi_\sharp(\lambda_0, s_0, h_0).$$

On vérifie que

$$\Pi_\sharp(\lambda, s, h) = \mathrm{Ind}_P^{G_\sharp}(\sigma).$$

Pour $j = 1, 2$, le triplet $(\lambda_{j,0}, s_{j,0}, 1)$ appartient à $\mathfrak{St}_{n_{j,0},\text{unip–quad}}$. Le théorème 1.3 entraîne que

$$\Pi_\sharp(\lambda_0, s_0, h_0) = \mathrm{sgn}_\sharp\, \mathrm{transfert}_{h_0,\sharp}(\Pi_{\mathrm{iso}}(\lambda_{0,1}, s_{0,1}, 1) \otimes \Pi_{\mathrm{iso}}(\lambda_{0,2}, s_{0,2}, 1)).$$

Le transfert $\mathrm{transfert}_{h_0,\sharp}$ se prolonge en un transfert entre les groupes $M_1 \times M_2$ et $M$ (le transfert étant l'identité sur les composantes $\mathrm{GL}(m_{j,b})$). Pour celui-là, $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ se transfère en $\mathrm{sgn}_\sharp\, \sigma$. Mais on sait que le transfert commute à l'induction. Il résulte alors des descriptions ci-dessus que

$$\Pi_\sharp(\lambda, s, h) = \mathrm{sgn}_\sharp\, \mathrm{transfert}_{h,\sharp}(\Pi_{\mathrm{iso}}(\lambda_1, s_1, 1) \otimes \Pi_{\mathrm{iso}}(\lambda_2, s_2, 1)).$$

Dans le cas particulier où $\sharp = an$ et $n_0 = 0$, il n'y a plus de sous-groupe parabolique $P$. Le membre de droite ci-dessus est nul car c'est le transfert d'une induite à partir d'un sous-groupe parabolique qui n'est pas relevant pour $G_\sharp$. Le membre de gauche est nul lui aussi car, d'après la relation [11] 1.3(1), toutes les composantes irréductibles de $\Pi(\lambda, s, h)$ vivent sur l'unique groupe $G_{\mathrm{iso}}(F)$. L'égalité ci-dessus est donc aussi vérifiée dans ce cas particulier. Elle démontre le théorème 2.1 de [11]. □

## §2. Trois lemmes de transfert pour des algèbres de Lie

### 2.1 Le cas spécial orthogonal impair

Cette section et la suivante s'appuient sur les calculs déjà faits dans [6]. On n'a guère envie de reproduire ces calculs, ni les définitions compliquées des objets qui y apparaissent. On se contentera d'indiquer les références nécessaires. Dans cette section, on va énoncer des lemmes de transfert pour des algèbres de Lie. Il y a trois cas : le cas spécial orthogonal impair, le cas spécial orthogonal pair et le cas unitaire. Les preuves sont similaires dans les trois cas (et beaucoup plus faciles dans le dernier). On n'écrira que celle concernant le cas spécial orthogonal pair, qui est le plus subtil. Dans ces trois paragraphes, on oublie les objets $n$, $G_{\text{iso}}$ et $G_{\text{an}}$ précédemment fixés afin de libérer ces notations. On va introduire de nouveaux entiers $n$ et on conserve l'hypothèse $p > 6n+4$.

Dans ce paragraphe, on considère un entier $n \geqslant 1$ et un élément $\eta \in F^{\times}/F^{\times 2}$. On construit comme en [11] 1.1 les deux espaces quadratiques $(V_{\text{iso}}, Q_{\text{iso}})$ et $(V_{\text{an}}, Q_{\text{an}})$ définis sur $F$ tels que $\dim_F(V_{\text{iso}}) = \dim_F(V_{\text{an}}) = 2n+1$ et $\eta(Q_{\text{iso}}) = \eta(Q_{\text{an}}) = \eta$. On note $G_{\text{iso}}$ et $G_{\text{an}}$ leurs groupes spéciaux orthogonaux. On considère quatre entiers $r', r'', N', N'' \in \mathbb{N}$ tels que

$$r'^2 + r''^2 + 2N' + 2N'' = 2n+1,$$
$$r' \equiv 1 + \text{val}_F(\eta) \mod 2\,\mathbb{Z}, \qquad r'' \equiv \text{val}_F(\eta) \mod 2\,\mathbb{Z}.$$

On pose $N = N' + N''$. On a défini en [6] 3.11 et 3.12 une application

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(r', r'')^{\text{Lie}} \circ \rho_N^* \circ \iota_{N',N''} : \mathbb{C}[\hat{W}_{N'}]_{\text{cusp}} \otimes \mathbb{C}[\hat{W}_{N''}]_{\text{cusp}} \\ \to C_{\text{cusp}}^{\infty}(\mathfrak{g}_{\text{iso}}(F)) \oplus C_{\text{cusp}}^{\infty}(\mathfrak{g}_{\text{an}}(F))\end{aligned}$$

(en [6], l'indice cusp était remplacé par ell mais le sens était le même).

Rappelons que, pour $m \in \mathbb{N}$, les classes de conjugaison dans $W_m$ sont paramétrées par les paires de partitions $(\alpha, \beta)$ telles que $S(\alpha) + S(\beta) = m$. Pour $w \in W_m$, notons $\varphi_w$ la fonction caractéristique de la classe de conjugaison de $w$. Alors $\mathbb{C}[\hat{W}_m]_{\text{cusp}}$ a pour base les $\varphi_w$ quand $w$ décrit, à conjugaison près, les éléments dont la classe est paramétrée par un couple de partitions de la forme $(\emptyset, \beta)$. On fixe des éléments $w' \in W_{N'}$ et $w'' \in W_{N''}$ dont les classes sont paramétrées par des couples de cette forme. On pose

$$f = \mathcal{Q}(r', r'')^{\text{Lie}} \circ \rho_N^* \circ \iota_{N',N''}(\varphi_{w'} \otimes \varphi_{w''}).$$

Soit $(n_1, n_2) \in D(n)$. À ce couple est associée une donnée endoscopique de $G_{\text{iso}}$ et $G_{\text{an}}$. On utilise les mêmes définitions qu'en 1.2. Celles-là s'appliquent aux algèbres de Lie, c'est-à-dire qu'il y a un transfert de $C_{\text{cusp}}^{\infty}(\mathfrak{g}_{\text{iso}}(F)) \oplus C_{\text{cusp}}^{\infty}(\mathfrak{g}_{\text{an}}(F))$ dans

$$\begin{aligned}\left(C_{\text{cusp}}^{\infty}(\mathfrak{g}_{n_1,\text{iso}}(F)) \oplus C_{\text{cusp}}^{\infty}(\mathfrak{g}_{n_1,\text{an}}(F))\right) \\ \otimes \left(C_{\text{cusp}}^{\infty}(\mathfrak{g}_{n_2,\text{iso}}(F)) \oplus C_{\text{cusp}}^{\infty}(\mathfrak{g}_{n_2,\text{an}}(F))\right).\end{aligned}$$

https://doi.org/10.1017/nmj.2017.30 Published online by Cambridge University Press

On le note $\mathrm{transfert}_{n_1,n_2}$. Le facteur de transfert est uniquement défini. Les formules en sont données en [9] proposition X.8. Il convient de supprimer les discriminants de Weyl de ces formules, que l'on a incorporés aux intégrales orbitales. Le $\eta$ de la définition X.7 de [9] n'est pas notre présent $\eta$, c'est $(-1)^n\eta$.

Fixons $\eta_1,\eta_2\in F^\times/F^{\times 2}$ tels que $\eta_1\eta_2=\eta$. Notons $t'_1$ l'élément de l'ensemble $\{\frac{r'+r''+1}{2},\frac{r'+r''-1}{2}\}$ qui est de la même parité que $1+\mathrm{val}_F(\eta_1)$. Notons $t''_1$ l'autre élément. Notons $t'_2$ l'élément de l'ensemble $\{\frac{|r'-r''|+1}{2},\frac{|r'-r''|-1}{2}\}$ qui est de la même parité que $1+\mathrm{val}_F(\eta_2)$. Notons $t''_2$ l'autre élément. Définissons deux entiers $n_1$ et $n_2$ par les formules

$$2n_1+1=t_1'^2+t_1''^2+2N',\qquad 2n_2+1=t_2'^2+t_2''^2+2N'',$$

qui sont équivalentes à

$$n_1=\frac{(r'+r'')^2-1}{4}+N',\qquad n_2=\frac{(r'-r'')^2-1}{4}+N''.$$

On vérifie que $n_1+n_2=n$. Pour $j=1,2$, on peut considérer $G_{n_j,\mathrm{iso}}$ et $G_{n_j,\mathrm{an}}$ comme les groupes spéciaux orthogonaux d'espaces quadratiques de discriminants $\eta_j$. On peut donc appliquer la même construction que ci-dessus, où le couple $(N',N'')$ est remplacé par $(N',0)$ si $j=1$ ou par $(N'',0)$ si $j=2$. Cela nous permet de définir les éléments

$$f_1=\mathcal{Q}(t'_1,t''_1)^{\mathrm{Lie}}\circ\rho^*_{N'}\circ\iota_{N',0}(\varphi_{w'})\in C^\infty_{\mathrm{cusp}}(\mathfrak{g}_{n_1,\mathrm{iso}}(F))\oplus C^\infty_{\mathrm{cusp}}(\mathfrak{g}_{n_1,\mathrm{an}}(F)),$$
$$f_2=\mathcal{Q}(t'_2,t''_2)^{\mathrm{Lie}}\circ\rho^*_{N''}\circ\iota_{N'',0}(\varphi_{w''})\in C^\infty_{\mathrm{cusp}}(\mathfrak{g}_{n_2,\mathrm{iso}}(F))\oplus C^\infty_{\mathrm{cusp}}(\mathfrak{g}_{n_2,\mathrm{an}}(F)).$$

Notons sgn l'unique caractère non trivial de $\mathfrak{o}^\times/\mathfrak{o}^{\times 2}$. Définissons une constante $C$ par les formules suivantes :

si $r''\leqslant r'$, $C=\mathrm{sgn}(-1)^{\frac{r'+r''-1}{2}}\,\mathrm{sgn}(-\eta_2\varpi^{-\mathrm{val}_F(\eta_2)})^{\mathrm{val}_F(\eta)}$ ;

si $r'<r''$, $C=\mathrm{sgn}(-1)^{\frac{r'+r''-1}{2}}\,\mathrm{sgn}_{CD}(w'')\,\mathrm{sgn}(-\eta_2\varpi^{-\mathrm{val}_F(\eta_2)})^{1+\mathrm{val}_F(\eta)}$.

Lemme.

(i) *On a l'égalité* $\mathrm{transfert}_{n_1,n_2}(f)=Cf_1\otimes f_2$.

(ii) *Soit* $(\bar n_1,\bar n_2)\in D(n)$ *un couple différent de* $(n_1,n_2)$. *Alors* $\mathrm{transfert}_{\bar n_1,\bar n_2}(f)=0$.

### 2.2 Le cas spécial orthogonal pair

Dans ce paragraphe, on considère un entier $n\geqslant 1$ et un élément $\eta\in F^\times/F^{\times 2}$. On exclut le cas $n=1$, $\eta=1$. On construit comme en [11] 1.1

https://doi.org/10.1017/nmj.2017.30 Published online by Cambridge University Press

les deux espaces quadratiques $(V_{\rm iso},Q_{\rm iso})$ et $(V_{\rm an},Q_{\rm an})$ définis sur $F$ tels que $\dim_F(V_{\rm iso})=\dim_F(V_{\rm an})=2n$ et $\eta(Q_{\rm iso})=\eta(Q_{\rm an})=\eta$. On note $G_{\eta,{\rm iso}}$ et $G_{\eta,{\rm an}}$ leurs groupes spéciaux orthogonaux. On considère quatre entiers $r',r'',N',N''\in\mathbb{N}$ tels que

$$r'^2+r''^2+2N'+2N''=2n,$$
$$r'\equiv r''\equiv {\rm val}_F(\eta) \mod 2\,\mathbb{Z}.$$

On pose $N=N'+N''$. On a défini en [6] 3.11 et 3.12 une application

$$\mathcal{Q}(r',r'')^{\rm Lie}\circ\rho_N^*\circ\iota_{N',N''}:\mathbb{C}[\hat{W}_{N'}]_{\rm cusp}\otimes\mathbb{C}[\hat{W}_{N''}]_{\rm cusp}$$
$$\to C^\infty_{\rm cusp}(\mathfrak{g}_{\eta,{\rm iso}}(F))\oplus C^\infty_{\rm cusp}(\mathfrak{g}_{\eta,{\rm an}}(F)).$$

On fixe des éléments $w'\in W_{N'}$ et $w''\in W_{N''}$ dont les classes de conjugaison sont paramétrées par des couples de partitions de la forme $(\emptyset,\beta')$ et $(\emptyset,\beta'')$. On pose

$$f=\mathcal{Q}(r',r'')^{\rm Lie}\circ\rho_N^*\circ\iota_{N',N''}(\varphi_{w'}\otimes\varphi_{w''}).$$

*Remarque.* Dans le cas où $r'=r''=0$, cette fonction est nulle si le couple $(w',w'')$ ne vérifie pas la relation ${\rm sgn}(\eta\varpi^{-{\rm val}_F(\eta)})\,{\rm sgn}_{CD}(w')\,{\rm sgn}_{CD}(w'')=1$.

Soit $(n_1,n_2)\in D(n)$ et soit $\eta_1,\eta_2\in F^\times/F^{\times2}$ tels que $\eta=\eta_1\eta_2$. À ces objets est associée une donnée endoscopique de $G_{\eta,{\rm iso}}$ et $G_{\eta,{\rm an}}$. Le groupe endoscopique de cette donnée est $G_{n_1,\eta_1,{\rm iso}}\otimes G_{n_2,\eta_2,{\rm iso}}$. De nouveau, il y a un transfert de $C^\infty_{\rm cusp}(\mathfrak{g}_{\eta,{\rm iso}}(F))\oplus C^\infty_{\rm cusp}(\mathfrak{g}_{\eta,{\rm an}}(F))$ dans

$$\left(C^\infty_{\rm cusp}(\mathfrak{g}_{n_1,\eta_1,{\rm iso}}(F))\oplus C^\infty_{\rm cusp}(\mathfrak{g}_{n_1,\eta_1,{\rm an}}(F))\right)$$
$$\otimes\left(C^\infty_{\rm cusp}(\mathfrak{g}_{n_2,\eta_2,{\rm iso}}(F))\oplus C^\infty_{\rm cusp}(\mathfrak{g}_{n_2,\eta_2,{\rm an}}(F))\right).$$

On le note ${\rm transfert}_{n_1,\eta_1,n_2,\eta_2}$. Il y a un choix naturel de facteur de transfert. Les formules en sont données en [9] proposition X.8. Il convient encore d'en supprimer les discriminants de Weyl. Le $\eta$ de la définition X.7 de [9] n'est pas notre présent $\eta$, c'est $(-1)^n\eta$. On note $\Delta_{n_1,\eta_1,n_2,\eta_2}$ ce facteur de transfert.

Posons
$$t'_1=t''_1=\frac{r'+r''}{2},\qquad t'_2=t''_2=\frac{|r'-r''|}{2}.$$

Définissons deux entiers $n_1$ et $n_2$ par les formules

$$2n_1=t_1'^2+t_1''^2+2N',\qquad 2n_2=t_2'^2+t_2''^2+2N'',$$

qui sont équivalentes à

$$n_1 = \frac{(r'+r'')^2}{4} + N', \qquad n_2 = \frac{(r'-r'')^2}{4} + N''.$$

On vérifie que $n_1+n_2=n$. Fixons $\eta_1,\eta_2 \in F^\times/F^{\times 2}$ tels que $\eta_1\eta_2=\eta$ et

$$(1) \qquad \mathrm{val}_F(\eta_1) \equiv t'_1 = t''_1\ , \bmod\ 2\,\mathbb{Z}, \qquad \mathrm{val}_F(\eta_2) \equiv t'_2 = t''_2\ , \bmod\ 2\,\mathbb{Z}.$$

Pour $j=1,2$, on peut appliquer la même construction que ci-dessus à $n_j$ et $\eta_j$, où le couple $(N',N'')$ est remplacé par $(N',0)$ si $j=1$ ou par $(N'',0)$ si $j=2$. Cela nous permet de définir les éléments

$$\begin{aligned} f_{1,\eta_1} &= \mathcal{Q}(t'_1,t''_1)^{\mathrm{Lie}} \circ \rho^*_{N'} \circ \iota_{N',0}(\varphi_{w'}) \\ &\in C^\infty_{\mathrm{cusp}}(\mathfrak{g}_{n_1,\eta_1,\mathrm{iso}}(F)) \oplus C^\infty_{\mathrm{cusp}}(\mathfrak{g}_{n_1,\eta_1,\mathrm{an}}(F)), \\ f_{2,\eta_2} &= \mathcal{Q}(t'_2,t''_2)^{\mathrm{Lie}} \circ \rho^*_{N''} \circ \iota_{N'',0}(\varphi_{w''}) \\ &\in C^\infty_{\mathrm{cusp}}(\mathfrak{g}_{n_2,\eta_2,\mathrm{iso}}(F)) \oplus C^\infty_{\mathrm{cusp}}(\mathfrak{g}_{n_2,\eta_2,\mathrm{an}}(F)). \end{aligned}$$

Définissons une constante $C_{\eta_1,\eta_2}$ par les formules suivantes :
si $r'' \leqslant r'$, $C_{\eta_1,\eta_2} = \mathrm{sgn}(\eta_2\varpi^{-\mathrm{val}_F(\eta_2)})^{\mathrm{val}_F(\eta)}$ ;
si $r' < r''$, $C_{\eta_1,\eta_2} = \mathrm{sgn}(-1)^{\mathrm{val}_F(\eta_2)}\,\mathrm{sgn}_{CD}(w'')\,\mathrm{sgn}(\eta_2\varpi^{-\mathrm{val}_F(\eta_2)})^{1+\mathrm{val}_F(\eta)}$.

LEMME. *Soit $\eta_1,\eta_2 \in F^\times/F^{\times 2}$ tels que $\eta_1\eta_2=\eta$.*

(i) *Si (1) est vérifié, on a l'égalité $\mathrm{transfert}_{n_1,\eta_1,n_2,\eta_2}(f) = C_{\eta_1,\eta_2} f_{1,\eta_1} \otimes f_{2,\eta_2}$.*

(ii) *Soit $(\bar n_1,\bar n_2) \in D(n)$. Supposons que $(\bar n_1,\bar n_2) \neq (n_1,n_2)$ ou que (1) ne soit pas vérifié. Alors $\mathrm{transfert}_{\bar n_1,\eta_1,\bar n_2,\eta_2}(f)=0$.*

La démonstration de ce lemme occupe les paragraphes 2.4 à 2.8.

### 2.3 Le cas unitaire

Dans ce paragraphe, on fixe une tour d'extensions finies non ramifiées $E/E^\natural/F$, avec $[E:E^\natural]=2$, et un entier $d \geqslant 1$. On considère les espaces vectoriels $V$ sur $E$, de dimension $d$, munis d'une forme hermitienne non dégénérée $Q$, relativement à l'extension $E/E^\natural$. De nouveau, il y a deux classes d'isomorphie de couples $(V,Q)$, qui se distinguent par la valuation du déterminant de $Q$ (ce déterminant est un élément de $E^{\natural,\times}/\,\mathrm{norme}_{E/E^\natural}(E^\times)$, sa valuation est l'image de ce terme dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par l'application $\mathrm{val}_{E^\natural}$). On note $(V_{\mathrm{iso}},Q_{\mathrm{iso}})$ celui pour lequel cette valuation est paire et $(V_{\mathrm{an}},Q_{\mathrm{an}})$ celui

https://doi.org/10.1017/nmj.2017.30 Published online by Cambridge University Press

pour lequel cette valuation est impaire. On note $G_{\mathrm{iso}}$ et $G_{\mathrm{an}}$ les groupes unitaires de ces espaces hermitiens.

Pour $m \in \mathbb{N}$, on sait que les classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_m$ sont paramétrées par les partitions de $m$. On note $\mathbb{C}[\hat{\mathfrak{S}}_m]_{U-\mathrm{cusp}}$ l'espace des fonctions sur $\mathfrak{S}_m$, invariantes par conjugaison, à support dans des classes de conjugaison paramétrées par des partitions dont tous les termes non nuls sont impairs.

Soit $(d', d'') \in D(d)$. Dans [6] 3.1, 3.2, 3.3 et 3.12, on a défini une application

$$\mathcal{Q}(d', d'')^{\mathrm{Lie}} \circ \rho_d^* \circ \iota_{d',d''} : \mathbb{C}[\hat{\mathfrak{S}}_{d'}]_{U-\mathrm{cusp}} \otimes \mathbb{C}[\hat{\mathfrak{S}}_{d''}]_{U-\mathrm{cusp}} \\ \rightarrow C^\infty_{\mathrm{cusp}}(\mathfrak{g}_{\mathrm{iso}}(E^\natural)) \oplus C^\infty_{\mathrm{cusp}}(\mathfrak{g}_{\mathrm{an}}(E^\natural)).$$

*Remarque.* Dans [6], l'application $\mathcal{Q}(d', d'')^{\mathrm{Lie}}$ est simplement notée $\mathcal{Q}^{\mathrm{Lie}}$. On a précisé ici la notation en insérant le couple $(d', d'')$.

Fixons $w' \in \mathfrak{S}_{d'}$ et $w'' \in \mathfrak{S}_{d''}$ dont les classes de conjugaison sont paramétrées par des partitions dont tous les termes non nuls sont impairs. On note $\varphi_{w'}$ et $\varphi_{w''}$ les fonctions caractéristiques de ces classes de conjugaison. On pose

$$f = \mathcal{Q}(d', d'')^{\mathrm{Lie}} \circ \rho_d^* \circ \iota_{d',d''}(\varphi_{w'} \otimes \varphi_{w''}).$$

Soit $(d_1, d_2) \in D(d)$. Ce couple détermine une donnée endoscopique de $G_{\mathrm{iso}}$ et $G_{\mathrm{an}}$. Le groupe endoscopique de cette donnée est $G_{d_1,\mathrm{iso}} \times G_{d_2,\mathrm{iso}}$. Il y a un transfert de $C^\infty_{\mathrm{cusp}}(\mathfrak{g}_{\mathrm{iso}}(E^\natural)) \oplus C^\infty_{\mathrm{cusp}}(\mathfrak{g}_{\mathrm{an}}(E^\natural))$ dans

$$\left(C^\infty_{\mathrm{cusp}}(\mathfrak{g}_{d_1,\mathrm{iso}}(E^\natural)) \oplus C^\infty_{\mathrm{cusp}}(\mathfrak{g}_{d_1,\mathrm{an}}(E^\natural))\right) \\ \otimes \left(C^\infty_{\mathrm{cusp}}(\mathfrak{g}_{d_2,\mathrm{iso}}(E^\natural)) \oplus C^\infty_{\mathrm{cusp}}(\mathfrak{g}_{d_2,\mathrm{an}}(E^\natural))\right).$$

On le note $\mathrm{transfert}_{d_1,d_2}$. Il y a un choix naturel de facteur de transfert, cf. [9] proposition X.8. Comme précédemment, on supprime les discriminants de Weyl. Le $\eta$ de la définition X.7 de [9] est une unité de $E^\natural$ si $d$ est impair, une unité de $E$ de trace nulle dans $E^\natural$ si $d$ est pair.

Dans le cas où $(d_1, d_2) = (d', d'')$, on peut appliquer la construction ci-dessus en remplaçant $d$ par $d'$, respectivement $d''$, et $(d', d'')$ par $(d', 0)$, respectivement $(d'', 0)$. On définit ainsi

$$f_1 = \mathcal{Q}(d', 0)^{\mathrm{Lie}} \circ \rho_{d'}^* \circ \iota_{d',0}(\varphi_{w'}),$$
$$f_2 = \mathcal{Q}(d'', 0)^{\mathrm{Lie}} \circ \rho_{d''}^* \circ \iota_{d'',0}(\varphi_{w''}).$$

LEMME.

(i) *On a l'égalité* $transfert_{d',d''}(f) = f_1 \otimes f_2$.
(ii) *Pour un couple* $(d_1, d_2) \in D(d)$ *différent de* $(d', d'')$, *on a l'égalité* $transfert_{d_1,d_2}(f) = 0$.

## 2.4 Une expression à l'aide de transformées de Fourier d'intégrales orbitales

On commence la démonstration du lemme 2.2. On utilise les notations de ce paragraphe et les données que l'on y a fixées. Rappelons que pour $\sharp = \mathrm{iso}$ ou an, on définit dans l'espace $\mathfrak{g}_\sharp(F)$ la notion d'élément topologiquement nilpotent. En identifiant $\mathfrak{g}_\sharp(F)$ à un sous-ensemble de l'algèbre des endomorphismes de $V_\sharp$, un élément $Y \in \mathfrak{g}_\sharp(F)$ est topologiquement nilpotent si et seulement si la suite des puissances $Y^m$ tend vers 0 quand $m$ tend vers l'infini. Par construction de l'application $\mathcal{Q}(r', r'')^{\mathrm{Lie}}$, la fonction $f$ est à support topologiquement nilpotent.

On note $(\emptyset, \beta')$ et $(\emptyset, \beta'')$ les couples de partitions paramétrant les classes de conjugaison de $w'$ et $w''$. Posons $\beta = \beta' \cup \beta''$, $\beta = (\beta_1 \geqslant \cdots \geqslant \beta_t > 0)$. Pour tout $k \in \{1, \ldots, t\}$, considérons la tour d'extensions non ramifiées $E_k/E_k^\natural/F$ telle que $[E_k : E_k^\natural] = 2$ et $[E_k^\natural : F] = \beta_k$. On fixe un élément $X_k \in E_k^\times$ tel que $\mathrm{val}_{E_k}(X_k) = 0$, que $\mathrm{trace}_{E_k/E_k^\natural}(X_k) = 0$ et que, en notant $\bar{X}_k$ la réduction de $X_k$ dans le corps résiduel $\mathbb{F}_{q^{2\beta_k}}$, tous les conjugués de $\bar{X}_k$ par le groupe de Galois de l'extension $\mathbb{F}_{q^{2\beta_k}}/\mathbb{F}_q$ soient distincts. On suppose de plus que, pour $k, k' \in \{1, \ldots, t\}$ avec $k \neq k'$, $\bar{X}_k$ n'est pas conjugué à $\bar{X}_{k'}$. Cette hypothèse est loisible puisque $p > 6n + 4$.

Posons $R = \sup(r', r'')$, $r = \inf(r', r'')$, $J = \{1, \ldots, R\}$, $\hat{J} = \{j \in J; j \leqslant R - r, j \text{ pair}\}$. Fixons un ensemble de représentants $\Gamma_0$ de $\mathfrak{o}^\times/(1 + \varpi\mathfrak{o})$. Pour tout $j \in J$ tel que $j > R - r$, fixons un ensemble de représentants $\Gamma_j$ de $\mathfrak{o}^\times/\mathfrak{o}^{\times 2}$. Pour tout $j \in J$ tel que $j \leqslant R - r$, posons $\Gamma_j = \Gamma_0$. Notons $\Gamma$ le sous-ensemble des $\gamma = (\gamma_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} \Gamma_j$ tels que

pour tout $j \in \hat{J}$, $\gamma_{j-1} \notin \gamma_j + \varpi\mathfrak{o}$ ;
(1) $\mathrm{sgn}(\eta\varpi^{-\mathrm{val}_F(\eta)} \prod_{j \in J} \gamma_j) = \mathrm{sgn}_{CD}(w')\,\mathrm{sgn}_{CD}(w'')$.

