ÜBER DAS VERHALTEN DER ANALYTISCHEN ABBILDUNGEN RIEMANNSCHER FLÄCHEN AUF DEM IDEALEN RAND VON MARTIN

C. CONSTANTINESCU und A. CORNEA

Es sei f eine meromorphe nichtkonstante Funktion im Kreise $|z|<1$. Die Theorie des Verhaltens von f auf dem Rande des Kreises wird von zwei bekannten Sätzen beherrscht: der Satz von Riesz-Lusin-Priwaloff-Frostman-Nevanlinna, auf Grund dessen eine Menge aus $|z|=1$, für die die Winkelgrenzwerte von f in einer Menge der Kapazität Null liegen, vom Lebesgueschen Masse Null ist und der Satz von Fatou-Nevanlinna, welcher besagt, dass, falls die Funktion f beschränktartig ist, dann hat sie fast überall auf $|z|=1$ Winkelgrenzwerte. In vorliegender Arbeit werden diese zwei Sätze auf folgende Weise verallgemeinert. An Stelle des Kreises $|z|<1$ betrachten wir eine beliebige Riemannsche Fläche R mit Greenscher Funktion, und an Stelle der meromorphen Funktion f nehmen wir eine nichtkonstante analytische Abbildung von R in einer Riemannschen Fläche R' (R' offen oder kompakt, mit oder ohne Greenscher Funktion). Es sei Δ, bzw. Δ', der ideale Rand von R, bzw. R', im Sinne von Martin[1] [11]; wir werden im Abschnitt IV eine Teilmenge $\mathfrak{F}(f)$ der Menge Δ und eine Abbildung $\hat{f}$ von $\mathfrak{F}(f)$ in $R'\cup\Delta'$ definieren. Die Verallgemeinerung des Satzes von Fatou-Nevanlinna besteht in der Behauptung, dass, falls f eine Lindelöfsche Abbildung ist [6], so ist $\Delta-\mathfrak{F}(f)$ von harmonischen Masse Null und die des Satzes von Riesz-Lusin-Priwaloff-Frostman-Nevanlinna darin, dass, wenn $\hat{f}(A)$ eine polare Menge auf $R'\cup\Delta'$ ist[2], so ist die Menge $A\subset\mathfrak{F}(f)$ vom harmonischen Masse Null. Ist R der Kreis $|z|<1$ und R' die Riemannsche Kugel $|w|\leqq\infty$, so fallen, wie bekannt ist, die Begriffe "beschränktartige Funktion" und "Lindelöfsche Abbildung" zusammen; die polaren Mengen auf

---

Received October 30, 1959.

1) Hat R' keine Greensche Funktion, so definieren wir Δ' in Bezug auf $R'-G'$, wo G' eine Kreisscheibe auf R' ist; der so erhaltene ideale Rand hängt von G' nicht ab. Ist R' kompakt, so ist Δ' leer.

2) Eine polare Menge auf $R'\cup\Delta'$ ist eine Menge der Kapazität Null auf R' und vom harmonischen Masse Null auf Δ'.

R' sind gerade die Mengen der Kapazität Null und Δ ist die Menge $|z|=1$. Es sei $\mathfrak{F}^*(f)$ die Menge der Punkte $e^{i\theta}$, für die f einen Winkelgrenzwert besitzt und

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{z \to \not\succ e^{i\theta}} f(z) \qquad (e^{i\theta} \in \mathfrak{F}^*(f)).$$

Da wir beweisen werden, dass, bis auf eine Menge vom Lebesgueschen Masse Null, $\mathfrak{F}^*(f) \subset \mathfrak{F}(f)$ ist und $\hat{f}$ mit f^* fast überall auf $\mathfrak{F}^*(f) \cap \mathfrak{F}(f)$ gleich sind, so folgt sofort aus der hier angegebener Verallgemeinerung der Satz von Riesz-Lusin-Priwaloff-Frostman-Nevanlinna. Ist f beschränktartig (und sogar in allgemeineren Fällen), so wird sich ergeben, dass $\mathfrak{F}(f)$ und $\mathfrak{F}^*(f)$, bis auf eine Menge vom Lebesgueschen Masse Null, gleich sind. Das erlaubt uns aus der allgemeineren Behauptung, dass $\Delta - \mathfrak{F}(f)$ vom harmonischen Masse Null ist, den klassischen Satz von Fatou-Nevanlinna zu folgern.

Es sei jetzt $|f(z)| < 1$ in $|z| < 1$, $f(0) = 0$, A eine Borelsche Menge aus $\mathfrak{F}^*(f)$ und $f^*(A)$ eine Menge auf $|w| = 1$. Nach dem Lemma von Löwner [16] ist das Mass von $f^*(A)$ nicht kleiner als das der Menge A. Auch dieser Satz findet eine Verallgemeinerung mittels der oben eingeführten Begriffe.

Die ersten zwei Sätze finden einige Anwendungen in der Theorie der Klassifikation der Riemannschen Flächen.

Die wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit sind in einer Note [2] publiziert worden.

In den ersten zwei Anschnitten führen wir zwei Operatore E_f und I_f ein, die mit der Abbildung f verknüpft sind; falls R eine Teilmenge von R' und f die identische Abbildung von R in R' ist, so fallen die Operatore E_f und I_f mit den Extremisierungs-und Inextremisierungsoperatoren zusammen [9], [5], [1]. Da diese Operatore auch ein selbständiges Interesse aufweisen, haben wir ihre Theorie etwas mehr entwickelt, als das für den Beweis der obenerwähnten Sätze unbedingt notwendig war. In III untersuchen wir den Zusammenhang zwischen diesen Operatoren und den idealen Rand von Martin. Im Abschnitt IV beweisen wir die Fundamentalsätze und in V zeigen wir, wie die klassischen Sätze aus ihnen abgeleitet werden können. Die letzten Abschnitte sind einigen Anwendungen gewidmet.

I. Der Operator E_f

Wir werden folgende Tatsachen und Bezeichnungen benutzen. Es sei G

eine offene Menge auf einer nicht umbedingt zusammenhängenden Riemannschen Fläche R derart, dass jede Komponente von G eine Greensche Funktion besitzt, und ψ eine "Randfunktion" von G, d.h. eine reelle Funktion auf dem relativen Rande von G (wobei die Werte $\pm\infty$ nicht ausgeschlossen sind). Wir bezeichnen mit H_G^ψ die *normierte* Lösung des Dirichletschen Problems auf G mit ψ als Randfunktion (falls diese existiert) [13]. Darunter versteht man folgendes: es sei $\overline{\mathfrak{V}}_G^\psi$, bzw. $\underline{\mathfrak{V}}_G^\psi$, die Klasse der Funktionen $\overline{V}$, bzw. $\underline{V}$, die auf G superharmonisch und nach unten beschränkt sind, bzw. subharmonisch und nach oben beschränkt sind,[3] und welche noch folgende Bedingungen erfüllen:

$$\varliminf_{q\to p} \overline{V}(q) \geq \psi(p), \text{ bzw. } \varlimsup_{q\to p} \underline{V}(q) \leq \psi(p)$$

für jeden Punkt $p \in Fr\ G$, bis auf eine Menge der Kapazität Null,[4] und für jede nichtkompakte Folge $\{q_n\}$ auf G ist

$$\varliminf_{n\to\infty} \overline{V}(q_n) \geq 0, \qquad \text{bzw. } \varlimsup_{n\to\infty} \underline{V}(q_n) \leq 0.$$

Man bezeichnet

$$\overline{H}_G^\psi(p) = \inf\{\overline{V}(p) \mid \overline{V} \in \overline{\mathfrak{V}}_G^\psi\}$$
$$\underline{H}_G^\psi(p) = \sup\{\underline{V}(p) \mid \underline{V} \in \underline{\mathfrak{V}}_G^\psi\}.$$

Sind diese zwei Funktionen gleich, so bezeichnet man sie mit H_G^ψ, und ψ heisst eine lösbare Randfunktion; H_G^ψ ist in jeder Komponente von G entweder eine harmonische Funktion, oder identisch $\pm\infty$. Jede halbbeschränkte Borelsche Funktion ist lösbar. Ist $\{\psi_n\}$ eine nichtabnähmende Folge von nichtnegativen lösbaren Randfunktionen, die gegen die Randfunktion ψ konvergieren, so ist ψ lösbar und

$$\lim_{n\to\infty} H_G^{\psi_n} = H_G^\psi.$$

Sind ψ_1, ψ_2 positiv und lösbar und α_1, α_2 positive Zahlen, so ist auch $\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2$ lösbar und

$$H_G^{\alpha_1\psi_1+\alpha_2\psi_2} = \alpha_1 H_G^{\psi_1} + \alpha_2 H_G^{\psi_2}.$$

Ist S superharmonisch und nichtnegativ auf R, so ist $H_G^S \leq S$ auf G. Ist $G_1 \subset G_2$, so ist $H_{G_2}^S \leq H_{G_1}^S$ auf G_1.

---

3) Wir lassen zu, dass eine superharmonische Funktion identisch $+\infty$ in einer oder mehreren Komponenten von G ist. Dasselbe für subharmonische Funktionen und $-\infty$.

4) d.h. ihr Durchschnitt mit jeder Kreisscheibe ist eine Menge der Kapazität Null auf dieser Kreisscheibe.

https://doi.org/10.1017/S0027763000002063 Published online by Cambridge University Press

Es sei F eine abgeschlossene Menge auf R, derart dass jede Komponente von $R-F$ eine Greensche Funktion besitzt, und S eine positive superharmonische Funktion auf R. Wir bezeichnen nach Martin [11] mit S_F die Funktion, die auf F gleich S und auf $R-F$ gleich H^S_{R-F} ist; weiter sei S^*_F die Funktion

$$S^*_F(p) = \varliminf_{q\to p} S_F(q).$$

S^*_F ist eine nichtnegative superharmonische Funktion auf R [11].

Es sei u eine nichtnegative harmonische Funktion auf R, und S_1, S_2 zwei nichtnegative superharmonische Funktionen auf R, für die $u \leq S_1 + S_2$ ist. Dann kann man zwei harmonische Funktionen u_1, u_2 auf R konstruieren ([8] Hilfssatz von Kjellberg), derart dass

$$u = u_1 + u_2, \quad 0 \leq u_i \leq S_i \qquad (i = 1, 2)$$

ist.

Für zwei superharmonische (bzw. subharmonische) Funktionen S_1, S_2 auf R werden wir mit $S_1 \vee S_2$ (bzw. $S_1 \wedge S_2$) die Funktion auf R bezeichnen, die durch folgende Beziehung definiert ist:

$$S_1 \vee S_2(p) = \inf \{S(p) \mid S \text{ superharmonisch auf } R,\ S_1 \leq S,\ S_2 \leq S\}$$
$$(\text{bzw. } S_1 \wedge S_2(p) = \sup \{S(p) \mid S \text{ subharmonisch auf } R,\ S_1 \geq S,\ S_2 \geq S\}).$$

Es sei S_0 die Funktion

$$S_0(p) = \varliminf_{q\to p} S_1 \vee S_2(q).$$

Sie sind offenbar nach unten halbstetig und nicht grösser als $S_1 \vee S_2$. Es sei G eine Kreisscheibe auf R und S eine superharmonische Funktion auf R für die $S_i \leq S$ $(i = 1, 2)$ ist. Dann ist auf G

$$H^{S_0}_G \leq H^S_G \leq S \quad \text{und} \quad H^{S_0}_G(q) \leq S_1 \vee S_2(q)$$

für $q \in G$. Da $H^{S_0}_G$ stetig ist, so ist auch $H^{S_0}_G \leq S_0$, woraus man erkennt, dass S_0 superharmonisch ist. Da $S_i \leq S_1 \vee S_2$ und S_i halbstetig nach unten ist, so ist auch $S_i \leq S_0$ und somit, laut der Definition von $S_1 \vee S_2$,

$$S_1 \vee S_2 \leq S_0.$$

Daraus folgt, dass $S_1 \vee S_2$ gleich S_0 und deshalb superharmonisch ist. Ähnlicherweise beweist man, dass $S_1 \wedge S_2$ (für S_1, S_2 subharmonische Funktionen) subharmonisch ist. Für $\alpha \leq 0$ ist

https://doi.org/10.1017/S0027763000002063 Published online by Cambridge University Press

$$\alpha(S_1 \vee S_2) = (\alpha S_1) \wedge (\alpha S_2). \tag{1}$$

Es seien u_1, u_2 harmonische Funktionen. Dann ist

$$u_1 + u_2 = \max(u_1, u_2) + \min(u_1, u_2).$$

Es seien $\{R_\iota\}_{\iota \in J}$ die Komponenten von R, $\{R_{\iota n}\}_n$ eine normale Ausschöpfung von R_ι([14], Seite 25) und $R_n = \bigcup_{\iota \in J} R_{\iota n}$. Dann ist

$$u_1 \vee u_2 = \lim_{n\to\infty} H_{R_n}^{\max(u_1, u_2)}, \qquad u_1 \wedge u_2 = \lim_{n\to\infty} H_{R_n}^{\min(u_1, u_2)},$$

und

$$H_{R_n}^{\max(u_1, u_2)} + H_{R_n}^{\min(u_1, u_2)} = u_1 + u_2.$$

Hieraus ersieht man, dass, falls $u_1 \vee u_2 < +\infty$ auf R ist,[5] so ist auch $u_1 \wedge u_2 > -\infty$ auf R und umgekehrt. In diesem Fall ist

$$u_1 + u_2 = (u_1 \vee u_2) + (u_1 \wedge u_2). \tag{2}$$

Mit $HP(R)$ (bzw. $SP(R)$) werden wir die Klasse der nichtnegativen harmonischen (bzw. superharmonischen[6]) Funktionen auf R bezeichnen. Ist $R \in O_G$, so enthält $SP(R)$ nur konstante Funktionen und umgekehrt.

* * *

In der ganzen Arbeit sollen R und R' zwei beliebige Riemannsche Flächen und f eine nichtkonstante analytische Abbildung von R in R' sein.

Wir werden in den ersten zwei Abschnitten nicht annehmen, dass die Riemannschen Flächen R und R' zusammenhängend sind. Wir wollen nähmlich den Fall, wo R eine offene (nicht zusammenhängende) Menge auf R' und f die identische Abbildung ist, der in dieser Arbeit sehr oft vorkommen wird, in diese Betrachtungen einschliessen. Wie man sehen wird, spielt der Zusammenhang keine Rolle in Bezug auf den Operatoren E_f und I_f, so dass die Beweise dadurch nicht komplizierter werden. Der Fall, wenn R oder R' eine kompakte Komponente besitzen, muss für die Operatore E_f und I_f besonders betrachtet werden und, da dieser Fall trivial ist, werden wir der Einfachheit halber in den ersten zwei Abschnitten annehmen, dass *keine der Komponente von R oder R' kompakt ist.*

---

[5] d.h. $u_1 \vee u_2(p) \neq +\infty$ für jedes $p \in R$.

[6] Es ist erlaubt, dass $S \equiv +\infty$ auf einer oder mehreren Komponenten von R ist.

Definition. *Für jedes* $S \in SP(R)$ *bezeichnen wir mit* $E_f S$ *die Funktion auf* R', *die durch folgende Beziehung definiert wird:*

$$E_f S(p') = \inf \{S'(p') \mid S' \circ f \geq S,\ S' \in SP(R')\} \qquad (p' \in R').$$

Es sei R'_ι eine Komponente von R', $R_\iota = f^{-1}(R'_\iota) \neq \phi$ und f_ι die Abbildung von R_ι in R'_ι, die mit f zusammenfällt. Es sei $S \in SP(R)$ und S_ι die Einschränkung von S auf R_ι; dann ist $E_f S$ gleich $E_{f_\iota} S_\iota$ auf R'_ι.

Ist R eine offene Menge auf R' und f die identische Abbildung, so werden wir auch $\underset{R}{E}$ an Stelle von E_f setzen, da f implizite bekannt ist. Falls keine Missverständnisse zu befürchten sind, so werden wir auch einfach E schreiben.

Für jedes $S \in SP(R)$ werden wir mit $\overline{S}$ die Funktion auf R' bezeichnen, die folgendermassen definiert ist: ist $p' \in f(R)$, so ist

$$\overline{S}(p') = \sup \{S(p) \mid f(p) = p'\};$$

ist $p' \in R' - f(R)$, so ist $\overline{S}(p')$ Null. $\overline{S}$ ist nach unten halbstetig. In der Tat, sei $\{p'_n\}$ eine Folge auf R' die gegen $p' \in f(R)$ konvergiert, p ein Punkt der sich in p' projeziert und $\{p_n\}$ eine Folge auf R, die gegen p strebt und für die $f(p_n) = p'_n$ ist. Dann ist

$$\varliminf_{n\to\infty} \overline{S}(p'_n) \geq \varliminf_{n\to\infty} S(p_n) \geq S(p).$$

Da p beliebig war, so ist $\varliminf_{n\to\infty} \overline{S}(p'_n) \geq \overline{S}(p')$. In den Punkten $p' \in R' - f(R)$ ist diese Beziehung offenbar. Die Ungleichungen

$$S' \circ f \geq S \quad \text{und} \quad S' \geq \overline{S}$$

sind offenbar äquivalent und deshalb ist

$$E_f S(p') = \inf \{S'(p') \mid S' \geq \overline{S},\ S' \in SP(R')\}.$$

Satz 1. *ES ist eine nichtnegative superharmonische Funktion und*

$$S \leq (ES) \circ f.$$

Für $S_1, S_2 \in SP(R)$ *ist*

$$E(S_1 \vee S_2) = ES_1 \vee ES_2 \quad \textit{und} \quad E(S_1 + S_2) \leq ES_1 + ES_2.$$

Wir werden mit $(ES)^*$ die Funktion

$$(ES)^*(p') = \varliminf_{q'\to p'} ES(q')$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000002063 Published online by Cambridge University Press

bezeichnen; sie ist offenbar nach unten halbstetig. Wir wollen zeigen, dass $(ES)^* \in SP(R')$ und daraus wird sich sofort ergeben, dass sie mit ES zusammenfällt. Es sei $S' \geq \bar{S}$, $S' \in SP(R')$ und G' eine Kreisscheibe auf R'; auf dem Rande von G' ist S' nicht kleiner als $(ES)^*$ und deswegen ist $H_{G'}^{(ES)^*} \leq S'$ überall in G'. Daraus folgt

$$H_{G'}^{(ES)^*} \leq ES \quad \text{und} \quad H_{G'}^{(ES)^*} \leq (ES)^*$$

in G', da $H_{G'}^{(ES)^*}$ stetig ist. $(ES)^*$ ist somit eine superharmonische Funktion. Aus $\bar{S} \leq ES$ folgt, da $\bar{S}$ nach unten halbstetig ist, $\bar{S} \leq (ES)^*$. Deshalb ist

$$ES \leq (ES)^*, \qquad ES = (ES)^*.$$

Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen. Die Subadditivität von E folgt sofort aus der Definition. Aus $S_i \leq S_1 \vee S_2 \quad (i=1, 2)$ folgt

$$ES_i \leq E(S_1 \vee S_2) \quad \text{und} \quad ES_1 \vee ES_2 \leq E(S_1 \vee S_2).$$

Da aber $S_i \leq (ES_i) \circ f \leq (ES_1 \vee ES_2) \circ f$ ist, so ist auch

$$S_1 \vee S_2 \leq (ES_1 \vee ES_2) \circ f$$

und

$$E(S_1 \vee S_2) \leq ES_1 \vee ES_2.$$

Satz 2. *Es sei* $R \xrightarrow{f} R' \xrightarrow{f'} R''$. *Dann ist* $E_{f' \cdot f} = E_{f'} E_f$.