*Remarques.* L'ensemble $\Gamma$ n'a évidemment rien à voir avec celui de [11] 1.8. D'autre part, dans le cas où $r' = r'' = 0$, on a $J = \emptyset$ et $\prod_{j \in J} \Gamma_j$ a un unique élément. Cet élément vérifie (1) si et seulement si $\mathrm{sgn}(\eta\varpi^{-\mathrm{val}_F(\eta)}) = \mathrm{sgn}_{CD}(w')\,\mathrm{sgn}_{CD}(w'')$. Donc $\Gamma$ est vide si cette égalité n'est pas vérifiée. Dans l'égalité du lemme ci-dessous, le membre de droite est nul. Cela est cohérent avec la remarque de 2.2 nous disant que $f_\sharp = 0$.

On note $\sigma : \Gamma \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$\sigma(\gamma) = \left( \prod_{j \in \hat{J}} (q - 2 + \mathrm{sgn}(\gamma_{j-1}\gamma_j)) \,\mathrm{sgn}(\gamma_{j-1}\gamma_j(\gamma_{j-1} - \gamma_j)) \right) \prod_{j=R-r+1,\dots,R;\, j \ \text{impair}} \mathrm{sgn}(-\gamma_j).$$

Notons $\bar{F}$ une clôture algébrique de $F$. Pour $\gamma \in \Gamma$ et pour $j \in J$, on fixe $a_j(\gamma) \in \bar{F}^\times$ tel que

si $j \in \hat{J}$, $a_j(\gamma)^{2j-2} = \varpi\gamma_j$ ;

si $j \leqslant R - r$ et $j$ est impair, $a_j(\gamma)^{2j} = \varpi\gamma_j$ ;

si $j > R - r$, $a_j(\gamma)^{2(2j-R+r-1)} = \varpi\gamma_j$. On note $F_j(\gamma)$ l'extension $F[a_j(\gamma)]$, $F_j^\natural(\gamma) = F[a_j(\gamma)^2]$ la sous-extension d'indice 2, $\mathfrak{p}_j(\gamma)$ l'idéal maximal de l'anneau des entiers de $F_j(\gamma)$ et

$$A_j(\gamma) = \{a_j \in a_j(\gamma) + \mathfrak{p}_j(\gamma)^2 ; \mathrm{trace}_{F_j(\gamma)/F_j^\natural(\gamma)}(a_j) = 0\}.$$

On pose $A(\gamma) = \prod_{j \in J} A_j(\gamma)$. Remarquons que $A(\gamma)$ est naturellement un espace principal homogène sous un certain groupe. On munit $A(\gamma)$ d'une mesure invariante par l'action de ce groupe et de masse totale 1.

Considérons des éléments $\gamma \in \Gamma$ et $a = (a_j)_{j \in J} \in A(\gamma)$. Considérons des familles $c = (c_j)_{j \in J}$ et $u = (u_k)_{k=1,\dots,t}$ telles que $c_j \in F_j^\natural(\gamma)^\times$ pour $j \in J$ et $u_k \in E_k^{\natural,\times}$ pour $k = 1, \dots, t$. Pour $j \in J$, on construit un espace quadratique $(V_j, Q_j)$: $V_j = F_j(\gamma)$ et, pour $v, v' \in V_j$, $Q_j(v, v') = [F_j(\gamma)/F]^{-1} \,\mathrm{trace}_{F_j(\gamma)/F}(\tau_j(v)v'c_j)$, où $\tau_j$ est l'unique élément non trivial du groupe de Galois de $F_j(\gamma)/F_j^\natural(\gamma)$. Pour $k = 1, \dots, t$, on construit un espace quadratique $(V_k, Q_k)$ : $V_k = E_k$ et, pour $v, v' \in V_k$, $Q_k(v, v') = [E_k/F]^{-1} \,\mathrm{trace}_{E_k/F}(\tau_k(v)v'u_k)$, où $\tau_k$ est l'unique élément non trivial du groupe de Galois de $E_k/E_k^\natural$. En utilisant la relation $r' \equiv r'' \equiv \mathrm{val}_F(\eta)$ imposée en 2.2 et la relation (1) ci-dessus, on montre que la somme directe des $(V_j, Q_j)$ et des $(V_k, Q_k)$ est isomorphe à l'un des deux espaces de 2.2, disons à $(V_\sharp, Q_\sharp)$. On fixe un isomorphisme. On définit alors un élément $X \in \mathfrak{g}_\sharp(F)$ : il respecte chacun des sous-espaces $V_j$ et $V_k$ ; pour $j \in J$, il agit sur $V_j$ par multiplication par $a_j$ et, pour $k = 1, \dots, t$, il agit sur $V_k$ par multiplication par $X_k$. La classe de conjugaison de $X$ par le groupe orthogonal $O(Q_\sharp; F)$ est bien déterminée par nos données de départ. Il y a une petite difficulté causée par la parité de la dimension de $V_\sharp$ : cette classe de conjugaison par $O(Q_\sharp; F)$ se décompose en deux classes de conjugaison par $G_\sharp(F)$. Au lieu de $X$, nous fixons donc des éléments $X^+$ et $X^-$ dans chacune de ces deux classes. On voit facilement que les constructions ne dépendent que des images des $c_j$ dans les groupes $F_j^\natural(\gamma)^\times/\,\text{norme}_{F_j(\gamma)/F_j^\natural(\gamma)}(F_j(\gamma)^\times)$ et des images des $u_k$ dans les groupes $E_k^{\natural,\times}/\,\text{norme}_{E_k/E_k^\natural}(E_k^\times)$. Parce que les $F_j(\gamma)/F$ sont totalement ramifiés et les $E_k/F$ sont non ramifiés, ces groupes s'identifient respectivement à $\mathfrak{o}^\times/\mathfrak{o}^{\times 2}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En posant $\mathcal{E} = (\mathfrak{o}^\times/\mathfrak{o}^{\times 2})^J$ et $\mathcal{U} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^t$, on peut donc remplacer les données $c = (c_j)_{j\in J}$ et $u = (u_k)_{k=1,\ldots,t}$ ci-dessus par des familles $c = (c_j)_{j\in J} \in \mathcal{E}$ et $u = (u_k)_{k=1,\ldots,t} \in \mathcal{U}$. Notons plus précisément $X^+(a, c, u)$ et $X^-(a, c, u)$ les éléments associés ci-dessus à de telles familles.

Soit $\gamma \in \Gamma$ et $e \in \mathcal{E}$. On définit une nouvelle famille $c[\gamma, e] = (c[\gamma, e]_j)_{j\in J} \in \mathcal{E}$ par les égalités suivantes, pour $j \in J$ :

si $r'' \leqslant r'$, $c[\gamma, e]_j = (-1)^j \gamma_j e_j$ ;

si $r' < r''$, $c[\gamma, e]_j = (-1)^{j+1} e_j$

(il s'agit plutôt des images modulo $\mathfrak{o}^{\times 2}$ des expressions indiquées). Pour $a \in A(\gamma)$ et $\zeta = \pm$, on note désormais $X^\zeta(a, e, u)$ l'élément $X^\zeta(a, c[\gamma, e], u)$ introduit ci-dessus. Il appartient à $\mathfrak{g}_\sharp(F)$ pour un certain indice $\sharp$, que l'on note plus précisement $\sharp(a, e, u)$.

Soit $\sharp = \text{iso}$ ou an. De même qu'en 1.1, on introduit une transformation de Fourier dans $C_c^\infty(\mathfrak{g}_\sharp(F))$. Rappelons un résultat d'Harish-Chandra. Soit $X \in \mathfrak{g}_\sharp(F)$ un élément régulier et elliptique. Il existe une fonction $Y \mapsto \hat{i}_\sharp(X, Y)$ définie et localement constante sur l'ensemble des éléments elliptiques réguliers de $\mathfrak{g}_\sharp(F)$ de sorte que, pour tout tel élément $Y$ et pour toute $\phi \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_\sharp(F))$, on ait l'égalité

$$J(X, \hat{\phi}) = \int_{\mathfrak{g}_\sharp(F)} \hat{i}_\sharp(X, Y)\phi(Y)D^{G_\sharp}(Y)^{-1/2}\, dY.$$

Les éléments $X^\zeta(a, e, u)$ ci-dessus, tels que $\sharp(a, e, u) = \sharp$, sont elliptiques réguliers dans $\mathfrak{g}_\sharp(F)$. On note $\hat{i}_\sharp^\zeta[a, e, u]$ la fonction $Y \mapsto \hat{i}_\sharp(X^\zeta(a, e, u), Y)$. On pose

$$\hat{i}_\sharp[a, e, u] = \tfrac{1}{2}(\hat{i}_\sharp^+[a, e, u] + \hat{i}_\sharp^-[a, e, u]).$$

Pour un triplet $(a, e, u)$ tel que $\sharp(a, e, u) \neq \sharp$, on pose $\hat{i}_\sharp[a, e, u] = 0$.

On fixe une décomposition $\{1, \ldots, t\} = K' \sqcup K''$ de sorte que $\beta'$, respectivement $\beta''$, soit formée des $\beta_k$ pour $k \in K'$, respectivement $k \in K''$. On définit un caractère $\kappa^{\mathcal{U}}$ de $\mathcal{U}$ par

$$\kappa^{\mathcal{U}}(u) = (-1)^{\sum_{k\in K''} u_k}.$$

On va se limiter à un sous-groupe $\mathcal{E}^0$ de $\mathcal{E}$. C'est le sous-groupe des familles $e=(e_j)_{j\in J}\in\mathcal{E}$ telles que
pour tout $j\in\hat{J}$, tel que $j<R$, $e_{j-1}=e_j$.

*Remarque.* La condition $j<R$ est automatique si $r>0$.

On définit le caractère $\kappa^0$ du groupe $\mathcal{E}^0$ par

$$\kappa^0(e)=\prod_{j\in\hat{J}}\operatorname{sgn}(e_{j-1}).$$

On doit enfin définir quelques constantes. On note $\mathcal{O}(w')$ et $\mathcal{O}(w'')$ les classes de conjugaison de $w'$ dans $W_{N'}$ et de $w''$ dans $W_{N''}$. On pose

$$C(w')=|\mathcal{O}(w')||W_{N'}|^{-1}q^{N'/2}\prod_{k\in K'}(q^{\beta_k}+1)^{-1}$$

et on définit $C(w'')$ de façon similaire. On pose
$\alpha(r',r'',w',w'')=\operatorname{sgn}((-1)^{(r'+r'')/2}\eta\varpi^{-\operatorname{val}_F(\eta)})$ si $\operatorname{val}_F(\eta)$ est pair ;
$\alpha(r',r'',w',w'')=\operatorname{sgn}((-1)^{(r'+r'')/2}\eta\varpi^{-\operatorname{val}_F(\eta)})\operatorname{sgn}_{CD}(w')\operatorname{sgn}_{CD}(w'')$ si $\operatorname{val}_F(\eta)$ est impair ;

$$C(r',r'')=2^{1-r'-r''}((q-1)^2(q-3))^{(r-R)/2}.$$

Lemme. *Pour $\sharp=\mathrm{iso}$ ou $\mathrm{an}$ et pour tout élément $Y\in\mathfrak{g}_\sharp(F)$ qui est elliptique, régulier et topologiquement nilpotent, on a l'égalité*

$$J(Y,f_\sharp)=C(w')C(w'')C(r',r'')\alpha(r',r'',w',w'')\sum_{\gamma\in\Gamma}\sigma(\gamma)$$
$$\times\int_{A(\gamma)}\sum_{e\in\mathcal{E}^0}\sum_{u\in\mathcal{U}}\kappa^0(e)\kappa^{\mathcal{U}}(u)\hat{i}_\sharp[a,e,u](Y)\,da.$$

*Preuve.* Posons $N=N'+N''$. En [6] 3.15 (1), on a écrit une égalité

$$(2)\qquad f_\sharp=\sum_{(n',n'')\in D(N)}\;\sum_{(v',v'')\in\mathcal{V}_{n',n'',\sharp}}b(v',v'')\mathcal{Q}(r',r'';v',v'')_\sharp^{\mathrm{Lie}}.$$

Les $\mathcal{Q}(r',r'';v',v'')_\sharp^{\mathrm{Lie}}$ sont des fonctions sur $\mathfrak{g}_\sharp(F)$ et les $b(v',v'')$ sont des coefficients. L'ensemble $\mathcal{V}_{n',n'',\sharp}$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison dans $W_{n'}\times W_{n''}$ paramétrées par des couples de partitions

https://doi.org/10.1017/nmj.2017.30 Published online by Cambridge University Press

de la forme $(\emptyset, \delta')$, $(\emptyset, \delta'')$ et tels que $\delta' \cup \delta'' = \beta$. Il y a une restriction (l'hypothèse 3.13(1) de [6]), que nous levons en posant $\mathcal{Q}(r', r''; v', v'')_\sharp^{\mathrm{Lie}} = 0$ si elle n'est pas vérifiée (dans [6], cette fonction n'est définie que sous cette hypothèse 3.13(1)). En supprimant ainsi cette restriction, l'ensemble $\mathcal{V}_{n',n'',\sharp}$ devient indépendant de l'indice $\sharp$ et nous supprimons cet indice. Il y a une application naturelle

$$\delta : \mathcal{U} \to \bigcup_{(n',n'') \in D(N)} \mathcal{V}_{n',n''}.$$

Pour $u = (u_k)_{k=1,\ldots,t} \in \mathcal{U}$, on note $\delta'(u)$ la partition formée des $\beta_k$ pour $k$ tel que $u_k = 0$ et $\delta''(u)$ celle formée des $\beta_k$ pour $k$ tel que $u(k) = 1$. L'application ci-dessus envoie $u$ sur le couple de classes de conjugaison paramétrées par $(\emptyset, \delta'(u))$ et $(\emptyset, \delta''(u))$. L'égalité 3.15(6) de [6] et les calculs qui la suivent montrent que, pour $(v', v'') \in \cup_{(n',n'') \in D(N)} \mathcal{V}_{n',n''}$, on a l'égalité

$$b(v', v'') = C_1 \sum_{u \in \delta^{-1}(v',v'')} \kappa^{\mathcal{U}}(u), \tag{3}$$

où

$$C_1 = |\mathcal{O}(w')||W_{N'}|^{-1}|\mathcal{O}(w'')||W_{N''}|^{-1}. \tag{4}$$

Fixons $(v', v'') \in \bigcup_{(n',n'') \in D(N)} \mathcal{V}_{n',n''}$. L'intégrale orbitale $J(Y, \mathcal{Q}(r', r''; v', v'')_\sharp^{\mathrm{Lie}})$ est calculée par une application successive des propositions 3.13 et 3.14 de [6], où l'on remplace $(w', w'')$ par $(v', v'')$. On obtient

$$\begin{aligned} &J(Y, \mathcal{Q}(r', r''; v', v'')_\sharp^{\mathrm{Lie}}) \\ &\quad = C_2(r', r'', v', v'') \sum_{\gamma \in \Gamma} \sigma(\gamma) \\ &\qquad \times \int_{A(\gamma)} \sum_{e \in \mathcal{E}^0_{MW}} \kappa^0_{MW}(e) \hat{i}_{\sharp,MW}[a, e, v', v''](Y)\, da, \end{aligned} \tag{5}$$

où

$C_2(r', r'', v', v'')$ est une certaine constante sur laquelle nous allons revenir ;

$\Gamma$ et, pour $\gamma \in \Gamma$, $A(\gamma)$ et $\sigma(\gamma)$ sont les termes que l'on a définis ci-dessus ;

les autres termes $\mathcal{E}^0_{MW}$, etc., sont quelque peu différents des nôtres, on y a ajouté un indice $MW$ pour les en distinguer.

On constate que le couple $(v', v'')$ intervient dans (5) d'une part par la constante, d'autre part par la fonction $\hat{i}_{\sharp,MW}[a, e, v', v'']$. Pour ce qui est de la constante, le couple $(v', v'')$ intervient *via* des termes $|T'||T''|$ et des produits $\operatorname{sgn}_{CD}(v')\operatorname{sgn}_{CD}(v'')$, cf. les formules de [6]. Il résulte de la définition ci-dessus que ce dernier produit vaut $\operatorname{sgn}_{CD}(w')\operatorname{sgn}_{CD}(w'')$. En se reportant à la définition des tores $T'$ et $T''$, on calcule explicitement

$$|T'||T''| = \prod_{k=1,\ldots,t} (q^{\beta_k} + 1). \tag{6}$$

En conclusion, $C_2(r', r'', v', v'')$ ne dépend pas de $(v', v'')$ mais seulement de $(w', w'')$. On la note plutôt $C_2(r', r'', w', w'')$. Quant à la fonction $\hat{i}_{\sharp,MW}[a, e, v', v'']$, elle ne dépend de $(v', v'')$ que par un élément $X$ défini en [6] 3.13. On a un certain choix pour cet élément. On constate que, pour tout $u \in \delta^{-1}(v', v'')$, on peut prendre pour $X$ un élément construit comme ci-dessus à l'aide des données $(X_k)_{k=1,\ldots,t}$ et $u$. Notons $\hat{i}_{\sharp,MW}[a, e, u]$ la fonction associée à ce choix. L'égalité suivante résulte alors de (2), (3) et (5) :

$$\begin{aligned} J(Y, f_\sharp) = C_1 C_2(r', r'', w', w'') \sum_{\gamma\in\Gamma} \sigma(\gamma) \int_{A(\gamma)} \\ \times \sum_{e\in\mathcal{E}^0_{MW}} \sum_{u\in\mathcal{U}} \kappa^0_{MW}(e)\kappa^{\mathcal{U}}(u)\hat{i}_{\sharp,MW}[a, e, u](Y)\, da. \end{aligned} \tag{7}$$

Supposons que $(r', r'') \neq (0, 0)$. Il y a une application naturelle de notre ensemble $\mathcal{E}^0$ dans l'ensemble $\mathcal{E}^0_{MW}$. À $e \in \mathcal{E}^0$, elle associe l'unique élément $e_{MW} \in \mathcal{E}^0_{MW}$ tel que $e_{MW,j} = e_j$ pour $j = 1, \ldots, R-1$. L'élément $e_{MW,R}$ est défini par les égalités

$\prod_{j=R-r+1,\ldots,R} e_{MW,j} = 1$ si $r > 0$ ;

$e_{MW,R} = e_{MW,R-1}$ si $r = 0$.

On constate que $\kappa^0(e) = \kappa^0_{MW}(e_{MW})$. Fixons $\gamma \in \Gamma$ et $a \in A(\gamma)$. Dans l'énoncé du lemme, on peut évidemment limiter la somme en $e$ et $u$ à la somme sur les couples $(e, u)$ tels que $\sharp(a, e, u) = \sharp$ : si cette condition n'est pas vérifiée, $\hat{i}_\sharp[a, e, u] = 0$. Notons $(\mathcal{E}^0 \times \mathcal{U})_{a,\sharp}$ ce sous-ensemble. On constate alors que l'application

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{E}^0 \times \mathcal{U})_{a,\sharp} & \to & \mathcal{E}^0_{MW} \times \mathcal{U} \\ (e, u) & \mapsto & (e_{MW}, u) \end{array}$$

est bijective et que, pour $(e, u) \in (\mathcal{E}^0 \times \mathcal{U})_{a,\sharp}$, on a l'égalité $\hat{i}_{\sharp,MW}[a, e_{MW}, u] = \hat{i}_\sharp[a, e, u]$. En utilisant ces propriétés, l'égalité (7) devient alors l'égalité de l'énoncé, aux constantes près. Il ne reste donc plus qu'à démontrer l'égalité

$$C_1C_2(r', r'', w', w'') = C(w')C(w'')C(r', r'')\alpha(r', r'', w', w''). \tag{8}$$

On a supposé que $(r', r'') \neq (0, 0)$. Si $(r', r'') = (0, 0)$, les termes $\Gamma$, $\mathcal{E}^0$, etc., disparaissent et la formule (7) se compare directement à celle de l'énoncé. De nouveau, il ne reste plus qu'à comparer les constantes.

La constante $C_2(r', r'', w', w'')$ est le produit de la constante $C\alpha(w', w'')_\sharp$ de la proposition 3.14 de [6] et de l'inverse de la constante de la proposition 3.13 de cette référence. Malheureusement, il y a des erreurs dans ces constantes. On a déjà effectué quelques corrections dans [8] page 335 :

la constante de la proposition 3.13 est

$$q^{-N/2}2^{-\beta(r',r'')}\gamma(r', r'')_\sharp|T'||T''| \tag{9}$$

(en réalité, $T'$ et $T''$ sont associés à un couple $(v', v'') \in \mathcal{V}_{n',n''}$ mais, d'après (5), le produit de leurs nombres d'éléments en est indépendant) ;

on a l'égalité

$$C = 2^{1-r'-r''-\beta(r',r'')}((q-1)^2(q-3))^{(r-R)/2}.$$

A l'aide de (4) et (6), on voit que le produit de $C_1$, $C$ et de l'inverse de (9) vaut $C(w')C(w'')C(r', r'')\gamma(r', r'')_\sharp^{-1}$. Rappelons qu'en [11] 1.1, on a associé à $Q_\sharp$ des discriminants $\eta'(Q_\sharp)$ et $\eta''(Q_\sharp)$, notons-les simplement $\eta'_\sharp$ et $\eta''_\sharp$. D'après [6] 3.13, on a

$\gamma(r', r'')_\sharp = \mathrm{sgn}((-1)^{(r'+r'')/2}\eta'_\sharp\eta''_\sharp)$, si $r'$ et $r''$ sont pairs, c'est-à-dire si $\mathrm{val}_F(\eta)$ est pair ;

$\gamma(r', r'')_\sharp = 1$ si $\mathrm{val}_F(\eta)$ est impair.

Il y a une autre correction à apporter à [6]. On a

$\alpha(w', w'')_\sharp = 1$ si $\mathrm{val}_F(\eta)$ est pair ;

$\alpha(w', w'')_\sharp = \mathrm{sgn}((-1)^{(r'-r'')/2}\eta'_\sharp\eta''_\sharp)\,\mathrm{sgn}_{CD}(w')\,\mathrm{sgn}_{CD}(w'')$ si $\mathrm{val}_F(\eta)$ est impair.

Cette constante provient en fait de [9] paragraphes VII.25 et VII.26. Dans cette référence, on avait supposé $r'$ et $r''$ pairs et obtenu la constante 1. Dans [6], on a abusivement adopté cette valeur même quand $r'$ et $r''$ sont impairs. En reprenant la preuve de [9] VII.26 et en y supposant $r'$ et $r''$ impairs, on obtient la constante ci-dessus. Signalons que, dans le cas spécial orthogonal impair, il n'y a (à notre connaissance) pas de correction à apporter à la formule de [6] pour la constante $\alpha(w', w'')_\sharp$.

D'après [11] 1.1, on a l'égalité $\eta'_\sharp\eta''_\sharp(-1)^{r''} = \eta\varpi^{-\operatorname{val}_F(\eta)}$. En la reportant dans la formule ci-dessus, on obtient l'égalité

$$\gamma(r', r'')_\sharp^{-1}\alpha(w', w'')_\sharp = \alpha(r', r'', w', w'').$$

En mettant ces calculs bout à bout, on obtient l'égalité (8), ce qui achève la démonstration. □

**2.5 Transformation de l'expression précédente**

On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des couples $(L_1, L_2)$ de sous-ensembles de $\{1, \ldots, R-r\}$ tels que

$\{1, \ldots, R-r\}$ est la réunion disjointe de $L_1$ et $L_2$ ;

pour tout $j \in \hat{J}$, les intersections $L_1 \cap \{j-1, j\}$ et $L_2 \cap \{j-1, j\}$ ont un unique élément ; on note cet élément $l_1(j/2)$, respectivement $l_2(j/2)$ ;

si $r = 0$ et $R > 0$, $l_2(R/2) = R-1$.

Pour un tel couple, on définit un caractère $\kappa^{L_2}$ de $\mathcal{E}$ par

$$\kappa^{L_2}(e) = \prod_{j=1,\ldots,(R-r)/2} \operatorname{sgn}(e_{l_2(j)}).$$

LEMME. *Pour* $\sharp = \text{iso}$ *ou* an *et pour tout élément* $Y \in \mathfrak{g}_\sharp(F)$ *qui est elliptique, régulier et topologiquement nilpotent, on a l'égalité*

$$J(Y, f_\sharp) = C(w')C(w'')C(r', r'')\alpha(r', r'', w', w'')|\mathcal{L}|^{-1} \sum_{(L_1,L_2)\in\mathcal{L}} \sum_{\gamma\in\Gamma} \sigma(\gamma)$$
$$\times \int_{A(\gamma)} \sum_{e\in\mathcal{E}} \sum_{u\in\mathcal{U}} \kappa^{L_2}(e)\kappa^{\mathcal{U}}(u)\hat{i}_\sharp[a, e, u](Y)\, da.$$

*Preuve.* En vertu de l'énoncé précédent, il suffit de prouver que, pour $e \in \mathcal{E}$, on a les égalités

(1) $\sum_{(L_1,L_2)\in\mathcal{L}} \kappa^{L_2}(e) = 0$ si $e \notin \mathcal{E}^0$ ;
(2) $\sum_{(L_1,L_2)\in\mathcal{L}} \kappa^{L_2}(e) = |\mathcal{L}|\kappa^0(e)$, si $e \in \mathcal{E}^0$.

Supposons que $e \notin \mathcal{E}^0$. Alors il existe $j \in \{1, \ldots, (R-r)/2\}$, avec $j < R/2$ si $r = 0$ et $R > 0$, de sorte que $e_{2j-1} \neq e_{2j}$. On fixe un tel $j$. On regroupe les éléments de $\mathcal{L}$ en paires. Si $(L_1, L_2)$ est un élément d'une paire, l'autre élément $(L'_1, L'_2)$ est obtenu en échangeant $l_1(j)$ et $l_2(j)$ et en ne changeant pas les autres $l_1(h)$, $l_2(h)$ pour $h \neq j$. On a alors

https://doi.org/10.1017/nmj.2017.30 Published online by Cambridge University Press

$$\kappa^{L_2}(e) = \mathrm{sgn}(e_{l_2(j)}) \prod_{h\neq j} \mathrm{sgn}(e_{l_2(h)}),$$
$$\kappa^{L_2'}(e) = \mathrm{sgn}(e_{l_1(j)}) \prod_{h\neq j} \mathrm{sgn}(e_{l_2(h)}).$$

Puisque $e_{l_2(j)} \neq e_{l_1(j)}$, la somme de ces termes est nulle, ce qui prouve (1).