Wir bezeichnen $f'' = f' \circ f$. Für jedes $S \in SP(R)$ ist

$$S \leq (E_f S) \circ f, \qquad E_f S \leq (E_{f'} E_f S) \circ f'.$$

Daraus folgert man

$$S \leq (E_{f'} E_f S) \circ f'', \qquad E_{f''} S \leq E_{f'} E_f S.$$

Aus $S \leq (E_{f''} S) \circ f'' = ((E_{f''} S) \circ f') \circ f$ folgt $E_f S \leq (E_{f''} S) \circ f'$ und daher

$$E_{f'} E_f S \leq E_{f''} S, \qquad E_{f'} E_f S = E_{f''} S.$$

Satz 3. *Es sei $\{R'_n\}$ eine nicht abnähmende Folge von offenen Mengen auf R', deren Vereinigung R' ist. Es sei f_n die analytische Abbildung von $f^{-1}(R'_n)$ in R'_n die mit f zusammenfällt. Dann ist $E_{f_n} S \uparrow E_f S$ für jedes $S \in SP(R)$.*

$E_{f_{n+1}} S$ ist superharmonisch und nichtnegativ auf R'_n und es ist $S \leq (E_{f_{n+1}} S) \circ f_n$ auf $f^{-1}(R'_n)$. Daraus folgt $E_{f_n} S \leq E_{f_{n+1}} S$ auf R'_n und ähnlicherweise

https://doi.org/10.1017/S0027763000002063 Published online by Cambridge University Press

$E_{f_n} S \leq E_f S$. Es ist also

$$\lim_{n\to\infty} E_{f_n} S \leq E_f S.$$

Die Funktion $\lim\limits_{n\to\infty} E_{f_n} S$ ist nichtnegativ und superharmonisch auf R' und

$$S \leq (\lim_{n\to\infty} E_{f_n} S) \circ f,$$

woraus

$$E_f S \leq \lim_{n\to\infty} E_{f_n} S$$

folgt.

Satz 4. *Ist* $S,\ S_n \in SP(R)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *und* $S \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} S_n$, *so ist auch*

$$ES \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} ES_n.$$

Ist die Folge $\{S_n\}$ *nichtabnehmend, so ist*

$$E(\lim_{n\to\infty} S_n) = \lim_{n\to\infty} ES_n$$

Es seien S', S'^* die Funktionen

$$S'(p') = \underline{\lim}_{n\to\infty} ES_n(p'), \qquad S'^*(p') = \underline{\lim}_{q'\to p'} S'(q').$$

Man erkennt wie im Satz 1, dass S'^* superharmonisch ist. Aus

$$S'(f(p)) = \underline{\lim}_{n\to\infty} ES_n(f(p)) \geq \underline{\lim}_{n\to\infty} S_n(p) \geq S(p)$$

folgt $S' \geq \overline{S}$ und, da $\overline{S}$ nach unten halbstetig ist, $S'^* \geq \overline{S}$. Es ist also

$$ES \leq S'^* \leq S' = \underline{\lim}_{n\to\infty} ES_n.$$

Ist die Folge $\{S_n\}$ nicht abnähmend, so ist $\{ES_n\}$ auch nicht abnehmend und

$$\lim_{n\to\infty} ES_n \leq E \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Nach dem ersten Teil des Satzes ist aber

$$E \lim_{n\to\infty} S_n \leq \lim_{n\to\infty} ES_n,$$

womit der Satz vollständig bewiesen ist.

Hilfssatz 1. *Es sei* $S \in SP(R)$ *und* G' *eine offene Menge auf* R', *für die alle Komponenten eine Greensche Funktion besitzen. Ist* $S^*_{R-f^{-1}(G')} = S$, *so ist*

$$(ES)^*_{R'-G'} = ES.$$

Ist also ES *nicht identisch unendlich auf einer Komponente* R'_ι *von* R', *so ist* ES *harmonisch auf* $G' \cap R'_\iota$.

Es sei $\overline{V}' \in \mathfrak{V}^{\bar{S}}_{G'}$; dann ist offenbar $\overline{V}' \circ f \in \mathfrak{V}^S_{f^{-1}(G')}$. Daraus folgt sofort

$$H^{\bar{S}}_{G'} \circ f \geq H^S_{f^{-1}(G')} = S, \qquad \overline{S} \leq H^{\bar{S}}_{G'}.$$

Aus $\overline{S} \leq ES$ folgert man

$$\overline{S} \leq H^{\bar{S}}_{G'} \leq H^{ES}_{G'} \leq ES$$

auf G'. Da $\overline{S}$ nach unten halbstetig ist, so ist $\overline{S} \leq (ES)^*_{R'-G'} \leq ES$. Daraus erhalten wir

$$(ES)^*_{R'-G'} = ES,$$

da $(ES)^*_{R'-G'} \in SP(R')$ ist, was zu beweisen war.

Wir bezeichnen mit $HP(f)$ die Klasse der Funktionen u aus $HP(R)$, für welche, für jedes relativkompaktes Gebiet G' auf R',

$$H^u_{f^{-1}(G')} = u$$

auf $f^{-1}(G')$ ist. Diese Beziehung ist mit $u^*_{R-f^{-1}(G')} = u$ äquivalent. Die Klasse $HP(f)$ besitzt folgende Eigenschaften.

a) *Ist* $u \leq v$ *und* $u \in HP(R)$, $v \in HP(f)$, *so ist auch* $u \in HP(f)$.

b) *Ist* u, $v \in HP(f)$ *und sind* α, β *reelle nichtnegative Zahlen, so ist* $\alpha u + \beta v \in HP(f)$.

c) *Ist* u, $v \in HP(f)$, *so ist* $u \wedge v$, $u \vee v \in HP(f)$.

d) *Ist* $\{u_n\}$ *eine Folge aus* $HP(f)$, *die gegen* u *konvergiert und gleichmässig von einer Funktion* $u_0 \in HP(R)$ *majoriert wird, so ist* $u \in HP(f)$.

Es sei G' ein relativkompaktes Gebiet auf R'.

a) Aus

$$v = H^v_{f^{-1}(G')} = H^u_{f^{-1}(G')} + H^{v-u}_{f^{-1}(G')} \leq H^u_{f^{-1}(G')} + v - u$$

erhalten wir

$$u \leq H^u_{f^{-1}(G')}, \qquad u = H^u_{f^{-1}(G')}.$$

b) folgt sofort aus

$$H^{\alpha u+\beta v}_{f^{-1}(G')} = \alpha H^u_{f^{-1}(G')} + \beta H^v_{f^{-1}(G')}.$$

c) folgt aus $0 \leq u \wedge v \leq u \vee v \leq u + v$ und aus a) und b).

d) Wir setzen

$$v_n = u_1 \vee u_2 \vee \cdots \vee u_n.$$

$\{v_n\}$ ist eine nichtabnehmende Folge aus $HP(f)$, die gegen eine harmonische Funktion $v \leq u_0$ konvergiert. Wir haben

$$H^{v}_{f^{-1}(G')} = \lim_{n\to\infty} H^{v_n}_{f^{-1}(G')} = \lim_{n\to\infty} v_n = v.$$

Aus $u \leq v \in HP(f)$ und a) folgt $u \in HP(f)$.

SATZ 5. *Ist $u \in HP(f)$, so ist Eu auf jeder Komponente von R' entweder harmonisch, oder identisch unendlich.*

Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem Hilfssatz 1 und aus der Definition von $HP(f)$.

Es sei G eine offene Menge auf R, so dass jede Komponente von G eine Greensche Funktion besitzt. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{U}_G$ die Klasse der Funktionen $u \in HP(G)$ für die, für alle Punkte q des relativen Randes von G,

$$\overline{\lim_{p\to q}}\, u(p) < \infty$$

ist und

$$\overline{\lim_{p\to q}}\, u(p) = 0$$

ist, für alle Punkte q des relativen Randes von G, die für das Dirichletsche Problem regulär sind. Für eine Funktion $u \in HP(G)$ bezeichnen wir mit $\bar{u}$ die Funktion auf R die auf G gleich u und auf $R-G$ Null ist.

SATZ 6. *Es sei η die identische Abbildung von G in R.*

a) *Es sei $u \in \mathfrak{U}_G$ und D eine relativkompakte offene Menge auf R; dann ist*

$$\bar{u} \leq H^{\bar{u}}_{D}$$

auf D.

b) $\mathfrak{U}_G \subset HP(\eta)$.

c) *Ist $u \in HP(\eta)$ und*

$$\overline{\lim_{p\to q}}\, u(p) < \infty$$

für alle Punkte q des relativen Randes von G, so ist $u \in \mathfrak{U}_G$.

d) *Der Operator E_η ist auf $HP(\eta)$ linear.*

e) *Es sei* $\{u_n\}$ *eine nicht zunehmende Folge aus* $HP(\eta)$, *derart dass*

$$E_\eta u_{n_0} < \infty$$

für ein n_0 *ist. Dann ist* $\lim_{n\to\infty} E_\eta u_n = E_\eta(\lim_{n\to\infty} u_n)$.

a) Es genügt die Ungleichung auf $G \cap D$ zu beweisen. Aus $\bar{u} \in \mathfrak{B}^{\bar{u}}_{G\cap D}$ und $H^{\bar{u}}_D \in \overline{\mathfrak{B}}^{\bar{u}}_{G\cap D}$ folgt $\bar{u} \leq H^{\bar{u}}_D$ auf $G \cap D$.

b) Es sei $u \in \mathfrak{U}_G$ und D ein relativkompaktes Gebiet auf R. Dann ist $\overline{\mathfrak{B}}^{\bar{u}}_{G\cap D} \circ \eta = \overline{\mathfrak{B}}^{u}_{\eta^{-1}(D)}$ und deshalb ist

$$H^{\bar{u}}_{G\cap D} \circ \eta = H^{u}_{\eta^{-1}(D)}.$$

Nach a) ist

$$u = \bar{u} \circ \eta \leq H^{\bar{u}}_{G\cap D} \circ \eta = H^{u}_{\eta^{-1}(D)}$$

und somit $u \in HP(\eta)$.

c) Es ist nur zu beweisen, dass

$$\overline{\lim_{p\to q}}\, u(p) = 0$$

ist, wo q ein regulärer Punkt des relativen Randes von G ist. Es sei D eine Kreisscheibe, die den Punkt q enthält. Nach dem Beweis von b) ist

$$u = H^{u}_{\eta^{-1}(D)} = H^{\bar{u}}_{G\cap D} \circ \eta.$$

Daraus, aus der Regularität von q, aus $\bar{u}(q) = 0$ und aus der Stetigkeit von $\bar{u}$ in q folgt sofort die obige Beziehung.

d) Es genügt den Beweis im Falle dass R zusammenhängend ist durchzuführen. Es sei $u_1, u_2 \in HP(\eta)$. Ist Eu_i $(i = 1, 2)$ identisch unendlich für wenigstens ein i, so ist evident

$$E(u_1 + u_2) = Eu_1 + Eu_2.$$

Wir können also nach Satz 5 annehmen, dass jede Funktion Eu_i harmonisch ist. Da $u_i \leq Eu_i \circ \eta$ ist, so folgt aus c) $u_i \in \mathfrak{U}_G$. Es sei $\{R_n\}$ eine normale Ausschöpfung von R. Sei η_n die identische Abbildung von $\eta^{-1}(R_n)$ in R_n. Nach a) ist $\bar{u}_i \leq H^{\bar{u}_i}_{R_n}$. Daraus folgt

$$E_{\eta_n} u_i \leq H^{\bar{u}_i}_{R_n}.$$

Da aber $E_{\eta_n} u_i \in \overline{\mathfrak{B}}^{\bar{u}_i}_{R_n}$, so ist

$$E_{\eta_n} u_i = H^{\bar{u}_i}_{R_n}.$$

Ähnlicherweise zeigt man, dass $E_{\eta_n}(u_1+u_2)=H_{R_n}^{\bar{u}_1+\bar{u}_2}$ ist. Daraus ergibt sich

$$E_{\eta_n}(u_1+u_2)=E_{\eta_n}u_1+E_{\eta_n}u_2$$

und für $n\to\infty$ folgt nach Satz 3

$$E_\eta(u_1+u_2)=E_\eta u_1+E_\eta u_2.$$

e) Wir bezeichnen $v_n=u_{n_0}-u_n$ $(n>n_0)$. Dann $\{v_n\}$ ist eine nicht abnähmende gleichmässig beschränkte Folge aus $HP(\eta)$ und nach d) und Satz 4 ist

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}Eu_n&=\lim_{n\to\infty}E(u_{n_0}-v_n)=Eu_{n_0}-\lim_{n\to\infty}Ev_n=\\&=Eu_{n_0}-E(\lim_{n\to\infty}v_n)=Eu_{n_0}-E(u_{n_0}-\lim_{n\to\infty}u_n)=E(\lim_{n\to\infty}u_n).\end{aligned}$$

Es sei R zusammenhängend[7]. Eine Funktion u aus $HP(R)$ heisst singulär, wenn jede beschränkte nichtnegative harmonische Funktion, die kleiner als u ist, identisch verschwindet. Die Funktion heisst quasibeschränkt, falls sie Grenzfunktion einer nichtabnehmenden Folge von beschränkten harmonischen Funktionen ist. Ist v quasibeschränkt und w singulär, so ist $v\wedge w=0$. Parreau hat beweisen, dass jede Funktion $u\in HP(R)$ eindeutig als Summe einer quasibeschränkten und einer singulären Funktion darstellbar ist [13]. Es sei α eine positive Zahl. Dann ist

$$u-\alpha\leq(u-\alpha)\vee 0\leq u,\qquad 0\leq u-(u-\alpha)\vee 0\leq\alpha.$$

Ist u singulär, so ist

$$0\leq u-(u-\alpha)\vee 0\leq\alpha\wedge u\leq u \text{ und } (u-\alpha)\vee 0=u.$$

Die Funktion $u\in HP(R)$ $(u\neq 0)$ heisst minimal, wenn aus $v\in HP(R)$ und $v\leq u$,

$$v=\alpha u$$

folgt, wo α eine reelle Zahl ist [11]. Für zwei nichtproportionale minimale Funktionen u, v ist $u\wedge v=0$.

Eine Funktion $u\in HP(R)$ heisst eine *diskrete Funktion*, wenn sie als endliche oder abzählbare Summe von minimalen Funktionen darstellbar ist; u heisst *total nichtdiskrete Funktion*, falls es keine minimale Funktion gibt, die

[7] Auch für die weitere Betrachtungen ist der Zusammenhang von R nicht notwendig, aber sie sind nur für R zusammenhängend interessant.

kleiner als u ist. Jede Funktion $u \in HP(R)$ ist eindeutig als Summe einer diskreten und einer total nichtdiskreten Funktion darstellbar. In der Tat, es sei $\{K_s\}$ die Klasse aller minimalen Funktionen auf R, die in einem Punkt gleich 1 sind und $\alpha(s)$ die grösste reelle Zahl für die $\alpha(s)K_s \leq u$ ist. Da $K_s \wedge K_{s'} = 0$ für $s \neq s'$ ist, so ist ([5], Theorem 2.2)

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha(s_i) K_{s_i} = \bigvee_{i=1}^{n} \alpha(s_i) K_{s_i} \leq u.$$

Daraus folgt, dass $\alpha(s)$ nur für abzählbar vielen s positiv ist und es gilt $\sum_{\alpha(s)>0} \alpha(s) K_s \leq u.$

$$u = \sum_{\alpha(s)>0} \alpha(s) K_s + (u - \sum_{\alpha(s)>0} \alpha(s) K_s)$$

ist offenbar die gesuchte Darstellung.

$u \in HP(R)$ heisst ein harmonisches Mass [5], [7], wenn

$$u \leq 1, \qquad u \wedge (1-u) = 0$$

ist. Jede minimale beschränkte Funktion u, für die sup $u=1$ ist, ist ein harmonisches Mass. Jedes harmonische Mass u besitzt die Eigenschaft

$$(M) \qquad \frac{u-\alpha}{1-\alpha} \vee 0 = u \qquad (0<\alpha<1).$$

Da u nicht grösser als 1 ist, ist nähmlich

$$\frac{u-\alpha}{1-\alpha} \leq u \text{ und } \frac{u-\alpha}{1-\alpha} \vee 0 \leq u.$$

Es sei $v = u - \dfrac{u-\alpha}{1-\alpha} \vee 0 \leq u.$ Dann ist

$$0 \leq v \leq u - \frac{u-\alpha}{1-\alpha} = \frac{\alpha(1-u)}{1-\alpha}$$

und

$$0 \leq v \leq \frac{\alpha(1-u)}{1-\alpha} \wedge u \leq \max\left(1, \frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \cdot ((1-u) \wedge u) = 0.$$

Umgekehrt, besitzt $u \in HP(R)$ $(u \leq 1)$ die Eigenschaft (M), so ist u ein harmonisches Mass. Laut (2) ist nähmlich

$$\left(\frac{u-\alpha}{1-\alpha} \vee 0\right) + \left(\frac{u-\alpha}{1-\alpha} \wedge 0\right) = \frac{u-\alpha}{1-\alpha}$$

und somit

https://doi.org/10.1017/S0027763000002063 Published online by Cambridge University Press

$$\frac{u-\alpha}{1-\alpha} \wedge 0 = \frac{u-\alpha}{1-\alpha} - u = -\frac{\alpha(1-u)}{1-\alpha},$$

$$-\frac{1}{\alpha}((u-\alpha)\wedge 0) = 1-u.$$

Nach (1) ist dann auch

$$\frac{\alpha-u}{\alpha} \vee 0 = -\frac{1}{\alpha}((u-\alpha)\wedge 0) = 1-u.$$

Es sei $\{R_n\}$ eine normale Ausschöpfung von R. Dann ist offenbar

$$(1-u)\vee u \geq H_{R_n}^{\left(\frac{u-\alpha}{1-\alpha}\right)^+} + H_{R_n}^{\left(\frac{\alpha-u}{\alpha}\right)^+},$$

wo $\varphi^+ = \max(\varphi, 0)$ gesetzt wurde. Für $n \to \infty$ erhalten wir

$$(1-u)\vee u \geq \frac{u-\alpha}{1-\alpha} \vee 0 + \frac{\alpha-u}{\alpha} \vee 0 = u + (1-u) = 1$$

und, nach (2), $(1-u)\wedge u = 0$.

Aus der Eigenschaft (M) folgt unmittelber, dass für ein harmonisches Mass u

$$\sup u = 1 \quad \text{oder} \quad 0$$

ist.