Supposons que $e \in \mathcal{E}^0$. Pour tout $j = 1, \ldots, (R-r)/2$ et tout $(L_1, L_2) \in \mathcal{L}$, on a l'égalité $\mathrm{sgn}(e_{l_2(j)}) = \mathrm{sgn}(e_{2j-1})$. Cela résulte de l'égalité $e_{2j-1} = e_{2j}$ imposée aux éléments de $\mathcal{E}^0$, sauf dans le cas où $r = 0$, $R > 0$ et $j = R/2$. Mais dans ce cas, $l_2(j) = 2j-1$ par définition de $\mathcal{L}$. En conséquence, $\kappa^{L_2}(e) = \prod_{j=1,\ldots,(R-r)/2} \mathrm{sgn}(e_{2j-1}) = \kappa^0(e)$. D'où (2). □

### 2.6 Calcul de facteurs de transfert

Pour $\gamma \in \Gamma$, $a \in A(\gamma)$, $e \in \mathcal{E}$, $u \in \mathcal{U}$ et $\zeta = \pm$, on a introduit un élément $X^{\zeta}(a, e, u)$. Fixons $\gamma$ et $a$. Quand $e$, $u$ et $\zeta$ varient, ces éléments $X^{\zeta}(a, e, u)$ décrivent un ensemble de représentants des classes de conjugaison contenues dans deux classes totales de conjugaison stable dans $\mathfrak{g}_{\mathrm{iso}}(F) \cup \mathfrak{g}_{\mathrm{an}}(F)$. Ces deux classes se déduisent l'une de l'autre par conjugaison par des éléments de déterminant $-1$ des groupes orthogonaux. On n'a pas donné de critère pour distinguer $X^{+}(a, e, u)$ de $X^{-}(a, e, u)$. On voit que l'on peut effectuer ces choix de signes de sorte que, pour $\zeta$ fixé et quand $e$ et $u$ varient, les éléments $X^{\zeta}(a, e, u)$ décrivent un ensemble de représentants des classes de conjugaison contenues dans l'une de nos deux classes totales de conjugaison stable. On fixe un élément dans cette classe qui appartienne à $\mathfrak{g}_{\mathrm{iso}}(F)$ et on le note $X^{\zeta}(a, w', w'')$.

On a défini $t_1'$, $t_1''$, $t_2'$, $t_2''$ en 2.2. On a les égalités $t_1' = t_1'' = (R+r)/2$ et $t_2' = t_2'' = (R-r)/2$. Fixons $(L_1, L_2) \in \mathcal{L}$. Soit $\gamma \in \Gamma$. On définit deux suites $\gamma^{L_1} = (\gamma_j^{L_1})_{j=1,\ldots,t_1'}$ et $\gamma^{L_2} = (\gamma_j^{L_2})_{j=1,\ldots,t_2'}$ par les formules suivantes :

pour $j \in \{1, \ldots, (R-r)/2\}$, $\gamma_j^{L_1} = \gamma_{l_1(j)}$, $\gamma_j^{L_2} = \gamma_{l_2(j)}$ ;

pour $j \in \{(R-r)/2+1, \ldots, (R+r)/2\}$, $\gamma_j^{L_1} = \gamma_{j+(R-r)/2}$.

Pour $a \in A(\gamma)$, on définit de même des suites $a^{L_1} = (a_j^{L_1})_{j=1,\ldots,t_1'}$ et $a^{L_2} = (a_j^{L_2})_{j=1,\ldots,t_2'}$. On définit un élément $\eta[L_2, \gamma] \in F^{\times}/F^{\times 2}$ par les deux propriétés :

$\mathrm{val}_F(\eta[L_2, \gamma]) \equiv t_2' \mod 2\,\mathbb{Z}$ ;

$\mathrm{sgn}(\eta[L_2, \gamma]\varpi^{-\mathrm{val}_F(\eta[L_2,\gamma])} \prod_{j=1,\ldots,t_2'} \gamma_j^{L_2}) = \mathrm{sgn}_{CD}(w'')$.

On définit $\eta[L_1, \gamma]$ par l'égalité $\eta[L_1, \gamma]\eta[L_2, \gamma] = \eta$. On constate que les données $\gamma^{L_1}$, $a^{L_1}$, $(N', 0)$, $w_1' = w'$ et $w_1'' = \emptyset$ vérifient les mêmes

https://doi.org/10.1017/nmj.2017.30 Published online by Cambridge University Press

conditions que $\gamma$, $a$, $(N', N'')$, $w'$ et $w''$, le couple $(n, \eta)$ étant remplacé par $(n_1, \eta[L_1, \gamma])$. De même pour les données $\gamma^{L_2}$, $a^{L_2}$, $(N'', 0)$, $w'_2 = w''$ et $w''_2 = \emptyset$, le couple $(n, \eta)$ étant remplacé par $(n_2, \eta[L_2, \gamma])$. De même que l'on a construit ci-dessus des éléments $X^\zeta(a, w', w'')$, on construit dans $\mathfrak{g}_{n_1,\eta[L_1,\gamma],\mathrm{iso}}(F)$ un élément $X^\zeta(a^{L_1}, w')$ et dans $\mathfrak{g}_{n_2,\eta[L_2,\gamma],\mathrm{iso}}(F)$ un élément $X^\zeta(a^{L_2}, w'')$. La correspondance endoscopique entre classes de conjugaison stable est un peu perturbée par les signes $\zeta$. Précisément, pour $\zeta_1, \zeta_2 = \pm$, il existe $\zeta = \pm$ tel que la classe de conjugaison stable de $(X^{\zeta_1}(a^{L_1}, w'), X^{\zeta_2}(a^{L_2}, w''))$ dans $\mathfrak{g}_{n_1,\eta[L_1,\gamma],\mathrm{iso}}(F) \times \mathfrak{g}_{n_2,\eta[L_2,\gamma],\mathrm{iso}}(F)$ corresponde à la classe totale de conjugaison stable de $X^\zeta(a, w', w'')$. Ainsi, pour $e \in \mathcal{E}$ et $u \in \mathcal{U}$, le facteur de transfert $\Delta_{n_1,\eta[L_1,\gamma],n_2,\eta[L_2,\gamma]}((X^{\zeta_1}(a^{L_1}, w'), X^{\zeta_2}(a^{L_2}, w'')), X^\zeta(a, e, u))$ est défini et non nul.

*Remarque.* Il peut arriver que $n_1 = 0$ ou $n_2 = 0$. Dans ce cas, les termes $X^{\zeta_1}(a^{L_1}, w')$ ou $X^{\zeta_2}(a^{L_2}, w'')$ disparaissent.

Posons

$$\begin{aligned} d(r', r'', \gamma, L_2) &= \mathrm{sgn}(\eta\varpi^{-\mathrm{val}_F(\eta)})^{(R-r)/2}\, \mathrm{sgn}_{CD}(w')^{(R-r)/2}\, \mathrm{sgn}_{CD}(w'')^{(R-r)/2+\mathrm{val}_F(\eta)} \\ &\quad \times \left(\prod_{j\in\hat{J}} \mathrm{sgn}(\gamma_{j-1}\gamma_j)^{j/2-1}\, \mathrm{sgn}(\gamma_{j-1} - \gamma_j)\right) \\ &\quad \times \left(\prod_{j=R-r+1,\ldots,R} \mathrm{sgn}(\gamma_j)^{(R-r)/2}\right) \\ &\quad \times\, \mathrm{sgn}(-1)^{\mathrm{val}_F(\eta[L_2,\gamma])B}\, \mathrm{sgn}(\eta[L_2,\gamma]\varpi^{-\mathrm{val}_F(\eta[L_2,\gamma])})^B\, \mathrm{sgn}_{CD}(w'')^B, \end{aligned}$$

où $B = 0$ si $r' \geqslant r''$ ou $B = 1$ si $r' < r''$.

Lemme. *Sous les hypothèses ci-dessus, on a l'égalité*

$$\begin{aligned} &\Delta_{n_1,\eta[L_1,\gamma],n_2,\eta[L_2,\gamma]}((X^{\zeta_1}(a^{L_1}, w'), X^{\zeta_2}(a^{L_2}, w'')), X^\zeta(a, e, u)) \\ &\quad = d(r', r'', \gamma, L_2)\kappa^{L_2}(e)\kappa^{\mathcal{U}}(u). \end{aligned}$$

*Preuve.* Pour tout polynôme $Q$, on note $Q'$ son polynôme dérivé. Notons $P$ le polynôme caractéristique de $X^\zeta(a, e, u)$, vu comme endomorphisme de

$V_{\sharp(a,e,u)}$. Pour $j\in\{1,\dots,t'_2\}$, posons

$$C_{l_2(j)}=(-1)^n\eta[F_{l_2(j)}(\gamma):F]c[\gamma,e]_{l_2(j)}a_{l_2(j)}^{-1}P'(a_{l_2(j)})$$

et notons $\mathrm{sgn}_{l_2(j)}$ le caractère quadratique de $F^{\natural}_{l_2(j)}(\gamma)^{\times}$ associé à l'extension quadratique $F_{l_2(j)}(\gamma)$. Pour $k\in K''$, posons

$$C_k=(-1)^n\eta[E_k:F]\varpi^{u_k}X_k^{-1}P'(X_k),$$

et notons $\mathrm{sgn}_k$ le caractère quadratique de $E_k^{\natural}$ associé à l'extension quadratique $E_k$.

*Remarque.* Les formules ci-dessus ne définissent $C_{l_2(j)}$ et $C_k$ que modulo les groupes $\mathrm{norme}_{F_{l_2(j)}(\gamma)/F^{\natural}_{l_2(j)}(\gamma)}(F_{l_2(j)}(\gamma)^{\times})$, respectivement $\mathrm{norme}_{E_k/E_k^{\natural}}(E_k^{\times})$. C'est sans importance pour la suite.

D'après [9] proposition X.8, on a l'égalité

$$\begin{aligned}&\Delta_{n_1,\eta[L_1,\gamma],n_2,\eta[L_2,\gamma]}((X^{\zeta_1}(a^{L_1},w'),X^{\zeta_2}(a^{L_2},w'')),X^{\zeta}(a,e,u))\\ &=\left(\prod_{j=1,\dots,t'_2}\mathrm{sgn}_{l_2(j)}(C_{l_2(j)})\right)\left(\prod_{k\in K''}\mathrm{sgn}_k(C_k)\right).\end{aligned}\tag{1}$$

Pour $k\in K''$, le caractère $\mathrm{sgn}_k$ est non ramifié. Pour calculer $\mathrm{sgn}_k(C_k)$, il suffit de calculer la valuation de $C_k$ modulo $2\,\mathbb{Z}$. On voit facilement que la valuation de $(-1)^n[E_k:F]X_k^{-1}P'(X_k)$ est nulle. Celle de $\eta\varpi u_k$ est $\mathrm{val}_F(\eta)+u_k$. D'où $\mathrm{sgn}_k(C_k)=(-1)^{\mathrm{val}_F(\eta)+u_k}$. Le produit des $(-1)^{u_k}$ pour $k\in K''$ est égal à $\kappa^{\mathcal{U}}(u)$. Le produit des $(-1)^{\mathrm{val}_F(\eta)}$ est $(-1)^{|K''|\,\mathrm{val}_F(\eta)}$. Mais $(-1)^{|K''|}=\mathrm{sgn}_{CD}(w'')$. D'où

$$\prod_{k\in K''}\mathrm{sgn}_k(C_k)=\kappa^{\mathcal{U}}(u)\,\mathrm{sgn}_{CD}(w'')^{\mathrm{val}_F(\eta)}.\tag{2}$$

Fixons $j=1,\dots,t'_2$. Posons pour simplifier $l_1=l_1(j)$, $l_2=l_2(j)$ et notons $l$ l'élément de $\hat{J}$ tel que $\{l_1,l_2\}=\{l-1,l\}$. Le polynôme $P$ se décompose en produit des polynômes caractéristiques $P_k$ des $X_k$, pour $k=1,\dots,t$, et des polynômes caractéristiques $P_h$ des $a_h$, pour $h=1,\dots,R$. On a

$$P'(a_{l_2})=P'_{l_2}(a_{l_2})\left(\prod_{h=1,\dots,R;h\neq l_2}P_h(a_{l_2})\right)\left(\prod_{k=1,\dots,t}P_k(a_{l_2})\right).$$

https://doi.org/10.1017/nmj.2017.30 Published online by Cambridge University Press

On vérifie que tous les termes ci-dessus sauf le premier appartiennent à $F_{l_2}^{\natural}(\gamma)^{\times}$. Pour le premier, son produit avec $a_{l_2}$ appartient à ce groupe. On a calculé les images par $\mathrm{sgn}_{l_2}$ de presque tous ces termes en [9] page 400. Pour $k=1,\ldots,t$, on a $\mathrm{sgn}_{l_2}(P_k(a_{l_2}))=-\mathrm{sgn}(-1)^{[E_k:F]/2}$. Parce que $[E_k:F]/2=\beta_k$, on a $\sum_{k=1,\ldots,t}[E_k:F]/2=N$. On a aussi $(-1)^t=\mathrm{sgn}_{CD}(w')\,\mathrm{sgn}_{CD}(w'')$. On obtient

$$\mathrm{sgn}_{l_2}\left(\prod_{k=1,\ldots,t}P_k(a_{l_2})\right)=\mathrm{sgn}(-1)^N\,\mathrm{sgn}_{CD}(w')\,\mathrm{sgn}_{CD}(w'').$$

Soit $h\in\{1,\ldots,l-2\}$. On a $\mathrm{sgn}_{l_2}(P_h(a_{l_2}))=\mathrm{sgn}(-1)^{[F_h(\gamma):F]/2}$. Par construction, tous les $[F_h(\gamma):F]$ sont impairs et le terme ci-dessus vaut $\mathrm{sgn}(-1)$. Puisque $l$ est pair, le produit de ces termes sur $h=1,\ldots,l-2$ vaut 1. Pour $h\in\{l+1,\ldots,R\}$, on a $\mathrm{sgn}_{l_2}(P_h(a_{l_2}))=\mathrm{sgn}(-1)^{1+[F_{l_2}(\gamma):F]/2}\,\mathrm{sgn}(\gamma_{l_2}\gamma_h)$. Comme ci-dessus, $[F_{l_2}(\gamma):F]/2$ est impair et le terme ci-dessus vaut $\mathrm{sgn}(\gamma_{l_2}\gamma_h)$. Puisque $l$ est pair, le produit de ces termes sur $h=l+1,\ldots,R$ vaut $\mathrm{sgn}(\gamma_{l_2})^R\prod_{h=l+1,\ldots,R}\mathrm{sgn}(\gamma_h)$. On a $\mathrm{sgn}_{l_2}(a_{l_2}P'_{l_2}(a_{l_2}))=\mathrm{sgn}((-1)^{[F_{l_2}/F]/2}[F_{l_2}:F])$, ou encore $\mathrm{sgn}(-[F_{l_2}:F])$. Il reste un dernier terme $P_{l_1}(a_{l_2})$, dont l'image par $\mathrm{sgn}_{l_2}$ n'est pas calculée dans [9]. Le polynôme caractéristique de $a_{l_1}$ est $P_{l_1}(Y)=Y^{2l-2}-\varpi\gamma_{l_1}$. Donc $P_{l_1}(a_{l_2})=a_{l_2}^{2l-2}-\varpi\gamma_{l_1}=\varpi(\gamma_{l_2}-\gamma_{l_1})$. Mais $-\varpi^{-1}\gamma_{l_2}$ est une norme de l'extension $F_{l_2}(\gamma)/F_{l_2}^{\natural}(\gamma)$ (c'est la norme de $\varpi^{-1}a_{l_2}^{l-1}$). On a donc

$$\begin{aligned}\mathrm{sgn}_{l_2}(P_{l_1}(a_{l_2}))&=\mathrm{sgn}_{l_2}(-\varpi^{-1}\gamma_{l_2}\varpi(\gamma_{l_2}-\gamma_{l_1}))\\&=\mathrm{sgn}_{l_2}(-\gamma_{l_2}(\gamma_{l_2}-\gamma_{l_1}))=\mathrm{sgn}(-\gamma_{l_2}(\gamma_{l_2}-\gamma_{l_1})),\end{aligned}$$

puisque $\mathrm{sgn}_{l_2}$ coïncide avec sgn sur $\mathfrak{o}^{\times}$. En rassemblant ces calculs, on obtient

$$\begin{aligned}&\mathrm{sgn}_{a_{l_2}}(a_{l_2}P'(a_{l_2}))\\&\quad=\mathrm{sgn}(-1)^N\,\mathrm{sgn}_{CD}(w')\,\mathrm{sgn}_{CD}(w'')\,\mathrm{sgn}([F_{l_2}(\gamma):F])\,\mathrm{sgn}(\gamma_{l_2}-\gamma_{l_1})\\&\qquad\times\ \mathrm{sgn}(\gamma_{l_2})^{R+1}\prod_{h=l+1,\ldots,R}\mathrm{sgn}(\gamma_h).\end{aligned}$$

Le terme $C_{l_2}$ est le produit de $a_{l_2}P'(a_{l_2})$ et de $(-1)^n\eta[F_{l_2}(\gamma):F]c[\gamma,e]_{l_2}a_{l_2}^{-2}$. Le terme $a_{l_2}^{-2}$ est remplacé par $-1$ car $-a_{l_2}^{-2}$ est la norme de $a_{l_2}^{-1}$. Le facteur $[F_{l_2}(\gamma):F]$ compense celui intervenant dans la formule précédente. On a

$$\mathrm{sgn}_{l_2}(\eta)=\mathrm{sgn}_{l_2}(\eta\varpi^{-\,\mathrm{val}_F(\eta)})\,\mathrm{sgn}_{l_2}(\varpi^{\mathrm{val}_F(\eta)}).$$

Le premier facteur est remplacé par $\mathrm{sgn}(\eta\varpi^{-\mathrm{val}_F(\eta)})$. Puisque $-\varpi^{-1}\gamma_{l_2}$ est une norme, le second facteur est remplacé par $\mathrm{sgn}(-\gamma_{l_2})^{\mathrm{val}_F(\eta)}$, ou encore, puisque $\mathrm{val}_F(\eta)$ est de la même parité que $R$, par $\mathrm{sgn}(-\gamma_{l_2})^R$. En se reportant à la définition de $c[\gamma,e]_{l_2}$, on peut écrire $c[\gamma,e]_{l_2}=(-1)^{l_2}\gamma_{l_2}e_{l_2}(-\gamma_{l_2})^B$, où $B$ a été défini avant l'énoncé. D'où

$$\mathrm{sgn}_{l_2}(c[\gamma,e]_{l_2})=\mathrm{sgn}((-1)^{l_2}\gamma_{l_2}e_{l_2})\,\mathrm{sgn}(\gamma_{l_2})^B.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}\mathrm{sgn}_{l_2}(C_{l_2}) = \mathrm{sgn}(-1)^{N+n+R+1+l_2}\,&\mathrm{sgn}(\eta\varpi^{-\mathrm{val}_F(\eta)})\,\mathrm{sgn}_{CD}(w')\,\mathrm{sgn}_{CD}(w'')\\ &\times\ \mathrm{sgn}(e_{l_2})\,\mathrm{sgn}(\gamma_{l_2}-\gamma_{l_1})\\ &\times\ \mathrm{sgn}(-\gamma_{l_2})^B\prod_{h=l+1,\ldots,R}\mathrm{sgn}(\gamma_h).\end{aligned}$$

On a $n-N=(r'^2+r''^2)/2$. Puisque $r'$ et $r''$ sont de même parité, on constate que $n-N$ est de la même parité que $r'$ et $r''$, ou encore de $R$. Le premier terme se simplifie donc en $\mathrm{sgn}(-1)^{1+l_2}$. On constate aussi que $(-1)^{1+l_2}(\gamma_{l_2}-\gamma_{l_1})=\gamma_{l-1}-\gamma_l$. D'où

$$\begin{aligned}\mathrm{sgn}_{l_2}(C_{l_2}) &= \mathrm{sgn}(\eta\varpi^{-\mathrm{val}_F(\eta)})\,\mathrm{sgn}_{CD}(w')\,\mathrm{sgn}_{CD}(w'')\,\mathrm{sgn}(e_{l_2})\,\mathrm{sgn}(\gamma_{l-1}-\gamma_l)\\ &\times\ \mathrm{sgn}(-\gamma_{l_2})^B\prod_{h=l+1,\ldots,R}\mathrm{sgn}(\gamma_h).\end{aligned}\tag{3}$$

Rétablissons l'indice $j$ et faisons le produit de ces expressions sur $j=1,\ldots,t'_2=(R-r)/2$. Les premiers termes donnent $\mathrm{sgn}(\eta\varpi^{-\mathrm{val}_F(\eta)})^{(R-r)/2}\,\mathrm{sgn}_{CD}(w')^{(R-r)/2}\,\mathrm{sgn}_{CD}(w'')^{(R-r)/2}$. Le produit des $\mathrm{sgn}(e_{l_2(j)})$ est égal à $\kappa^{L_2}(e)$. Le produit des termes suivants est $\prod_{j\in\hat{J}}\mathrm{sgn}(\gamma_{j-1}-\gamma_j)$. On a

$$\prod_{j=1,\ldots,t'_2}\mathrm{sgn}(-\gamma_{l_2(j)})=\mathrm{sgn}(-1)^{t'_2}\,\mathrm{sgn}\left(\prod_{j=1,\ldots,t'_2}\gamma_j^{L_2}\right).$$

Puisque $t'_2$ est de la même parité que $\mathrm{val}_F(\eta[L_2,\gamma])$, le premier terme vaut $\mathrm{sgn}(-1)^{\mathrm{val}_F(\eta[L_2,\gamma])}$. Par définition de $\eta[L_2,\gamma]$, le second terme vaut $\mathrm{sgn}(\eta[L_2,\gamma]\varpi^{-\mathrm{val}_F(\eta[L_2,\gamma])})\,\mathrm{sgn}_{CD}(w'')$. Considérons le dernier produit de la formule (3). Pour $h\in\{R-r+1,\ldots,R\}$, le terme $\mathrm{sgn}(\gamma_h)$ intervient pour tout $j$. Le produit en $j$ donne $\mathrm{sgn}(\gamma_h)^{(R-r)/2}$. Pour $h\in\hat{J}$, les termes

https://doi.org/10.1017/nmj.2017.30 Published online by Cambridge University Press

$\mathrm{sgn}(\gamma_{h-1})$ et $\mathrm{sgn}(\gamma_h)$ interviennent pour les $j<h/2$. Le produit donne $\mathrm{sgn}(\gamma_{h-1}\gamma_h)^{h/2-1}$. D'où

$$\begin{aligned}\prod_{j=1,\ldots,t_2'} & \mathrm{sgn}_{l_2(j)}(C_{l_2(j)}) \\ &= \kappa^{L_2}(e)(\mathrm{sgn}(\eta\varpi^{-\,\mathrm{val}_F(\eta)})\,\mathrm{sgn}_{CD}(w')\,\mathrm{sgn}_{CD}(w''))^{(R-r)/2} \\ &\quad\times\left(\prod_{j\in\hat{J}}\mathrm{sgn}(\gamma_{j-1}\gamma_j)^{j/2-1}\,\mathrm{sgn}(\gamma_{j-1}-\gamma_j)\right) \\ &\quad\times\left(\prod_{j=R-r+1,\ldots,R}\mathrm{sgn}(\gamma_j)^{(R-r)/2}\right) \\ &\quad\times\,\mathrm{sgn}(-1)^{\mathrm{val}_F(\eta[L_2,\gamma])B}\,\mathrm{sgn}(\eta[L_2,\gamma]\varpi^{-\,\mathrm{val}_F(\eta[L_2,\gamma])})^B\,\mathrm{sgn}_{CD}(w'')^B. \end{aligned}\tag{4}$$

Le lemme résulte de (1), (2) et (4). ∎

## 2.7 Démonstration du (ii) du lemme 2.2

Soit $(\bar{n}_1,\bar{n}_2)\in D(n)$ et $\eta_1,\eta_2\in F^\times/F^{\times 2}$ tels que $\eta_1\eta_2=\eta$. Soit $\bar{Y}_1$, respectivement $\bar{Y}_2$, un élément régulier, elliptique et topologiquement nilpotent de $\mathfrak{g}_{\bar{n}_1,\eta_1}(F)$, respectivement $\mathfrak{g}_{\bar{n}_2,\eta_2}(F)$. On va calculer l'intégrale orbitale endoscopique $J^{\mathrm{endo}}(\bar{Y}_1,\bar{Y}_2,f)$, cf. 1.2 dont les définitions s'adaptent aux algèbres de Lie.