Die harmonischen Masse (bzw. singulären Funktionen) besitzen noch eine wichtige Eigenschaft. Für jedes $\alpha < 1$ (bzw. $\alpha < \infty$) ist

$$H^u_{\{u<\alpha\}} = u. \tag{3}$$

In der Tat, die Funktion

$$S = \begin{cases} H^u_{\{u<\alpha\}} & \text{in } \{u<\alpha\} \\ u & \text{in } \{u \geq \alpha\} \end{cases}$$

ist superharmonisch und

$$\frac{u-\alpha}{1-\alpha} \leq S \leq u \qquad (\text{bzw. } u-\alpha \leq S \leq u),$$

woraus

$$u = \frac{u-\alpha}{1-\alpha} \vee 0 \leq S \leq u \quad (\text{bzw. } u = (u-\alpha)\vee 0 \leq S \leq u)$$

folgt.

Satz 7. *Es sei u eine minimale Funktion auf R. Dann können nur folgende Fälle vorkommen:*

a) $Eu \equiv \infty$,

b) $Eu = \alpha g'_{p'}$,

c) *Eu ist eine minimale Funktion.*

Dabei ist $g'_{p'}$ die Greensche Funktion von R' und α eine positive Zahl. Ist u minimal beschränkt, so kommt nur der Fall c) vor, und Eu ist auch minimal beschränkt.

Wir nehmen an, dass Eu nicht identisch unendlich ist und es seien S_1', $S_2' \in SP(R')$, derart dass keine identisch Null ist und $Eu = S_1' + S_2'$. Dann ist $u \leq S_1' \circ f + S_2' \circ f$ und nach Kjellbergschem Hilfssatz gibt es zwei harmonische Funktionen u_1, u_2, derart dass $u = u_1 + u_2$, $0 \leq u_i \leq S_i' \circ f$ $(i = 1, 2)$ ist. Da u minimal ist, so haben wir

$$u_i = \alpha_i u \quad (0 \leq \alpha_i \leq 1) \text{ und } \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

Keine der Zahlen α_1, α_2 ist Null, denn wäre z.B. $\alpha_1 = 0$, so ist $u = u_2 \leq S_2' \circ f$, woraus

$$Eu = S_2', \qquad S_1' = 0$$

folgen würde, entgegen der Voraussetzung über S_1'. Es ist also $u = \dfrac{1}{\alpha_i} u_i \leq \dfrac{1}{\alpha_i} S_i' \circ f$ und somit $Eu \leq \dfrac{1}{\alpha_i} S_i'$. Daraus folgt

$$Eu = \alpha_1 Eu + \alpha_2 Eu \leq S_1' + S_2' = Eu,$$

woraus man erkennt, dass $\alpha_i Eu = S_i'$ für jedes i ist. Es ist somit $\dfrac{S_1'}{\alpha_1} = \dfrac{S_2'}{\alpha_2}$. Nach dem Satz von Riesz, kann man Eu in der Form

$$Eu = P' + u'$$

darstellen, wo P' ein (mit Greenscher Funktion gebildeter) Potential und u' eine nichtnegative harmonische Funktion ist. Wären beide nicht Null, so wären laut obigen Betrachtungen, u' und P' proportional, was widersinnig ist. Eu ist also entweder eine harmonische Funktion, oder ein Potential. Im ersten Falle ist sie minimal, denn ist $v' \in HP(R')$ und $0 < v' < Eu$, so setzen wir $S_1' = v'$, $S_2' = Eu - v'$ und wir erhalten wie oben $v' = \alpha Eu$. Im zweiten Fall ist

$$Eu = \int_{R'} g'_{p'} d\mu'(p').$$

Sind A_1', A_2' zwei punktfremde Borelsche Mengen auf R', deren Vereinigung R' ist, so hat höchstens eine von ihnen positives μ' Mass; im entgegengesetzten Falle setzen wir

$$S_i' = \int_{A'_i} g'_{p'} \, d\mu'(p') > 0 \qquad (i=1,\ 2).$$

Laut obiger Betrachtungen, müssen S_1', S_2' proportional sein, was unmöglich ist, wegen der Eindeutigkeit des Masses eines Potentials. Daraus folgt, dass ein Punkt $p' \in R'$ und eine reelle Zahl α existieren, derart dass

$$\mu(A') = \begin{cases} \alpha \text{ für } p' \in A' \\ 0 \text{ für } p' \notin A' \end{cases}$$

und $Eu = \alpha g'_{p'}$ ist.

Ist u beschränkt, so ist offenbar auch Eu beschränkt, was nur im Falle c) möglich ist.

In einer früheren Arbeit [1] haben wir mit U die Klasse der Riemannschen Flächen mit Greenscher Funktion bezeichnet, die wenigstens eine beschränkte minimale Funktion besitzen. Aus dem Satz 7 folgt,

Folgesatz 1. *Ist $R \in U$, so ist entweder $R' \in O_G$ oder $R' \in U$. Es ist $U \subset O_{AB}$.*

Für die letzte Behauptung, die in [1] mittels der universellen Überlagerungsfläche bewiesen wurde, nehmen wir an, dass f eine nichtkonstante beschränkte analytische Funktion auf R ist. Wir bezeichnen mit R' eine Kreisscheibe, die die Werte von f enthält. Da R' offenbar weder zu U noch zu O_G angehört, so haben wir einen Widerspruch erhalten.

Hilfssatz 2. *Es sei u ein harmonisches Mass* (*bzw. eine singuläre Funktion*) *und $Eu < 1$* (bzw. $Eu < \infty$). *Dann ist $u \in HP(f)$.*

Es sei G' ein relativkompaktes Gebiet auf R'. Dann ist

$$\alpha = \sup \{u(p) \,|\, p \in f^{-1}(G')\} \leq \sup \{Eu(p') \,|\, p' \in G'\} < 1 \qquad (\text{bzw. } \alpha < \infty)$$

und

$$f^{-1}(G') \subset \{p \in R \,|\, u < \alpha\}.$$

Dann ist nach (3)

$$u \geq H^u_{f^{-1}(G')} \geq H^u_{\{u<\alpha\}} = u,$$

woraus $u \in HP(f)$ folgt.

SATZ 8. *Es sei* $u \in HP(f)$ *und* $Eu \not\equiv +\infty$. *Ist* u: *a) quasibeschränkt b) singulär, c) minimal, d) diskret, e) ein harmonisches Mass,*[8] *so besitzt* Eu *dieselbe Eigenschaft. Ist* $u = v + w$, *wo* v *quasibeschränkt und* w *singulär ist, so ist*

$$Eu = Ev + Ew.$$

a) Ist u beschränkt, so ist auch Eu beschränkt. Ist u quasibeschränkt, so gibt es eine nicht abnehmende Folge $\{u_n\}$ von beschränkten harmonischen Funktionen, die gegen u streben. Aus dem Satz 4 folgt dann

$$Eu = \lim_{n\to\infty} Eu_n,$$

woraus man gleich erkennt, dass Eu quasibeschränkt ist.

b) Es sei u' eine nichtnegative beschränkte harmonische Funktion auf R', für die $u' \leq Eu$ ist. Dann ist

$$u \leq Eu\circ f = u'\circ f + (Eu - u')\circ f.$$

Mittels des Kjellbergschen Hilfssatzes kann man zwei harmonische Funktionen u_1, u_2 konstruieren, für welche $u = u_1 + u_2$, $0 \leq u_1 \leq u'\circ f$, $0 \leq u_2 \leq (Eu - u')\circ f$ ist. Daraus folgt aber, dass u_1 beschränkt und, da u singulär ist, sogar identisch Null ist. Es ist also

$$u = u_2 \leq (Eu - u')\circ f,$$

woraus man $Eu \leq Eu - u'$ und $u' = 0$ folgert. Eu ist demnach singulär.

c) wurde im Satz 7 bewiesen.

d) Es sei $Eu = u'_\tau + u'_\sigma$ die Zerlegung von Eu in eine total nicht diskrete Funktion u'_τ und eine diskrete Funktion u'_σ. Dann ist

$$u \leq u'_\tau \circ f + u'_\sigma \circ f.$$

$u'_\tau \circ f$ ist total nichtdiskret. Denn aus $0 < u_0 \leq u'_\tau \circ f$, wo u_0 eine minimale Funktion ist, folgt $0 < Eu_0 \leq u'_\tau$ und nach Satz 7 ist Eu_0 minimal. Es ist daher $u \leq u'_\sigma \circ f$, $Eu \leq u'_\sigma$ und $u'_\tau = 0$.

e) Aus $u \leq Eu\circ f$ folgt

[8] Heins hat bewiesen [7], dass wenn u ein harmonisches Mass und Eu harmonisch ist, so ist auch Eu ein harmonisches Mass. Dieser Satz folgt aus dem Hilfssatz 2 und aus Satz 8.

https://doi.org/10.1017/S0027763000002063 Published online by Cambridge University Press

$$\frac{u-\alpha}{1-\alpha} \leq \frac{Eu-\alpha}{1-\alpha} \circ f \leq \left(\frac{Eu-\alpha}{1-\alpha} \vee 0\right) \circ f$$

für jedes α, $0<\alpha<1$, und nach Eigenschaft (M) ist

$$u = \frac{u-\alpha}{1-\alpha} \vee 0 \leq \left(\frac{Eu-\alpha}{1-\alpha} \vee 0\right) \circ f.$$

Daraus erhalten wir

$$Eu \leq \frac{Eu-\alpha}{1-\alpha} \vee 0.$$

Da Eu nicht grösser als 1 und nichtnegativ ist, so ist offenbar

$$\frac{Eu-\alpha}{1-\alpha} \leq Eu.$$

Daraus folgt, dass Eu die Eigenschaft (M) besitzt und somit ein harmonisches Mass ist.

Es sei jetzt $u=v+w$, wo v quasibeschränkt und w singulär ist. Dann ist $v \wedge w = 0$ und nach (2) ist $u = v \vee w$. Nach a) und b) sind Ev quasibeschränkt und Ew singulär und somit haben wir wie oben

$$Ev \vee Ew = Ev + Ew.$$

Nun ist nach Satz 1

$$Eu = E(v \vee w) = Ev \vee Ew = Ev + Ew,$$

womit der Satz vollständig bewiesen ist.

II. Der Operator I_f

Definition. *Es sei $u' \in HP(R')$. Wir bezeichnen mit $I_f u'$ die auf R durch folgende Beziehung definierte Funktion:*

$$I_f u'(p) = \sup \{u(p) \mid u \leq u' \circ f,\ u \in HP(f)\}.$$

Es sei R_ι eine Komponente von R, R'_ι die Komponente von R' die $f(R_\iota)$ enthält und f_ι die Abbildung von R_ι in R'_ι die mit f zusammenfällt. Es sei $u' \in HP(R')$ und u'_ι die Einschränkung von u' auf R'_ι. Dann ist $I_{f_\iota} u'_\iota = I_f u'$ auf R_ι.

Ist R eine offene Menge auf R', und f die identische Abbildung, so werden wir auch $\underset{R}{I}$ an Stelle von I_f setzen, da f implizite bekannt ist. Falls keine

https://doi.org/10.1017/S0027763000002063 Published online by Cambridge University Press

Missverständnisse zu befürchten sind, so werden wir auch einfach I schreiben.

SATZ 9. *Iu' ist eine harmonische Funktion und $Iu' \in HP(f)$. Der Operator I hat folgende Eigenschaften:* $(u_1', u_2' \in HP(R'))$

a) $I(u_1' \vee u_2') = Iu_1' \vee Iu_2'$, $I(u_1' \wedge u_2') = Iu_1' \wedge Iu_2'$,

b) $I(\alpha_1 u_1' + \alpha_2 u_2') = \alpha_1 Iu_1' + \alpha_2 Iu_2'$,

wo α_1, α_2 reelle nichtnegative Zahlen sind.

Nach Eigenschaft c) von $HP(f)$ folgt, dass die Klasse $\{u \in HP(f) | u \leq u' \circ f\}$ nach oben filtrant ist, woraus man erkennt, dass eine nichtabnehmende Folge aus dieser Klasse existiert, die gegen Iu' konvergiert. Daraus und aus der Eigenschaft d) der Klasse $HP(f)$ folgt $Iu' \in HP(f)$.

Der Operator I ist evident monoton und $I(\alpha u') = \alpha Iu'$. Aus $Iu_1' + Iu_2' \in HP(f)$ und

$$Iu_1' + Iu_2' \leq u_1' \circ f + u_2' \circ f = (u_1' + u_2') \circ f$$

erhält man

$$Iu_1' + Iu_2' \leq I(u_1' + u_2').$$

Da

$$I(u_1' + u_2') \leq (u_1' + u_2') \circ f = u_1' \circ f + u_2' \circ f$$

ist, so kann man mittels des Hilfssatzes von Kjellberg zwei harmonische Funktionen u_1, u_2 konstruieren, derart dass

$$I(u_1' + u_2') = u_1 + u_2, \quad 0 \leq u_i \leq u_i' \circ f \qquad (i = 1, 2)$$

ist. Aus $u_i \leq I(u_1' + u_2')$ folgt sofort $u_i \in HP(f)$ und deshalb ist $u_i \leq Iu_i'$. Es ist somit

$$I(u_1' + u_2') \leq Iu_1' + Iu_2',$$

woraus die Linearität von I folgt.

Aus $u_1' \wedge u_2' \leq u_i'$ $(i = 1, 2)$, ergibt sich

$$I(u_1' \wedge u_2') \leq Iu_i', \quad I(u_1' \wedge u_2') \leq Iu_1' \wedge Iu_2'.$$

Da aber $Iu_1' \wedge Iu_2' \leq u_i' \circ f$, so ist

$$E(Iu_1' \wedge Iu_2') \leq u_i'$$

und daraus folgt

$$E(Iu_1' \wedge Iu_2') \leq u_1' \wedge u_2', \qquad Iu_1' \wedge Iu_2' \leq (u_1' \wedge u_2') \circ f,$$

$$Iu_1' \wedge Iu_2' \leq I(u_1' \wedge u_2'), \qquad Iu_1' \wedge Iu_2' = I(u_1' \wedge u_2').$$

Daraus und aus

$$(Iu_1' \vee Iu_2') + (Iu_1' \vee Iu_2') = Iu_1' + Iu_2' = I(u_1' + u_2')$$
$$= I((u_1' \vee u_2') + (u_1' \wedge u_2')) = I(u_1' \vee u_2') + I(u_1' \wedge u_2'),$$

ergibt sich

$$Iu_1' \vee Iu_2' = I(u_1' \vee u_2').$$

Es gelten folgende Rechenregeln: $(u \in HP(f),\ Eu < \infty,\ u' \in HP(R'))$

$$EIu' \leq u', \qquad IEIu' = Iu',$$
$$u \leq IEu, \qquad Eu = EIEu.$$

Aus $Iu' \leq u' \circ f$ folgt nähmlich

$$EIu' \leq u', \qquad Iu' \leq (EIu') \circ f \leq u' \circ f.$$

Daraus folgt $Iu' \leq IEIu' \leq Iu'$ und somit

$$Iu' = IEIu'.$$

Aus $u \leq Eu \circ f$ folgt

$$u \leq IEu \leq Eu \circ f, \qquad Eu \leq EIEu \leq Eu$$

und somit

$$EIEu = Eu.$$

Hilfssatz 3. *Jede Funktion* $u' \in HP(R')$ *ist in der Form* $u' = u_1' + u_2'$ *darstellbar, wo* u_1' *das Bild durch* E *einer Funktion aus* $HP(f)$ *ist und* u_2' *im Kern von* I *liegt. Diese Darstellung ist eindeutig. Ist* $v' \leq Eu < \infty$ *für ein* $u \in HP(f)$, *so ist*

$$v' = EIv'.$$

Es ist

$$u_1' = EIu', \qquad u_2' = u' - EIu'$$

die gesuchte Zerlegung. Ist $u' = u_3' + u_4'$ eine andere Darstellung von u' mit denselben Eigenschaften, so ist $Eu = u_3'$ für ein $u \in HP(f)$ und

$$EIu_3' = EIEu = Eu = u_3'.$$

Aber $Iu' = Iu_3'$, $u_1' = EIu' = EIu_3' = u_3'$ und $u_4' = u' - u_3' = u' - u_1' = u_2'$. Aus $Eu = v' + (Eu - v')$ folgt

$$Eu = EIEu \leq EIv' + EI(Eu - v') \leq EIv' + Eu - v',$$
$$v' \leq EIv', \qquad v' = EIv'.$$

HILFSSATZ 4. *Ist G eine offene Menge auf R, derart dass jede Komponente von G eine Greensche Funktion besitzt und ist η die identische Abbildung von G in R, so ist für jede Funktion $u \in HP(R)$*

$$u \circ \eta = I_\eta u + H_G^u \circ \eta.$$

Es ist offenbar $(u - H_G^u) \circ \eta \in \mathfrak{U}_G$($\mathfrak{U}_G$ wurde vor dem Satz 6 definiert). Nach b), Satz 6 ist $(u - H_G^u) \circ \eta \in HP(\eta)$ und somit

$$(u - H_G^u) \circ \eta \leq I_\eta u.$$

$I_\eta u$ gehört nach c), Satz 6 der Klasse $\mathfrak{U}_G$ an. Dann ist $u - (I_\eta u) \circ \eta^{-1} \in \mathfrak{V}_G^u$. Daraus folgt

$$u - (I_\eta u) \circ \eta^{-1} \geq H_G^u, \qquad u \circ \eta = I_\eta u + H_G^u \circ \eta.$$

Laut des Hilfssatzes 4 ist, $u \in HP(f)$ gleichbedeutend mit $\underset{f^{-1}(G')}{I} u = 0$ für jedes relativkompaktes Gebiet G' auf R'.

SATZ 10. *Es sei $\{R'_n\}$ eine nicht abnähmende Folge von offenen Mengen auf R', deren Vereinigung R' ist. Es sei f_n die analytische Abbildung von $f^{-1}(R'_n)$ in R'_n, die mit f zusammenfällt. Dann ist $I_{f_n} u' \uparrow I_f u'$ für jedes $u' \in HP(R')$.*

Ist $u \in HP(f_{n+1})$, so ist u, als Funktion auf $f^{-1}(R'_n)$ betrachtet, in der Klasse $HP(f_n)$ enthalten. Es sei nähmlich G' ein relativkompaktes Gebiet auf R'_n; dann ist

$$H^u_{f_n^{-1}(G')} = H^u_{f_{n+1}^{-1}(G')} = u$$

auf $f_n^{-1}(G')$. Daraus folgt, dass die Folge $\{I_{f_n} u'\}$ nicht zunähmend ist. Ähnlicherweise beweist man die Ungleichung $I_f u' \leq I_{f_n} u'$. Wir setzen

$$v = \lim_{n \to \infty} I_{f_n} u' \geq I_f u'.$$

Es sei G' ein relativkompaktes Gebiet auf R'. Für ein genügend grosses n ist $\bar{G}'$ in R'_n enthalten. Da $v \leq I_{f_n} u' \in HP(f_n)$ ist, so folgt aus der Eigenschaft a) von $HP(f_n)$, $v \in HP(f_n)$. Es ist also

$$H^v_{f^{-1}(G')} = H^v_{f_n^{-1}(G')} = v$$

auf $f^{-1}(G')$. Es ist also $v \in HP(f)$ und $v \leq I_f u'$.

Satz 11. *Ist* $u', u'_m \in HP(R')$ $(m=1, 2, \ldots)$ *und* $u' \geq \overline{\lim_{m\to\infty}} u'_m$, *so ist*

$$Iu' \geq \overline{\lim_{m\to\infty}} Iu'_m.$$

Ist die Folge $\{u'_m\}$ *monoton und konvergent, so ist*

$$I \lim_{m\to\infty} u'_m = \lim_{m\to\infty} Iu'_m.$$

Es genügt den Satz im Falle dass R' zusammenhängend ist zu beweisen.

Wir werden erst beweisen, dass falls die Folge $\{u'_m \circ f\}$ gleichmässig gegen $u' \circ f$ konvergiert, so ist $Iu' = \lim_{m\to\infty} Iu'_m$. Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ ist, für genügend grosse m,

$$u' \circ f \leq u'_m \circ f + \varepsilon \leq u' \cdot f + 2\,\varepsilon$$

und deshalb auch

$$Iu' \leq Iu'_m + I\varepsilon \leq Iu' + 2\,I\varepsilon,$$

woraus die Behauptung folgt.

Wir nehmen jetzt an, dass $u' = \lim_{m\to\infty} u'_m$ ist, und es sei $\{R'_n\}$ eine normale Ausschöpfung von R', und f_n die analytische Abbildung von $f^{-1}(R'_n)$ in R'_n, die mit f zusammenfällt. Auf $f^{-1}(R'_n)$ konvergiert die Folge $\{u'_m \circ f\}$ gleichmässig gegen $u' \circ f$ und deshalb ist

$$I_{f_n} u' = \lim_{m\to\infty} I_{f_n} u'_m.$$

Da aber nach dem Satz 10 $I_{f_n} u'_m \geq I_f u'_m$ auf $f^{-1}(R_n)$ ist, so ist

$$I_{f_n} u' \geq \overline{\lim_{m\to\infty}} I_f u'_m.$$

Weiter ergibt sich aus demselben Satz

$$I_f u' = \lim_{n\to\infty} I_{f_n} u' \geq \overline{\lim_{m\to\infty}} I_f u'_m.$$

Wir gehen jetzt zum allgemeineren Fall über, nähmlich dass $u' \geq \overline{\lim_{m\to\infty}} u'_m$ ist. Es sei $p \in R$ und $\{u'_{m_i}\}$ eine konvergente Teilfolge von $\{u'_m\}$, so dass die Folge $\{Iu'_{m_i}(p)\}$ konvergent und

$$\lim_{i\to\infty} Iu'_{m_i}(p) = \overline{\lim_{m\to\infty}} Iu'_m(p)$$

ist. Wir haben aus $u' \geq \lim_{i\to\infty} u'_{m_i}$,

https://doi.org/10.1017/S0027763000002063 Published online by Cambridge University Press

$$Iu'(p) \geq (I \lim_{i\to\infty} u'_{m_i})\ (p) \geq \overline{\lim_{i\to\infty}}\ Iu'_{m_i}(p) = \overline{\lim_{m\to\infty}}\ Iu'_m(p),$$

woraus die erste Behauptung des Satzes folgt.

Ist die Folge nicht zunehmend, so ist $I \lim_{n\to\infty} u'_n \leq Iu'_m$ und deshalb

$$I \lim_{n\to\infty} u'_n \leq \underline{\lim_{m\to\infty}}\ Iu'_m, \qquad I \lim_{m\to\infty} u'_m = \lim_{m\to\infty} Iu'_m.$$

Ist die Folge nicht abnehmend, so ist $\lim_{n\to\infty} u'_n - u'_m \in HP(R')$ und

$$I \lim_{n\to\infty} u'_n = Iu'_m + I(\lim_{n\to\infty} u'_n - u'_m).$$

Da die Folge $\{\lim_{n\to\infty} u'_n - u'_m\}_m$ nicht zunehmend ist und gegen Null konvergiert, so ist

$$I \lim_{m\to\infty} u'_m = \lim_{m\to\infty} Iu'_m.$$

Hilfssatz 5. *Es sei $u' \in HP(R')$ und G' eine offene Menge auf R', für die jede Komponente eine Greensche Funktion besitzt. Ist $u' = u'^{*}_{R'-G'}$, so ist*

$$Iu' = (Iu')^{*}_{R-f^{-1}(G')}.$$

Wir können ohne Verlust der Allgemeinheit annehmen, dass R' zusammenhängend ist; es sei $\{R'_n\}$ eine normale Ausschöpfung von R', η_n die identische Abbildung von $R'_n \cap G'$ in R'_n und η die identische Abbildung von G' in R'. Aus dem Hilfssatz 4 folgt $I_{\eta_n} u' = u'$ auf $G' \cap \partial R'_n$ und $I_\eta u' = 0$. Nach dem Satz 10 ist also $\lim_{n\to\infty} I_{\eta_n} u' = 0$. Wir haben auf $f^{-1}(R'_n \cap G')$

$$I_f u' = H^{I_f u'}_{f^{-1}(R'_n \cap G')} \leq H^{I_f u'}_{f^{-1}(G')} + (I_{\eta_n} u') \circ f.$$

Für $n \to \infty$ erhalten wir

$$I_f u' \leq H^{I_f u'}_{f^{-1}(G')}$$

auf $f^{-1}(G')$, woraus folgt

$$I_f u' = (I_f u')^{*}_{R-f^{-1}(G')}.$$

Satz 12. *Es sei $R \xrightarrow{f} R' \xrightarrow{f'} R''$. Dann ist*

$$I_{f' \circ f} = I_f I_{f'}.$$

Wir bezeichnen $f'' = f' \circ f$. Es sei $u'' \in HP(R'')$, G'' ein relativkompaktes Gebiet auf R'' und $G' = f'^{-1}(G'')$. Da

$$I_{f'} u'' = (I_{f'} u'')^*_{R'-G'}$$

ist, so ist nach dem vorangehender Hilfssatz

$$I_f I_{f'} u'' = (I_f I_{f'} u'')^*_{R-f''^{-1}(G'')},$$

d.h. $I_f I_{f'} u'' \in HP(f'')$. Daraus und aus $I_f I_{f'} u'' \leq u'' \circ f$ folgt

$$I_f I_{f'} u'' \leq I_{f''} u''.$$

Aus $u \in HP(f'')$ und $E_f u < \infty$ folgt $E_f u \in HP(f')$. Denn es sei G'' ein relativkompaktes Gebiet auf R''; dann ist

$$u = u^*_{R-f''^{-1}(G'')} = u^*_{R-f^{-1}(f'^{-1}(G''))}$$

und aus Hilfssatz 1 haben wir

$$E_f u = (E_f u)^*_{R'-f'^{-1}(G'')}.$$

Daraus erkennt man erst, dass $E_f u$ harmonisch auf R' ist, denn jeder Punkt von R' kann innerer Punkt einer Menge der Form $f'^{-1}(G'')$ werden. Weiter folgt aus der letzten Gleichheit $E_f u \in HP(f')$.

Es ist $HP(f'') \subset HP(f)$. In der Tat, es sei $u \in HP(f'')$ und G' ein relativkompaktes Gebiet auf R'. Dann ist $f'(G')$ ein relativkompaktes Gebiet auf R'' und $f^{-1}(G') \subset f''^{-1}(f'(G'))$. Daraus folgt

$$u = u^*_{R-f''^{-1}(f'(G'))} \leq u^*_{R-f^{-1}(G')} \leq u$$

und $u \in HP(f)$.

Aus $I_{f''} u'' \in HP(f'')$ folgt $E_f I_{f''} u'' \in HP(f)$. Es ist aber

$$I_{f''} u'' \leq u'' \circ f'' = (u'' \circ f') \circ f$$

und deshalb ist

$$E_f I_{f''} u'' \leq u'' \circ f, \qquad E_f I_{f''} u'' \leq I_{f'} u'',$$
$$I_{f''} u'' \leq (E_f I_{f''} u'') \circ f \leq (I_{f'} u'') \circ f.$$

Daraus und aus $I_{f''} u'' \in HP(f)$ ergibt sich

$$I_{f''} u'' \leq I_f I_{f'} u'', \qquad I_{f''} u'' = I_f I_{f'} u''.$$

HILFSSATZ 6. *Es sei R' zusammenhängend, G' eine offene Menge auf R' und $G = f^{-1}(G')$. Wir bezeichnen mit f' die Abbildung von G in G' die mit f zusammenfällt. Es sei u' eine minimale Funktion auf R' für die*

$\underset{G'}{I} u' \neq 0$, $I_f u' \neq 0$ *ist. Dann ist $G \neq \phi$ und*

$$\underset{G}{I} I_f u' = I_{f'} \underset{G'}{I} u' \neq 0, \qquad \underset{G}{E} \underset{G}{I} I_f u' = I_f u'.$$

Es sei erstens $G \neq \phi$. Wir setzen $u = I_f u'$. Ist $\underset{G}{I} u = 0$, so ist, nach Hilfssatz 4, $u = H_G^u$ auf G. Da $\overline{\mathfrak{V}}_{G'}^{u'} \circ f \subset \overline{\mathfrak{V}}_G^u$ ist, so ist $H_G^u \leq H_{G'}^{u'} \circ f$ und sommit $u \leq H_{G'}^{u'} \circ f$ auf G und

$$u \leq u'^{*}_{R'-G'} \circ f.$$

Ist $G = \phi$, so ist offenbar $u \leq u'^{*}_{R'-G'} \circ f$. Es ist also in beiden Fällen ($G = \phi$, oder $G \neq \phi$ und $\underset{G}{I} I_f u' = 0$). $E_f u \leq u'^{*}_{R'-G'} \leq u'$. Da aber u' minimal ist, so ist

$$E_f I_f u' = \alpha u', \qquad I_f u' = I_f E_f I_f u' = \alpha I_f u',$$
$$\alpha = 1, \ u' = u'^{*}_{R'-G'}.$$

Aus dem Hilfssatz 4 folgt dann $\underset{G'}{I} u' = 0$ entgegen der Voraussetzung. Es ist also $G \neq \phi$ und $\underset{G}{I} I_f u' \neq 0$. Die Gleichheit

$$\underset{G}{I} I_f u' = I_{f'} \underset{G'}{I} u'$$

folgt aus dem Satz 12. Wir bezeichnen $u_0 = u - \underset{G}{E} \underset{G}{I} u$. Es ist

$$\underset{G}{I} u_0 = 0, \qquad u_0 = H_G^{u_0}.$$

Aus $u_0 \leq u \leq u' \circ f$ folgt $u_0 \in HP(f)$ und

$$E_f u_0 \leq u', \qquad E_f u_0 = \alpha u' \qquad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

Es ist also

$$u_0 \leq I_f E_f u_0 = \alpha u = \alpha u_0 + \alpha \underset{G}{E} \underset{G}{I} u.$$

Es sei $\alpha = 1$. Aus $u_0 = H_G^{u_0} \leq H_G^u \leq H_{G'}^{u'} \circ f$ folgt

$$u_0 \leq u'^{*}_{R'-G'} \circ f, \qquad u' = E_f u_0 \leq u'^{*}_{R'-G'} \leq u'.$$

Daraus folgert man $\underset{G}{I} u' = 0$ entgegen der Voraussetzung. Es ist also $\alpha < 1$. Aus $(1-\alpha) u_0 \leq \alpha \underset{G}{E} \underset{G}{I} u$ und Hilfssatz 3 folgt

$$u_0 = \underset{G}{E} \underset{G}{I} u_0 = 0, \qquad u = \underset{G}{E} \underset{G}{I} u,$$

was zu beweisen war.

FOLGESATZ 2. *Sind G_1, G_2 zwei offene Mengen und u eine minimale Funktion auf R(R zusammenhängend) für die $\underset{G_i}{I} u \neq 0$ $(i = 1, 2)$ ist, so ist $G_1 \cap G_2 \neq \phi$ und*

$$\underset{G_1 \cap G_2}{I} u \neq 0.$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000002063 Published online by Cambridge University Press

Ist $\underset{G}{I}u \neq 0$ *für eine offene Menge* G, *so gibt es nur eine Komponente* G_0 *von* G, *derart dass*

$$\underset{G_0}{I}u \neq 0$$

ist.

Dieser Folgesatz folgt unmittelbar aus dem Hilfssatz 6, wenn man R, G_1, G_2, $G_1 \cap G_2$ an Stelle von R', R, G', G setzt.

SATZ 13. *Es seien* R *und* R' *zusammenhängend und* $u' \in HP(R')$. *Ist* u' *a) singulär, b) quasibeschränkt, c) total nicht diskret, d) ein harmonisches Mass, so besitzt* Iu' *dieselben Eigenschaften. Die Funktion* $u' \circ f - Iu'$ *ist quasibeschränkt.*

a) und b). Es sei $u \in HP(R)$,

$$u \leq Iu'.$$

Da Iu' der Klasse $HP(f)$ angehört, so gehört auch u der Klasse $HP(f)$ an und nach dem Satz 5 ist Eu harmonisch. Aus obiger Ungleichung folgt noch $Eu \leq u'$.

Ist u' singulär und u beschränkt, so ist auch Eu beschränkt und somit Null. Es ist also u Null und Iu' singulär. Ist u' quasibeschränkt und u singulär, so ist auch Eu singulär und somit Null. Es ist also u Null und Iu' quasibeschränkt.

c) Ist $u \leq Iu'$ und u minimal, so ist $Eu \leq EIu' \leq u'$ und Eu ist nach Satz 8 harmonisch und minimal. Da u' total nichtdiskret ist, so sind Eu und u Null und Iu' ist total nichtdiskret.

d) Es ist

$$(1 - Iu') \wedge Iu' + Iu' \leq (1 - Iu') + Iu' = 1.$$

Da aber $(1 - Iu') \wedge Iu'$ und Iu' der Klasse $HP(f)$ angehören, so ist

$$(1 - Iu') \wedge Iu' + Iu' \leq I1$$

und

$$(1 - Iu') \wedge Iu' \leq I(1 - u').$$

Daraus folgt

$$(1 - Iu') \wedge Iu' \leq I(1 - u') \wedge Iu' = I((1 - u') \wedge u') = 0$$

und Iu' ist ein harmonisches Mass.

https://doi.org/10.1017/S0027763000002063 Published online by Cambridge University Press

Es sei u singulär $u \leq u' \circ f - Iu'$. Dann ist $Eu \leq u' < \infty$ und nach Hilfssatz 2 ist $u \in HP(f)$. Aus der Eigenschaft b) der Klasse $HP(f)$ folgt $u + Iu' \in HP(f)$ und somit

$$u + Iu' \leq Iu', \qquad u = 0.$$

Aus u' minimal folgt nicht immer Iu' minimal.

III. Der ideale Rand von Martin

Es sei R eine (zusammenhängende) Riemannsche Fläche mit Greenscher Funktion, g_q die Greensche Funktion von R mit dem Pol in q,

$$K_q(p) = \frac{g_q(p)}{g_q(p_0)} \qquad (q \neq p_0)$$

die Funktion von Martin (p_0 ist hier ein fixierter Punkt auf R), $\varDelta$ der ideale Rand von R im Sinne von Martin und $\varDelta_1$ der Teil der Minimalen aus $\varDelta$ [11], [13]. $\hat{R} = R \cup \varDelta$ ist ein metrischer kompakter Raum. Für zwei Punkte $\hat{p}$, $\hat{q} \in \hat{R}$ bezeichnen wir mit $d(\hat{p}, \hat{q})$ ihre Entfernung in der Metrik von Martin. Martin hat bewiesen, dass jede nichtnegative harmonische Funktion u auf R, $u \in HP(R)$, mittels einer Integrale der Form

$$u = \int_{\varDelta} K_s \, d\mu(s)$$

dargestellt werden kann, wobei μ ein Borelsches Mass ist. Falls $\mu(\varDelta - \varDelta_1) = 0$ ist, so nennt man μ ein kanonisches Mass; jede Funktion $u \in HP(R)$ ist mittels eines kanonischen Masses in dieser Form eindeutig darstellbar.

Es sei $S \in SP(R)$ und F eine abgeschlossene Menge in R. Die superharmonische Funktion S_F^* ist eindeutig in der Form

$$S_F^* = \int_{\bar{F} \cap (R \cup \varDelta_1)} K_q \, d\mu(q) + g_{p_0} \mu(\{p_0\})$$

darstellbar, wo $\bar{F}$ die abgeschlossene Hülle von F in $\hat{R}$ und μ ein Borelsches Mass ist. Für $F = R$ erhält man

$$S = \int_{R \cup \varDelta_1} K_q \, d\mu(q) + g_{p_0} \mu(\{p_0\}) = \int_R K_q \, d\mu(q) + g_{p_0} \mu(\{p_0\}) + \int_{\varDelta_1} K_s \, d\mu(s).$$

Die erste Integrale ist ein Potential und die zweite eine harmonische Funktion, also ist diese Zerlegung gerade der Satz von Riesz.

Es sei A eine abgeschlossene Menge auf $\varDelta$, A_n die Menge der Punkte von R, deren Entfernung von A nicht grösser als $\frac{1}{n}$ ist und

$$u = \int_{\varDelta_1} K_s d\mu(s) \in HP(R).$$

Es ist, wie Martin bewiesen hat [11],

$$\lim_{n\to\infty} u^*_{A_n} = \int_A K_s d\mu(s). \tag{4}$$

Es sei $s \in \varDelta_1$ und

$$G_\alpha = \{p \in R \mid K_s(p) > \alpha\} \qquad (0 < \alpha < \sup K_s).$$

Dann ist $K_s - \alpha \in \mathfrak{U}_{G_\alpha}$ und aus b) Satz 6 folgt $\underset{G_\alpha}{I} K_s \geq K_s - \alpha \neq 0$.

Es sei $s \in \varDelta_1$, $\hat{G}$ eine Umgebung von s auf $\hat{R}$ und $G = \hat{G} \cap R$. Dann ist

$$(K_s)^*_{R-G} = \int_{(\overline{R-G}) \cap (R \cup \varDelta_1)} K_q d\mu(q).$$

Ist $\underset{G}{I} K_s = 0$, so ist nach Hilfssatz 4

$$H_G^{K_s} = K_s, \qquad \int_{(\overline{R-G}) \cap (R \cup \varDelta_1)} K_q d\mu(q) = (K_s)^*_{R-G} = K_s$$

entgegen der Eindeutigkeit solcher Darstellungen. Es ist somit [10]

$$\underset{G}{I} K_s \neq 0.$$

Jeder Punkt $s \in \varDelta_1$ ist ein erreichbarer Randpunkt von R. Es sei $G(s, \varepsilon)$ die Menge der Punkte von R deren Entfernung (in der Metrik von Martin) von s kleiner als ε ist. Laut obiger Bemerkung ist $\underset{G(s,\varepsilon)}{I} K_s \neq 0$; es sei G_n diejenige Komponente (Folgesatz 2) von $G\left(s, \frac{1}{n}\right)$, für die $\underset{G_n}{I} K_s \neq 0$ ist. Nach Folgesatz 2 ist $G_n \cap G_{n+1} \neq \phi$ und somit $G_{n+1} \subset G_n$. Man kann also einen Weg auf R konstruieren, der gegen s strebt.