Soit $\sharp=$ iso ou an. Pour $(L_1,L_2)\in\mathcal{L}$, $\gamma\in\Gamma$ et $a\in A(\gamma)$, posons

$$\begin{aligned}E_\sharp[a,L_1,L_2](\bar{Y}_1,\bar{Y}_2) &= d(r',r'',\gamma,L_2)\sum_Y \Delta_{\bar{n}_1,\eta_1,\bar{n}_2,\eta_2}((\bar{Y}_1,\bar{Y}_2),Y) \\ &\quad\times\sum_{e\in\mathcal{E}}\sum_{u\in\mathcal{U}}\kappa^{L_2}(e)\kappa^{\mathcal{U}}(u)\hat{i}_\sharp[a,e,u](Y).\end{aligned}\tag{1}$$

En utilisant le lemme 2.5, on calcule

$$J^{\mathrm{endo}}(\bar{Y}_1,\bar{Y}_2,f_\sharp)=|\mathcal{L}|^{-1}\sum_{(L_1,L_2)\in\mathcal{L}}\sum_{\gamma\in\Gamma}C(\gamma,L_2)\int_{A(\gamma)}E_\sharp[a,L_1,L_2](\bar{Y}_1,\bar{Y}_2)\,da,$$

où l'on a posé

$$C(\gamma,L_2)=d(r',r'',\gamma,L_2)C(w')C(w'')C(r',r'')\alpha(r',r'',w',w'')\sigma(\gamma).$$

Par définition, on a l'égalité

$$J^{\mathrm{endo}}(\bar{Y}_1,\bar{Y}_2,f)=J^{\mathrm{endo}}(\bar{Y}_1,\bar{Y}_2,f_{\mathrm{iso}})+J^{\mathrm{endo}}(\bar{Y}_1,\bar{Y}_2,f_{\mathrm{an}}).$$

D'où l'égalité

(2)
$$J^{\mathrm{endo}}(\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, f) = |\mathcal{L}|^{-1} \sum_{(L_1,L_2)\in\mathcal{L}} \sum_{\gamma\in\Gamma} C(\gamma, L_2) \int_{A(\gamma)} E[a, L_1, L_2](\bar{Y}_1, \bar{Y}_2)\, da,$$

où l'on a posé

$$E[a, L_1, L_2](\bar{Y}_1, \bar{Y}_2) = E_{\mathrm{iso}}[a, L_1, L_2](\bar{Y}_1, \bar{Y}_2) + E_{\mathrm{an}}[a, L_1, L_2](\bar{Y}_1, \bar{Y}_2).$$

Fixons $\sharp = \mathrm{iso}$ ou an, $(L_1, L_2) \in \mathcal{L}$, $\gamma \in \Gamma$ et $a \in A(\gamma)$. Rappelons que, pour $e \in \mathcal{E}$ et $u \in \mathcal{U}$, on a l'égalité $\hat{i}_\sharp[a, e, u] = \frac{1}{2}(\hat{i}_\sharp^+[a, e, u] + \hat{i}_\sharp^-[a, e, u])$. Supposons que $n_1 \neq 0$ et $n_2 \neq 0$. On a défini en 2.6 une application qui, à $\zeta_1, \zeta_2 = \pm$, associe $\zeta = \pm$ de sorte que les classes de conjugaison stable de $(X^{\zeta_1}(a^{L_1}, w''), X^{\zeta_2}(a^{L_2}, w''))$ et $X^{\zeta}(a, e, u)$ se correspondent. Notons-la $Z$. Elle est surjective et ses fibres ont deux éléments. On a donc

$$\hat{i}_\sharp[a, e, u] = \frac{1}{4} \sum_{\zeta_1,\zeta_2=\pm} \hat{i}_\sharp^{Z(\zeta_1,\zeta_2)}[a, e, u].$$

Utilisons le lemme 2.6. Alors

$$\begin{aligned}\kappa^{L_2}(e)\kappa^{\mathcal{U}}(u)\hat{i}_\sharp[a, e, u] = \frac{1}{4} \sum_{\zeta_1,\zeta_2=\pm} & d(r', r'', \gamma, L_2)\\ & \times \Delta_{n_1,\eta[L_1,\gamma],n_2,\eta[L_2,\gamma]}\,((X^{\zeta_1}(a^{L_1}, w'), X^{\zeta_2}(a^{L_2}, w'')),\\ & X^{Z(\zeta_1,\zeta_2)}(a, e, u))\, \hat{i}_\sharp^{Z(\zeta_1,\zeta_2)}[a, e, u].\end{aligned}$$

L'égalité (1) se récrit

$$\begin{aligned}&E_\sharp[a, L_1, L_2](\bar{Y}_1, \bar{Y}_2)\\ &\quad = \frac{1}{4} \sum_{\zeta_1,\zeta_2=\pm} \sum_{Y} \Delta_{\bar{n}_1,\eta_1,\bar{n}_2,\eta_2}((\bar{Y}_1, \bar{Y}_2), Y) E_\sharp^{\zeta_1,\zeta_2}[a, L_1, L_2](Y),\end{aligned} \tag{3}$$

où

$$\begin{aligned}&E_\sharp^{\zeta_1,\zeta_2}[a, L_1, L_2](Y)\\ &\quad = \sum_{e\in\mathcal{E}} \sum_{u\in\mathcal{U}} \Delta_{n_1,\eta[L_1,\gamma],n_2,\eta[L_2,\gamma]}\,((X^{\zeta_1}(a^{L_1}, w'), X^{\zeta_2}(a^{L_2}, w'')),\\ &\qquad X^{Z(\zeta_1,\zeta_2)}(a, e, u))\, \hat{i}_\sharp^{Z(\zeta_1,\zeta_2)}[a, e, u](Y).\end{aligned}$$

https://doi.org/10.1017/nmj.2017.30 Published online by Cambridge University Press

Fixons $\zeta_1$ et $\zeta_2$. Dans la formule définissant $E_{\sharp}^{\zeta_1,\zeta_2}[a, L_1, L_2](Y)$, la somme est en réalité limitée aux $(e, u)$ tels que $\sharp(a, e, u) = \sharp$ (pour les autres, $\hat{i}_{\sharp}^{Z(\zeta_1,\zeta_2)}[a, e, u]$ est nulle). Les $X^{Z(\zeta_1,\zeta_2)}(a, e, u)$ parcourent un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $G_{\sharp}(F)$ dans la classe de conjugaison stable correspondant à celle de $(X^{\zeta_1}(a^{L_1}, w'), X^{\zeta_2}(a^{L_2}, w''))$. On voit qu'aux différences de notations et à une constante près, $E_{\sharp}^{\zeta_1,\zeta_2}[a, L_1, L_2](Y)$ n'est autre que le membre de droite de l'égalité de la conjecture 2 de [10] VIII.7. Cette conjecture est démontrée depuis que Ngo Bao Chau a démontré le lemme fondamental. On va appliquer cette conjecture. Posons

$$\begin{aligned} &C_{\sharp}(n_1, \eta[L_1, \gamma], n_2, \eta[L_2, \gamma]) \\ &\quad = \gamma_{\psi_F}(\mathfrak{g}_{n_1,\eta[L_1,\gamma],\mathrm{iso}}(F))\gamma_{\psi_F}(\mathfrak{g}_{n_2,\eta[L_2,\gamma],\mathrm{iso}}(F))\gamma_{\psi_F}(\mathfrak{g}_{\sharp}(F))^{-1}, \end{aligned}$$

avec les définitions de [10] VIII.5. Pour $j = 1, 2$ et pour un élément régulier $Y_j$ de $\mathfrak{g}_{n_j,\eta[L_j,\gamma],\mathrm{iso}}(F)$, notons $z_{\mathrm{iso}}(Y_j)$ le nombre de classes de conjugaison par $G_{n_j,\eta[L_j,\gamma],\mathrm{iso}}(F)$ dans la classe de conjugaison stable de $Y_j$. Rappelons que $X^{\zeta_1}(a^{L_1}, w')$ est un élément d'une certaine classe de conjugaison stable, cf. 2.6. Un ensemble de classes de conjugaison par $G_{n_1,\eta[L_1,\gamma],\mathrm{iso}}(F)$ dans cette classe de conjugaison stable est formé d'éléments $X^{\zeta_1}(a^{L_1}, e_1, u_1)$, où $e_1$ et $u_1$ décrivent des ensembles $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{U}_1$ analogues à $\mathcal{E}$ et $\mathcal{U}$, avec la restriction $\sharp(a^{L_1}, e_1, u_1) = \mathrm{iso}$. On définit pour ces éléments une fonction $\hat{i}_{\mathrm{iso}}^{\zeta_1}[a^{L_1}, e_1, u_1]$ similaire à $\hat{i}_{\sharp}^{\zeta}[a, e, u]$. Si la condition $\sharp(a^{L_1}, e_1, u_1) = \mathrm{iso}$ n'est pas vérifiée, on pose $\hat{i}_{\mathrm{iso}}^{\zeta_1}[a^{L_1}, e_1, u_1] = 0$. On pose des définitions analogues en remplaçant l'indice 1 par 2 (et $w'$ par $w''$). Alors la conjecture 2 de [10] VIII.7 fournit l'égalité

$$\begin{aligned} E_{\sharp}^{\zeta_1,\zeta_2}[a, L_1, L_2](Y) = {} & C_{\sharp}(n_1, \eta[L_1, \gamma], n_2, \eta[L_2, \gamma]) \\ & \times \sum_{e_1\in\mathcal{E}_1, u_1\in\mathcal{U}_1, e_2\in\mathcal{E}_2, u_2\in\mathcal{U}_2} \sum_{Y_1,Y_2} z_{\mathrm{iso}}(Y_1)^{-1} z_{\mathrm{iso}}(Y_2)^{-1} \\ & \times \Delta_{n_1,\eta[L_1,\gamma],n_2,\eta[L_2,\gamma]}((Y_1, Y_2), Y)\hat{i}_{\mathrm{iso}}^{\zeta_1}[a^{L_1}, e_1, u_1] \\ & \times (Y_1)\hat{i}_{\mathrm{iso}}^{\zeta_2}[a^{L_2}, e_2, u_2](Y_2), \end{aligned} \tag{4}$$

où l'on somme sur les $(Y_1, Y_2)$, elliptiques réguliers dans $\mathfrak{g}_{n_1,\eta[L_1,\gamma],\mathrm{iso}}(F) \times \mathfrak{g}_{n_2,\eta[L_2,\gamma],\mathrm{iso}}(F)$, à conjugaison près par $G_{n_1,\eta[L_1,\gamma],\mathrm{iso}}(F) \times G_{n_2,\eta[L_2,\gamma],\mathrm{iso}}(F)$.

Calculons $C_{\sharp}(n_1, \eta[L_1, \gamma], n_2, \eta[L_2, \gamma])$. D'après [6] 3.15, on a les égalités

$\gamma_{\psi_F}(\mathfrak{g}_{\sharp}(F)) = \gamma_{\psi_F}^{n}\,\mathrm{sgn}(\eta\varpi^{-\mathrm{val}_F(\eta)})$, si $\mathrm{val}_F(\eta)$ est pair ;

$\gamma_{\psi_F}(\mathfrak{g}_{\sharp}(F)) = \gamma_{\psi_F}^{n-1}$ si $\mathrm{val}_F(\eta)$ est impair.

Le terme $\gamma_{\psi_F}$ est une constante de Weil élémentaire. Il vérifie l'égalité $\gamma_{\psi_F}^2 = \mathrm{sgn}(-1)$. On voit tout d'abord que les termes ci-dessus ne dépendent pas de l'indice $\sharp$. La constante $C_\sharp(n_1, \eta[L_1, \gamma], n_2, \eta[L_2, \gamma])$ non plus, on la note simplement $C(n_1, \eta[L_1, \gamma], n_2, \eta[L_2, \gamma])$. Pour $j = 1, 2$, on a des formules analogues pour $\gamma_{\psi_F}(\mathfrak{g}_{n_j,\eta[L_j,\gamma],\mathrm{iso}}(F))$. On obtient les égalités

$$C(n_1, \eta[L_1, \gamma], n_2, \eta[L_2, \gamma]) = \begin{cases} 1, & \text{pour } \mathrm{val}_F(\eta[L_1,\gamma]) \text{ pair} \\ & \text{et } \mathrm{val}_F(\eta[L_2,\gamma]) \text{ pair ;} \\ \mathrm{sgn}(\eta[L_1,\gamma]\varpi^{-\mathrm{val}_F(\eta[L_1,\gamma])}), & \text{pour } \mathrm{val}_F(\eta[L_1,\gamma]) \text{ pair} \\ & \text{et } \mathrm{val}_F(\eta[L_2,\gamma]) \text{ impair ;} \\ \mathrm{sgn}(\eta[L_2,\gamma]\varpi^{-\mathrm{val}_F(\eta[L_2,\gamma])}), & \text{pour } \mathrm{val}_F(\eta[L_1,\gamma]) \text{ impair} \\ & \text{et } \mathrm{val}_F(\eta[L_2,\gamma]) \text{ pair ;} \\ \mathrm{sgn}(-\eta\varpi^{-\mathrm{val}_F(\eta)}), & \text{pour } \mathrm{val}_F(\eta[L_1,\gamma]) \text{ impair} \\ & \text{et } \mathrm{val}_F(\eta[L_2,\gamma]) \text{ impair.} \end{cases}$$

Insérons l'égalité (4) dans la formule (3). Pour $j = 1, 2$, posons

$$\hat{i}_{\mathrm{iso}}[a^{L_j}, e_j, u_j] = \tfrac{1}{2}(\hat{i}^+_{\mathrm{iso}}[a^{L_j}, e_j, u_j] + \hat{i}^-_{\mathrm{iso}}[a^{L_j}, e_j, u_j]).$$

On obtient

$$\begin{aligned} E_\sharp[a, L_1, L_2](\bar{Y}_1, \bar{Y}_2) = {} & C(n_1, \eta[L_1, \gamma], n_2, \eta[L_2, \gamma]) \\ & \times \sum_{e_1\in\mathcal{E}_1, u_1\in\mathcal{U}_1, e_2\in\mathcal{E}_2, u_2\in\mathcal{U}_2} \sum_{Y_1, Y_2} z_{\mathrm{iso}}(Y_1)^{-1} z_{\mathrm{iso}}(Y_2)^{-1} \\ & \times S_{\sharp, L_1, L_2, \gamma}(\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, Y_1, Y_2)\hat{i}_{\mathrm{iso}}[a^{L_1}, e_1, u_1](Y_1) \\ & \times \hat{i}_{\mathrm{iso}}[a^{L_2}, e_2, u_2](Y_2), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} S_{\sharp, L_1, L_2, \gamma}(\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, Y_1, Y_2) = {} & \sum_{Y} \Delta_{\bar{n}_1, \eta_1, \bar{n}_2, \eta_2}((\bar{Y}_1, \bar{Y}_2), Y) \\ & \times \Delta_{n_1, \eta[L_1,\gamma], n_2, \eta[L_2,\gamma]}((Y_1, Y_2), Y). \end{aligned}$$

Rappelons que $Y$ décrit ici les éléments elliptiques réguliers de $\mathfrak{g}_\sharp(F)$, à conjugaison près par $G_\sharp(F)$. Puisque $E[a, L_1, L_2](\bar{Y}_1, \bar{Y}_2)$ est la somme de $E_{\mathrm{iso}}[a, L_1, L_2](\bar{Y}_1, \bar{Y}_2)$ et de $E_{\mathrm{an}}[a, L_1, L_2](\bar{Y}_1, \bar{Y}_2)$, on a

https://doi.org/10.1017/nmj.2017.30 Published online by Cambridge University Press

$$
\begin{aligned}
E[a,L_1,L_2](\bar{Y}_1,\bar{Y}_2) = {} & C(n_1,\eta[L_1,\gamma],n_2,\eta[L_2,\gamma]) \\
& \times \sum_{e_1\in\mathcal{E}_1,u_1\in\mathcal{U}_1,e_2\in\mathcal{E}_2,u_2\in\mathcal{U}_2} \sum_{Y_1,Y_2} z_{\mathrm{iso}}(Y_1)^{-1} \\
& \times z_{\mathrm{iso}}(Y_2)^{-1} S_{L_1,L_2,\gamma}(\bar{Y}_1,\bar{Y}_2,Y_1,Y_2) \\
& \times \hat{i}_{\mathrm{iso}}[a^{L_1},e_1,u_1](Y_1)\hat{i}_{\mathrm{iso}}[a^{L_2},e_2,u_2](Y_2), \qquad (5)
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
S_{L_1,L_2,\gamma}(\bar{Y}_1,\bar{Y}_2,Y_1,Y_2) = {} & S_{\mathrm{iso},L_1,L_2,\gamma}(\bar{Y}_1,\bar{Y}_2,Y_1,Y_2) \\
& + S_{\mathrm{an},L_1,L_2,\gamma}(\bar{Y}_1,\bar{Y}_2,Y_1,Y_2).
\end{aligned}
$$

On a supposé que $n_1\neq 0$ et $n_2\neq 0$. Supposons que ces conditions ne sont pas vérifiées, par exemple que $n_2=0$. On reprend le calcul. Les seules différences résident dans le fait que les termes indexés par 2 doivent disparaître. En particulier les $\zeta_2$. Les $\frac{1}{4}$ figurant dans les calculs sont remplacés par des $\frac{1}{2}$. On obtient encore la formule (5), dont on fait disparaître les termes indexés par 2.

Les propriétés d'inversion des facteurs de transfert nous disent que $S_{L_1,L_2,\gamma}(\bar{Y}_1,\bar{Y}_2,Y_1,Y_2)=0$ sauf si $\bar{n}_1=n_1$, $\eta_1=\eta[L_1,\gamma]$, $\bar{n}_2=n_2$ et $\eta_2=\eta[L_2,\gamma]$.

Supposons que $(\bar{n}_1,\bar{n}_2)\neq(n_1,n_2)$ ou que $(\bar{n}_1,\bar{n}_2)=(n_1,n_2)$ mais que $(\eta_1,\eta_2)$ ne vérifie pas la condition (1) de 2.2 (c'est-à-dire $\mathrm{val}_F(\eta_1)\equiv t'_1=t''_1 \bmod 2\,\mathbb{Z}$ et $\mathrm{val}_F(\eta_2)\equiv t'_2=t''_2 \bmod 2\,\mathbb{Z}$). Remarquons que les couples $(\eta[L_1,\gamma],\eta[L_2,\gamma])$ dépendent de $L_1$, $L_2$ et $\gamma$ mais vérifient par construction cette condition. Alors $S_{L_1,L_2,\gamma}(\bar{Y}_1,\bar{Y}_2,Y_1,Y_2)$ est toujours nulle. Donc $E[a,L_1,L_2](\bar{Y}_1,\bar{Y}_2)$ aussi. La formule (2) implique que $J^{\mathrm{endo}}(\bar{Y}_1,\bar{Y}_2,f)=0$. Cela étant vrai pour tous $\bar{Y}_1,\bar{Y}_2$, on a $\mathrm{transfert}_{\bar{n}_1,\eta_1,\bar{n}_2,\eta_2}(f)=0$. Cela démontre le (ii) du lemme 2.2.

### 2.8 Démonstration du (i) du lemme 2.2

On poursuit le calcul en supposant que $\bar{n}_1=n_1$, $\bar{n}_2=n_2$ et que $(\eta_1,\eta_2)$ vérifient la condition (1) de 2.2.

Le terme $E[a,L_1,L_2](\bar{Y}_1,\bar{Y}_2)$ n'est non nul que si $\eta[L_1,\gamma]=\eta_1$ et $\eta[L_2,\gamma]=\eta_2$. Le couple $(L_1,L_2)$ étant fixé, on note $\Gamma[L_1,L_2]$ l'ensemble des $\gamma\in\Gamma$ pour lesquels cette condition est vérifiée. Supposons qu'elle le soit. Alors $S_{L_1,L_2,\gamma}(\bar{Y}_1,\bar{Y}_2,Y_1,Y_2)$ est non nulle si et seulement si $(Y_1,Y_2)$ est stablement conjugué à un couple déduit de $(\bar{Y}_1,\bar{Y}_2)$ par un automorphisme de la donnée endoscopique définie par $(n_1,n_2)$. Si $(Y_1,Y_2)$ est un tel élément,

https://doi.org/10.1017/nmj.2017.30 Published online by Cambridge University Press

$S_{L_1,L_2,\gamma}(\bar{Y}_1,\bar{Y}_2,Y_1,Y_2)$ est égal au nombre de termes de la sommation, c'est-à-dire au nombre $z(\bar{Y}_1,\bar{Y}_2)$ de classes de conjugaison dans la classe totale de conjugaison stable de $\mathfrak{g}_{\text{iso}}(F)\cup\mathfrak{g}_{\text{an}}(F)$ correspondant à celle de $(\bar{Y}_1,\bar{Y}_2)$.

Il faut faire attention ici. Parce que l'on travaille simultanément avec les deux groupes $G_{\text{iso}}$ et $G_{\text{an}}$, on a raffiné la notion de donnée endoscopique. Il faut raffiner aussi celle d'automorphismes de cette donnée. On voit que, si $n_1$ et $n_2$ sont tous deux non nuls, il y a deux automorphismes de notre donnée : outre l'identité, il y a l'action d'un élément de $O^-(Q_{n_1,\eta_1,\text{iso}})\times O^-(Q_{n_2,\eta_2,\text{iso}})$.

*Remarque.* Dans le cas où $n_1=n_2$ et $\eta_1=\eta_2$, la permutation des deux groupes $G_{n_1,\eta_1,\text{iso}}$ et $G_{n_2,\eta_2,\text{iso}}$ n'est pas un automorphisme pour notre notion de donnée endoscopique.

Soit $(Y_1,Y_2)$ un couple stablement conjugué à $(\bar{Y}_1,\bar{Y}_2)$. Notons $(\underline{Y}_1,\underline{Y}_2)$ le couple déduit de $(Y_1,Y_2)$ par l'automorphisme non trivial. Il n'est pas stablement conjugué à $(\bar{Y}_1,\bar{Y}_2)$. Cependant, les fonctions $\hat{i}_{\text{iso}}[a^{L_1},e_1,u_1]$ et $\hat{i}_{\text{iso}}[a^{L_2},e_2,u_2]$ sont invariantes par conjugaison non seulement par les groupes spéciaux orthogonaux, mais aussi par les groupes orthogonaux tout entiers. Cela vient de la définition de ces fonctions : par exemple, $\hat{i}_{\text{iso}}[a^{L_1},e_1,u_1]$ est la somme de deux fonctions associées à $X^+(a^{L_1},e_1,u_1)$ et $X^-(a^{L_1},e_1,u_1)$, et ces deux éléments sont justement conjugués par un élément du groupe orthogonal de déterminant $-1$. On en déduit l'égalité

$$\begin{aligned}&\hat{i}_{\text{iso}}[a^{L_1},e_1,u_1](\underline{Y}_1)\hat{i}_{\text{iso}}[a^{L_2},e_2,u_2](\underline{Y}_2)\\&\quad=\hat{i}_{\text{iso}}[a^{L_1},e_1,u_1](Y_1)\hat{i}_{\text{iso}}[a^{L_2},e_2,u_2](Y_2).\end{aligned}$$

Dans la formule (5) du paragraphe précédent, les couples $(Y_1,Y_2)$ sont simplement ceux qui sont stablement conjugués à $(\bar{Y}_1,\bar{Y}_2)$, ainsi que leurs images $(\underline{Y}_1,\underline{Y}_2)$ par automorphisme. Ce qui précède montre que ces derniers donnent la même contribution que les premiers. On peut donc sommer seulement sur les premiers, en multipliant le tout par 2. On calcule facilement que $z(\bar{Y}_1,\bar{Y}_2)=4z_{\text{iso}}(\bar{Y}_1)z_{\text{iso}}(\bar{Y}_2)$. En posant $\beta=1$ (sous notre hypothèse $n_1\neq 0$, $n_2\neq 0$), la formule (5) devient

$$\begin{aligned}E[a,L_1,L_2](\bar{Y}_1,\bar{Y}_2)=2^{1+2\beta}C(n_1,\eta_1,n_2,\eta_2)&\sum_{(Y_1,Y_2)}\\&\times\sum_{e_1\in\mathcal{E}_1,u_1\in\mathcal{U}_1,e_2\in\mathcal{E}_2,u_2\in\mathcal{U}_2}\\&\times\hat{i}_{\text{iso}}[a^{L_1},e_1,u_1](Y_1)\hat{i}_{\text{iso}}[a^{L_2},e_2,u_2](Y_2),\end{aligned}$$

où l'on somme sur les couples $(Y_1, Y_2)$ stablement conjugués à $(\bar{Y}_1, \bar{Y}_2)$, pris à conjugaison près.

Si par exemple $n_2 = 0$, notre donnée endoscopique n'a pas d'autre automorphisme que l'identité. Mais on a cette fois l'égalité $z(\bar{Y}_1) = 2z_{\rm iso}(\bar{Y}_1)$. Le calcul conduit à la même égalité que ci-dessus, où $\beta = 0$ maintenant.

La formule (2) de 2.7 devient

$$J^{\rm endo}(\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, f) = 2^{1+2\beta} C(n_1, \eta_1, n_2, \eta_2)|\mathcal{L}|^{-1} \sum_{(Y_1,Y_2)} \sum_{(L_1,L_2)\in\mathcal{L}} \sum_{\gamma\in\Gamma[L_1,L_2]} \times C(\gamma, L_2) \int_{A(\gamma)} \sum_{e_1\in\mathcal{E}_1,u_1\in\mathcal{U}_1,e_2\in\mathcal{E}_2,u_2\in\mathcal{U}_2} \times \hat{i}_{\rm iso}[a^{L_1}, e_1, u_1](Y_1)\hat{i}_{\rm iso}[a^{L_2}, e_2, u_2](Y_2)\, da, \tag{1}$$

la somme en $(Y_1, Y_2)$ étant comme ci-dessus.

Rappelons qu'en 2.4, on a fixé des ensembles $\Gamma_0$ et $\Gamma_j$ pour $j = (R-r)/2 + 1, \ldots, R$. Introduisons l'ensemble $\boldsymbol{\Gamma}$ des familles $\Gamma^* = ((\Gamma_{1,j})_{j=1,\ldots,t'_1}, (\Gamma_{2,j})_{j=1,\ldots,t'_2})$ qui vérifient les conditions suivantes :

pour $j = t'_2 + 1, \ldots, t'_1$, $\Gamma_{1,j} = \Gamma_{j+(R-r)/2}$ ;

pour $j = 1, \ldots, t'_2$, $\Gamma_{1,j}$, respectivement $\Gamma_{2,j}$, est un sous-ensemble de $\Gamma_0$ à deux éléments, qui est un ensemble de représentants de $\mathfrak{o}^\times/\mathfrak{o}^{\times 2}$ ; on impose $\Gamma_{1,j} \cap \Gamma_{2,j} = \emptyset$.

Pour une telle famille, on note $\Gamma^*_{\eta_1}$ l'ensemble des familles $\gamma_1 = (\gamma_{1,j})_{j=1,\ldots,t'_1} \in \prod_{j=1,\ldots,t'_1} \Gamma_{1,j}$ qui vérifient la condition

$\mathrm{sgn}(\eta_1 \varpi^{-\,\mathrm{val}_F(\eta_1)} \prod_{j=1,\ldots,t'_1} \gamma_{1,j}) = \mathrm{sgn}_{CD}(w')$.

On définit l'ensemble $\Gamma^*_{\eta_2}$ en changeant les indices 1 en 2 et $w'$ en $w''$.

Fixons $(L_1, L_2) \in \mathcal{L}$. Pour $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma^*_{\eta_1} \times \Gamma^*_{\eta_2}$, on définit une famille $\gamma = (\gamma_l)_{l=1,\ldots,R}$ de la façon suivante

pour $j = t'_2 + 1, \ldots, t'_1$, $\gamma_{j+(R-r)/2} = \gamma_{1,j}$ ;

pour $j = 1, \ldots, t'_2$, $\gamma_{l_1(j)} = \gamma_{1,j}$ et $\gamma_{l_2(j)} = \gamma_{2,j}$.

On vérifie que cette famille appartient à $\Gamma$. Cela définit une application

$$\pi_{L_1;L_2} : \sqcup_{\Gamma^*\in\boldsymbol{\Gamma}} \Gamma^*_{\eta_1} \times \Gamma^*_{\eta_2} \to \Gamma.$$

Montrons que

(2) l'image de $\pi_{L_1,L_2}$ est égale à $\Gamma[L_1, L_2]$ ; pour $\gamma = (\gamma_l)_{l=1,\ldots,R} \in \Gamma[L_1, L_2]$, la fibre de $\pi_{L_1,L_2}$ au-dessus de $\gamma$ a pour nombre d'éléments

$$\sigma^*(\gamma) = \left(\frac{q-3}{4}\right)^{t'_2} \prod_{l\in\hat{J}} (q - 2 + \mathrm{sgn}(\gamma_{l-1}\gamma_l)).$$

https://doi.org/10.1017/nmj.2017.30 Published online by Cambridge University Press

Soit $\Gamma^* \in \boldsymbol{\Gamma}$ et $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma^*_{\eta_1} \times \Gamma^*_{\eta_2}$. Posons $\gamma = \pi_{L_1,L_2}(\gamma_1, \gamma_2)$. On a défini en 2.6 des éléments $\gamma^{L_1}$ et $\gamma^{L_2}$. Ils ne sont autres que $\gamma_1$ et $\gamma_2$. Le terme $\eta[L_2, \gamma]$ défini en 2.6 est caractérisé par les relations $\mathrm{val}_F(\eta[L_2, \gamma]) \equiv t'_2 \bmod 2\,\mathbb{Z}$ et $\mathrm{sgn}(\eta[L_2, \gamma]\varpi^{-\mathrm{val}_F(\eta[L_2,\gamma])} \prod_{j=1,\ldots,t'_2} \gamma_{2,j}) = \mathrm{sgn}_{CD}(w'')$. Par hypothèse, $\eta_2$ vérifie la première relation. Par définition de $\Gamma^*_{\eta_2}$, $\eta_2$ vérifie aussi la seconde. Donc $\eta[L_2, \gamma] = \eta_2$, puis $\eta[L_1, \gamma] = \eta_1$ puisque $\eta[L_1, \gamma]\eta[L_2, \gamma] = \eta = \eta_1\eta_2$. Par définition de $\Gamma[L_1, L_2]$, $\gamma$ appartient donc à cet ensemble, ce qui prouve la première assertion. Soit maintenant $\gamma \in \Gamma[L_1, L_2]$. La première partie de la preuve montre que le nombre d'éléments de la fibre de $\pi_{L_1,L_2}$ au-dessus de $\gamma$ est égal au nombre d'éléments $\Gamma^* \in \boldsymbol{\Gamma}$ tels que $(\gamma^{L_1}, \gamma^{L_2})$ appartiennent à $(\prod_{j=1,\ldots,t'_1} \Gamma_{1,j}) \times (\prod_{j=1,\ldots,t'_2} \Gamma_{2,j})$. Ce nombre est le produit sur $j = 1, \ldots, t'_2$ du nombre des paires $(\Gamma_{1,j}, \Gamma_{2,j})$ possibles dont le produit contient $(\gamma_{1,j}, \gamma_{2,j})$. Pour simplifier la notation, posons $x = \gamma_{1,j}$, $y = \gamma_{2,j}$. Les éléments $x$ et $y$ appartiennent à $\Gamma_0$ et sont distincts puisqu'ils proviennent de $\gamma \in \Gamma$. Les paires $(\Gamma_{1,j}, \Gamma_{2,j})$ possibles sont de la forme $\Gamma_{1,j} = \{x, x'\}$, $\Gamma_{2,j} = \{y, y'\}$, où $x'$ et $y'$ sont deux éléments de $\Gamma_0$ qui vérifient les conditions suivantes :

$x' \notin x\mathfrak{o}^{\times 2}$, $y' \notin y\mathfrak{o}^{\times 2}$, $x' \neq y$, $y' \neq x$ et $x' \neq y'$.