Hilfssatz a. *Es seien $u_1, u_2 \in HP(R)$ und*

$$u_i = \int_{\varDelta_1} K_s d\mu_i(s) \qquad (i = 1, 2).$$

Ist $u_1 \leq u_2$, so gibt es eine messbare Funktion θ auf $\varDelta_1$, $0 \leq \theta \leq 1$, so dass für jede Borelsche Menge A

https://doi.org/10.1017/S0027763000002063 Published online by Cambridge University Press

$$\mu_1(A) = \int_A \theta(s)\, d\mu_2(s)$$

ist. Ist

$$u_i = \int_{\Delta_1} K_s \theta_i(s)\, d\mu(s),$$

wo θ_i eine nichtnegative in Bezug auf μ sumierbare Borelsche Funktion ist, so ist auch

$$\theta_1 \leq \theta_2 : \; [\mu]^{9)}.$$

Es sei $u_0 = u_2 - u_1 = \int_{\Delta_1} K_s d\mu_0(s)$. Aus

$$\int_{\Delta_1} K_s d\mu_2(s) = u_2 = u_1 + u_0 = \int_{\Delta_1} K_s d(\mu_1 + \mu_0)\,(s)$$

und aud der Eindeutigkeit der kanonischen Darstellung folgt

$$\mu_2 = \mu_1 + \mu_0 \geq \mu_1.^{10)}$$

Daraus erkennt man, dass μ_1 absolut stetig ([3], Seite 132) in Bezug auf μ_2 ist und der Hilfssatz folgt aus dem Satz von Radon-Nykodim.

Es seien σ eine endliche totaladditive Mengenfunktion, auf der Klasse der Borelschen Mengen von Δ_1. Der Satz von Hahn ([3], Seite 121) behauptet, dass man eine Zerlegung von Δ_1 in zwei Borelsche Mengen A^+, A^- finden kann,

$$A^+ \cup A^- = \Delta_1, \qquad A^+ \cap A^- = \phi,$$

derart dass für $A \subset A^+$ (bzw. $A \subset A^-$)

$$\sigma(A) \geq 0, \qquad (\text{bzw. } \sigma(A) \leq 0)$$

ist. Man nennt A^+ eine positive Menge und A^- eine negative Menge für σ. Man bezeichnet mit σ^+, σ^-, $|\sigma|$ die Borelschen Masse,

$$\sigma^+(A) = \sigma(A \cap A^+), \qquad \sigma^-(A) = -\sigma(A \cap A^-),$$
$$|\sigma|(A) = \sigma^+(A) + \sigma^-(A)$$

und man nennt sie die positive, bzw. negative, bzw. totale Variation von σ. Für $A \subset A^+$ ist

$$|\sigma|(A) = \sigma^+(A) = \sigma(A)$$

---

9) D.h. bis auf eine Menge von μ-Masse Null.

10) D.h. $\mu_2(A) \geq \mu_1(A)$ für jede Borelsche Menge A.

und für $A \subset A^-$

$$|\sigma|(A) = \sigma^-(A) = -\sigma(A).$$

Es seien σ_1, σ_2 zwei endliche totaladditive Mengenfunktionen. Wir setzen

$$\sigma_1 \vee \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2 + |\sigma_1 - \sigma_2|),$$

$$\sigma_1 \wedge \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2 - |\sigma_1 - \sigma_2|).$$

Diese endlichen totaladditiven Mengenfunktionen besitzen folgende Eigenschaft: sind $\bar{\sigma}$, $\underline{\sigma}$ zwei endliche totaladditive Mengenfunktionen, für die $\underline{\sigma} \leq \sigma_i \leq \bar{\sigma}$ $(i = 1, 2)$ ist, so ist

$$\underline{\sigma} \leq \sigma_1 \wedge \sigma_2 \leq \sigma_i \leq \sigma_1 \vee \sigma_2 \leq \bar{\sigma}.$$

Es sei nähmlich A^+(bzw. A^-) eine positive (bzw. negative) Menge für $\sigma_1 - \sigma_2$. Es ist für eine Borelsche Menge A

$$\begin{aligned} \sigma_1 \wedge \sigma_2(A) &= \sigma_1 \wedge \sigma_2(A \cap A^+) + \sigma_1 \wedge \sigma_2(A \cap A^-) = \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_1(A \cap A^+) + \sigma_2(A \cap A^+) - (\sigma_1 - \sigma_2)\ (A \cap A^+) + \sigma_1(A \cap A^-) \\ &\quad + \sigma_2(A \cap A^-) + (\sigma_1 - \sigma_2)\ (A \cap A^-) = \sigma_2(A \cap A^+) + \sigma_1(A \cap A^-). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(A) &= \underline{\sigma}(A \cap A^+) + \underline{\sigma}(A \cap A^-) \leq \sigma_2(A \cap A^+) + \sigma_1(A \cap A^-) \\ &= \sigma_1 \wedge \sigma_2(A) \leq \sigma_i(A) \end{aligned}$$

Ähnlicherweise beweist man die entsprechende Eigenschaft von $\sigma_1 \vee \sigma_2$ Insbesondere ist

$$\sigma \vee 0 = \sigma^+, \qquad \sigma \wedge 0 = -\sigma^-.$$

Hilfssatz b. *Es seien u_1, u_2 Differenzen von Funktionen aus $HP(R)$. u_i gestattet eine Darstellung der Form*

$$u_i = \int_{\Delta_1} K_s d\sigma_i(s),$$

wo σ_i eine endliche totaladditive Mengenfunktion ist. Dann ist

$$u_1 \vee u_2 = \int_{\Delta_1} K_s d(\sigma_1 \vee \sigma_2)\ (s),$$

$$u_1 \wedge u_2 = \int_{\Delta_1} K_s d(\sigma_1 \wedge \sigma_2)\ (s).$$

Ist

$$u_i = \int_{\Delta_1} K_s \theta_i(s)\, d\mu(s),$$

wo μ ein (nichtnegatives) Mass ist, so ist

$$u_1 \vee u_2 = \int_{\Delta_1} K_s \max\,(\theta_1(s),\ \theta_2(s))\, d\mu(s),$$

$$u_1 \wedge u_2 = \int_{\Delta_1} K_s \min\,(\theta_1(s),\ \theta_2(s))\, d\mu(s).$$

Wir setzen $\mu_i = (\sigma_1 \vee \sigma_2) - \sigma_i$ $(i = 1, 2)$. Da μ_i ein Mass ist, so ist

$$v_i = \int_{\Delta_1} K_s\, d\mu_i(s)$$

nichtnegativ. Aus

$$u_i + v_i = \int_{\Delta_1} K_s\, d(\sigma_1 \vee \sigma_2)\ (s),$$

folgt

$$u_i \leq \int_{\Delta_1} K_s\, d(\sigma_1 \vee \sigma_2)\ (s),$$

$$u_1 \vee u_2 \leq \int_{\Delta_1} K_s\, d(\sigma_1 \vee \sigma_2)\ (s).$$

Wir setzen $u_1 \vee u_2 = \int_{\Delta_1} K_s\, d\bar{\sigma}(s)$. Da

$$u_1 \vee u_2 - u_i = \int_{\Delta_1} K_s\, d(\bar{\sigma} - \sigma_i)\ (s)$$

nichtnegativ ist, so ist $\bar{\sigma} - \sigma_i$ ein Mass und somit

$$\sigma_i \leq \bar{\sigma}, \qquad \sigma_1 \vee \sigma_2 \leq \bar{\sigma},$$

$$\int_{\Delta_1} K_s\, d(\sigma_1 \vee \sigma_2)\ (s) \leq \int_{\Delta_1} K_s\, d\bar{\sigma}(s) = u_1 \vee u_2.$$

Ähnlicherweise verläuft der Beweis für $u_1 \wedge u_2$. Setzen wir

$$\sigma_i(A) = \int_A \theta_i(s)\, d\mu(s),$$

so ist

$$\sigma_1 \vee \sigma_2(A) = \int_A \max\,(\theta_1(s),\ \theta_2(s))\, d\mu(s),$$

woraus die letzte Behauptung des Hilfssatzes folgt.

Wir werden mit χ_R das kanonische Mass der Funktion $1 \in HP(R)$

bezeichnen:

$$1 = \int_{\Delta_1} K_s d\chi_R(s);$$

wir werden einfach χ schreiben, wenn R aus dem Text ersichltlich ist. *Es sei* $s \in \Delta$; $\chi(\{s\}) \neq 0$ *ist gleichbedeutend mit* $s \in \Delta_1$, *und* K_s *beschränkt. Das harmonische Mass der Borelschen Menge* $A \subset \Delta$ soll die Funktion

$$\omega(A) = \omega(A, R) = \int_A K_s d\chi_R(s)$$

sein [13]. Es ist nach Hilfssatz b

$$\omega(A) \vee \omega(B) = \omega(A \cup B), \qquad \omega(A) \wedge \omega(B) = \omega(A \cap B),$$
$$\omega(A) \wedge (1 - \omega(A)) = 0.$$

Das harmonische Mass einer Borelschen Menge ist somit ein harmonisches Mass (Siehe Seite 13). Umgekehrt, ist u ein harmonisches Mass, so gibt es eine Borelsche Menge $A \subset \Delta_1$ derart, dass $u = \omega(A)$ ist. In der Tat, nach Hilfssatz a ist

$$u = \int_{\Delta_1} K_s \theta(s)\, d\chi(s),$$

$0 \leq \theta \leq 1$. Daraus folgt

$$0 = u \wedge (1-u) = \int_{\Delta_1} K_s \min\,(\theta(s),\ 1-\theta(s))\, d\chi(s),$$
$$\min\,(\theta(s),\ 1-\theta(s)) = 0:\ [\chi].$$

Wir setzen $A = \{s \in \Delta_1 | \theta(s) = 1\}$, $B = \{s \in \Delta_1 | \theta(s) = 0\}$. Obige Gleichheit liefert

$$A \cup B = \Delta_1:\ [\chi]$$

und das gibt $u = \omega(A)$.

Eine (nicht unbedingt Borelsche) Menge $A \subset \Delta$ heisst *vom harmonischen Masse Null*, wenn

$$\inf\,\{\chi(\Gamma) \,|\, A \subset \Gamma \subset \Delta,\ \Gamma \text{ offen}\} = 0$$

ist. $\Delta - \Delta_1$ ist vom harmonischen Masse Null. Wir werden den Ausdruck *fast überall auf* A für eine Eigenschaft benutzen, wenn alle Punkte aus A diese Eigenschaft besitzen, bis auf eine Menge vom harmonischen Masse Null.

Es sei σ eine endliche totaladditive Mengenfunktion auf Δ_1. Nach dem Satz von Lebesgue ([3], Seite 134) kann man σ eindeutig in zwei endliche

Megenfunktionen zerlegen,

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1,$$

wobei σ_1 absolut stetig in Bezug auf χ und σ_0 orthogonal zu χ ist; d.h. man kann eine Zerlegung von Δ_1 in zwei Borelschen Mengen finden,

$$\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \Delta_1, \qquad \Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \phi,$$

so dass

$$\chi(\Gamma_0) = 0, \qquad |\sigma_0|(\Gamma_1) = 0$$

ist. Es sei u eine Differenz von zwei Funktionen aus $HP(R)$:

$$u = \int_{\Delta_1} K_s d\sigma(s).$$

Zerlegt man σ, wie oben gezeigt wurde, so ist u in der Form

$$u = \int_{\Delta_1} K_s \theta(s)\, d\chi(s) + \int_{\Delta_1} K_s d\sigma_0(s)$$

darstellbar, wo die erste Funktion eine Differenz von zwei quasibeschränkten und die zweite eine Differenz von zwei singulären Funktionen sind. Das ist gerade die von Parreau angegebene Zerlegung einer Funktion aus $HP(R)$ in einer quasibeschränkten und einer singulären Funktion.

Es sei $u \in HP(R)$:

$$u = \int_{\Delta_1} K_s d\mu(s);$$

es gibt höchstens abzählbar viele $s \in \Delta_1$, die positives μ-Mass haben. Für jede Borelsche Menge A bezeichnen wir

$$\sigma(A) = \sum_{\substack{s \in A \\ \mu(\{s\})>0}} \mu(\{s\}), \qquad \tau(A) = \mu(A) - \sigma(A).$$

σ und τ sind Borelsche Masse auf Δ. Ist

$$u_\sigma = \int_{\Delta_1} K_s d\sigma(s) = \sum_{\substack{s \in \Delta_1 \\ \mu(\{s\})>0}} \mu(\{s\}) K_s,$$

$$u_\tau = \int_{\Delta_1} K_s d\tau(s),$$

so ist u_σ eine diskrete und u_τ eine total nichtdiskrete Funktion. Die Gleichheit

$$u = u_\sigma + u_\tau$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000002063 Published online by Cambridge University Press

stellt eine Zerlungen von u in eine diskrete und eine total nichtdiskrete Funktion dar. Eine nichtnegative harmonische Funktion ist diskret dann und nur dann, wenn ihr kanonisches Mass in einer abzählbaren Menge konzentriert ist.

* * *

R und R' werden von nun an zusammenhängend sein und $R \notin O_G$. Ist R' offen, so bezeichnen wir

$$\Delta(f) = \{s \in \Delta \mid K_s \in HP(f)\},$$
$$\Delta_1(f) = \Delta(f) \cap \Delta_1.$$

Ist R' kompakt, so setzen wir $\Delta(f) = \Delta_1(f) = \phi$. Wir wollen zeigen, dass $\Delta(f)$, $\Delta_1(f)$ Borelsche Mengen sind. Es sei $\{R'_n\}$ eine normale Ausschöpfung von R' und $p_0 \in f^{-1}(R'_1)$. Wir bezeichnen

$$\Gamma_n(\varepsilon) = \{s \in \Delta \mid \underset{f^{-1}(R'_n)}{I} K_s(p_0) \geq \varepsilon\}.$$

Es sei $\{s_i\}$ eine Folge aus $\Gamma_n(\varepsilon)$, die gegen s_0 konvergiert. Nach dem Satz 11 ist

$$\underset{f^{-1}(R'_n)}{I} K_{s_0}(p_0) \geq \overline{\lim_{i\to\infty}} \underset{f^{-1}(R'_n)}{I} K_{s_i}(p_0) \geq \varepsilon.$$

Die Menge $\Gamma_n(\varepsilon)$ ist somit abgeschlossen. Die zu beweisende Behauptung wird aus der Gleichheit

$$\Delta - \Delta(f) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n\left(\frac{1}{m}\right)$$

folgen. Ist s in $\Delta - \Delta(f)$ enthalten, so gehört K_s der Klasse $HP(f)$ nicht an. Es gibt also ein relativkompaktes Gebiet G' derart, dass

$$\underset{f^{-1}(G')}{I} K_s \neq 0$$

ist. Es sei λ ein Weg auf R, der p_0 mit einem Punkt p_1 von $f^{-1}(G')$ verbindet, für welchen

$$\underset{f^{-1}(G')}{I} K_s(p_1) > 0$$

ist. Für ein genügend grosses n ist

$$f(\lambda) \cup G' \subset R'_n.$$

Aus dem Satz 12 folgt

$$\underset{f^{-1}(G')}{I} K_s \leq (\underset{f^{-1}(R'_n)}{I} K_s) \circ \eta,$$

wo η die identische Abbildung von $f^{-1}(G')$ in $f^{-1}(R'_n)$ ist. Daraus ergibt sich, dass $\underset{f^{-1}(R'n)}{I} K_s$ im Punkte p_0 nicht verschwinden kann und s gehört der Menge $\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n\left(\frac{1}{m}\right)$ an. Da jeder Punkt dieser Menge offenbar der Menge $\Delta - \Delta(f)$ angehört, so ist die obige Gleichheit bewiesen.

Hilfssatz 7. *Es sei* $u \in HP(R)$,

$$u = \int_{\Delta} K_s d\mu(s)$$

und R' *offen.* u *gehört der Klasse* $HP(f)$ *dann und nur dann an, wenn* $\mu(\Delta - \Delta(f)) = 0$ *ist. Ist* $u' \in HP(R')$ *und*

$$u' \circ f = \int_{\Delta_1} K_s d\mu(s),$$

so ist

$$Iu' = \int_{\Delta_1(f)} K_s d\mu(s).$$

Ist $\mu(\Delta - \Delta(f)) > 0$, so ist $\mu(\Gamma_n(\varepsilon)) > 0$ für wenigstens ein n und ein ε. Ist

$$v = \int_{\Gamma_n(\varepsilon)} K_s d\mu(s),$$

so kann man eine Folge $\{u_j\}$ von Riemannschen Summen bilden,

$$u_j = \sum_{i=1}^{k_j} K_{s_{ji}} \mu(A_{ji}) \qquad (s_{ji} \in \Gamma_n(\varepsilon)),$$

die gegen v konvergiert. Dann ist nach dem Satz 11,

$$\underset{f^{-1}(R'n)}{I} v(p_0) \geq \overline{\lim_{j\to\infty}} \underset{f^{-1}(R'n)}{I} u_j(p_0) \geqq \varepsilon\mu(\Gamma_n(\varepsilon)) > 0.$$

v gehört also der Klasse $HP(f)$ nicht an und, da $v \leq u$ ist, gehört auch u der Klasse $HP(f)$ nicht an.

Es sei jetzt $\mu(\Delta - \Delta(f)) = 0$. Da $\Delta(f)$ eine Borelsche Menge und μ ein Borelsches Mass ist und Δ eine abzählbare Basis hat, so kann man eine nichtabnähmende Folge $\{A_i\}$ von abgeschlossenen Mengen finden, so dass $\mu(\Delta(f) - A) = 0$ ist ([3], Seite 228), mit

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \Delta(f),$$

Dann ist $u = \int_A K_s d\mu(s)$. Wir bezeichnen

$$u_i = \int_{A_i} K_s d\mu(s) \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

$\{u_i\}$ ist eine nichtabnehmende Folge, die gegen u konvergiert. Ist

$$\underset{f^{-1}(G')}{I} u \neq 0$$

für ein relativkompaktes Gebiet G' auf R', so ist laut des Satzes 11

$$\underset{f^{-1}(G')}{I} u_i \neq 0$$

für ein genügend grosses i. Wir können also vom Anfang an annehmen, dass A abgeschlossen ist. Es sei p ein Punkt von $f^{-1}(G')$, für welchen

$$\underset{f^{-1}(G')}{I} u(p) > 0$$

ist, und $\{R_n\}$ eine normale Ausschöpfung von R. Wir bezeichnen mit η_n die identische Abbildung von $f^{-1}(G') \cap R_n$ in R_n und mit Γ_n die Menge

$$\Gamma_n = \left\{ s \in A \,|\, I_{\eta_n} K_s(p) \geq \frac{1}{2\,\mu(A)} \underset{f^{-1}(G')}{I} u(p) \right\}.$$

Da A abgeschlossen ist, so folgt aus dem Satz 11, dass Γ_n eine abgeschlossene Menge ist. Sind die Mengen Γ_n nicht leer, so ist auch $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ nicht leer, da A kompakt, und die Folge $\{\Gamma_n\}$ monoton ist. Für ein $s \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ ist nach dem Satz 10,

$$\underset{f^{-1}(G')}{I} K_s(p) = \lim_{n \to \infty} I_{\eta_n} K_s(p) > 0,$$

was der Beziehung $s \in \Delta(f)$ widerspricht. Für ein genügend grosses n ist also Γ_n leer. Es sei $\{u_j\}$ eine Folge von Riemannschen Summen

$$u_j = \sum_{i=1}^{k_i} K_{s_{ji}} \mu(A_{ji}) \qquad (s_{ji} \in A),$$

die gleichmässig im Inneren von R gegen u konvergieren. Nach dem Beweis des Satzes 11 ist

$$I_{\eta_n} u(p) = \lim_{j \to \infty} I_{\eta_n} u_j(p).$$

Aber

$$I_{\eta_n} u_j(p) = \sum_{i=1}^{k_j} \mu(A_{ji})\, I_{\eta_n} K_{s_{ji}}(p) \leq \frac{1}{2\,\mu(A)} \sum_{i=1}^{k_j} \mu(A_{ji}) \underset{f^{-1}(G')}{I} u(p) = \frac{1}{2} \underset{f^{-1}(G')}{I} u(p)$$

und man erhält die widersprechende Beziehung

$$\underset{f^{-1}(G')}{I} u(p) \leq I_{\gamma_n} u(p) \leq \frac{1}{2} \underset{f^{-1}(G')}{I} u(p).$$

Es ist also

$$\underset{f^{-1}(G')}{I} u = 0$$

und $u \in HP(f)$.