Notons $C'_x$ l'ensemble des $x' \in \Gamma_0$ tels que $x' \notin x\mathfrak{o}^{\times 2}$ et définissons de même $C'_y$. Supposons $y \in x\mathfrak{o}^{\times 2}$, autrement dit $\mathrm{sgn}(xy) = 1$. On a $C'_x = C'_y$. Les deux premières relations signifient que $x', y' \in C'_x$. Cela entraîne les deux relations suivantes : $x' \neq y$ et $y' \neq x$. La dernière relation signifie que $(x', y')$ n'appartient pas à la diagonale de $C'_x \times C'_x$. Le nombre de $(x', y')$ possibles est donc $|C'_x|^2 - |C'_x|$. On a $|C'_x| = (q-1)/2$. Le nombre de couples possibles est donc $(q-1)(q-3)/4$, ou encore $(q-2+\mathrm{sgn}(xy))(q-3)/4$. Supposons maintenant que $y \notin x\mathfrak{o}^{\times 2}$, autrement dit que $\mathrm{sgn}(xy) = -1$. On a $C'_x \neq C'_y$. Les première et troisième conditions signifient que $x' \in C'_x - \{y\}$. De même, les deuxième et quatrième conditions signifient que $y' \in C'_y - \{x\}$. La cinquième condition est automatique. Le nombre de $(x', y')$ possibles est donc $(|C'_x| - 1)(|C'_y| - 1) = ((q-3)/2)^2$, ou encore $(q-2+\mathrm{sgn}(xy))(q-3)/4$. L'assertion (2) en résulte.

Un calcul similaire démontre la relation suivante

(3) le nombre d'éléments de $\boldsymbol{\Gamma}$ est égal à $2^{-4t'_2}(q-1)^{2t'_2}(q-3)^{2t'_2}$.

Pour $\Gamma^* \in \boldsymbol{\Gamma}$, $(L_1, L_2) \in \mathcal{L}$ et $(Y_1, Y_2)$ stablement conjugué à $(\bar{Y}_1, \bar{Y}_2)$, posons

$$\mathcal{J}_{\Gamma^*,L_1,L_2}(Y_1, Y_2) = 2^{1+2\beta} C(n_1, \eta_1, n_2, \eta_2) \sum_{\gamma_1 \in \Gamma^*_{\eta_1}} \sum_{\gamma_2 \in \Gamma^*_{\eta_2}} \sigma^*(\gamma)^{-1} C(\gamma, L_2)$$

https://doi.org/10.1017/nmj.2017.30 Published online by Cambridge University Press

$$\times \int_{A(\gamma)} \sum_{e_1\in\mathcal{E}_1,u_1\in\mathcal{U}_1,e_2\in\mathcal{E}_2,u_2\in\mathcal{U}_2}$$
$$(4) \qquad \times \hat{i}_{\mathrm{iso}}[a^{L_1},e_1,u_1](Y_1)\hat{i}_{\mathrm{iso}}[a^{L_2},e_2,u_2](Y_2)\,da$$

où, pour simplifier, on a posé $\gamma=\pi_{L_1,L_2}(\gamma_1,\gamma_2)$. En utilisant (2), on obtient l'égalité

$$(5) \qquad J^{\mathrm{endo}}(\bar{Y}_1,\bar{Y}_2,f)=|\mathcal{L}|^{-1}\sum_{Y_1,Y_2}\sum_{(L_1,L_2)\in\mathcal{L}}\sum_{\Gamma^*\in\mathbf{\Gamma}}\mathcal{J}_{\Gamma^*,L_1,L_2}(Y_1,Y_2).$$

Fixons $\Gamma^*\in\mathbf{\Gamma}$, $(L_1,L_2)\in\mathcal{L}$ et $(Y_1,Y_2)$ stablement conjugué à $(\bar{Y}_1,\bar{Y}_2)$. Les fonctions $f_{1,\eta_1}$ et $f_{2,\eta_2}$ qui interviennent dans le lemme 2.2 sont des cas particuliers de notre fonction $f$. Considérons par exemple le cas de l'indice 1. On passe de $f$ à $f_{1,\eta_1}$ en remplaçant $n$, $\eta$, $r'$, $r''$, $N'$, $N''$ et $w'$ par $n_1$, $\eta_1$, $t'_1$, $t''_1$, $N'$, 0 et $w'$. Le terme correspondant à $w''$ disparaît. L'intégrale orbitale $J(Y_1,f_{1,\eta_1,\mathrm{iso}})$ est calculée par une formule analogue à celle du lemme 2.4. On peut choisir l'ensemble $\Gamma^*_{\eta_1}$ comme analogue de $\Gamma$. Puisque $t'_1=t''_1$, l'analogue de $\hat{J}$ est vide. Les analogues de $\mathcal{E}^0$ et $\mathcal{U}$ ne sont autres que les ensembles $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{U}_1$ déjà introduits. L'analogue de $\kappa^0$ est trivial. Parce que $w''$ disparaît, l'analogue de $\kappa^{\mathcal{U}}$ est trivial. L'analogue de la constante $C(r',r'')$ vaut $2^{1-2t'_1}$. On note $\alpha(t'_1,w',\eta_1)$ l'analogue de la constante $\alpha(r',r'',w',w'')$. On a donc

$$J(Y_1,f_{1,\eta_1,\mathrm{iso}})=C(w')2^{1-2t'_1}\alpha(t'_1,w',\eta_1)\sum_{\gamma_1\in\Gamma^*_{\eta_1}}\sigma(\gamma_1)$$
$$(6) \qquad \times\int_{A(\gamma_1)}\sum_{e\in\mathcal{E}_1,u_1\in\mathcal{U}_1}\hat{i}_{\mathrm{iso}}[a_1,e_1,u_1](Y_1)\,da_1.$$

Il faut toutefois faire attention : cette formule n'est valable que si $n_1>0$. En effet, si $n_1=0$, le terme de gauche doit disparaître des calculs qui suivent, autrement dit on doit considérer qu'il vaut 1. Les sommes de droite disparaissent, autrement dit valent 1. Les deux constantes $C(w')$ et $\alpha(t'_1,w',\eta_1)$ valent aussi 1. Mais $2^{1-t'_1}$ vaut 2 et l'égalité n'est pas vérifiée. Bien sûr, c'est le produit des constantes pour les indices 1 et 2 qui va intervenir. La puissance de 2 qui intervient dans ce produit est donc $2^{2-2t'_1-2t'_2}$ si $n_1\neq 0$ et $n_2\neq 0$ et $2^{1-2t'_1-2t'_2}$ sinon. Autrement dit, c'est $2^{1+\beta+2t'_1+2t'_2}$.

Soit $\gamma_1\in\Gamma^*_{\eta_1}$, $\gamma_2\in\Gamma^*_{\eta_2}$. Posons $\gamma=\pi_{L_1,L_2}(\gamma_1,\gamma_2)$. Montrons que l'on a l'égalité

$$(7) \qquad d(r',r'',\gamma,L_2)\sigma(\gamma)\sigma^*(\gamma)^{-1}\sigma(\gamma_1)^{-1}\sigma(\gamma_2)^{-1}=C_3,$$

https://doi.org/10.1017/nmj.2017.30 Published online by Cambridge University Press

où

$$C_3 = \operatorname{sgn}(-1)^{r(R-r)/2} \operatorname{sgn}(\eta\varpi^{-\operatorname{val}_F(\eta)})^{(R-r)/2} \operatorname{sgn}_{CD}(w')^{(R-r)/2} \\ \times \operatorname{sgn}_{CD}(w'')^{(R-r)/2+\operatorname{val}_F(\eta)} \\ \times \left(\frac{q-3}{4}\right)^{-t'_2} \operatorname{sgn}(-1)^{\operatorname{val}_F(\eta_2)B} \operatorname{sgn}(\eta_2\varpi^{-\operatorname{val}_F(\eta_2)})^B \operatorname{sgn}_{CD}(w'')^B.$$

Rappelons les définitions :

$$d(r', r'', \gamma, L_2) = \operatorname{sgn}(\eta\varpi^{-\operatorname{val}_F(\eta)})^{(R-r)/2} \operatorname{sgn}_{CD}(w')^{(R-r)/2} \\ \times \operatorname{sgn}_{CD}(w'')^{(R-r)/2+\operatorname{val}_F(\eta)} \\ \times \left(\prod_{j\in\hat{J}} \operatorname{sgn}(\gamma_{j-1}\gamma_j)^{j/2-1} \operatorname{sgn}(\gamma_{j-1}-\gamma_j)\right) \\ \times \left(\prod_{j=R-r+1,\dots,R} \operatorname{sgn}(\gamma_j)^{(R-r)/2}\right) \\ \times \operatorname{sgn}(-1)^{\operatorname{val}_F(\eta_2)B} \operatorname{sgn}(\eta_2\varpi^{-\operatorname{val}_F(\eta_2)})^B \operatorname{sgn}_{CD}(w'')^B;$$

$$\sigma(\gamma) = \left(\prod_{j\in\hat{J}} (q-2+\operatorname{sgn}(\gamma_{j-1}\gamma_j)) \operatorname{sgn}(\gamma_{j-1}\gamma_j(\gamma_{j-1}-\gamma_j))\right) \\ \times \prod_{j=R-r+1,\dots,R;\, j \text{ impair}} \operatorname{sgn}(-\gamma_j);$$

$$\sigma^*(\gamma) = \left(\frac{q-3}{4}\right)^{t'_2} \prod_{l\in\hat{J}} (q-2+\operatorname{sgn}(\gamma_{l-1}\gamma_l)).$$

Les formules pour $\sigma(\gamma_1)$ et $\sigma(\gamma_2)$ se simplifient puisque $t'_1 = t''_1$ et $t'_2 = t''_2$ :

$$\sigma(\gamma_1) = \prod_{j=1,\dots,t'_1;\, j \text{ impair}} \operatorname{sgn}(-\gamma_{1,j}),$$

$$\sigma(\gamma_2) = \prod_{j=1,\dots,t'_2;\, j \text{ impair}} \operatorname{sgn}(-\gamma_{2,j}).$$

Les restrictions $j$ impair figurant dans les différents produits peuvent être levées en élevant le terme correspondant (qui est un signe) à la puissance $j$.

https://doi.org/10.1017/nmj.2017.30 Published online by Cambridge University Press

Considérons l'intervention dans le membre de gauche de (6) d'un terme $\gamma_j$ pour $j = R - r + 1, \ldots, R$. Il intervient dans $d(r', r'', \gamma, L_2)$ par un facteur $\operatorname{sgn}(\gamma_j)^{(R-r)/2}$ et dans $\sigma(\gamma)$ par un facteur $\operatorname{sgn}(-\gamma_j)^j$. Puisque $\gamma_{1,j-(R-r)/2} = \gamma_{1,j}$, il intervient dans $\sigma(\gamma_1)$ par un facteur $\operatorname{sgn}(-\gamma_j)^{j-(R-r)/2}$. Le produit de ces contributions est $\operatorname{sgn}(-1)^{(R-r)/2}$. Leur produit sur tous les $j = R - r + 1, \ldots, R$ est $\operatorname{sgn}(-1)^{r(R-r)/2}$. Considérons maintenant l'intervention des termes $\gamma_{j-1}$ et $\gamma_j$ pour un $j \in \hat{J}$. Le terme $\operatorname{sgn}(\gamma_{j-1} - \gamma_j)$ intervient dans $d(r', r'', \gamma, L_2)$ et dans $\sigma(\gamma)$. Il disparaît. Le terme $q - 2 + \operatorname{sgn}(\gamma_{j-1}\gamma_j)$ intervient dans $\sigma(\gamma)$ et son inverse intervient dans $\sigma^*(\gamma)^{-1}$. Il disparaît. Interviennent $\operatorname{sgn}(\gamma_{j-1}\gamma_j)^{j/2-1}$ dans $d(r', r'', \gamma, L_2)$ et $\operatorname{sgn}(\gamma_{j-1}\gamma_j)$ dans $\sigma(\gamma)$. Puisque $\{\gamma_{j-1}, \gamma_j\} = \{\gamma_{1,j/2}, \gamma_{2,j/2}\}$, intervient aussi dans $\sigma(\gamma_1)\sigma(\gamma_2)$ le terme $\operatorname{sgn}(\gamma_{j-1}\gamma_j)^{j/2}$. Le produit de ces termes vaut 1. En résumé, la contribution des termes dépendant des $\gamma_j$ est $\operatorname{sgn}(-1)^{r(R-r)/2}$. Outre ce terme, il reste le produit des constantes. Le tout donne la formule (7).

Dans la formule (4) interviennent des termes $\gamma$, $a$, $a^{L_1}$ et $a^{L_2}$. On a vu dans la preuve de (2) que $\gamma^{L_1} = \gamma_1$ et $\gamma^{L_2} = \gamma_2$. On voit que, quand $a$ décrit $A(\gamma)$, le couple $(a^{L_1}, a^{L_2})$ décrit $A(\gamma_1) \times A(\gamma_2)$. La formule (4) se récrit

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{\Gamma^*, L_1, L_2}(Y_1, Y_2) = 2^{1+2\beta} C(n_1, \eta_1, n_2, \eta_2) &\sum_{\gamma_1 \in \Gamma^*_{\eta_1}} \sum_{\gamma_2 \in \Gamma^*_{\eta_2}} \sigma^*(\gamma)^{-1} C(\gamma, L_2) \\ &\times \int_{A(\gamma_1)} \sum_{e_1 \in \mathcal{E}_1, u_1 \in \mathcal{U}_1} \hat{i}_{\mathrm{iso}}[a_1, e_1, u_1](Y_1)\, da_1 \\ &\times \int_{A(\gamma_2)} \sum_{e_2 \in \mathcal{E}_2, u_2 \in \mathcal{U}_2} \hat{i}_{\mathrm{iso}}[a_2, e_2, u_2](Y_2)\, da_2.\end{aligned}$$

Soit $\gamma_1$, $\gamma_2$ et $\gamma$ intervenant dans cette formule. Rappelons la définition

$$C(\gamma, L_2) = d(r', r'', \gamma, L_2) C(w') C(w'') C(r', r'') \alpha(r', r'', w', w'') \sigma(\gamma).$$

Posons

$$\begin{aligned}C_4 = 2^{\beta + 2t'_1 + 2t'_2} C_3 C(n_1, \eta_1, n_2, \eta_2) C(r', r'') \alpha(r', r'', w', w'') \\ \times \alpha(t'_1, w', \eta_1) \alpha(t'_2, w'', \eta_2).\end{aligned}$$

En vertu de (7), on a

$$\begin{aligned}&2^{1+2\beta} C(n_1, \eta_1, n_2, \eta_2) \sigma^*(\gamma)^{-1} C(\gamma, L_2) \\ &\quad = C_4 2^{1+\beta-2t'_1-2t'_2} C(w') C(w'') \alpha(t'_1, w', \eta_1) \alpha(t'_2, w'', \eta_2) \sigma(\gamma_1) \sigma(\gamma_2).\end{aligned}$$

https://doi.org/10.1017/nmj.2017.30 Published online by Cambridge University Press

Alors la formule précédente devient

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{\Gamma^*,L_1,L_2}(Y_1,Y_2) = C_4 2^{1+\beta-2t'_1-2t'_2} C(w')C(w'')\alpha(t'_1,w',\eta_1)\alpha(t'_2,w'',\eta_2)\\ \times \sum_{\gamma_1\in\Gamma^*_{\eta_1}} \sigma(\gamma_1)\int_{A(\gamma_1)} \sum_{e_1\in\mathcal{E}_1,u_1\in\mathcal{U}_1} \hat{i}_{\mathrm{iso}}[a_1,e_1,u_1](Y_1)\,da_1\\ \times \sum_{\gamma_2\in\Gamma^*_{\eta_2}} \sigma(\gamma_2)\int_{A(\gamma_2)} \sum_{e_2\in\mathcal{E}_2,u_2\in\mathcal{U}_2} \hat{i}_{\mathrm{iso}}[a_2,e_2,u_2](Y_2)\,da_2.\end{aligned}$$

Autrement dit, en utilisant (6) et son analogue pour l'indice 2 :

$$\mathcal{J}_{\Gamma^*,L_1,L_2}(Y_1,Y_2) = C_4 J(Y_1, f_{1,\eta_1,\mathrm{iso}})J(Y_2, f_{2,\eta_2,\mathrm{iso}}).$$

Cette expression ne dépend ni de $\Gamma^*$, ni de $L_1$ et $L_2$. Reportons cette valeur dans l'égalité (5). La somme en $(L_1, L_2)$, pondérée par $|\mathcal{L}|^{-1}$, disparaît. La somme en $\Gamma^*$ se transforme en la multiplication par $|\mathbf{\Gamma}|$. Enfin, la somme en $(Y_1, Y_2)$ remplace les intégrales orbitales par leurs versions stables. D'où

$$J^{\mathrm{endo}}(\bar{Y}_1,\bar{Y}_2,f) = C_4|\mathbf{\Gamma}|S(\bar{Y}_1, f_{1,\eta_1,\mathrm{iso}})S(\bar{Y}_2, f_{2,\eta_2,\mathrm{iso}}).$$

Considérons le cas de l'indice 1. Le quadruplet $(t'_1, t''_1, N', 0)$ vérifie l'hypothèse du (i) du théorème 3.20 de [6]. Donc $f_1$ est stable au sens de cette référence. On sait de plus que le nombre de classes de conjugaison dans la classe de conjugaison stable de $\bar{Y}_1$ est égal à celui des classes de conjugaison dans la classe de conjugaison stable dans $\mathfrak{g}_{n_1,\eta_1,\mathrm{an}}(F)$ correspondant à celle de $\bar{Y}_1$. D'où

$$S(\bar{Y}_1, f_{1,\eta_1,\mathrm{iso}}) = \tfrac{1}{2}S(\bar{Y}_1, f_{1,\eta_1}).$$

Une fois de plus, cette égalité n'est vraie que si $n_1 \neq 0$. Si $n_1 = 0$, le terme $\frac{1}{2}$ disparaît. Le produit de ces constantes sur les indices 1 et 2 vaut donc $2^{-1-\beta}$. D'où l'égalité

$$J^{\mathrm{endo}}(\bar{Y}_1,\bar{Y}_2,f) = 2^{-1-\beta}C_4|\mathbf{\Gamma}|S(\bar{Y}_1, f_{1,\eta_1})S(\bar{Y}_2, f_{2,\eta_2}).$$

Cela étant vrai pour tout couple $(\bar{Y}_1, \bar{Y}_2)$, cela démontre que

$$\mathrm{transfert}_{n_1,\eta_1,n_2,\eta_2}(f) = 2^{-1-\beta}C_4|\mathbf{\Gamma}|f_{1,\eta_1} \otimes f_{2,\eta_2}.$$

Pour obtenir l'assertion (i) du lemme 2.2, il reste à démontrer l'égalité

$$2^{-1-\beta}C_4|\mathbf{\Gamma}| = C_{\eta_1,\eta_2}.$$

Il suffit pour cela de reprendre les définitions de toutes nos constantes. On laisse ce calcul pénible mais sans mystère au lecteur. ∎

## §3. Démonstration de la proposition 1.2

### 3.1 Descente du facteur de transfert

On revient à nos deux groupes $G_{\rm iso}$ et $G_{\rm an}$ du paragraphe 1. On dit qu'un élément $u\in G_\sharp(F)$ est topologiquement unipotent si ses valeurs propres, qui appartiennent à une certaine extension finie $F'$ de $F$, sont congrues à 1 modulo l'idéal maximal de l'anneau des entiers de $F'$. L'application $E:X\mapsto E(X)=(1+X/2)(1-X/2)$ est une bijection entre l'ensemble des éléments $X\in\mathfrak{g}_\sharp(F)$ topologiquement nilpotents et l'ensemble des éléments topologiquement unipotents de $G_\sharp(F)$.

Soit $\sharp=$ iso ou an et soit $x\in G_\sharp(F)$ un élément elliptique et fortement régulier. On peut décomposer $x$ en un unique produit $x=su$, où $s$ et $u$ commutent entre eux, $s$ est un élément dont toutes les valeurs propres sont des racines de l'unité d'ordre premier à $p$ et $u$ est topologiquement unipotent. Au lieu de $u$, on considère plutôt l'élément topologiquement nilpotent de $X\in\mathfrak{g}_\sharp(F)$ tel que $u=E(X)$. On écrit donc $x=sE(X)$. Parmi les valeurs propres de $s$, on distingue le nombre 1 qui intervient avec une multiplicité impaire notée $1+2n_+$ et le nombre $-1$ qui intervient avec une multiplicité paire notée $2n_-$ (qui peut être nulle). On note $V_+$ et $V_-$ les espaces propres associés, $Q_+$ et $Q_-$ les restrictions de $Q_\sharp$ à ces espaces et on pose $\eta_+=\eta(Q_+)$ et $\eta_-=\eta(Q_-)$. On note $G_+=\mathrm{SO}(Q_+)$, $G_-=\mathrm{SO}(Q_-)$. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\bar F/F)$ agit sur l'ensemble des valeurs propres de $s$ différentes de $\pm1$, en préservant leurs multiplicités. Notons $I$ l'ensemble des orbites. Soit $i\in I$, fixons un élément $s_i$ de cette orbite et notons $d_i$ sa multiplicité. Posons $E_i=F[s_i]$. C'est une extension non ramifiée de $F$. Parce que $s$ appartient à un groupe orthogonal, il existe une sous-extension $E_i^\natural$ de $F$ telle que $[E_i:E_i^\natural]=2$ et $\mathrm{norme}_{E_i/E_i^\natural}(s_i)=1$. Notons $V_i$ la somme des espaces propres associés à des valeurs propres conjuguées de $s_i$ et notons $s_{|V_i}$ la restriction de $s$ à cet espace. L'algèbre $F[s_{|V_i}]$ s'identifie à $E_i$ par $s_{|V_i}\mapsto s_i$. Puisque $V_i$ est naturellement un $F[s_{|V_i}]$-module, il devient un $E_i$-espace vectoriel, dont la dimension est $d_i$. On montre qu'il existe une unique forme hermitienne non dégénérée $Q_i$ sur $V_i$ (relative à l'extension $E_i/E_i^\natural$) de sorte que, pour tous $v,v'\in V_i$, on ait l'égalité

$$Q_\sharp(v,v')=[E_i:F]^{-1}\,\mathrm{trace}_{E_i/F}(Q_i(v,v')).$$

Notons $G_i$ le groupe unitaire de $Q_i$. La composante neutre $G_s$ du commutant de $s$ dans $G_\sharp$ est le groupe

https://doi.org/10.1017/nmj.2017.30 Published online by Cambridge University Press

$$G_+ \times G_- \times \prod_{i\in I} G_i.$$

On a $X \in \mathfrak{g}_s(F)$. C'est un élément elliptique régulier.

*Remarques.*

(1) La condition d'ellipticité empêche le couple $(n_-, \eta_-)$ d'être égal à $(1, 1)$.

(2) Fixons un élément $\xi \in \mathfrak{o}^\times - \mathfrak{o}^{\times 2}$. Pour $i \in I$, notons $Q_{\sharp,|V_i}$ la restriction de $Q_\sharp$ à $V_i$. On calcule facilement $\eta(Q_{\sharp,|V_i}) = \xi^{d_i}$. Parce que l'on a supposé que $\eta(Q_\sharp) = 1$, on en déduit l'égalité

$$\eta_+\eta_-\xi^d = 1,$$

où $d = \sum_{i\in I} d_i$.

Si l'on écrit $X = (X_+, X_-, (X_i)_{i\in I})$, on définit la classe totale de conjugaison stable de $X_+$, $X_-$ et $X_i$ pour $i \in I$ de la même façon qu'en 1.2. On définit la classe totale de conjugaison stable de $X$ comme le produit de ces classes.

Considérons maintenant un élément $x'$ dans la classe totale de conjugaison stable de $x$. Il se décompose en $x' = s'E(X')$. Les données $n_+$, $\eta_+$, $n_-$, $\eta_-$, $I$ et $d_i$ ne changent pas quand on remplace $s$ par $s'$. Les formes $Q_+$, $Q_-$ et $Q_i$ pour $i \in I$ peuvent changer. Par exemple, soit $Q'_+$ la forme remplaçant $Q_+$. Ou bien $Q'_+$ est isomorphe à $Q_+$, ou bien le couple $(Q'_+, Q_+)$ est égal, à l'ordre près, à l'un de nos couples $(Q_{\rm iso}, Q_{\rm an})$ du paragraphe 2.1. On voit qu'à la classe de conjugaison stable de $X$ dans $\mathfrak{g}_s(F)$ correspond une classe de conjugaison stable dans $\mathfrak{g}_{s'}(F)$. L'élément $X'$ appartient à cette classe, autrement dit, $X'$ appartient à la classe totale de conjugaison stable de $X$. Plus précisément, l'application $x' \mapsto X'$ se quotiente en une bijection entre l'ensemble des classes de conjugaison contenues dans la classe totale de conjugaison stable de $x$ et l'ensemble des classes de conjugaison contenues dans la classe totale de conjugaison stable de $X$.

Comme on vient de le dire, $Q_+$ est l'une des formes $Q_{\rm iso}$ ou $Q_{\rm an}$ de 2.1. Posons $\mathrm{sgn}^*(X_+) = 1$ si c'est $Q_{\rm iso}$ et $\mathrm{sgn}^*(X_+) = -1$ si c'est $Q_{\rm an}$. On définit de même $\mathrm{sgn}^*(X_-)$ et $\mathrm{sgn}^*(X_i)$ pour $i \in I$. On pose

$$\mathrm{sgn}^*(X) = \mathrm{sgn}^*(X_+)\,\mathrm{sgn}^*(X_-)\prod_{i\in I}\mathrm{sgn}^*(X_i).$$

On rappelle que, pour notre indice $\sharp$ fixé plus haut, on a défini $\mathrm{sgn}_\sharp = 1$ si $\sharp = iso$ et $\mathrm{sgn}_\sharp = -1$ si $\sharp = an$. Montrons que

https://doi.org/10.1017/nmj.2017.30 Published online by Cambridge University Press

(3) on a l'égalité

$$\mathrm{sgn}_\sharp = (-1)^{d\ \mathrm{val}_F(\eta_-)}\,\mathrm{sgn}^*(X).$$

*Preuve.* Dans chacun de nos espaces $V_+$, $V_-$ et $V_i$ pour $i\in I$, on fixe un réseau presque autodual (cf. [11] 1.1) que l'on note respectivement $L_+$, $L_-$ et $L_i$. On note $L$ la somme directe de ces réseaux. C'est un réseau presque autodual de $V_\sharp$. On pose $l''_+ = L^*_+/L_+$ et on définit de même $l''_-$, $l''_i$ et $l''$. Chacun de ces espaces est muni d'une forme quadratique dont l'on note les déterminants normalisés $\eta''_+$, $\eta''_-$, $\eta''_i$ et $\eta''$ (rappelons que, par exemple, $\eta''$ est le produit du déterminant habituel par $(-1)^{[\dim_{\mathbb{F}_q}(l'')/2]}$). Par définition de $V_\sharp$, la dimension de $l''$ sur $\mathbb{F}_q$ est paire et l'on a $\mathrm{sgn}_\sharp = \mathrm{sgn}(\eta'')$. On vérifie facilement que, pour $i\in I$, la dimension de $l''_i$ est paire. D'après la définition de [11] 1.1, on a $\mathrm{sgn}^*(X_i) = \mathrm{sgn}(\eta''_i)$. Supposons $\mathrm{val}_F(\eta_+)$ paire. Le terme $\mathrm{val}_F(\eta_-)$ est également pair d'après (2). Alors les dimensions de $l''_+$ et $l''_-$ sont paires et l'on a $\mathrm{sgn}^*(X_+) = \mathrm{sgn}(\eta''_+)$, $\mathrm{sgn}^*(X_-) = \mathrm{sgn}(\eta''_-)$. Le déterminant non normalisé de la forme sur $l''$ est le produit des déterminants non normalisés des formes sur $l''_+$, $l''_-$ et $l''_i$ pour $i\in I$. Puisque toutes les dimensions sont paires, il en est de même des déterminants normalisés : on a $\eta'' = \eta''_+\eta''_-\prod_{i\in I}\eta''_i$. Avec les formules ci-dessus, on obtient

$$\mathrm{sgn}_\sharp = \mathrm{sgn}^*(X)$$

ce qui coïncide avec (3) puisque $\mathrm{val}_F(\eta_-)$ est paire. Supposons maintenant $\mathrm{val}_F(\eta_+)$ impaire, donc $\mathrm{val}_F(\eta_-)$ aussi impaire. Alors les dimensions de $l''_+$ et $l''_-$ sont impaires. D'après les définitions de [11] 1.1, on a $\mathrm{sgn}^*(X_+) = \mathrm{sgn}(\eta'_+)$ et $\mathrm{sgn}^*(X_-) = \mathrm{sgn}(\eta'_-)$, où $\eta'_+$ et $\eta'_-$ sont les déterminants normalisés des formes quadratiques sur $L_+/\varpi L^*_+$ et $L_-/\varpi L^*_-$. Parce que la dimension de $V_+$ est impaire et que celle de $V_-$ est paire, on a $\eta'_+\eta''_+ = \eta_+\varpi^{-\mathrm{val}_F(\eta_+)}$ et $\eta'_-\eta''_- = -\eta_-\varpi^{-\mathrm{val}_F(\eta_-)}$. Parce que $l''_+$ et $l''_-$ sont de dimension impaire, on voit qu'un signe $-$ se glisse dans le produit des déterminants normalisés. C'est-à-dire que $\eta'' = -\eta''_+\eta''_-\prod_{i\in I}\eta''_i$. D'où

$$\eta'' = \eta_+\eta_-\varpi^{-\mathrm{val}_F(\eta_+)-\mathrm{val}_F(\eta_-)}\eta'_+\eta'_-\prod_{i\in I}\eta''_i.$$

La somme $\mathrm{val}_F(\eta_+)+\mathrm{val}_F(\eta_-)$ est nulle d'après (2). Avec les formules ci-dessus, on obtient

$$\mathrm{sgn}_\sharp = \mathrm{sgn}(\eta_+\eta_-)\,\mathrm{sgn}^*(X).$$

Mais $\mathrm{sgn}(\eta_+\eta_-) = (-1)^d$ d'après (2). D'où encore l'égalité (3) puisque $\mathrm{val}_F(\eta_-)$ est impaire. $\square$

https://doi.org/10.1017/nmj.2017.30 Published online by Cambridge University Press

Soit $(n_1,n_2)\in D(n)$, auquel est associée une donnée endoscopique de $G_{\mathrm{iso}}$ et $G_{\mathrm{an}}$, dont le groupe endoscopique est $G_{n_1,\mathrm{iso}}\times G_{n_2,\mathrm{iso}}$. Soit $(x_1,x_2)\in G_{n_1,\mathrm{iso}}(F)\times G_{n_2,\mathrm{iso}}(F)$ un couple $n$-régulier formé d'éléments elliptiques. Pour $\sharp=\mathrm{iso}$ ou an, soit $x\in G_\sharp(F)$ un élément de la classe totale de conjugaison stable correspondant à $(x_1,x_2)$. On lui associe les données $\eta_+$, $n_+$, $\eta_-$, etc., comme ci-dessus. Pour $j=1,2$, on pose $x_j=s_jE(\underline{X}_j)$. On adopte la notation $\underline{X}_j$ plutôt que $X_j$ pour une raison qui apparaîtra plus loin. On définit de même les données $\eta_{j,+}$, $n_{j,+}$, $\eta_{j,-}$, etc. On vérifie que $n_+=n_{1,+}+n_{2,+}$, $\eta_+=\eta_{1,+}\eta_{2,+}$, $n_-=n_{1,-}+n_{2,-}$, $\eta_-=\eta_{1,-}\eta_{2,-}$, que $I=I_1\cup I_2$ et que, pour $i\in I$, $d_i=d_{1,i}+d_{2,i}$ (avec $d_{j,i}=0$ si $i\notin I_j$). Le couple $(n_{1,+},n_{2,+})$, respectivement le quadruplet $(n_{1,-},\eta_{1,-},n_{2,-},\eta_{2,-})$, respectivement le couple $(d_{1,i},d_{2,i})$ pour $i\in I$, définit une donnée endoscopique de $G_+$, respectivement $G_-$, $G_i$. Avec les définitions que l'on a données, le couple $(\underline{X}_{1,+},\underline{X}_{2,+})$ (par exemple) n'a pas de raison d'appartenir au groupe endoscopique associé à $(n_{1,+},n_{2,+})$ car ce dernier est $G_{n_{1,+},\mathrm{iso}}\times G_{n_{2,+},\mathrm{iso}}$ tandis que $(\underline{X}_{1,+},\underline{X}_{2,+})$ appartient à un certain produit $G_{n_{1,+},\sharp_{1,+}}(F)\times G_{n_{2,+},\sharp_{2,+}}(F)$. Mais seule la classe totale de conjugaison stable de $(\underline{X}_{1,+},\underline{X}_{2,+})$ interviendra dans la suite et on peut fixer un élément $(X_{1,+},X_{2,+})$ de cette classe qui appartient à $G_{n_{1,+},\mathrm{iso}}(F)\times G_{n_{2,+},\mathrm{iso}}(F)$. On définit de même $(X_{1,-},X_{2,-})$ et $(X_{1,i},X_{2,i})$ pour $i\in I$. On pose $X_1=X_{1,+}\oplus X_{1,-}\oplus\oplus_{i\in I}X_{1,i}$ et on définit de même $X_2$.

On dispose d'un facteur de transfert $\Delta((x_1,x_2),x)$ associé à la donnée endoscopique définie par $(n_1,n_2)$. On dispose d'un facteur de transfert, que nous noterons simplement $\Delta_+((X_{1,+},X_{2,+}),X_+)$, associé à la donnée endoscopique définie par $(n_{1,+},n_{2,+})$ et, de même, de facteurs de transfert $\Delta_-((X_{1,-},X_{2,-}),X_-)$ et $\Delta_i((X_{1,i},X_{2,i}),X_i)$. Ces trois derniers facteurs sont normalisés comme dans les paragraphes 2.1, 2.2 et 2.3. On pose

$$\Delta((X_1,X_2),X)=\Delta_+((X_{1,+},X_{2,+}),X_+)\Delta_-((X_{1,-},X_{2,-}),X_-)\times\prod_{i\in I}\Delta_i((X_{1,i},X_{2,i}),X_i)$$

et

$$d_2=\sum_{i\in I_2}d_{2,i}.$$

LEMME. *On a l'égalité*

$$\Delta((x_1,x_2),x)=(-1)^{d_2\,\mathrm{val}_F(\eta_-)}\Delta((X_1,X_2),X).$$

*Preuve.* Notons $K_+$ l'ensemble des orbites de l'action de $\mathrm{Gal}(\bar F/F)$ dans l'ensemble des valeurs propres de $X_+$ différentes de 0 (la valeur propre 0 intervient avec multiplicité 1), $K_-$ l'ensemble des orbites de l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ dans l'ensemble des valeurs propres de $X_-$ et, pour $i \in I$, $K_i$ l'ensemble des orbites de l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/E_i)$ dans l'ensemble des valeurs propres de $X_i$, vu comme un endomorphisme $E_i$-linéaire de $V_i$. Pour $k \in K_+$, respectivement $k \in K_-$, $k \in K_i$, on fixe $\Xi_k \in k$. On pose $E(\Xi_k) = (1 + \Xi_k/2)(1 - \Xi_k/2)^{-1}$. Pour $k \in K_+ \cup K_-$, on pose $F_k = F[\Xi_k]$. Il existe une sous-extension $F_k^\natural$ de $F$ telle que $[F_k : F_k^\natural] = 2$ et que $\mathrm{trace}_{F_k/F_k^\natural}(\Xi_k) = 0$. Pour $i \in I$ et $k \in K_i$, on pose $F_k = E_i[\Xi_k]$. Il existe une extension $F_k^\natural$ de $E_i^\natural$ de sorte que $F_k$ soit le composé des extensions $E_i$ et $F_k^\natural$ de $E_i^\natural$, et que $\mathrm{trace}_{F_k/F_k^\natural}(\Xi_k) = 0$. On note $K$ l'union disjointe de $K_+$, $K_-$ et des $K_i$ pour $i \in I$. L'ensemble des valeurs propres de $x$ différentes de 1 est l'ensemble des conjugués par $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ des éléments

$\xi_k = E(\Xi_k)$ pour $k \in K_+$ ; $\xi_k = -E(\Xi_k)$ pour $k \in K_-$ ; $\xi_k = s_i E(\Xi_k)$ pour $i \in I$ et $k \in K_i$.

Pour $k \in K$, notons $V_k$ la somme des espaces propres de $x$ associés à des conjugués de $\xi_k$. On peut identifier $V_k$ à $F_k$ de sorte que l'action de $x$ dans $V_k$ s'identifie à la multiplication par $\xi_k$. Il existe un élément $c_k \in F_k^\natural$ de sorte que la restriction de $Q_\sharp$ à $V_k$ s'identifie à la forme quadratique

$$(v, v') \mapsto [F_k : F]^{-1}\, \mathrm{trace}_{F_k/F}(c_k \tau_k(v')v)$$

sur $F_k$, où $\tau_k$ est l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(F_k/F_k^\natural)$. Seule compte la classe de $c_k$ modulo les normes de l'extension $F_k/F_k^\natural$. On note $\mathrm{sgn}_k$ le caractère quadratique de $F_k^{\natural,\times}$ associé à cette extension. On note $P_k$ le polynôme caractéristique de $\xi_k$ sur $F$. On note $P$ le produit de ces polynômes. Pour tout polynôme $R$, on note $R'$ son polynôme dérivé. On pose

$$C_k = (-1)^{n+1} 2[F_k : F] c_k P'(\xi_k) P(-1) \xi_k^{1-n} (1 + \xi_k)(\xi_k - 1)^{-1}.$$

On définit $K_1$ et $K_2$ comme on a défini $K$. L'ensemble $K$ est l'union disjointe de $K_1$ et $K_2$. L'union est disjointe car $(x_1, x_2)$ est $n$-régulier. D'après [7] proposition 1.10, on a l'égalité

$$\Delta((x_1, x_2), x) = \prod_{k \in K_2} \mathrm{sgn}_k(C_k). \tag{4}$$

*Remarque.* Dans la formule de [7] définissant $C_k$, il n'y a pas le facteur $[F_k : F]$. Mais le terme $c_k$ y est défini différemment : c'est notre $c_k$ multiplié par $[F_k : F]^{-1}$.

Pour $k \in K_+ \cup K_-$, on note $\mathfrak{P}_k$ le polynôme caractéristique de $\Xi_k$ sur $F$. On pose

$\mathfrak{C}_k = (-1)^{n_+}\eta_+[F_k : F]c_k\Xi_k\mathfrak{P}'_k(\Xi_k)\prod_{k'\in K_+, k'\neq k}\mathfrak{P}_{k'}(\Xi_k)$, si $k \in K_+$ ;

$\mathfrak{C}_k = (-1)^{n_-}\eta_-[F_k : F]c_k\Xi_k^{-1}\mathfrak{P}'_k(\Xi_k)\prod_{k'\in K_-, k'\neq k}\mathfrak{P}_{k'}(\Xi_k)$, si $k \in K_-$.

Pour $i \in I$ et $k \in K_i$, on note $\mathfrak{P}_{i,k}$ le polynôme caractéristique de $\Xi_k$ sur $E_i$. On fixe un élément $\eta_i \in E_i$ qui est une unité et vérifie $\tau_i(\eta_i) = (-1)^{d_i+1}\eta_i$, où $\tau_i$ est l'unique élément non trivial de $\mathrm{Gal}(E_i/E_i^\natural)$. On pose

$\mathfrak{C}_k = \eta_i[F_k : E_i]c_k\mathfrak{P}'_{i,k}(\Xi_k)\prod_{k'\in K_i, k'\neq k}\mathfrak{P}_{i,k'}(\Xi_k)$.

D'après [9] lemme X.7, on a l'égalité

$$(5)\qquad \Delta((X_1, X_2), X) = \prod_{k\in K_2}\mathrm{sgn}_k(\mathfrak{C}_k).$$

On va démontrer les propriétés suivantes :

(6) pour $k \in K_+ \cup K_-$, $\mathrm{sgn}_k(C_k) = \mathrm{sgn}_k(\mathfrak{C}_k)$ ;

(7) pour $i \in I$ et $k \in K_i$, $\mathrm{sgn}_k(C_k) = (-1)^{[F_k:E_i]\,\mathrm{val}_F(\eta_-)}\,\mathrm{sgn}_k(\mathfrak{C}_k)$.

En les admettant, on voit que le rapport entre les membres de droite de (4) et (5) est $(-1)^{D\ \mathrm{val}_F(\eta_-)}$, où $D = \sum_{i\in I}\sum_{k\in K_i\cap K_2}[F_k : E_i]$. La somme intérieure en $k$ vaut $d_{2,i}$, donc $D = d_2$. Alors les égalités (4) et (5) impliquent celle de l'énoncé.

Pour démontrer (6) et (7), on a besoin de quelques ingrédients. Soit $Z \in \bar{F}$ et $\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}(2; F)$. Supposons que $cZ + d \neq 0$ et posons $z = \frac{az+b}{cz+d}$. Notons $P_z(T)$ et $P_Z(T)$ les polynômes caractéristiques de $z$ et $Z$, et notons $m$ leur degré. Alors on a les égalités

$$(8)\qquad (cT + d)^m P_z\left(\frac{aT + b}{cT + d}\right) = c^m P_z\left(\frac{a}{c}\right) P_Z(T)\ ;$$

$$(9)\qquad (ad - bc)(cZ + d)^{m-2}P'_z(z) = c^m P_z\left(\frac{a}{c}\right) P'_Z(T).$$

Cf. [3] lemme 7.4.1. D'autre part, pour $k \in K$, on calcule facilement le déterminant non normalisé $\det_k \in F^\times/F^{\times 2}$ de la forme quadratique définie plus haut sur $V_k$ : on a

$$(10)\qquad \det_k = \mathrm{norme}_{F_k/F}(\Xi_k).$$

Fixons une extension galoisienne finie $F'$ de $F$ contenant tous les corps $F_k$. Notons $\mathfrak{o}'_1$ le groupe multiplicatif des unités de $F'$ congrues à 1 modulo l'idéal maximal $\mathfrak{p}'$ de l'anneau des entiers de $F'$. Pour $k \in K_+ \cup K_-$, introduisons la relation d'équivalence dans $F'^\times$ : $x \equiv_k y$ si et seulement s'il existe $x' \in \mathfrak{o}'_1$

https://doi.org/10.1017/nmj.2017.30 Published online by Cambridge University Press

et $y' \in F_k^\times$ tels que $xy^{-1} = x'$ $\text{norme}_{F_k/F_k^\natural}(y')$. On peut remplacer la relation (6) par

(11) pour $k \in K_+ \cup K_-$, $C_k \equiv_k \mathfrak{C}_k$.

En effet, si cette relation est vérifiée, il existe $x \in \mathfrak{o}_1'$ et $y \in F_k^\times$ tels que $C_k = x$ $\text{norme}_{F_k/F_k^\natural}(y)\mathfrak{C}_k$. On sait que les termes $C_k$ et $\mathfrak{C}_k$ appartiennent à $F_k^{\natural,\times}$. Donc $x \in \mathfrak{o}_1' \cap F_k^{\natural,\times}$. Parce que $p$ est grand, le caractère $\text{sgn}_k$ est modérément ramifié, donc $\text{sgn}_k(x) = 1$. On a aussi $\text{sgn}_k(\text{norme}_{F_k/F_k^\natural}(y)) = 1$. L'égalité $\text{sgn}_k(C_k) = \text{sgn}_k(\mathfrak{C}_k)$ s'ensuit.

Soit $k \in K_+$. Pour $k' \in K_-$ ou $k' \in K_i$ pour $i \in I$, la contribution de $k'$ à $C_k$ est $P_{k'}(\xi_k)P_{k'}(-1)$. On a $\xi_k \in \mathfrak{o}_1'$ tandis que les racines de $P_{k'}$ n'appartiennent pas à ce groupe. On en déduit $P_{k'}(\xi_k) \equiv_k P_{k'}(1) \equiv_k P_{k'}(1)^{-1}$. Le produit $P_{k'}(1)^{-1}P_{k'}(-1)$ est égal à $\text{norme}_{F_{k'}/F}(1-\xi_{k'})^{-1}(-1-\xi_{k'})$. Parce que $\text{norme}_{F_{k'}/F_{k'}^\natural}(\xi_{k'}) = 1$, on voit que $(1-\xi_{k'})^{-1}(-1-\xi_{k'})$ est un élément de $F_{k'}$ dont la trace dans $F_{k'}^\natural$ est nulle. Il existe donc $x \in F_{k'}^{\natural,\times}$ tel que $(1-\xi_{k'})^{-1}(-1-\xi_{k'}) = x\Xi_{k'}$. D'après (10), on a donc

$$P_{k'}(1)^{-1}P_{k'}(-1) \equiv_k \text{norme}_{F_{k'}/F}(x)\,\det_{k'} \equiv_k \text{norme}_{F_{k'}^\natural/F}(x)^2 \det_{k'} \equiv_k \det_{k'}.$$

*Remarque.* Le terme $\det_{k'}$ n'est défini que modulo $F^{\times 2}$. Supposons que l'on en choisisse un représentant dans $F^\times$. La classe d'équivalence de ce représentant pour la relation $\equiv_k$ est bien définie.

Soit $k' \in K_+$ avec $k' \neq k$. La contribution de $k'$ à $C_k$ est $P_{k'}(\xi_k)P_{k'}(-1)$. On utilise (8) avec $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, $Z = \Xi_{k'}$ et $T = \Xi_k$. L'entier $m = [F_{k'} : F]$ est pair. De plus, $\Xi_k \in \mathfrak{p}'$, donc $c\Xi_k + d \in \mathfrak{o}_1'$. On obtient $P_{k'}(\xi_k) \equiv_k P_{k'}(-1)\mathfrak{P}_{k'}(\Xi_k)$. D'où

$$P_{k'}(\xi_k)P_{k'}(-1) \equiv_k \mathfrak{P}_{k'}(\Xi_k).$$

Un calcul analogue s'applique au terme $P_k'(\xi_k)P_k(-1)$, en utilisant cette fois la relation (9). On obtient

$$P_k'(\xi_k)P_k(-1) \equiv_k \mathfrak{P}_k'(\Xi_k).$$

Évidemment, $\xi_k^{1-n} \equiv_k 1$ et $1 + \xi_k \equiv_k 2$. On calcule

$$\begin{aligned}(\xi_k - 1)^{-1} &= (1 - \Xi_k/2)\Xi_k^{-1} \equiv_k \Xi_k^{-1} = -\Xi_k(-\Xi_k^2)^{-1} \\ &= -\Xi_k\,\text{norme}_{F_k/F_k^\natural}(\Xi_k)^{-1} \equiv_k -\Xi_k.\end{aligned}$$

En rassemblant ces calculs, on obtient

$$C_k \equiv_k (-1)^{n+n_+}\eta_+\Big(\prod_{k'} \det{}_{k'}\Big)\mathfrak{C}_k,$$

où le produit porte sur les $k' \in K_-$ et $k' \in K_i$ pour $i \in I$. Le produit des $\det_{k'}$ sur ces $k'$ est le déterminant de la restriction de $Q_\sharp$ à la somme de $V_-$ et des $V_i$ pour $i \in I$. Il est égal au déterminant de $Q_\sharp$ divisé par le déterminant de la restriction de $Q_\sharp$ à $V_+$. On a fixé le déterminant de $Q_\sharp$ en [11] 1.1 : c'est $(-1)^n$. Celui de la restriction de $Q_\sharp$ à $V_+$ est $(-1)^{n_+}\eta_+$. L'équivalence ci-dessus entraîne alors (11).

Soit $k \in K_-$. Pour $k' \in K_+$ ou $k' \in K_i$ pour $i \in I$, la contribution de $k'$ à $C_k$ est $P_{k'}(\xi_k)P_{k'}(-1)$. On a $\xi_k \in -\mathfrak{o}'_1$ et les racines de $P_{k'}$ ne sont pas congrues à $-1$ modulo $\mathfrak{p}'$. Donc $P_{k'}(\xi_k) \equiv_k P_{k'}(-1)$, puis

$$P_{k'}(\xi_k)P_{k'}(-1) \equiv_k P_{k'}(-1)^2 \equiv_k 1.$$

Pour $k' \in K_-$ avec $k' \neq k$, la contribution de $k'$ à $C_k$ est $P_{k'}(\xi_k)P_{k'}(-1)$. On utilise (8) avec $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$, $Z = \Xi_{k'}$ et $T = \Xi_k$. De nouveau, $m$ est pair et $c\Xi_k + d \equiv_k 1$. D'où $P_{k'}(\xi_k) \equiv_k P_{k'}(1)\mathfrak{P}_{k'}(\Xi_k)$. Comme plus haut, on a

$$P_{k'}(1)P_{k'}(-1) \equiv_k P_{k'}(1)^{-1}P_{k'}(1) \equiv_k \det{}_{k'}\,.$$

D'où

$$P_{k'}(\xi_k)P_{k'}(-1) \equiv_k \det{}_{k'} \mathfrak{P}_{k'}(\Xi_k).$$

Un même calcul s'applique au terme $P'_k(\xi_k)P_k(-1)$, en utilisant cette fois la relation (9). Ici se glisse le déterminant $ad - bc$ qui vaut $-1$. D'où

$$P'_k(\xi_k)P_k(-1) \equiv_k \det{}_k \mathfrak{P}'_k(\Xi_k).$$

Évidemment, $\xi_k^{1-n} \equiv_k (-1)^{n-1}$ et $(\xi_k - 1)^{-1} \equiv_k -2$. On a

$$1 + \xi_k = -\frac{\Xi_k}{1 - \frac{\Xi_k}{2}} \equiv_k -\Xi_k \equiv_k -\Xi_k \,\mathrm{norme}_{F_k/F_k^\natural}(\Xi_k)^{-1} \equiv_k \Xi_k^{-1}.$$

En rassemblant ces calculs, on obtient

$$C_k \equiv_k (-1)^{n_-}\eta_-\Big(\prod_{k' \in K_-} \det{}_{k'}\Big)\mathfrak{C}_k.$$

https://doi.org/10.1017/nmj.2017.30 Published online by Cambridge University Press

Le produit intervenant ici est le déterminant de la restriction de $Q_\sharp$ à $V_-$, c'est-à-dire $(-1)^{n_-}\eta_-$. D'où encore (11).

Soit $i \in I$ et $k \in K_i$. Cette fois, on définit dans $F'^\times$ l'équivalence $x \equiv_k y$ si et seulement s'il existe $x' \in F_k^\times$ tel que $xy^{-1}\,\mathrm{norme}_{F_k/F_k^\natural}(x')$ soit une unité. Soit $k' \in K_+$ ou $k' \in K_{i'}$ pour un $i' \in I$ avec $i' \neq i$. Les racines du polynôme $P_{k'}$ ne sont congrues ni à $-1$, ni à $\xi_k$ modulo $\mathfrak{p}'$. On en déduit $P_{k'}(\xi_k)P_{k'}(-1) \equiv_k 1$. Soit $k' \in K_-$. On a

$$P_{k'}(\xi_k)P_{k'}(-1) = P_{k'}(\xi_k)P_{k'}(1)P_{k'}(1)^{-1}P_{k'}(-1).$$

On a encore $P_{k'}(\xi_k)P_{k'}(1) \equiv_k 1$ et, par un calcul déjà effectué, $P_{k'}(1)^{-1}P_{k'}(-1) \equiv_k \det_{k'}$. Soit $k' \in K_i$ avec $k' \neq k$. Comme précédemment, $P_{k'}(-1) \equiv_k 1$. On a

$$P_{k'}(\xi_k) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(F_{k'}/F)} (\xi_k - \sigma(\xi_{k'})).$$

Pour $\sigma \in \mathrm{Gal}(F_{k'}/F)$, $\xi_k - \sigma(\xi_{k'})$ est congru modulo $\mathfrak{p}'$ à $s_i - \sigma(s_i)$. Si $\sigma \notin \mathrm{Gal}(F_k/E_i)$, ce terme est une unité. Si $\sigma \in \mathrm{Gal}(F_k/E_i)$, on a $\xi_k - \sigma(\xi_{k'}) = s_i(E(\Xi_k) - \sigma(E(\Xi_{k'})))$. Notons $P_{i,k'}$ le polynôme caractéristique de $E(\Xi_{k'})$ sur $E_i$. On obtient

$$P_{k'}(\xi_k)P_{k'}(-1) \equiv_k P_{i,k'}(E(\Xi_k)).$$

On calcule ce terme grâce à (8) où l'on remplace le corps $F$ par $E_i$. On prend $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, $Z = \Xi_{k'}$, $T = \Xi_k$. On obtient

$$P_{i,k'}(E(\Xi_k)) \equiv_k P_{i,k'}(-1)\mathfrak{P}_{i,k'}(\Xi_k) \equiv_k \mathfrak{P}_{i,k'}(\Xi_k),$$

d'où

$$P_{k'}(\xi_k)P_{k'}(-1) \equiv_k \mathfrak{P}_{i,k'}(\Xi_k).$$

Un même calcul s'applique à $P'_k(\xi_k)P_k(-1)$, en utilisant cette fois la relation (9). D'où

$$P'_k(\xi_k)P_k(-1) \equiv_k \mathfrak{P}'_{i,k}(\Xi_k).$$

Évidemment, $(-1)^{n+1}2\xi_k^{1-n}(1+\xi_k)(\xi_k-1)^{-1} \equiv_k 1$ et $\eta_i \equiv_k 1$ (tous les termes sont des unités). En rassemblant ces calculs, on obtient

$$C_k \equiv_k \left(\prod_{k \in K_-} \det_k\right)\mathfrak{C}_k.$$

Le produit intervenant ici vaut $(-1)^{n_-}\eta_-$ (comme plus haut, on fixe ici un représentant de $\eta^-$ dans $F^\times$). Il existe donc $x \in F_k^\times$ et une unité $y$ de $F'^\times$ tels que $C_k = y\ \mathrm{norme}_{F_k/F_k^\natural}(x)\eta_-\mathfrak{C}_k$. Nécessairement, $y$ appartient à $F_k^{\natural,\times}$. L'extension $F_k/F_k^\natural$ est non ramifiée puisque $F_k$ est le composé de $E_i$ et de $F_k^\natural$ sur $E_i^\natural$. Donc $\mathrm{sgn}_k(y) = 1$, puis $\mathrm{sgn}_k(C_k) = \mathrm{sgn}_k(\eta_-)\,\mathrm{sgn}_k(\mathfrak{C}_k)$. Notons $\mathrm{val}_{F_k^\natural}$ la valuation usuelle de $F_k^\natural$. On a $\mathrm{sgn}_k(x) = (-1)^{\mathrm{val}_{F_k^\natural}(x)}$ pour tout $x \in F_k^{\natural,\times}$. En notant $e(F_k^\natural/F)$ l'indice de ramification de l'extension $F_k^\natural/F$, on a $\mathrm{val}_{F_k^\natural}(\eta_-) = e(F_k^\natural/F)\,\mathrm{val}_F(\eta_-)$. Puisque $E_i^\natural/F$ est non ramifiée, on a

$$e(F_k^\natural/F) = e(F_k^\natural/E_i^\natural) = [F_k^\natural : E_i^\natural]f(F_k^\natural/E_i^\natural)^{-1} = [F_k : E_i]f(F_k^\natural/E_i^\natural)^{-1},$$

où $f(F_k^\natural/E_i^\natural)$ est le degré de l'extension résiduelle. Mais $E_i$ est l'unique extension quadratique non ramifiée de $E_i^\natural$ et elle n'est pas contenue dans $F_k^\natural$ puisque $F_k$ est composé de $E_i$ et de $F_k^\natural$. Donc $f(F_k^\natural/E_i^\natural)$ est impair et $e(F_k^\natural/F)$ est de la même parité que $[F_k : E_i]$. D'où

$$\mathrm{sgn}_k(\eta_-) = (-1)^{e(F_k^\natural/F)\,\mathrm{val}_F(\eta_-)} = (-1)^{[F_k:E_i]\,\mathrm{val}_F(\eta_-)}.$$

D'où l'égalité (7), ce qui achève la démonstration. □

### 3.2 Calcul d'intégrales orbitales

Fixons $(r', r'', N', N'') \in \Gamma$, $w' \in W_{N'}$ et $w'' \in W_{N''}$. Comme en 2.1, on note $\varphi_{w'}$ et $\varphi_{w''}$ les fonctions caractéristiques des classes de conjugaison de $w'$ et $w''$. On suppose que ces classes sont paramétrées par des couples de partitions de la forme $(\emptyset, \beta')$ et $(\emptyset, \beta'')$. On pose $f = \Psi \circ k \circ \rho\iota(\varphi_{w'} \otimes \varphi_{w''})$, cf. 1.2. On définit un couple d'entiers $(r'_+, r'_-)$ par les égalités

$(r'_+, r'_-) = (r' + 1, r')$, si $r' \equiv r'' \mod 2\,\mathbb{Z}$ ;

$(r'_+, r'_-) = (r', r' + 1)$, si $r' \not\equiv r'' \mod 2\,\mathbb{Z}$.