Die Funktion $\int_{\Delta_1(f)} K_s d\mu(s)$ gehört also der Klasse $HP(f)$ an und, da sie offenbar nicht grösser als $u' \circ f$ ist, so ist

$$\int_{\Delta_1(f)} K_s d\mu(s) \leq Iu'.$$

Aus $Iu' \leq u' \circ f$ und Hilfssatz a erhält man

$$Iu' = \int_{\Delta_1} K_s \theta(s)\, d\mu(s),$$

wo $\theta \leq 1$ ist. Da aber $Iu' \in HP(f)$, so folgt aus obigen Betrachtungen

$$Iu' = \int_{\Delta_1(f)} K_s \theta(s)\, d\mu(s) \leq \int_{\Delta_1(f)} K_s d\mu(s),$$

$$Iu' = \int_{\Delta_1(f)} K_s d\mu(s).$$

Aus diesem Hilfssatz ergibt sich $I\,1 = \omega(\Delta_1(f),\ R)$.

Wir nehmen jetzt an, dass $R' \notin O_G$ und es sei Δ' der ideale Rand von R' und $K'_{s'}$ die Funktion von Martin auf R'. Für ein endliches Mass μ' auf Δ' werden wir mit $\mu' \circ f$ das kanonische Mass der Funktion

$$\left(\int_{\Delta'} K'_{s'}\, d\mu'(s') \right) \circ f$$

bezeichnen. Aus

$$\left(\int_{\Delta'} K'_{s'}\, d\chi_{R'}(s') \right) \circ f = 1 \circ f = 1 = \int_{\Delta_1} K_s d\chi_R(s)$$

folgt $\chi_{R'} \circ f = \chi_R$. Für einen Punkt $s' \in \Delta'$ bezeichnen wir mit $\delta_{s'}$ das Mass auf Δ'

$$\delta_{s'}(A') = \begin{cases} 1 \text{ für } A' \ni s \\ 0 \text{ für } A' \not\ni s. \end{cases}$$

Dann ist

$$K'_{s'} \circ f = \int_{\Delta_1} K_s d(\delta_{s'} \circ f)\ (s),$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000002063 Published online by Cambridge University Press

Es seien X, X' zwei lokalkompakte topologische Räume, μ' ein Borelsches Mass auf X' und für jedes $x' \in X'$ sei $\mu_{x'}$ ein Borelsches Mass auf X, so dass für jede Borelsche Menge A aus X die Funktion $x' \to \mu_{x'}(A)$ eine Borelsche Funktion ist. Wir setzen $\mu(A) = \int_{X'} \mu_{x'}(A)\, d\mu'(x')$; μ ist ein Borelsches Mass. Für jede nichtnegative Borelsche Funktion φ auf X ist

$$x' \to \int_X \varphi(x)\, d\mu_{x'}(x)$$

eine Borelsche Funktion auf X' und

$$\int_{X_1} \left(\int_X \varphi(x)\, d\mu_{x'}(x) \right) d\mu'(x') = \int_X \varphi(x)\, d\mu(x). \tag{5}$$

Denn diese Formel ist erst für die charakteristischen Funktionen der Borelschen Mengen wahr und daraus folgert man sofort, dass sie für beliebige positive Borelsche Funktionen gilt.

Es sei G eine offene Menge auf R die den Punkt p_0 enthält. Die Funktion

$$s' \to \underset{G}{I}(K'_{s'} \circ f)\,(p_0)$$

ist laut des Satzes 11 halbstetig und somit eine Borelsche Funktion. Aus

$$H_G^{K'_{s'} \circ f}(p_0) = (K'_{s'} \circ f)(p_0) - \underset{G}{I}(K'_{s'} \circ f)(p_0)$$

(Hilfssatz 4) folgt, dass auch die Funktion

$$s' \to (K'_{s'} \circ f)^*_{R-G}\,(p_0)$$

messbar ist. Es sei jetzt A eine abgeschlossene Menge in $\varDelta$ und

$$A_n = \left\{ p \in R \,|\, d(p,\ A) \leq \frac{1}{n} \right\},$$

wo $d(p,\ A)$ die Entfernung zwischen p und A in der Metrik von Martin bezeichnet. Die Funktionen

$$s' \to (K'_{s'} \circ f)^*_{A_n}\,(p_0)$$

bilden eine nicht zunehmende Folge und ihr Limes ist wieder eine Borelsche Funktion. Nach (4) ist

$$\lim_{n\to\infty} (K'_{s'} \circ f)^*_{A_n}\,(p_0) = \int_A K_s(p_0)\, d(\delta_{s'} \circ f)\,(s) = (\delta_{s'} \circ f)\,(A).$$

Es sei Φ die Klasse der Borelschen Mengen $A \subset \varDelta$, für die die Funktion

$s' \to (\delta_{s'} \circ f)(A)$ messbar ist. Φ enthält also die abgeschlossenen Mengen. Es seien $\{A_i\}$ eine monotone Folge von Mengen aus Φ. Aus

$$(\delta_{s'} \circ f)\ (\lim_{i\to\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} (\delta_{s'} \circ f)\ (A_i)$$

sieht man, dass Φ eine monotone Klasse ist ([3] Seite 26). Daraus folgt, dass Φ alle Borelschen Mengen enthält.

HILFSSATZ 8. *Es sei μ' ein endliches Borelsches Mass auf Δ'. Dann ist*

$$\int_{\Delta'} \Big(\int_A K_s d(\delta_{s'} \circ f)\ (s) \Big)\ d\mu'(s') = \int_A K_s d(\mu' \circ f)\ (s).$$

Nach obigen Bemerkungen erfüllen die Masse $\delta_{s'} \circ f$ die Bedingungen der Formel (5), und somit ist

$$\int_{\Delta'} \Big(\int_A K_s d(\delta_{s'} \circ f)\ (s) \Big)\ d\mu'(s') = \int_A K_s d\mu(s),$$

wo

$$\mu(B) = \int_{\Delta'} (\delta_{s'} \circ f)\ (B)\ d\mu'(s')$$

ist. Für A gleich Δ_1 ist also laut der Definition von $\mu' \circ f$

$$\begin{aligned}\int_{\Delta'} \Big(\int_{\Delta_1} K_s d(\delta_{s'} \circ f)\ (s) \Big)\ d\mu'(s') &= \int_{\Delta'} (K'_{s'} \circ f)\ d\mu'(s') \\ &= \Big(\int_{\Delta'} K'_{s'} d\mu'(s') \Big) \circ f = \int_{\Delta_1} K_s d(\mu' \circ f)\ (s),\end{aligned}$$

und somit ist

$$\int_{\Delta_1} K_s d(\mu' \circ f)\ (s) = \int_{\Delta_1} K_s d\mu(s).$$

Aus der Eindeutigkeit der kanonischen Masse folgt $\mu = \mu' \circ f$, was zu beweisen war.

SATZ 14. *Ist $R' \notin O_G$ und*

$$u' = \int_{\Delta'} K'_{s'} d\mu'(s') \in HP(R'),$$

so ist

$$Iu' = \int_{\Delta_1(f)} K_s d(\mu' \circ f)\ (s) = \int_{\Delta'} IK'_{s'} d\mu'(s').$$

Ist für alle $s' \in \Delta'$, bis auf eine Borelsche Menge vom μ'-Masse Null,

$$IK'_{s'} = \int_A K_s d(\delta_{s'} \circ f)\ (s),$$

wo $A \subset \varDelta_1$ *eine Borelsche Menge bedeutet, so ist*

$$Iu' = \int_A K_s d(\mu' \circ f)\ (s).$$

Da nach der Definition von $\mu' \circ f$

$$u' \circ f = \int_{\varDelta_1} K_s d(\mu' \circ f)\ (s)$$

ist, so folgt aus dem Hilfssatz 7

$$Iu' = \int_{\varDelta_1(f)} K_s d(\mu' \circ f)\ (s).$$

Insbesondere ist

$$IK'_{s'} = \int_{\varDelta_1(f)} K_s d(\delta_{s'} \circ f)\ (s).$$

Aus dem Hilfssatz 8 haben wir

$$\int_{\varDelta'} IK'_{s'}\, d\mu'(s) = \int_{\varDelta'} \left(\int_{\varDelta_1(f)} K_s d(\delta_{s'} \circ f)\ (s) \right) d\mu'(s') = \int_{\varDelta_1(f)} K_s d(\mu' \circ f)\ (s) = Iu'.$$

Die letzte Behauptung ergibt sich aus

$$Iu' = \int_{\varDelta'} IK'_{s'}\, d\mu'(s') = \int_{\varDelta'} \left(\int_A K_s d(\delta_{s'} \circ f)\ (s) \right) d\mu'(s') = \int_A K_s d(\mu' \circ f)\ (s).$$

Wir werden mit $\varDelta'(f)$, $\varDelta'_1(f)$ die Mengen

$$\varDelta'(f) = \{s' \in \varDelta' \mid IK'_{s'} \neq 0\}, \qquad \varDelta'_1(f) = \varDelta'_1 \cap \varDelta'(f)$$

bezeichnen. Es ist offenbar

$$\varDelta'(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ s' \in \varDelta' \mid IK'_{s'}(p_0) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Daraus erkennt man, dass $\varDelta'(f)$ eine Menge vom Typus F_σ ist. Ist G eine offene Menge auf R, so setzen wir $\varDelta_1(G) = \{s \in \varDelta_1 \mid \underset{G}{I} K_s \neq 0\}$. Aus $\varDelta_1(G) = \bigcup_i \varDelta_1(G_i)$, wo G_i die Komponenten von G sind, sieht man, dass auch $\varDelta_1(G)$ eine Borelsche Menge ist.

Hilfssatz 9. *Ist* $u \in HP(f)$ *und*

$$Eu = \int_{\varDelta'} K'_{s'}\, d\mu'(s') < \infty,$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000002063 Published online by Cambridge University Press

so ist $\mu'(\varDelta' - \varDelta'(f)) = 0$.

Wir setzen

$$u' = \int_{\Delta' - \Delta'(f)} K'_{s'}\, d\mu'(s') \leq Eu.$$

Nach Satz 14 ist $Iu' = 0$ und nach Hilfssatz 3 ist

$$u' = EIu' = 0, \qquad \mu'(\varDelta' - \varDelta'(f)) = u'(p'_0) = 0.$$

SATZ 15. *Ist*

$$u' = \int_{\Delta'_1} K'_{s'}\, d\mu'(s') \in HP(R'),$$

so ist auch

$$EIu' = \int_{\Delta'_1(f)} K'_{s'}\, d\mu'(s').$$

Es sei $u' = u'_1 + u'_2$ die im Hilfssatz 3 eingeführte Zerlegung und

$$u'_i = \int_{\Delta'_1} K'_{s'}\, d\mu'_i(s') \qquad (i = 1,\ 2).$$

Da nach Satz 14

$$0 = Iu'_2 = \int_{\Delta_1} IK'_{s'}\, d\mu'_2(s')$$

ist, so haben wir $\mu'_2(\varDelta'_1(f)) = 0$. Da $u'_1 = EIu'$ ist, so gilt, nach Hilfssatz 9, $\mu'_1(\varDelta'_1 - \varDelta'_1(f)) = 0$. Daraus und aus $\mu' = \mu'_1 + \mu'_2$ folgt

$$EIu' = u'_1 = \int_{\Delta'_1(f)} K'_{s'}\, d\mu'(s').$$

Aus diesem Satz ergibt sich insbesondere

$$EI\omega(A',\ R') = \int_{A' \cap \Delta'_1(f)} K'_{s'}\, d\chi_{R'}(s') = \omega(A' \cap \varDelta'_1(f),\ R'),$$

$$EI\, 1 = \omega(\varDelta'_1(f),\ R').$$

HILFSSATZ 10. *Für zwei offene Mengen* G_1, G_2 *auf* R *ist*

$$\varDelta_1(G_1) \cap \varDelta_1(G_2) = \varDelta_1(G_1 \cap G_2).$$

Es ist offenbar $\varDelta_1(G_1 \cap G_2) \subset \varDelta_1(G_1) \cap \varDelta_1(G_2)$. Es sei jetzt $s \in \varDelta_1(G_1) \cap \varDelta_1(G_2)$. Dann ist

$$\underset{G_i}{I}\, K_s \neq 0 \qquad (i = 1,\ 2)$$

und nach Folgesatz 2 ist $G_1 \cap G_2 \neq \phi$,

$$\underset{G_1 \cap G_2}{I} K_s \neq 0$$

und

$$\Delta_1(G_1) \cap \Delta_1(G_2) \subset \Delta_1(G_1 \cap G_2).$$

SATZ 15′. *Ist*

$$u = \int_{\Delta_1} K_s d\mu(s) \in HP(R)$$

und G eine offene Menge von R, so ist

$$\underset{G}{E} \underset{G}{I} u = \int_{\Delta_1(G)} K_s d\mu(s).$$

Es seien G_i die Komponenten von G. Nach Satz 15 ist

$$\underset{G_i}{E} \underset{G_i}{I} u = \int_{\Delta_1(G_i)} K_s d\mu(s).$$

Daraus und aus Hilfssatz 10 folgert man

$$\sum_i \underset{G_i}{E} \underset{G_i}{I} u = \sum_i \int_{\Delta_1(G_i)} K_s d\mu(s) = \int_{\underset{i}{\cup} \Delta_1(G_i)} K_s d\mu(s) = \int_{\Delta_1(G)} K_s d\mu(s).$$

Es sei η die identische Abbildung von G in R. Es ist

$$\underset{G}{I} u \leq \Big(\sum_i \underset{G_i}{E} \underset{G_i}{I} u\Big) \circ \eta$$

und deshalb

$$\underset{G}{E} \underset{G}{I} u \leq \sum_i \underset{G_i}{E} \underset{G_i}{I} u.$$

Aus $\underset{G_i}{E} \underset{G_i}{I} u \leq \underset{G}{E} \underset{G}{I} u$ und $(\underset{G_i}{E} \underset{G_i}{I} u) \wedge (\underset{G_j}{E} \underset{G_j}{I} u) = 0$ für $i \neq j$, folgt

$$\sum_i \underset{G_i}{E} \underset{G_i}{I} u = \bigvee_i \underset{G_i}{E} \underset{G_i}{I} u \leq \underset{G}{E} \underset{G}{I} u.$$

Es sei σ eine endliche totaladditive Mengenfunktion,

$$u = \int_{\Delta_1} K_s d\sigma(s), \qquad G_0 = \{p \in R \mid u(p) > 0\}$$

und η die identische Abbildung von G_0 in R. Nach b) Satz 6 ist $u \circ \eta \in HP(\eta)$. Es ist offenbar

$$u \vee 0 = \underset{G_0}{E}(u \circ \eta) = \underset{G_0}{E} \underset{G_0}{I} \underset{G_0}{E}(u \circ \eta).$$

Da

$$u \vee 0 = \int_{\Delta_1} K_s d\sigma^+$$

ist, so folgt, aus dem Satz 15′, $\sigma^+(\varDelta_1 - \varDelta_1(G_0)) = 0$. Ähnlicherweise beweist man, dass $\sigma^-(\varDelta_1 - \varDelta_1(R-\bar{G}_0)) = 0$ ist. Daraus folgt, dass $\varDelta_1(G_0)$ *eine positive und* $\varDelta_1(R-\bar{G}_0)$ *eine negative Menge für* σ *ist.*

HILFSSATZ 11. *Es sei u eine Differenz von zwei nichtnegativen harmonischen Funktionen auf R:*

$$u = \int_{\varDelta_1} K_s \theta(s)\, d\chi(s) + \int_{\varDelta_1} K_s d\sigma_0(s),$$

wobei σ_0 orthogonal zu χ ist. Setzt man

$$A_\alpha = \{s \in \varDelta_1 \,|\, \theta(s) > \alpha\}, \qquad G_\alpha = \{p \in R \,|\, u(p) > \alpha\},$$

so ist

$$A_\alpha \subset \varDelta_1(G_\alpha) : [\chi]$$

und $\varDelta_1(G_\alpha)$ ist eine positive Menge für σ_0. Ist für ein α $\{s \in \varDelta_1 \,|\, \theta(s) = \alpha\}$ vom harmonischen Masse Null, so ist $\varDelta_1 - \varDelta_1(G_\alpha) - \varDelta_1(R-\bar{G}_\alpha)$ auch vom harmonischen Masse Null.

Es genügt den Hilfssatz für $\alpha = 0$ zu beweisen, denn wir können $u - \alpha$ an Stelle von u betrachten. Es sei Γ_0, Γ_1 eine Zerlegung von $\varDelta_1$, für die $\chi(\Gamma_0) = 0$, $|\sigma_0|(\Gamma_1) = 0$ ist und

$$u = \int_{\varDelta_1} K_s d\sigma(s), \qquad \sigma(A) = \int_A \theta(s)\, d\chi(s) + \sigma_0(A).$$

Nach obigen Bemerkungen ist $\varDelta_1(G_0)$ eine positive Menge für σ. Ist $A \subset \varDelta_1(G_0)$, so ist

$$\sigma_0(A) = \sigma_0(A \cap \Gamma_0) = \sigma(A \cap \Gamma_0) \geq 0.$$

Daraus folgt, dass $\varDelta_1(G_0)$ eine positive Menge für σ_0 ist. Es ist

$$0 \leqq \int_{A_0 \cap (\varDelta_1 - \varDelta_1(G_0))} \theta(s)\, d\chi(s) = \int_{A_0 \cap (\varDelta_1 - \varDelta_1(G_0)) \cap \Gamma_1} \theta(s)\, d\chi(s)$$
$$= \sigma(A_0 \cap (\varDelta_1 - \varDelta_1(G_0)) \cap \Gamma_1) = -\sigma^-(A_0 \cap (\varDelta_1 - \varDelta_1(G)) \cap \Gamma_1) \leqq 0$$

und somit $$\chi(A_0 \cap (\varDelta_1 - \varDelta_1(G_0))) = 0, \; A_0 \supset \varDelta_1(G_0) : [\chi].$$

Wir nehmen jetzt an, dass die Menge $\{s \in \varDelta_1 \,|\, \theta(s) = \alpha\}$ vom harmonischen Masse Null ist und es sei

$$A_\alpha^- = \{s \in \varDelta_1 \,|\, \theta(s) < \alpha\} \subset \varDelta_1(R - \bar{G}_\alpha) : [\chi].$$

Dann ist $\varDelta_1 - A_\alpha - A_\alpha^-$ vom harmonischen Masse Null. Da, nach dem Hilfssatz 10, $\varDelta_1(G_\alpha)$, $\varDelta_1(R-\bar{G}_\alpha)$ punktfremd sind, ist

$$\chi(\varDelta_1(G_\alpha) \cup \varDelta_1(R-\overline{G}_\alpha)) = \chi(\varDelta_1(G_\alpha)) + \chi(\varDelta_1(R-\overline{G}_\alpha)) \geq \chi(A_\alpha) + \chi(A_\alpha^-) = 1$$

und somit ist $\varDelta_1 - \varDelta_1(G_\alpha) - \varDelta_1(R-\overline{G}_\alpha)$ vom harmonischen Masse Null.