Soit $\sharp = \mathrm{iso}$ ou $\mathrm{an}$ et soit $x \in G_\sharp(F)$ un élément elliptique fortement régulier. On l'écrit $x = sE(X)$ et l'on associe à $s$ les données du paragraphe précédent. En particulier, on a

$$G_s = G_+ \times G_- \times \prod_{i\in I} G_i.$$

On considère les hypothèses

(1)(a) $\mathrm{val}_F(\eta_-) \equiv r'' \mod 2\,\mathbb{Z}$ ;

(1)(b) $2n_+ + 1 \geqslant r_+'^2 + r''^2$, $2n_- \geqslant r_-'^2 + r''^2$.

Remarquons que, d'après 3.1(2), la condition (1)(a) équivaut à $\mathrm{val}_F(\eta_+) \equiv r'' \mod 2\,\mathbb{Z}$.

Supposons vérifiées ces conditions (1)(a) et (b). On pose

$$N_+ = n_+ - (r_+'^2 + r''^2 - 1)/2, \qquad N_- = n_- - (r_-'^2 + r''^2)/2.$$

Notons $D$ l'ensemble des familles $\mathbf{d} = (N'_+, N'_-, N''_+, N''_-, (d'_i, d''_i)_{i\in I})$ d'entiers positifs ou nuls vérifiant les conditions

$$N'_+ + N''_+ = N_+, \ \ N'_- + N''_- = N_- \ ;$$

$d'_i + d''_i = d_i$ pour tout $i \in I$ ;

$N'_+ + N'_- + \sum_{i\in I} d'_i f_i = N'$, $N''_+ + N''_- + \sum_{i\in I} d''_i f_i = N''$,

où l'on a posé $f_i = [E_i^\natural : F]$. Pour une telle famille, posons

$$W'(\mathbf{d}) = W_{N'_+} \times W_{N'_-} \times \prod_{i\in I} \mathfrak{S}_{d'_i}.$$

Considérons l'ensemble des éléments $\mathbf{v}' = (v'_+, v'_-, (v'_i)_{i\in I}) \in W'(\mathbf{d})$ vérifiant les conditions suivantes :

les classes de conjugaison de $v'_+$ et $v'_-$ sont paramétrées par des couples de partitions $(\emptyset, \beta'_+)$ et $(\emptyset, \beta'_-)$ ;

pour $i \in I$, la classe de conjugaison de $v'_i$ est paramétrée par une partition $\beta'_i$ dont tous les termes non nuls sont impairs ; on note $f_i\beta'_i$ la partition dont les termes sont ceux de $\beta'_i$ multipliés par $f_i$ ;

$\beta' = \beta'_+ \cup \beta'_- \cup \bigcup_{i\in I} f_i\beta'_i$.

Cet ensemble est une réunion de classes de conjugaison par $W'(\mathbf{d})$ et l'on fixe un ensemble de représentants $\mathcal{V}'(\mathbf{d})$ de ces classes. Remarquons que

(2) pour $\mathbf{v}' = (v'_+, v'_-, (v_i)_{i\in I}) \in W'(\mathbf{d})$, on a l'égalité

$$\mathrm{sgn}_{CD}(w') = \mathrm{sgn}_{CD}(v'_+)\,\mathrm{sgn}_{CD}(v'_-)(-1)^{\sum_{i\in I} d'_i}.$$

En effet, $\mathrm{sgn}_{CD}(w') = (-1)^{l(\beta')}$, où $l(\beta')$ est le nombre de termes non nuls de $\beta'$. On a $l(\beta') = l(\beta'_+) + l(\beta'_-) + \sum_{i\in I} l(\beta'_i)$. Pour $i \in I$, $\beta'_i$ est une partition de $d'_i$ dont tous les termes non nuls sont impairs. Donc $l(\beta'_i) \equiv d'_i \mod 2\,\mathbb{Z}$. L'assertion (2) en résulte.

On pose les mêmes définitions en remplaçant les exposants $'$ par $''$. On pose $\mathcal{V}(\mathbf{d}) = \mathcal{V}'(\mathbf{d}) \times \mathcal{V}''(\mathbf{d})$.

Soit $\mathbf{d} = (N'_+, N'_-, N''_+, N''_-, (d'_i, d''_i)_{i\in I}) \in D$ et $\mathbf{v} = (v'_+, v'_-, (v'_i)_{i\in I}; v''_+, v''_-, (v''_i)_{i\in I}) \in \mathcal{V}(\mathbf{d})$. Supposons que $n_+ \geqslant 1$. Appliquons la construction de

https://doi.org/10.1017/nmj.2017.30 Published online by Cambridge University Press

2.1 à l'entier $n_+$, à l'élément $\eta_+$ et au quadruplet $(r'_+, |r''|, N'_+, N''_+)$. Les hypothèses de ce paragraphe sont vérifiées d'après (1)(a). On définit deux fonctions $f_+^0 = \mathcal{Q}^{\mathrm{Lie}}_{r'_+,|r''|} \circ \rho^*_{N_+} \circ \iota_{N'_+,N''_+}(\varphi_{v'_+} \otimes \varphi_{v''_+})$ et $f_+^1 = \mathcal{Q}^{\mathrm{Lie}}_{r'_+,|r''|} \circ \rho^*_{N_+} \circ \iota_{N''_+,N'_+}(\varphi_{v''_+} \otimes \varphi_{v'_+})$. Elles vivent sur deux algèbres de Lie dont l'une est l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_+$ de la première composante $G_+$ de $G_s$. En particulier, les intégrales orbitales $J(X_+, f_+^0)$ et $J(X_+, f_+^1)$ sont bien définies. Supposons que $n_- \geqslant 1$. On applique cette fois la construction de 2.2 et on définit deux fonctions $f_-^0 = \mathcal{Q}^{\mathrm{Lie}}_{r'_-,|r''|} \circ \rho^*_{N_-} \circ \iota_{N'_-,N''_-}(\varphi_{v'_-} \otimes \varphi_{v''_-})$ et $f_-^1 = \mathcal{Q}^{\mathrm{Lie}}_{r'_-,|r''|} \circ \rho^*_{N_-} \circ \iota_{N''_-,N'_-}(\varphi_{v''_-} \otimes \varphi_{v'_-})$. Les intégrales orbitales $J(X_-, f_-^0)$ et $J(X_-, f_-^1)$ sont bien définies. Enfin, pour $i \in I$ on utilise les constructions de 2.3. On définit les fonctions $f_i^0 = \mathcal{Q}(d'_i, d''_i)^{\mathrm{Lie}} \circ \rho_i^* \circ \iota_{d'_i,d''_i}(\varphi_{v'_i} \otimes \varphi_{v''_i})$ et $f_i^1 = \mathcal{Q}(d'_i, d''_i)^{\mathrm{Lie}} \circ \rho_i^* \circ \iota_{d''_i,d'_i}(\varphi_{v''_i} \otimes \varphi_{v'_i})$. Les intégrales orbitales $J(X_i, f_i^0)$ et $J(X_i, f_i^1)$ sont bien définies. On pose $f^0[\mathbf{d}, \mathbf{v}] = f_+^0 \otimes f_-^0 \otimes \otimes_{i\in I} f_i^0$ et

$$J(X, f^0[\mathbf{d}, \mathbf{v}]) = J(X_+, f_+^0) J(X_-, f_-^0) \prod_{i\in I} J(X_i, f_i^0).$$

Dans ces formules, les termes indexés par $+$ ou $-$ disparaissent si $n_+ = 0$ ou $n_- = 0$. On définit de même $f^1[\mathbf{d}, \mathbf{v}]$ et $J(X, f^1[\mathbf{d}, \mathbf{v}])$. On pose

$b = 0$ si $r'' > 0$ ou si $r'' = 0$ et $r'$ est pair ;

$b = 1$ si $r'' < 0$ ou si $r'' = 0$ et $r'$ est impair.

Posons

$$c(r', r'') = (-1)^{n+r''} \operatorname{sgn}(-1)^{(r'^2 - r')/2 + (r''^2 - |r''|)/2},$$

$$c_\sharp(r', r'', w', w'') = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < r'' \leqslant r' \text{ ou } r'' = 0 \text{ et } r' \text{ est pair}, \\ \operatorname{sgn}_{CD}(w''), & \text{si } r' < r'', \\ \operatorname{sgn}_\sharp & \text{si } -r' \leqslant r'' < 0 \text{ ou } r'' = 0 \text{ et } r' \text{ est impair}, \\ \operatorname{sgn}_\sharp \operatorname{sgn}_{CD}(w'), & \text{si } r'' < -r'. \end{cases}$$

PROPOSITION.

(i) *Si les hypothèses (1)(a) et (1)(b) ne sont pas vérifiées,* $J(x, f) = 0$.

(ii) *Supposons ces hypothèses vérifiées. Alors on a l'égalité*

$$J(x, f) = c(r', r'') c_\sharp(r', r'', w', w'') \sum_{\mathbf{d}\in D} \sum_{\mathbf{v}\in\mathcal{V}(\mathbf{d})} J(X, f^b[\mathbf{d}, \mathbf{v}]).$$

C'est la proposition 3.19 de [6].

### 3.3 Démonstration du (ii) de la proposition 1.2

On conserve les données $(r', r'', N', N'') \in \Gamma$, $w' \in W_{N'}$ et $w'' \in W_{N''}$. On définit $f$ comme dans le paragraphe précédent.

Soit $(n_1, n_2) \in D(n)$, auquel est associée une donnée endoscopique de $G_{\text{iso}}$ et $G_{\text{an}}$ dont le groupe endoscopique est $G_{n_1,\text{iso}} \times G_{n_2,\text{iso}}$. Soit $(x_1, x_2) \in G_{n_1,\text{iso}}(F) \times G_{n_2,\text{iso}}(F)$ un couple $n$-régulier formé d'éléments elliptiques. On lui associe les données du paragraphe 3.1 : $n_{1,+}$, $\eta_{1,+}$, etc. À un élément quelconque de la classe totale de conjugaison stable dans $G_{\text{iso}}(F) \cup G_{\text{an}}(F)$ correspondant à $(x_1, x_2)$ sont aussi associées des données $n_+$, $\eta_+$, etc. On va calculer

$$J^{\text{endo}}(x_1, x_2, f) = \sum_x \Delta((x_1, x_2), x) J(x, f),$$

où $x$ décrit cette classe totale de conjugaison stable, à conjugaison près. Les intégrales orbitales $J(x, f)$ sont calculées par la proposition précédente. On en déduit immédiatement

(1) si les hypothèses (1)(a) et (b) de 3.2 ne sont pas vérifiées, $J^{\text{endo}}(x_1, x_2, f) = 0$.

Supposons ces hypothèses vérifiées. Comme on l'a expliqué en 3.1, l'application $x \mapsto X$ identifie la sommation à la somme sur les $X \in \mathfrak{g}_{\text{iso}}(F) \cup \mathfrak{g}_{\text{an}}(F)$ dans la classe totale de conjugaison stable correspondant à celle de $(X_1, X_2)$. Le lemme 3.1 et la proposition 3.2 expriment les termes $\Delta((x_1, x_2), x)$ et $J(x, f)$ à l'aide de l'élément $X$, à l'exception de la constante $c_\sharp(r', r'', w', w'')$ car l'indice $\sharp$ est celui tel que $x$ appartienne à $G_\sharp(F)$. Mais la relation 3.1(3) calcule cet indice à l'aide de $X$. Remarquons que, dans cette relation, on peut remplacer $\text{val}_F(\eta_-)$ par $r''$ d'après l'hypothèse (1)(a) de 3.2. Rappelons que $b = 0$ si $r'' > 0$ ou si $r'' = 0$ et $r'$ est pair, et $b = 1$ si $r'' < 0$ ou si $r'' = 0$ et $r'$ est impair. Définissons

$$c(r', r'', w', w'') = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < r'' \leqslant r' \text{ ou } r'' = 0 \text{ et } r' \textit{ est } \text{pair}, \\ \text{sgn}_{CD}(w''), & \text{si } r' < r'', \\ (-1)^{dr''} & \text{si } -r' \leqslant r'' < 0 \text{ ou } r'' = 0 \text{ et } r' \text{ est impair}, \\ (-1)^{dr''} \text{sgn}_{CD}(w'), & \text{si } r'' < -r'. \end{cases}$$

On a alors l'égalité

$$c_\sharp(r', r'', w', w'') = c(r', r'', w', w'') \, \text{sgn}^*(X)^b.$$

https://doi.org/10.1017/nmj.2017.30 Published online by Cambridge University Press

On peut aussi remplacer $(-1)^{d_2 \,\mathrm{val}_F(\eta_-)}$ par $(-1)^{dr''}$ dans l'énoncé du lemme 3.1. Alors ce lemme et la proposition 3.2 entraînent l'égalité

$$J^{\mathrm{endo}}(x_1,x_2,f)=c(r',r'')c(r',r'',w',w'')(-1)^{d_2r''}\sum_{\mathbf{d}\in D}\sum_{\mathbf{v}\in\mathcal{V}(\mathbf{d})}$$

$$\times\sum_X \Delta((X_1,X_2),X)\,\mathrm{sgn}^*(X)^bJ(X,f^b[\mathbf{d},\mathbf{v}]). \tag{2}$$

Fixons $\mathbf{d}\in D$ et $\mathbf{v}\in\mathcal{V}(\mathbf{d})$. On a par définition une décomposition $f^b[\mathbf{d},\mathbf{v}]=f_+^b\otimes f_-^b\otimes\otimes_{i\in I}f_i^b$. Posons

$$J^{\mathrm{endo},*}(X_{1,+},X_{2,+},f_+^b)=\sum_{X_+}\Delta_+((X_{1,+},X_{2,+}),X_+)\,\mathrm{sgn}^*(X_+)^bJ(X_+,f_+^b),$$

où $X_+$ parcourt la classe totale de conjugaison stable correspondant à celle de $(X_{1,+},X_{2,+})$. On définit de même $J^{\mathrm{endo},*}(X_{1,-},X_{2,-},f_-^b)$ et $J^{\mathrm{endo},*}(X_{1,i},X_{2,i},f_i^b)$ pour $i\in I$. La somme en $X$ de l'expression (2) est égale à

(3)
$$J^{\mathrm{endo},*}(X_{1,+},X_{2,+},f_+^b)J^{\mathrm{endo},*}(X_{1,-},X_{2,-},f_-^b)\prod_{i\in I}J^{\mathrm{endo},*}(X_{1,i},X_{2,i},f_i^b).$$

Supposons d'abord que $b=0$. Alors $\mathrm{sgn}^*(X_+)^b$ disparaît de la définition de $J^{\mathrm{endo},*}(X_{1,+},X_{2,+},f_+^b)$ et ce terme est l'intégrale endoscopique $J^{\mathrm{endo}}(X_{1,+},X_{2,+},f_+^0)$. De même pour les autres termes de (3). On applique les (ii) des lemmes 2.1, 2.2 et 2.3 ; le produit de ces intégrales endoscopiques est nul sauf si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} n_{1,+}=\frac{(r'_++|r''|)^2-1}{4}+N'_+,\\ n_{2,+}=\frac{(r'_+-|r''|)^2-1}{4}+N''_+,\\ n_{1,-}=\frac{(r'_-+|r''|)^2}{4}+N'_-,\\ n_{2,-}=\frac{(r'_--|r''|)^2}{4}+N''_-,\\ d_{1,i}=d'_i,\quad d_{2,i}=d''_i \text{ pour tout } i\in I\end{cases} \tag{4}$$

(5) $\mathrm{val}_F(\eta_{1,-})\equiv\frac{r'_-+|r''|}{2} \mod 2\,\mathbb{Z}$, $\mathrm{val}_F(\eta_{2,-})\equiv\frac{r'_--|r''|}{2} \mod 2\,\mathbb{Z}$.

Notre hypothèse $b=0$ implique que $|r''|=r''$. Pour $j=1,2$, on a $n_j=n_{j,+}+n_{j,-}+\sum_{i\in I}f_id_{j,i}$. En utilisant l'égalité $\{r'_+,r'_-\}=\{r',r'+1\}$ et le fait que $\mathbf{d}\in D$, la condition (4) ci-dessus implique

$$n_1=\frac{(r'+r'')^2+(r'+r''+1)^2-1}{4}+N',$$

https://doi.org/10.1017/nmj.2017.30 Published online by Cambridge University Press

$$n_2 = \frac{(r'-r'')^2+(r'-r''+1)^2-1}{4} + N''.$$

C'est précisément le couple $(n_1, n_2)$ défini en 1.2. Cela prouve que si notre couple $(n_1, n_2)$ n'est pas celui défini dans ce paragraphe, (3) est nul. Cela étant vrai pour tous $\mathbf{d}$, $\mathbf{v}$, on a $J^{\mathrm{endo}}(x_1, x_2, f) = 0$ d'après (2). Cela étant vrai pour tout $(x_1, x_2)$, le transfert de $f$ relatif à $(n_1, n_2)$ est nul.

Supposons maintenant que $b = 1$. Le couple $(n_{1,+}, n_{2,+})$ définit une donnée endoscopique pour les deux groupes spéciaux orthogonaux impairs dont les algèbres de Lie contiennent nos éléments $X_+$. Le couple $(n_{2,+}, n_{1,+})$ définit aussi une telle donnée. On a donc également un facteur de transfert $\Delta_+((X_{2,+}, X_{1,+}), X_+)$. Comme on l'a dit en [11] 2.1, on a l'égalité

$$\Delta_+((X_{2,+}, X_{1,+}), X_+) = \mathrm{sgn}^*(X_+)\Delta_+((X_{1,+}, X_{2,+}), X_+).$$

On voit alors que $J^{\mathrm{endo},*}(X_{1,+}, X_{2,+}, f_+^b) = J^{\mathrm{endo}}(X_{2,+}, X_{1,+}, f_+^1)$. De même pour les autres termes de (3). Le raisonnement se poursuit comme ci-dessus. On permute les rôles des indices 1 et 2 ; on permute aussi $N'$ et $N''$ puisque l'on remplace la fonction $f^0[\mathbf{d}, \mathbf{v}]$ par $f^1[\mathbf{d}, \mathbf{v}]$ ; enfin, l'hypothèse $b = 1$ entraîne que $|r''| = -r''$. Ces trois modifications conduisent au même résultat : le transfert de $f$ relatif à $(n_1, n_2)$ est nul si $(n_1, n_2)$ n'est pas le couple défini en 1.2. Cela démontre le (ii) de la proposition 1.2 pour les fonctions $\varphi' = \varphi_{w'}$ et $\varphi'' = \varphi_{w''}$. En faisant varier $w'$ et $w''$, cela démontre cette assertion pour toutes fonctions cuspidales $\varphi'$ et $\varphi''$.

### 3.4 Démonstration du (i) de la proposition 1.2

On poursuit le calcul précédent en supposant que $(n_1, n_2)$ est le couple défini en 1.2. On suppose vérifiées les hypothèses (1)(a) et (1)(b) de 3.2. On fixe $\mathbf{d} \in D$ et $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathbf{d})$. On suppose d'abord que $b = 0$. Comme on l'a expliqué, la somme en $X$ de 3.3(2) est égale à

$$(1) \quad J^{\mathrm{endo}}(X_{1,+}, X_{2,+}, f_+^0)J^{\mathrm{endo}}(X_{1,-}, X_{2,-}, f_-^0)\prod_{i\in I} J^{\mathrm{endo}}(X_{1,i}, X_{2,i}, f_i^0).$$

Ce produit est nul sauf si les conditions (4) et (5) de 3.3 sont vérifiées. L'hypothèse (5) est indépendante de $\mathbf{d}$ et $\mathbf{v}$. Récrivons-la (en se rappelant que $r'' \geqslant 0$ puisque $b = 0$) :

(2) $\mathrm{val}_F(\eta_{1,-}) \equiv \frac{r'_- + r''}{2} \mod 2\,\mathbb{Z}$, $\mathrm{val}_F(\eta_{2,-}) \equiv \frac{r'_- - r''}{2} \mod 2\,\mathbb{Z}$.

Puisque $\eta_- = \eta_{1,-}\eta_{2,-}$, elle implique l'hypothèse (1)(a) de 3.2. Si l'hypothèse (4) de 3.3 est vérifiée, on a les inégalités

$$n_{1,+} \geqslant \frac{(r'_+ + r'')^2 - 1}{4}, \qquad n_{2,+} \geqslant \frac{(r'_+ - r'')^2 - 1}{4},$$

https://doi.org/10.1017/nmj.2017.30 Published online by Cambridge University Press

(3) $$n_{1,-} \geqslant \frac{(r'_- + r'')^2}{4}, \qquad n_{2,-} \geqslant \frac{(r'_- - r'')^2}{4}.$$

Puisque $n_+ = n_{1,+} + n_{2,+}$, $n_- = n_{1,-} + n_{2,-}$, ces inégalités impliquent l'hypothèse (1)(b) de 3.2. On peut donc oublier les hypothèses (1)(a) et (b) de 3.2 et supposer vérifiées les hypothèses (2) et (3) ci-dessus. Alors les relations (4) de 3.3 déterminent un unique élément $\mathbf{d}$ dont l'on vérifie qu'il appartient bien à $D$. On suppose désormais que $\mathbf{d}$ est cet unique élément.