IV. Die Hauptsätze

Es ist wichtig den idealen Rand von Martin auch für Riemannsche Flächen R' ohne Greensche Fnnktion einzuführen. Es sei G' eine Kreisscheibe auf R' und $R = R' - \overline{G}'$. R hat eine Greensche Funktion und somit einen idealen Rand $\varDelta$. Es sei $\varDelta_{G'}$ die Teilmenge jener Punkte von $\varDelta$ die nicht auf dem Rand von G' liegen. Wir bezeichnen $\hat{R}'_{G'} = R' \cup \varDelta_{G'}$ und führen auf $\hat{R}'_{G'}$ diejenige Topologie ein, für welche die identische Abbildung von $\hat{R}$ in $\hat{R}'_{G'} - G'$ ein Homeomorphismus ist. Man kann leicht zeigen, dass der topologische (metrisierbare) Raum $\hat{R}'_{G'}$ von G' nicht abhängt [13]. Deshalb werden wir einfach $\varDelta'$ und $\hat{R}'$ an Stelle von $\varDelta_{G'}$ und $\hat{R}'_{G'}$ schreiben. $\varDelta'$ heisst der ideale Rand von R'. Ähnlicherweise führt man die Menge $\varDelta'_1$ ein. Ist R' kompakt, so ist offenbar $\varDelta'$ leer.

Eine (nicht unbedingt Borelsche) Menge $\hat{A}'$ auf $\hat{R}'$ heisst *polar*, falls für jede Kreisscheibe G' auf R' eine Funktion $S' \in SP(R' - \overline{G}')$ existiert, $S' \not\equiv +\infty$, für die in jedem Punkt $\hat{q}' \in \hat{A}' - G'$

$$\lim_{p' \to \hat{q}'} S'(p') = +\infty$$

gilt. *Eine Menge M' aus R' ist dann und nur dann polar, wenn sie eine Nulle äussere Kapazität hat; insbesondere ist ein Punkt aus R' eine polare Menge.* Hat R' eine Greensche Funktion und ist $\hat{A}'$ polar auf $\hat{R}'$, so kann man leicht beweisen, dass sogar eine Funktion $S' \in SP(R')$ zu finden ist, die die obige Beziehung erfüllt. Eine Teilmenge einer polaren Menge und die Vereinigung abzählbar vieler polarer Mengen sind polar.

Es sei $\varGamma$ eine offene Menge aus $\varDelta$[11]. Dann gibt es eine Funktion $S_\Gamma \in SP(R)$ für die

$$\varliminf_{p \to \Gamma} S_\Gamma(p) \geq 1, \qquad S_\Gamma(p_0) \leq 2\,\chi(\varGamma)$$

ist. In der Tat, es sei $\{\varepsilon_n\}$ eine abnehmende Folge positiver Zahlen, die gegen Null konvergieren, so dass die Menge der Punkte von $\varGamma$, deren Entfernung (in der Metrik von Martin) von $\varDelta - \varGamma$ *gleich* ε_n ist, vom harmonischen Masse Null

11) $R \notin O_G$.

ist. Es sei Γ_n die (abgeschlossene) Menge der Punkte aus Γ, deren Entfernung von $\Delta - \Gamma$ nicht kleiner als ε_n ist. Dann haben wir

$$\chi(\Gamma_n - \Gamma_{n-1}) = \chi(\overline{\Gamma_n - \Gamma_{n-1}}) \qquad (\Gamma_0 = \phi).$$

Nach (4) kann man eine offene Menge $\hat{G}_n$ finden, $\hat{G}_n \supset \overline{\Gamma_n - \Gamma_{n-1}}$, für die

$$\overset{*}{1}_{\bar{\hat{G}}_n \cap R}(p_0) \leq 2\,\omega(p_0\,;\ \overline{\Gamma_n - \Gamma_{n-1}}) = 2\,\chi(\overline{\Gamma_n - \Gamma_{n-1}})$$

ist. Wir setzen

$$S_\Gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \overset{*}{1}_{\bar{\hat{G}}_n \cap R}.$$

Es ist

$$S_\Gamma(p_0) \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \chi(\overline{\Gamma_n - \Gamma_{n-1}}) = 2\,\chi(\Gamma)$$

und $\varliminf_{p \to \Gamma} S_\Gamma(p) \geq 1$. Es sei $A \subset \Delta$ eine Menge vom harmonischen Masse Null und $\{\Gamma^n\}$ eine nichtzunehmende Folge von offenen Mengen in Δ, die A enthalten und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(\Gamma^n) < \infty$$

ist. Dann ist

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} S_{\Gamma^n} \not\equiv +\infty,$$

$S \in SP(R)$ und

$$\lim_{p \to A} S(p) = +\infty.$$

Jede Menge aus Δ vom harmonischen Masse Null ist polar. Insbesondere ist die Menge $\Delta - \Delta_1$ polar. Jeder Punkt $s \in \Delta_1$, für welchen K_s nicht beschränkt ist, bildet eine polare Menge. Der ganze ideale Rand einer Riemannscher Fläche $R' \in O_G$ ist polar, da er auf dem idealen Rand von $R' - G'$ eine Menge vom harmonischen Masse Null ist. Umgekehrt ist *jede polare Menge aus Δ vom harmonischen Masse Null.* Es sei $A \subset \Delta$ eine polare Menge, $S \in SP(R)$, $S \not\equiv +\infty$, $S(p_0) \neq +\infty$ und

$$\lim_{p \to \hat{q} \in A} S(p) = \infty.$$

Wir bezeichnen

$$G_\alpha = \{p \in R \,|\, S(p) > \alpha\},$$
$$G(s,\ \varepsilon) = \{p \in R \,|\, d(p,\ s) < \varepsilon\}.$$

Es gibt offenbar für jedes $s \in A$ ein $\varepsilon > 0$, so dass $G(s, \varepsilon) \subset G_\alpha$ und somit $\Delta_1(G(s, \varepsilon)) \subset \Delta_1(G_\alpha)$ ist. s gehört aber der Menge $\Delta_1(G(s, \varepsilon))$ an, da

$$\underset{G(s,\varepsilon)}{I} K_s \neq 0$$

ist, wie am Anfang des Abschnitts III bewiesen wurde. Es ist also $A \subset \Delta_1(G_\alpha)$. Aus

$$\underset{G\alpha}{I} 1 \leq 1 \leq \frac{1}{\alpha} S$$

auf G_α, folgt

$$\underset{G\alpha}{E} \underset{G\alpha}{I} 1 \leq \frac{1}{\alpha} S.$$

Nach Satz 15′ ist dann $\omega(\Delta_1(G_\alpha)) \leq \frac{1}{\alpha} S$. Daraus ergibt sich

$$\lim_{\alpha \to \infty} \chi(\Delta_1(G_\alpha)) = \lim_{\alpha \to \infty} \omega(p_0;\ \Delta_1(G_\alpha)) \leq \lim_{\alpha \to \infty} \frac{1}{\alpha} S(p_0) = 0,$$

was zu beweisen war.

* * *

Für jeden Punkt $s \in \Delta_1$ bezeichnen wir

$$\hat{M}_f(s) = \hat{M}(s) = \bigcap_{\Delta_1(G) \ni s} \overline{f(G)};$$ [12]

dabei ist $\overline{f(G)}$ die abgeschlossene Hülle von $f(G)$ in $\hat{R}'$. Der Durchschnitt endlich vieler Mengen $\overline{f(G)}$ mit $\Delta_1(G) \ni s$ ist nicht leer, da nach Hilfssatz 10

$$\bigcap_{i=1}^{n} \overline{f(G_i)} \supset f(\bigcap_{i=1}^{n} G_i) \neq \phi$$

ist. Daraus und aus der Tatsache, dass $\hat{R}'$ kompakt ist, folgt, dass $\hat{M}(s)$ eine abgeschlossene nichtleere Menge ist.

a) *Für jede offene Menge* $\hat{G}'$ *die* $\hat{M}(s)$ *enthält, ist* $s \in \Delta_1(f^{-1}(\hat{G}' \cap R'))$. In der Tat, wäre, für jede offene Menge G, für die $s \in \Delta_1(G)$ ist, $f(G) \not\subset \hat{G}'$, so bildet $\{\overline{f(G)} - \hat{G}' \mid \Delta_1(G) \ni s\}$ eine Klasse von nichtleeren abgeschlossenen Mengen. Für $\Delta_1(G_i) \ni s$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ist nach Hilfssatz 10 $\Delta_1(\bigcap_{i=1}^{n} G_i) \ni s$ und somit

$$\bigcap_{i=1}^{n} (\overline{f(G_i)} - \hat{G}') = (\bigcap_{i=1}^{n} \overline{f(G_i)}) - \hat{G}' \supset f(\bigcap_{i=1}^{n} G_i) - \hat{G}' \neq \phi.$$

Daraus folgt, wie oben

---

[12] Für die Definition von $\hat{M}_f$ genügt, dass $\hat{R}'$ ein topologischer Raum sei.

$$\bigcap_{\Delta_1(G)\ni s} (\overline{f(G)} - \hat{G}') \neq \phi.$$

Diese Menge ist einerseits in $\hat{M}(s)$, andererseits in $\hat{R}' - \hat{G}'$ enthalten, was widersprechend ist. Es gibt also ein G, $\Delta_1(G) \ni s$ mit $f(G) \subset \hat{G}'$. Aus $G \subset f^{-1}(f(G)) \subset f^{-1}(\hat{G}' \cap R')$ folgt $s \in \Delta_1(f^{-1}(\hat{G}' \cap R'))$.

b) *Die Menge* $\hat{M}(s)$ *ist zusammenhängend,* denn im entgegengesetzten Falle könnte man zwei punktfremde offene Mengen $\hat{G}_1'$, $\hat{G}_2'$ derart finden, dass $\hat{M}(s) \subset \hat{G}_1' \cup \hat{G}_2'$, $\hat{M}(s) \cap \hat{G}_i' \neq \phi$ $(i = 1, 2)$ ist. Aus obigen Betrachtungen folgt $s \in \Delta_1(f^{-1}(\hat{G}_1' \cap R') \cup f^{-1}(\hat{G}_2' \cap R'))$. Da aber $f^{-1}(\hat{G}_1' \cap R') \cap f^{-1}(\hat{G}_2' \cap R') = \phi$ ist, so muss s wenigstens einer Menge $\Delta_1(f^{-1}(\hat{G}_i' \cap R'))$ angehören. Ist das der Fall z.B. für $i = 1$, so ist $\hat{M}(s) \subset \bar{\hat{G}}_1'$, entgegen der Voraussetzung, dass

$$\hat{M}(s) \cap \hat{G}_2' \neq \phi$$

ist.

c) *Aus* $s \in \Delta_1 - \Delta_1(f)$ *folgt* $\hat{M}(s) \subset R'$ *und umgekehrt.* Ist R' kompakt, so ist diese Bahauptung evident, so dass wir annehmen können, dass R' offen ist. Ist $s \in \Delta_1 - \Delta_1(f)$, so ist $K_s \notin HP(f)$, und es gibt ein relativkompaktes Gebiet $G' \subset R'$, so dass $s \in \Delta_1(f^{-1}(G'))$. Es ist also $\hat{M}(s) \subset \overline{G'} \subset R'$. Ist $\hat{M}(s) \subset R'$, so existiert ein relativkompaktes Gebiet $G' \subset R'$, das die Menge $\hat{M}(s)$ enthält. Dann ist nach a)

$$\underset{f^{-1}(G')}{I} K_s \neq 0$$

und $s \in \Delta_1 - \Delta_1(f)$.

d) *Es gibt einen Weg* λ *auf* R *mit dem Endpunkt in* s, *so dass die Menge der Limespunkte von* f *auf* λ *(cluster set) mit* $\hat{M}(s)$ *zusammenfällt und*

$$\lim_{\lambda \ni p \to s} K_s(p) = \sup K_s$$

ist. Es sei $G(s, 1/n)$ (bzw. $G'(\hat{M}(s), 1/n)$) die Menge der Punkte von R (bzw. R'), deren Entfernung von s (bzw. $\hat{M}(s)$) kleiner als $1/n$ ist und

$$G_{\alpha_n} = \{p \in R \mid K_s(p) > \alpha_n\},$$

wo $\alpha_n \uparrow \sup K_s$ ist. Am Anfang des Abschnittes III wurde gezeigt, dass

$$\underset{G(s,\,1/n)}{I} K_s \neq 0, \qquad \underset{G_{\alpha_n}}{I} K_s \neq 0$$

und somit $s \in \Delta_1(G(s, 1/n))$, $s \in \Delta_1(G_{\alpha_n})$ ist. Aus a) folgt $s \in \Delta_1(f^{-1}(G'(\hat{M}(s), 1/n)))$.

Laut des Hifssatzes 10 ist dann $s \in \Delta_1(G(s, 1/n) \cap G_{\alpha_n} \cap f^{-1}(G'(\hat{M}(s), 1/n)))$. Es sei D_n diejenige Komponente (Folgesatz 2) von $G(s, 1/n) \cap G_{\alpha_n} \cap f^{-1}(G'(\hat{M}(s), 1/n))$ für die $s \in \Delta_1(D_n)$ ist. Es ist offenbar $D_{n+1} \subset D_n$. Es sei $\hat{p}'$ ein Punkt aus $\hat{M}(s)$ und $G'(\hat{p}', \varepsilon)$ die Menge der Punkte von R', deren Entfernung von $\hat{p}'$ nicht grösser als ε ist. Da aber $s \in \Delta_1(D_n)$ ist, so haben wir für jedes n, $D_n \not\subset f^{-1}(R' - \overline{G'(\hat{p}', \varepsilon)})$. Es ist also $D_n \cap f^{-1}(\overline{G'(\hat{p}', \varepsilon)}) \neq \phi$. Es sei jetzt $\{\hat{p}'_m\}$ eine dichte Folge in $\hat{M}(s)$ und $p(t)$ $(0 \leq t \leq 1 - 1/2)$ ein Weg auf D_1, der mit $f^{-1}(G'(p'_1, \varepsilon))$ wenigstens einen Punkt gemeinsam hat und $p(1-1/2) \in D_2$ ist. Wir nehmen an, dass der Weg $p(t)$ schon für $0 \leq t \leq 1 - 1/2^{n-1}$ konstruiert wurde und $p(1-1/2^{n-1}) \in D_n$ ist. Dann konstruieren wir $p(t)$ für $1-1/2^{n-1} \leq t \leq 1-1/2^n$ so, dass er in D_n enthalten ist, mit $f^{-1}(G'(\hat{p}'_i, 1/2^n))$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ wenigstens einen gemeinsamen Punkt hat und $p(1-1/2^n) \in D_{n+1}$ ist. Der so konstruierte Weg λ besitzt offenbar die oben angegebenen Eigenschaften.

Es sei $\mathfrak{F}(f)$ die Menge der Punkte s aus Δ_1 für die $\hat{M}(s)$ aus einem einzigen Punkt besteht. Wir setzen für $s \in \mathfrak{F}(f)$

$$\hat{f}(s) = \hat{M}(s).$$

Die Abbildung $\hat{f}: \mathfrak{F}(f) \to \hat{R}'$ besitzt folgende Eigenschaften:

a) *Es ist für jedes $\hat{p} \in \hat{R}'$*

$$\hat{f}^{-1}(\hat{p}') = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_1(f^{-1}(G'(\hat{p}', 1/n))).$$

b) *$\hat{f}$ ist messbar, d.h. $\hat{f}^{-1}(\hat{A}')$ ist eine Borelsche Menge, für jede Borelsche Menge $\hat{A}' \subset \hat{R}'$. Insbesondere ist $\mathfrak{F}(f)$ eine Borelsche Menge.*

c) $\hat{f}^{-1}(\Delta') \subset \Delta_1(f)$; $\quad \hat{f}^{-1}(R') \subset \Delta_1 - \Delta_1(f)$.

d) *Für $s \in \mathfrak{F}(f)$ ist $\hat{f}(s)$ ein asymptotischer Punkt von f in s.*

e) *Es sei $s \in \mathfrak{F}(f)$ und F eine abgeschlossene Menge auf R, für die $s \notin \Delta_1(R-F)$ ist. Dann gibt es eine Folge $\{p_n\}$ aus F, die gegen s strebt, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} K_s(p_n) = \sup K_s$ ist und die Folge $\{f(p_n)\}$ gegen $\hat{f}(s)$ konvergiert.*

f) *Für $R' \notin O_G$, $s \in \Delta_1$ und $EK_s \not\equiv \infty$ ist $s \in \mathfrak{F}(f)$ und $EK_s = \alpha K'_{\hat{f}(s)}$ mit α eine positive Zahl.*

a) Ist $s \in \hat{f}^{-1}(\hat{p}')$, so gilt nach der Eigenschaft a) von $\hat{M}(s)$, $s \in \Delta_1(f^{-1}(G'(\hat{p}, 1/n)))$ für jedes n. Ist, umgekehrt, $s \in \Delta_1(f^{-1}(G'(\hat{p}', 1/n)))$ für jedes n, so haben wir

$$\hat{M}(s) \subset \overline{f(f^{-1}(G'(\hat{p}', 1/n)))} \subset \overline{G'(\hat{p}', 1/n)}$$

und somit $\hat{M}(s) = \{\hat{p}'\}$. Daraus folgt $s \in \mathfrak{F}(f)$, $s \in \hat{f}^{-1}(\hat{p}')$.

b) Es genügt zu zeigen, dass $\hat{f}^{-1}(\hat{A}')$ eine Borelsche Menge ist, wenn $\hat{A}'$ abgeschlossen ist. Es sei $\{\hat{p}'_n\}$ eine dichte Folge auf $\hat{A}'$. Es ist offenbar

$$\hat{f}^{-1}(\hat{A}') \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_1(f^{-1}(G'(\hat{p}'_n, 1/m))).$$

Es sei $s \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_1(f^{-1}(G'(\hat{p}'_n, 1/m)))$. Dann gehört der Punkt s, für jedes m, einer Menge $\Delta_1(f^{-1}(G'(\hat{p}'_{n(m)}, 1/m)))$ an. Es sei $\hat{p}'$ ein Häufungspunkt der Folge $\{\hat{p}'_{n(m)}\}_m$ $(\hat{p}' \in \hat{A}')$ und $\hat{G}'$ eine Umgebung von $\hat{p}'$. Man kann ein m finden, derart dass $G'(\hat{p}'_{n(m)}, 1/m) \subset \hat{G}'$ ist; daraus folgt $s \in \Delta_1(f^{-1}(\hat{G} \cap R'))$ und $\hat{M}(s) \subset \overline{\hat{G}'}$. Da $\hat{G}'$ beliebig war, so ersieht man hieraus, dass $\hat{M}(s) = \{\hat{p}'\}$ ist und $s \in \mathfrak{F}(f)$, $s \in \hat{f}^{-1}(\hat{p}') \subset \hat{f}^{-1}(\hat{A}')$ gilt. Da $\Delta_1(f^{-1}(G'(\hat{p}'_n, 1/m)))$ Borelsche Mengen sind, so ergibt sich, dass auch $\hat{f}^{-1}(\hat{A}')$ eine Borelsche Menge und $\hat{f}$ messbar ist.