L'intégrale endoscopique $J^{\text{endo}}(X_{1,+}, X_{2,+}, f_+^0)$ est calculée par le lemme 2.1. Adaptons les notations. On note $t'_{1,+}, t''_{1,+}, t'_{2,+}$ et $t''_{2,+}$ les termes notés $t'_1$, etc., en 2.1 associés à $n_+$, $r'_+$ et $|r''|$. On note $C_+(\mathbf{v})$ la constante $C$ de 2.2. On pose $f_{1,+} = \mathcal{Q}(t'_{1,+}, t''_{1,+})^{\text{Lie}} \circ \rho_{N'_+} \circ \iota_{N'_+,0}(\varphi_{v'_+})$ et $f_{2,+} = \mathcal{Q}(t'_{2,+}, t''_{2,+})^{\text{Lie}} \circ \rho_{N''_+} \circ \iota_{N''_+,0}(\varphi_{v''_+})$. Alors

$$J^{\text{endo}}(X_{1,+}, X_{2,+}, f_+^0) = C_+(\mathbf{v}) S(X_{1,+}, f_{1,+}) S(X_{2,+}, f_{2,+}).$$

En adaptant de façon similaire les notations et définitions, le lemme 2.2 fournit l'égalité

$$J^{\text{endo}}(X_{1,-}, X_{2,-}, f_-^0) = C_-(\mathbf{v}) S(X_{1,-}, f_{1,-}) S(X_{2,-}, f_{2,-}),$$

tandis que le lemme 2.3 fournit l'égalité

$$J^{\text{endo}}(X_{1,i}, X_{2,i}, f_i^0) = S(X_{1,i}, f_{1,i}) S(X_{2,i}, f_{2,i}).$$

Posons $f_1[\mathbf{v}] = f_{1,+} \otimes f_{1,-} \otimes \otimes_{i \in I} f_{1,i}$ et

$$S(X_1, f_1[\mathbf{v}]) = S(X_{1,+}, f_{1,+}) S(X_{1,-}, f_{1,-}) \prod_{i \in I} S(X_{1,i}, f_{1,i}).$$

Définissons de même $f_2[\mathbf{v}]$ et $S(X_2, f_2[\mathbf{v}])$. Alors l'expression (1) ci-dessus vaut

$$C_+(\mathbf{v}) C_-(\mathbf{v}) S(X_1, f_1[\mathbf{v}]) S(X_2, f_2[\mathbf{v}]).$$

Définissons une nouvelle constante $C(r', r'', w', w'')$ par les égalités

si $r'' \leqslant r'$,

$$C(r', r'', w', w'') = (-1)^{d_2 r''} \operatorname{sgn}(-1)^{\frac{r'_+ - r'' - 1}{2}} \ ;$$

si $r' < r''$,

$$C(r', r'', w', w'') = (-1)^{d_2 r''} \operatorname{sgn}(-1)^{r' + r'' + 1} \operatorname{sgn}_{CD}(w'').$$

https://doi.org/10.1017/nmj.2017.30 Published online by Cambridge University Press

Montrons que

(4) l'expression (1) vaut

$$C(r', r'', w', w'')S(X_1, f_1[\mathbf{v}])S(X_2, f_2[\mathbf{v}]).$$

Supposons d'abord que $r'' \leqslant r'$. Alors $r'' \leqslant r'_+$ et $r'' \leqslant r'_-$. En utilisant les définitions de 2.1 et 2.2, on obtient

$$\begin{aligned} C_+(\mathbf{v})C_-(\mathbf{v}) = \operatorname{sgn}(-1)^{\frac{r'_+ + r'' - 1}{2} + \operatorname{val}_F(\eta_+)} \operatorname{sgn}(\eta_{2,+}\varpi^{-\operatorname{val}_F(\eta_{2,+})})^{\operatorname{val}_F(\eta_+)} \\ \times \operatorname{sgn}(\eta_{2,-}\varpi^{-\operatorname{val}_F(\eta_{2,-})})^{\operatorname{val}_F(\eta_-)}. \end{aligned}$$

D'après 3.1(2) et l'hypothèse (1)(a) de 3.2 (qui est vérifiée), $\operatorname{val}_F(\eta_+) = -\operatorname{val}_F(\eta_-) \equiv r'' \bmod 2\,\mathbb{Z}$. D'après la même relation 3.1(2) appliquée aux données indexées par 2, on a $\operatorname{val}_F(\eta_{2,+}) + \operatorname{val}_F(\eta_{2,-}) = 0$ et $\operatorname{sgn}(\eta_{2,+}\eta_{2,-}) = (-1)^{d_2}$. On en déduit l'égalité $C_+(\mathbf{v})C_-(\mathbf{v}) = C(r', r'', w', w'')$. Supposons maintenant que $r' \leqslant r'' - 2$. Alors $r'_+ < r''$ et $r'_- < r''$. On voit que $C_+(\mathbf{v})C_-(\mathbf{v})$ est égal à

$$\begin{aligned} &\operatorname{sgn}(-1)^{\frac{r'_+ + r'' + 1}{2} + \operatorname{val}_F(\eta_+) + \operatorname{val}_F(\eta_{2,-})} \\ &\quad \times \operatorname{sgn}(\eta_{2,+}\varpi^{-\operatorname{val}_F(\eta_{2,+})})^{1+\operatorname{val}_F(\eta_+)} \operatorname{sgn}(\eta_{2,-}\varpi^{-\operatorname{val}_F(\eta_{2,-})})^{1+\operatorname{val}_F(\eta_-)} \\ &\quad \times \operatorname{sgn}_{CD}(v''_+) \operatorname{sgn}_{CD}(v''_-). \end{aligned}$$

Comme ci-dessus, le produit des deuxième et troisième termes vaut $(-1)^{d_2(1+r'')}$. On a

$$\begin{aligned} \operatorname{val}_F(\eta_+) + \operatorname{val}_F(\eta_{2,-}) &= -\operatorname{val}_F(\eta_-) + \operatorname{val}_F(\eta_{2,-}) \\ &= -\operatorname{val}_F(\eta_{1,-}) \equiv \frac{r'_- + r''}{2} \bmod 2\,\mathbb{Z} \end{aligned}$$

d'après (2) ci-dessus. Puisque $r'_+ + r'_- = 2r' + 1$, on voit que la puissance de $\operatorname{sgn}(-1)$ dans l'expression ci-dessus coïncide avec celle figurant dans $C(r', r'', w', w'')$. D'après la définition de $\mathbf{d}$ et le fait que $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathbf{d})$, on a l'égalité $\operatorname{sgn}_{CD}(v''_+) \operatorname{sgn}_{CD}(v''_-) = \operatorname{sgn}_{CD}(w'') \operatorname{sgn}(\eta_{2,+}\eta_{2,-})$. Ce dernier facteur est égal à $(-1)^{d_2}$ comme on l'a déjà dit. En rassemblant ces calculs, on obtient de nouveau l'égalité $C_+(\mathbf{v})C_-(\mathbf{v}) = C(r', r'', w', w'')$. Supposons maintenant que $r' = r'' - 1$. Alors $r'_+ = r' < r''$ mais $r'_- = r' + 1 = r''$. Comme dans le cas $r' \leqslant r'' - 2$, on obtiendrait l'égalité voulue si $C_-(\mathbf{v})$ était définie par les formules du cas $r'_- < r''$, et non par celles de notre cas $r'_- \geqslant r''$. Le rapport entre les deux formules est

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{sgn}(-1)^{\operatorname{val}_F(\eta_{2,-})} \operatorname{sgn}(\eta_{2,-}\varpi^{-\operatorname{val}(\eta_{2,-})})^{\operatorname{val}_F(\eta_-)} \operatorname{sgn}_{CD}(v''_-).$$

Si cette expression vaut 1, on a fini. Supposons qu'elle vaille $-1$. Puisque $r'_- = r''$, l'hypothèse (2) plus haut implique que $\operatorname{val}_F(\eta_{2,-})$ est paire, ce qui fait disparaître le premier terme de notre expression. On a aussi $r'_{2,-} = r''_{2,-} = \frac{|r'_- - r''|}{2} = 0$. La remarque de 2.2 entraîne que, sous notre hypothèse selon laquelle (5) vaut $-1$, $f_{2,-}$ est nulle, donc $f_2[\mathbf{v}]$ aussi. Mais alors $S(X_2, f_2[\mathbf{v}]) = 0$ et la constante n'a plus d'importance. Cela prouve (4).

L'égalité 3.3(2) devient

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned} J^{\text{endo}}(x_1, x_2, f) &= c(r', r'')c(r', r'', w', w'')C(r', r'', w', w'')(-1)^{d_2 r''} \\ &\quad \times \sum_{\mathbf{v}\in\mathcal{V}(\mathbf{d})} S(X_1, f_1[\mathbf{v}])S(X_2, f_2[\mathbf{v}]). \end{aligned}$$

Comme en 1.2, on définit des entiers $r'_1, r''_1, r'_2, r''_2$ et les fonctions $f_1 = \Psi \circ k \circ \rho\iota(\varphi_{w'})$ et $f_2 = \Psi \circ k \circ \rho\iota(\varphi_{w''})$. Les intégrales orbitales stables $S(x_1, f_1)$ et $S(x_2, f_2)$ sont des cas particuliers d'intégrales endoscopiques $J^{\text{endo}}(x_1, x_2, f)$. Elles sont donc nulles si les analogues des hypothèses (2) et (3) ne sont pas vérifiées. Sinon, elles sont données par des formules similaires à (6). Dans toutes ces formules, les termes indexés par l'indice 2 disparaissent, ainsi que ceux faisant intervenir $N''$ et $w''$. D'autre part, l'analogue de l'entier $b \in \{0, 1\}$ est toujours 0. En effet, d'après les définitions, on a $r''_1, r''_2 \geqslant 0$ et si, par exemple, $r''_1 = 0$, on a aussi $r'_1 = 0$ donc $r'_1$ pair. On voit que l'analogue de (2) pour $S(x_1, f_1)$ est $\operatorname{val}_F(\eta_{1,-}) \equiv \frac{r'_{1,-}+r''_1}{2} \mod 2\,\mathbb{Z}$, tandis que l'analogue pour $S(x_2, f_2)$ est $\operatorname{val}_F(\eta_{2,-}) \equiv \frac{r'_{2,-}+r''_2}{2} \mod 2\,\mathbb{Z}$. D'après la relation (3) du paragraphe 4 ci-après, $r'_{1,-} + r''_1 = r'_- + r''$, $r'_{2,-} + r''_2 = |r'_- - r''|$. Il en résulte que la conjonction des deux analogues de (2) est équivalente à cette relation (2) elle-même. L'analogue de (3) ci-dessus pour $S(x_1, f_1)$ est

$$n_{1,+} \geqslant \frac{(r'_{1,+} + r''_1)^2 - 1}{4}, \qquad n_{1,-} \geqslant \frac{(r'_{1,-} + r''_1)^2}{4},$$

tandis que l'analogue pour $S(x_2, f_2)$ est

$$n_{2,+} \geqslant \frac{(r'_{2,+} + r''_2)^2 - 1}{4}, \qquad n_{1,-} \geqslant \frac{(r'_{2,-} + r''_2)^2}{4}.$$

De nouveau, le calcul montre que la conjonction de ces conditions est équivalente à la relation (3) elle-même. Cela démontre que, si (2) et (3) ne sont pas vérifiées, $S(x_1, f_1)S(x_2, f_2) = 0$. Puisque l'on a déjà vu que $J^{\text{endo}}(x_1, x_2, f) = 0$, on obtient $J^{\text{endo}}(x_1, x_2, f) = S(x_1, f_1)S(x_2, f_2)$ dans ce cas.

On suppose maintenant vérifiées nos hypothèses (2) et (3). De même que l'on a déterminé un unique $\mathbf{d} \in D$, on détermine un unique $\mathbf{d}_1$ relatif à $S(x_1, f_1)$ et un unique $\mathbf{d}_2$ relatif à $S(x_2, f_2)$. Écrivons $\mathbf{d} = (N'_+, N'_-, N''_+, N''_-, (d'_i, d''_i)_{i\in I})$. Tous ces entiers sont déterminés par la relation 3.3(4). De même, $\mathbf{d}_1$ et $\mathbf{d}_2$ sont déterminés par les analogues de cette relation. Par les mêmes calculs que ci-dessus, on voit que $\mathbf{d}_1 = (N'_+, N'_-, 0, 0, (d'_i, 0)_{i\in I})$ tandis que $\mathbf{d}_2 = (N''_+, N''_-, 0, 0, (d''_i, 0)_{i\in I})$. On en déduit que $\mathcal{V}'(\mathbf{d}) \simeq \mathcal{V}(\mathbf{d}_1)$ et $\mathcal{V}''(\mathbf{d}) \simeq \mathcal{V}(\mathbf{d}_2)$, d'où $\mathcal{V}(\mathbf{d}) \simeq \mathcal{V}(\mathbf{d}_1) \times \mathcal{V}(\mathbf{d}_2)$. On identifie ces deux ensembles. À l'aide de $r', r''$, $\mathbf{d}$ et d'un élément $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathbf{d})$, on a défini une fonction $f_1[\mathbf{v}]$. Pour $j = 1, 2$, à l'aide de $r'_j, r''_j$, $\mathbf{d}_j$ et d'un élément $\mathbf{v}_j \in \mathcal{V}(\mathbf{d}_j)$, on définit de même une fonction $f_j[\mathbf{v}_j]$. Les analogues de l'égalité (6) sont

$$(7)_1 \qquad S(x_1, f_1) = c(r'_1, r''_1)c(r'_1, r''_1, w')C(r'_1, r''_1, w') \sum_{\mathbf{v}_1\in\mathcal{V}(\mathbf{d}_1)} S(X_1, f_1[\mathbf{v}_1])\ ;$$

$$(7)_2 \qquad S(x_2, f_2) = c(r'_2, r''_2)c(r'_2, r''_2, w'')C(r'_2, r''_2, w'') \sum_{\mathbf{v}_2\in\mathcal{V}(\mathbf{d}_2)} S(X_2, f_2[\mathbf{v}_2]),$$

où l'on a adapté de façon évidente la notation des constantes.

Soit $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathcal{V}(\mathbf{d})$. Montrons que

(8) $f_1[\mathbf{v}] = f_1[\mathbf{v}_1]$, $f_2[\mathbf{v}] = f_2[\mathbf{v}_2]$.

On traite le cas de l'indice 1. D'après la définition donnée plus haut, $f_1[\mathbf{v}] = f_{1,+} \otimes f_{1,-} \otimes \otimes_{i\in I} f_{1,i}$, avec par exemple $f_{1,+} = \mathcal{Q}(t'_{1,+}, t''_{1,+})^{\text{Lie}} \circ \rho_{N'_+} \circ \iota_{N'_+,0}(\varphi_{v'_+})$. Quand l'on remplace $r'$, $r''$, $\mathbf{d}$ et $\mathbf{v}$ par $r'_1$, $r''_1$, $\mathbf{d}_1$ et $\mathbf{v}_1$, les termes $N'_+$ et $v'_+$ ne changent pas. Les entiers $t'_{1,+}$ et $t''_{1,+}$ sont définis par $\{t'_{1,+}, t''_{1,+}\} = \{\frac{r'_+ + r'' + 1}{2}, \frac{r'_+ + r'' - 1}{2}\}$ et $t'_{1,+} \equiv 1 + \text{val}_F(\eta_{1,+}) \bmod 2\mathbb{Z}$. La relation (3) du paragraphe 4 ci-après montre que l'ensemble $\{\frac{r'_+ + r'' + 1}{2}, \frac{r'_+ + r'' - 1}{2}\}$ ne change pas quand l'on remplace $r', r''$ par $r'_1, r''_1$. La congruence exigée non plus. Donc $t'_{1,+}$ et $t''_{1,+}$ ne changent pas et $f_{1,+}$ non plus. Un calcul analogue s'applique aux composantes $f_{1,-}$ et $f_{1,i}$ pour $i \in I$. Cela prouve (8).

De (6), $(7)_1$ et $(7)_2$ se déduit l'égalité

$$J^{\text{endo}}(x_1, x_2, f) = CS(x_1, f_1)S(x_2, f_2),$$

https://doi.org/10.1017/nmj.2017.30 Published online by Cambridge University Press

où

$$\begin{aligned}C = c(r', r'')c(r', r'', w', w'')C(r', r'', w', w'')(-1)^{d_2 r''} \\ \times c(r'_1, r''_1)c(r'_1, r''_1, w')C(r'_1, r''_1, w') \\ \times c(r'_2, r''_2)c(r'_2, r''_2, w'')C(r'_2, r''_2, w'').\end{aligned}$$

Remarquons que l'on n'a pas besoin d'inverser les coefficients de $(7)_1$ et $(7)_2$ : ce sont tous des signes. On a l'égalité

(9) $C = 1$.

En reprenant les définitions des diverses constantes, on obtient l'égalité

$$c(r', r'')c(r', r'', w', w'')C(r', r'', w', w'')(-1)^{d_2 r''} = (-1)^n U,$$

où $U$ est défini au paragraphe 4 ci-après. Les autres termes sont les analogues relatifs aux données indexées par 1 et 2. Évidemment, $n = n_1 + n_2$ et l'égalité $C = 1$ résulte de l'égalité $U = U_1 U_2$, cf. 4(4) ci-dessous.

À l'aide de (9), on obtient $J^{\mathrm{endo}}(x_1, x_2, f) = S(x_1, f_1)S(x_2, f_2)$. Cette égalité est donc vérifiée avec ou sans les hypothèses (2) et (3) et elle l'est pour tous $x_1, x_2$. Donc $f_1 \otimes f_2$ est le transfert de $f$. Cela démontre le (i) de la proposition 1.2 (sous l'hypothèse $b = 0$) pour les fonctions $\varphi' = \varphi_{w'}$ et $\varphi'' = \varphi_{w''}$. Comme dans le paragraphe précédent, cela entraîne la même assertion pour toutes fonctions cuspidales $\varphi'$ et $\varphi''$.

On a supposé que $b = 0$. Supposons maintenant que $b = 1$. Comme on l'a dit en 3.3, la somme en $X$ de 3.3(2) est alors égale à

$$J^{\mathrm{endo}}(X_{2,+}, X_{1,+}, f^1_+)J^{\mathrm{endo}}(X_{2,-}, X_{1,-}, f^1_-)\prod_{i\in I} J^{\mathrm{endo}}(X_{2,i}, X_{1,i}, f^1_i).$$

Le calcul se poursuit comme ci-dessus en permutant les rôles des indices 1 et 2, en permutant $N'$ et $N''$, et en tenant compte de l'égalité $|r''| = -r''$. Le résultat est le même, on laisse les détails au lecteur. Cela achève de prouver la proposition 1.2. $\square$

## §4. Annexe

On rassemble ici quelques calculs élémentaires utilisés dans l'article. Soit $r' \in \mathbb{N}$ et $r'' \in \mathbb{Z}$. On pose

$$r'_1 = \sup\left(\left[\frac{r'+r''}{2}\right], -\left[\frac{r'+r''}{2}\right] - 1\right), \qquad r''_1 = \left|\left[\frac{r'+r''+1}{2}\right]\right|,$$

$$r'_2=\sup\left(\left[\frac{r'-r''}{2}\right],-\left[\frac{r'-r''}{2}\right]-1\right),\qquad r''_2=\left|\left[\frac{r'-r''+1}{2}\right]\right|.$$

Remarquons que, si l'on change $r''$ en $-r''$, on échange les couples $(r'_1,r''_1)$ et $(r'_2,r''_2)$.

(1) On a $r''_1+r''_2\equiv r''\mod 2\,\mathbb{Z}$.

*Preuve.* Puisque $m\equiv -m\mod 2\,\mathbb{Z}$ pour tout $m\in\mathbb{Z}$, on peut remplacer $r''_1$ par $[\frac{r'+r''+1}{2}]$ et $r''_2$ par $[\frac{r'-r''+1}{2}]$. On a $[\frac{r'-r''+1}{2}]=[\frac{r'+r''+1}{2}-r'']=[\frac{r'+r''+1}{2}]-r''$, d'où (1). ∎

Pour faciliter les calculs qui suivent, on pose $a=0$ si $r'+r''$ est pair et $a=1$ si $r'+r''$ est impair, $A=0$ si $|r''|\leqslant r'$ et $A=1$ si $r'<|r''|$.

(2) On a les égalités

$$r'^2_1+r'_1+r''^2_1=\frac{(r'+r'')^2+(r'+r''+1)^2-1}{4},$$
$$r'^2_2+r'_2+r''^2_2=\frac{(r'-r'')^2+(r'-r''+1)^2-1}{4}.$$

*Preuve.* Pour $m\in\mathbb{Z}$, $m^2+m$ est invariant par la transformation $m\mapsto -m-1$ et $m^2$ est invariant par $m\mapsto -m$. On peut donc remplacer $r'_1$ par $x'=[\frac{r'+r''}{2}]$ et $r''_1$ par $x''=[\frac{r'+r''+1}{2}]$. On a $x'=\frac{r'+r''-a}{2}$ et $x''=\frac{r'+r''+a}{2}$. Un calcul algébrique montre que

$$x'^2+x'+x''^2=\frac{(r'+r'')^2+(r'+r''+1)^2-1}{4}+\frac{a^2-a}{2}.$$

D'où la première égalité puisque $a^2=a$. La seconde égalité en résulte, en changeant $r''$ en $-r''$. ∎

On définit $r'_+$ et $r'_-$ par

si $r'\equiv r''\mod 2\,\mathbb{Z}$, $r'_+=r'+1$, $r'_-=r'$ ;

si $r'\not\equiv r''\mod 2\,\mathbb{Z}$, $r'_+=r'$, $r'_-=r'+1$.

Autrement dit, $r'_+=r'+1-a$ et $r'_-=r'+a$. En remplaçant le couple $(r',r'')$ par $(r'_1,r''_1)$ ou $(r'_2,r''_2)$, on définit de même $r'_{1,+}$ et $r'_{1,-}$ ou $r'_{2,+}$ et $r'_{2,-}$.

(3) On a les égalités

$r'_{1,+}+r''_1=|r'_++r''|$, $r'_{1,-}+r''_1=|r'_-+r''|$, $r'_{2,+}+r''_2=|r'_+-r''|$, $r'_{2,-}+r''_2=|r'_--r''|$.

*Preuve.* De même que l'on a défini $a$ et $A$ pour $(r',r'')$, on définit $a_1$ et $A_1$ pour $(r'_1,r''_1)$, et $a_2$ et $A_2$ pour $(r'_2,r''_2)$. Supposons que $r''\geqslant 0$.

Alors $r'_1=[\frac{r'+r''}{2}]=\frac{r'+r''-a}{2}$ et $r''_1=[\frac{r'+r''+1}{2}]=\frac{r'+r''+a}{2}$. Si $a=0$, $r'_1=r''_1$ donc $a_1=A_1=0$. Si $a=1$, $r'_1=r''_1-1$ donc $a_1=A_1=1$. On a donc $a_1=A_1=a$ quel que soit $a$. D'où $r'_{1,+}=r'_1+1-a_1=\frac{r'+r''-a}{2}+1-a$ et $r'_{1,-}=r'_1+a_1=\frac{r'+r''-a}{2}+a$. On calcule alors

$$\begin{aligned} r'_{1,+}+r''_1&=\frac{r'+r''-a}{2}+1-a+\frac{r'+r''+a}{2}=r'+r''+1-a\\ &=r'_++r''=|r'_++r''|,\\ r'_{1,-}+r''_1&=\frac{r'+r''-a}{2}+a+\frac{r'+r''+a}{2}=r'+r''+a\\ &=r'_-+r''=|r'_-+r''|. \end{aligned}$$

Ce sont les deux premières égalités de (3). Supposons que $b=0$. Alors $r'_2=[\frac{r'-r''}{2}]=\frac{r'-r''-a}{2}$ et $r''_2=[\frac{r'-r''+1}{2}]=\frac{r'-r''+a}{2}$. Le calcul est le même que précédemment, on a simplement changé $r''$ en $-r''$ dans les formules (en particulier, on a $a_2=A_2=a$ si $b=0$). Supposons que $b=1$. Alors $r'_2=-1-[\frac{r'-r''}{2}]=-1+\frac{r''-r'+a}{2}$ et $r''_2=-[\frac{r'-r''+1}{2}]=\frac{r''-r'-a}{2}$. On constate que cette fois, $a_2=A_2=1-a$. Alors $r'_{2,+}=r'_2+1-a_2=r'_2+a=\frac{r''-r'+a}{2}+a-1$ et $r'_{2,-}=r'_2+a_2=r'_2+1-a=\frac{r''-r'+a}{2}-a$. On calcule alors

$$\begin{aligned} r'_{2,+}+r''_2&=\frac{r''-r'+a}{2}+a-1+\frac{r''-r'-a}{2}=r''-r'+a-1\\ &=r''-r'_+=|r'_+-r''|,\\ r'_{2,-}+r''_2&=\frac{r''-r'+a}{2}-a+\frac{r''-r'-a}{2}=r''-r'-a\\ &=r''-r'_-=|r'_--r''|. \end{aligned}$$

Ce sont encore les deux dernières égalités de (3). On a supposé que $r''\geqslant 0$. Si $r''\leqslant 0$, on a remarqué que nos couples $(r'_1,r''_1)$ et $(r'_2,r''_2)$ sont les mêmes que ceux déduits du couple $(r',-r'')$, à cela près que l'on doit échanger les indices 1 et 2. Les égalités (3) pour $(r',r'')$ se déduisent par ce changement des mêmes égalités que l'on vient de démontrer pour le couple $(r',-r'')$. $\square$

Définissons un nombre $u$ par

si $|r''|\leqslant r'$, $u=\frac{r'^2-r'}{2}+\frac{r''^2-|r''|}{2}+\frac{r'_+-|r''|-1}{2}$,

si $r'<|r''|$, $u=\frac{r'^2-r'}{2}+\frac{r''^2-|r''|}{2}+r'+r''+1$.

Posons $U=(-1)^{r''}\,\mathrm{sgn}(-1)^u$. On définit de même $u_1$, $U_1$ et $u_2$, $U_2$.

(4) On a l'égalité $U=U_1U_2$.

*Preuve.* Comme dans la preuve précédente, on peut supposer que $r'' \geqslant 0$. On a $(-1)^{r''} = (-1)^{r_1''+r_2''}$ d'après (1) et il suffit de démontrer que $u \equiv u_1 + u_2 \mod 2\,\mathbb{Z}$. Considérons l'expression qui définit $u$ dans le cas $r'' \leqslant r'$. On y remplace $r'_+$ par $r' + 1 - a$. On peut ajouter $r' + r'' + a$ qui est pair et on calcule $u \equiv \frac{r'^2+r''^2+r'}{2} + \frac{r'+a}{2} \mod 2\,\mathbb{Z}$. La différence entre l'expression de $u$ dans le cas $r' < r''$ et cette expression dans le cas $r'' \leqslant r'$ est

$$r' + r'' + 1 - \frac{r'_+ - r'' - 1}{2} \equiv r' - r'' + 1 - \frac{r' - a - r''}{2}$$
$$\equiv \frac{r' + a - r''}{2} + 1 \mod 2\,\mathbb{Z}.$$

On obtient alors la congruence

$$(5) \qquad u \equiv \frac{r'^2 + r''^2 + r'}{2} + \frac{r' + a}{2} + A\left(\frac{r' + a - r''}{2} + 1\right) \mod 2\,\mathbb{Z}$$

en tout cas. La demi-somme des membres de droite de (2) vaut $\frac{r'^2+r''^2+r'}{2}$. En utilisant (2), on obtient

$$u \equiv \frac{r_1'^2 + r_1' + r_1''^2 + r_2'^2 + r_2' + r_2''^2}{2} + \frac{r' + a}{2} + A\left(\frac{r' + a - r''}{2} + 1\right) \mod 2\,\mathbb{Z},$$

puis, en utilisant les analogues de (5) pour $u_1$ et $u_2$,

$$u \equiv u_1 + u_2 + \frac{r' + a - r_1' - a_1 - r_2' - a_2}{2} + A\left(\frac{r' + a - r''}{2} + 1\right)$$
$$- A_1\left(\frac{r_1' + a_1 - r_1''}{2} + 1\right) - A_2\left(\frac{r_2' + a_2 - r_2''}{2} + 1\right) \mod 2\,\mathbb{Z}.$$

Cette expression se simplifie : puisque $r_1' = r_1''$ ou $r_1'' - 1$, on a toujours $r'_{1,-} = r_1''$. De même, $r'_{2,-} = r_2''$. On a aussi remarqué que $a_1 = A_1 = a$. D'où

$$u \equiv u_1 + u_2 + \frac{r' - r_1' - r_2' - a_2}{2} + A\left(\frac{r' + a - r''}{2} + 1\right) - a - A_2 \mod 2\,\mathbb{Z}.$$

Si $A = 0$, on a aussi $a_2 = A_2 = a$, $r_1' = \frac{r'+r''-a}{2}$, $r_1'' = \frac{r'-r''-a}{2}$. Si $A = 1$, on a $a_2 = A_2 = 1 - a$, $r_1' = \frac{r'+r''-a}{2}$, $r_1'' = -1 - \frac{r'-r''-a}{2}$. On calcule l'expression ci-dessus dans les deux cas et on conclut que $u \equiv u_1 + u_2 \mod 2\,\mathbb{Z}$. Cela prouve (4). ∎

https://doi.org/10.1017/nmj.2017.30 Published online by Cambridge University Press

## Index des notations



## Index des notations de [11]



## Références

[1] J. Arthur, *The endoscopic classification of representations: orthogonal and symplectic groups*, AMS Colloquium Publ. **61**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.

[2] J. Arthur, *On local character relations*, Selecta Math. (N.S.) **2** (1996), 501–579.

[3] W.-W. Li, *Transfert d'intégrales orbitales pour le groupe métaplectique*, Compositio Math. **147** (2011), 524–590.

[4] G. Lusztig, *Classification of unipotent representations of simple p-adic groups*, Int. Math. Res. Not. (IMRN) **11** (1995), 517–589.

[5] C. Moeglin, *Représentations quadratiques unipotentes des groupes classiques p-adiques*, Duke Math. J. **84** (1996), 267–332.

[6] C. Moeglin and J.-L. Waldspurger, *Paquets stables de représentations tempérées et de réduction unipotente pour* SO($2n+1$), Invent. Math. **152** (2003), 461–623.

[7] J.-L. Waldspurger, *Les facteurs de transfert pour les groupes classiques : un formulaire*, Manuscripta Math. **133** (2010), 41–82.

[8] J.-L. Waldspurger, *Le groupe* GL$_N$ *tordu, sur un corps p-adique,* $2^{\grave{e}me}$ *partie*, Duke Math. J. **137** (2007), 235–336.

https://doi.org/10.1017/nmj.2017.30 Published online by Cambridge University Press

[9] J.-L. Waldspurger, *Intégrales orbitales nilpotentes et endoscopie pour les groupes classiques non ramifiés*, Astérisque **269** (2001).
[10] J.-L. Waldspurger, *Une formule des traces locale pour les algèbres de Lie $p$-adiques*, J. reine angew. Math. **465** (1995), 41–99.
[11] J.-L. Waldspurger, *Représentations de réduction unipotente pour* $\mathrm{SO}(2n+1)$, *I : une involution*, prépublication, 2016, arXiv:1611.08249.

*CNRS IMJ-PRG*
*4 place Jussieu*
*75005 Paris*
*France*
jean-loup.waldspurger@imj-prg.fr