c) und d) folgen aus den entsprechenden Eigenschaften von $\hat{M}(s)$.

e) Aus $s \in \Delta_1(G(s, 1/n))$, $s \in \Delta_1(G_{\alpha_n})$ $(\alpha_n \uparrow \sup K_s,\ G_{\alpha_n} = \{p \in R \mid K_s(p) > \alpha_n\})$, $s \in \Delta_1(f^{-1}(G'(\hat{f}(s), 1/n)))$ und Hilfssatz 10 folgt

$$s \in \Delta_1(G(s, 1/n) \cap G_{\alpha_n} \cap f^{-1}(G'(\hat{f}(s), 1/n))).$$

Da $s \notin \Delta_1(R-F)$ ist, so ist die Menge $G(s, 1/n) \cap G_{\alpha_n} \cap f^{-1}(G'(\hat{f}(s), 1/n))$ nicht in $R-F$ enthalten. Es gibt also einen Punkt p_n,

$$p_n \in G(s, 1/n) \cap G_{\alpha_n} \cap f^{-1}(G'(\hat{f}(s), 1/n)) \cap F.$$

Die Folge $\{p_n\}$ besitzt offenbar die gesuchte Eigenschaft.

f) Nach Satz 7 ist $EK_s = \alpha g'_{p'}$ $(p' \in R')$, oder $EK_s = \alpha K'_{s'}$ $(s' \in \Delta'_1)$. Im ersten Fall sei G' eine relativkompakte Umgebung von p'. Auf dem Rand von $f^{-1}(G')$ ist K_s nicht grösser als $\alpha g'_{p'} \circ f$ und somit beschränkt. Nach Hilfssatz 4 ist

$$K_s = \underset{f^{-1}(G')}{I} K_s + H^{K_s}_{f^{-1}(G')}.$$

Da K_s nicht beschränkt und $H^{K_s}_{f^{-1}(G')}$ beschränkt ist, so ist

$$\underset{f^{-1}(G')}{I} K_s \neq 0.$$

Es ist also $s \in \Delta_1(f^{-1}(G'))$, $s \in \mathfrak{F}(f)$ und $\hat{f}(s) = p'$. Im zweiten Fall sei $\hat{G}'$ eine

https://doi.org/10.1017/S0027763000002063 Published online by Cambridge University Press

Umgebung von s' und $G' = \hat{G}' \cap R'$. Da

$$\underset{G'}{I}\, K'_{s'} \neq 0, \qquad I_f K'_{s'} \geq \frac{1}{\alpha} K_s \neq 0$$

ist, so folgt aus dem Hilfssatz 6,

$$\underset{f^{-1}(G')}{E}\ \underset{f^{-1}(G')}{I}\ I_f K'_{s'} = I_f K'_{s'}.$$

Nach Hilfssatz 3 ist

$$\underset{f^{-1}(G')}{E}\ \underset{f^{-1}(G')}{I}\ K_s = K_s$$

und $s \in \Delta_1(f^{-1}(G'))$. Es ist also $s \in \mathfrak{F}(f)$ und $\hat{f}(s) = s'$.

Satz 16[13] (Riesz-Lusin-Privaloff-Frostman-Nevanlinna). *Es sei $\hat{A}'$ eine polare Menge auf $\hat{R}'$. Ist für eine Menge $A \subset \Delta_1$, $\hat{M}(s) \subset \hat{A}'$ für jedes $s \in A$, so ist A vom harmonischen Masse Null. Insbesondere ist $\hat{f}^{-1}(\hat{A}')$ eine Menge vom harmonischen Masse Null.*

Es sei G' eine Kreisscheibe auf R' und $S' \in SP(R' - \bar{G}')$, $S' \not\equiv \infty$ und

$$\lim_{p' \to \hat{q}' \in \hat{A}' - G'} S'(p') = \infty.$$

Wir bezeichnen

$$A_{G'} = \{s \in A \,|\, \hat{M}(s) \subset \hat{A}' - \bar{G}'\},$$
$$G'_\alpha = \{p' \in R' - \bar{G}' \,|\, S'(p') > \alpha\},$$
$$D = f^{-1}(R' - \bar{G}'),\ G_\alpha = f^{-1}(G'_\alpha) \subset D,$$

η_α die identische Abbildung von G_α in D und η die identische Abbildung von D in R. Es sei $s \in A_{G'}$. Dann ist $G'(\hat{M}(s), \varepsilon) \subset G'_\alpha$ für ein $\varepsilon > 0$ und $s \in \Delta_1(f^{-1}(G'(\hat{M}(s), \varepsilon))) \subset \Delta_1(G_\alpha)$, $A_{G'} \subset \Delta_1(G_\alpha)$. Wir werden beweisen, dass

$$\lim_{\alpha \to \infty} \omega(\Delta_1(G_\alpha), R) = 0$$

und somit $A_{G'}$ vom harmonischen Masse Null ist. Auf G_α ist

$$I_{\eta \circ \eta_\alpha} 1 \leq 1 \leq \frac{1}{\alpha} S' \circ f.$$

Daraus folgt

$$E_{\eta_\alpha} I_{\eta \circ \eta_\alpha} 1 \leq \frac{1}{\alpha} S' \circ f$$

---

13) Siehe auch Theorem 6–2 von [6] im Falle, dass f eine Lindelöfsche Abbildung ist.

auf D und

$$\lim_{\alpha\to\infty} E_{\eta_\alpha} I_{\eta\circ\eta_\alpha} 1 = 0.$$

Aus

$$E_{\eta_\alpha} I_{\eta\circ\eta_\alpha} 1 = E_{\eta_\alpha} \bar{I}_{\eta_\alpha} I_\eta 1 \leq \bar{I}_\eta 1$$

folgt $E_{\eta_\alpha} \bar{I}_{\eta\circ\eta_\alpha} 1 \in HP(\eta)$. Die Folge $\{E_{\eta_n} I_{\eta\circ\eta_n} 1\}_n$ ist eine nichtzunehmende Folge aus $HP(\eta)$ und nach Satz 6 ist

$$\lim_{n\to\infty} E_\eta E_{\eta_n} I_{\eta\circ\eta_n} 1 = 0.$$

Nach Satz 15′ ist aber

$$E_\eta E_{\eta_n} \bar{I}_{\eta\circ\eta_n} 1 = E_{\eta\circ\eta_n} \bar{I}_{\eta\circ\eta_n} 1 = \omega(\Delta_1(G_n),\ R),$$

woraus

$$\lim_{n\to\infty} \omega(\Delta_1(G_n),\ R) = 0$$

folgt. Es sei $s \in A - A_{G'}$. Dann ist $\hat{M}(s) \cap \bar{G}' \cap \hat{A}' \neq \phi$. Da aber $\hat{A}' \cap \bar{G}'$ eine Menge der Kapazität Null und $\hat{M}(s)$ ein Kontinuum ist, so reduziert sich $\hat{M}(s)$ auf einen Punkt aus $\bar{G}'$. Ist Ω' eine zweite Kreisscheibe auf R', so dass $\bar{\Omega}' \cap \bar{G}' = \phi$ ist, so ist $s \in A_{\Omega'}$ und $A \subset A_{G'} \cup A_{\Omega'}$. Daraus folgt, dass A eine Menge vom harmonischen Masse Null ist.

HILFSSATZ 12. *Hat R' eine Greensche Funktion, so ist die Menge $\hat{f}^{-1}(s')$ für jeden Punkt $s' \in \Delta_1'(f)$ nicht leer und*

$$\bar{I} K'_{s'} = \int_{\hat{f}^{-1}(s')} K_s d(\delta_{s'} \circ f)\ (s).$$

Da

$$I_f K'_{s'} \neq 0, \qquad \underset{G'(s',\,\varepsilon)}{I} K'_{s'} \neq 0$$

ist, so folgt aus dem Hilfssatz 6,

$$\underset{f^{-1}(G'(s',\,\varepsilon))}{E}\ \underset{f^{-1}(G'(s',\,\varepsilon))}{I}\ I_f K'_{s'} = \bar{I}_f K'_{s'}.$$

Nach Satz 14 ist

$$I_f K'_{s'} = \int_{\Delta_1(f)} K_s d(\delta_{s'} \circ f)\ (s).$$

Aus diesen Gleichheiten und aus Satz 15′ ergibt sich

$$I_f K'_{s'} = \int_{\Delta_1(f) \cap \Delta_1(f^{-1}(G'(s',\,\varepsilon)))} K_s d(\delta_{s'} \circ f)\ (s).$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000002063 Published online by Cambridge University Press

Aus den Eigenschaften a) und c) von $\hat{f}$ erhalten wir

$$I_f K'_{s'} = \lim_{n\to\infty} \int_{\Delta_1(f)\cap\Delta_1(f^{-1}(G'(s',1/n)))} K_s d(\delta_{s'}\circ f)(s) = \int_{\Delta_1(f)\cap\hat{f}^{-1}(s')} K_s d(\delta_{s'}\circ f)\,(s)$$

$$= \int_{\hat{f}^{-1}(s')} K_s d(\delta_{s'}\circ f)\,(s).$$

Satz 17. *Ist $R' \notin O_G$ und*

$$u' = \int_{A'} K'_{s'}\, d\mu'(s') \in HP(R'),$$

wo A' eine Borelsche Menge auf Δ'_1 ist, so ist

$$Iu' = \int_{\hat{f}^{-1}(A')} K_s d(\mu'\circ f)\,(s) = \int_{\mathfrak{F}(f)\cap\Delta_1(f)} K_s d(\mu'\circ f)\,(s) = \int_{\Delta_1(f)} K_s d(\mu'\circ f)\,(s).$$

Es ist

$$I\omega(A', R') = \omega(\hat{f}^{-1}(A'), R),$$
$$\chi_R(\Delta_1(f) - \mathfrak{F}(f)) = 0.$$

Nach den Eigenschaften b), c) von $\hat{f}$, Satz 14 und Hilfssatz 12 ist

$$IK'_{s'} = \int_{\hat{f}^{-1}(s')} K_s d(\delta_{s'}\circ f)\,(s) = \int_{\hat{f}^{-1}(A')} K_s d(\delta_{s'}\circ f)\,(s)$$

für jedes $s' \in A'$. Es ist also nach Satz 14

$$Iu' = \int_{\hat{f}^{-1}(A')} K_s d(\mu'\circ f)\,(s).$$

Daraus und aus dem Satz 14 folgen sofort die anderen Gleichheiten aus der ersten Reihe. Die letzten Behauptungen des Satzes ergeben sich aus diesen Gleichheiten durch Betrachtung der Beziehungen

$$\omega(A', R') = \int_{A'} K'_{s'}\, d\chi_{P'}(s'), \qquad \chi_{R'}\circ f = \chi_R.$$

Hilfssatz 13. *Es sei F eine abgeschlossene Menge der Kapazität Null auf R, $\mathring{R} = R - F$, η die identische Abbildung von $\mathring{R}$ in R, und $\mathring{\Delta}$ der ideale Rand von $\mathring{R}$. Dann ist $\hat{\eta}$ überall auf $\mathring{\Delta}_1(\eta)$ definiert; $\hat{\eta}$ bildet $\mathring{\Delta}_1(\eta)$ topologisch auf Δ_1 und*

$$\hat{M}_f(s) = \hat{M}_{f\circ\eta}(\hat{\eta}^{-1}(s))$$

für jedes $s \in \Delta_1$. Ist $\mathring{A} \subset \mathring{\Delta}_1(\eta)$ eine Borelsche Menge vom harmonischen Masse

Null, so ist auch $\hat{\eta}(\mathring{A})$ eine Borelsche Menge vom harmonischen Masse Null.

Wir konstruieren den idealen Rand von R in Bezug auf einen Punkt $p_0 \in R - F$ und den idealen Rand von $\mathring{R}$ in Bezug auf $\eta^{-1}(p_0)$. Es sei $\mathring{s} \in \mathring{\Delta}_1(\eta)$ und $\mathring{K}_{\mathring{s}}$ die Funktion von Martin auf $\mathring{R}$. $E_\eta \mathring{K}_{\mathring{s}}$ ist offenbar die auf R harmonische Funktion, die in allen Punkten von $R - F$ gleich $(\mathring{K}_{\mathring{s}}) \circ \eta^{-1}$ ist. Nach der Eigenschaft f) von $\hat{\eta}$ ist $\hat{\eta}$ in $\mathring{s}$ definiert und

$$E_\eta \mathring{K}_{\mathring{s}} = K_{\hat{\eta}(\mathring{s})}.$$

Aus $\hat{\eta}(\mathring{s}_1) = \hat{\eta}(\mathring{s}_2)$ folgt, dass die Funktionen $\mathring{K}_{\mathring{s}_1}$, $\mathring{K}_{\mathring{s}_2}$ gleich sind und somit die Punkte $\mathring{s}_1$, $\mathring{s}_2$ zusammenfallen; $\hat{\eta}$ ist also eineindeutig. Es sei $s \in \Delta_1$. Dann ist offenbar $K_s \circ \eta$ eine minimale Funktion auf $\mathring{R}$ aus $HP(\eta)$. Daraus folgt, dass ein $\mathring{s} \in \mathring{\Delta}_1(\eta)$ existiert, so dass $K_s \circ \eta = \mathring{K}_{\mathring{s}}$ ist. Es ist also $s = \hat{\eta}(s_0)$ und $\hat{\eta}$ ist *auf* Δ_1. Aus

$$K_{\hat{\eta}(\mathring{s})} = (\mathring{K}_{\mathring{s}}) \circ \eta^{-1}, \qquad K_s \circ \eta = \mathring{K}_{\hat{\eta}^{-1}(s)}$$

sieht man, dass $\hat{\eta}$ und $\hat{\eta}^{-1}$ stetig sind. Es sei G eine offene Menge auf R. Ist $s \in \Delta_1(G)$, so ist $\hat{\eta}^{-1}(s) \in \mathring{\Delta}_1(\eta^{-1}(G))$ und umgekehrt. Daraus und aus $\overline{f(G)} = \overline{f \circ \eta(\eta^{-1}(G))}$ folgt sofort

$$\hat{M}_f(s) = \hat{M}_{f \circ \eta}(\hat{\eta}^{-1}(s)).$$

Die letzte Behauptung ergibt sich aus

$$\omega(\hat{\eta}(\mathring{A}),\ R) \circ \eta = I_\eta \omega(\hat{\eta}(\mathring{A}),\ R) = \omega(\mathring{A},\ \mathring{R}) = 0.$$

SATZ 18 (Fatou-Nevanlinna). *Ist f eine Lindelöfsche Abbildung* [6], (*was immer der Fall ist, wenn $R' \notin O_G$ ist*), *so ist $\hat{f}$ fast überall auf Δ_1 definiert, d.h.*

$$\chi_R(\Delta_1 - \mathfrak{F}(f)) = 0.$$

Wir bezeichnen mit $\underline{\Delta_1(f)}$ die Menge der Punkte $s \in \Delta_1$ für die $\hat{M}(s) \subset \Delta'$ ist. Nach der Eigenschaft c) von $\hat{M}$ ist $\underline{\Delta_1(f)} \subset \Delta_1(f)$. Wir wollen zu erst beweisen, dass

$$\chi_R(\Delta_1 - \underline{\Delta_1(f)} - \mathfrak{F}(f)) = 0$$

ist. Für zwei beliebige Punkte p', q' aus R' gibt es eine Funktion $v_{p'q'}$ auf R' die ausserhalb der Punkte p', q' harmonisch ist, im Punkte p', bzw. q', eine positive, bzw. negative, logarithmische Singularität besitzt und auf dem idealen Rand normiert ist, d.h. es ist

https://doi.org/10.1017/S0027763000002063 Published online by Cambridge University Press

$$H_{R'-\overline{G'}}^{v_{p'q'}} = v_{p'q'}$$

für ein relativkompaktes Gebiet G', das die Punkte p', q' enthält. Wir bezeichnen $\mathring{R} = R - f^{-1}(\{p', q'\})$, $\mathring{\Delta}$ den idealen Rand von $\mathring{R}$, $\mathring{\Delta}_1$ den Teil der Minimalen aus $\mathring{\Delta}$, η die identische Abbildung von $\mathring{R}$ in R und

$$G'_\alpha = \{r' \in R' \mid v_{p'q'}(r') > \alpha\},$$
$$\mathring{G}_\alpha = (f \circ \eta)^{-1}(G'_\alpha).$$

Die Behauptung, dass f eine Lindelöfsche Abbildung ist, ist mit der Behauptung äquivalent, dass die Funktion $v_{p'q'} \circ f \circ \eta$ eine Differenz von zwei nichtnegativen harmonischen Funktionen ist [6]. Nach dem Hilfssatz 11 gibt es eine dichte abzählbare Menge von reellen Zahlen $\mathfrak{N}_{p'q'}$ derart, dass für jedes $\alpha \in \mathfrak{N}_{p'q'}$

$$\chi_{\mathring{R}}(\mathring{\Delta}_1 - \mathring{\Delta}_1(\mathring{G}_\alpha) - \mathring{\Delta}_1(\mathring{R} - \overline{\mathring{G}_\alpha})) = 0$$

ist. Wir setzen weiter

$$\mathring{Z}_{p'q'} = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{N}_{p'q'}} (\mathring{\Delta}_1 - \mathring{\Delta}_1(\mathring{G}_\alpha) - \mathring{\Delta}_1(\mathring{R} - \overline{\mathring{G}_\alpha})),$$
$$Z_{p'q'} = \hat{\eta}(\mathring{Z}_{p'q'}).$$

Nach Hilfssatz 13 ist $\chi_R(Z_{p'q'}) = 0$. Es sei $s \in \Delta_1 - \underline{\Delta_1(f)} - Z_{p'q'}$ und $\mathring{s} = \hat{\eta}^{-1}(s) \in \mathring{\Delta}_1(\eta) - \mathring{Z}_{p'q'}$. Für jedes $\alpha \in \mathfrak{N}_{p'q'}$ ist entweder $\mathring{s} \in \mathring{\Delta}_1(\mathring{G}_\alpha)$ oder $\mathring{s} \in \mathring{\Delta}_1(\mathring{R} - \overline{\mathring{G}_\alpha})$, und somit ist entweder

$$\hat{M}_f(s) = \hat{M}_{f\circ\eta}(\mathring{s}) \subset \overline{G'_\alpha},$$

oder

$$\hat{M}_f(s) = \hat{M}_{f\circ\eta}(\mathring{s}) \subset \overline{R' - \overline{G'_\alpha}}.$$

Es sei

$$\alpha_0 = \sup\{v_{p'q'}(r') \mid r' \in \hat{M}_f(s) \cap R'\}.^{14)}$$

Für jedes $\alpha \in \mathfrak{N}_{p'q'} (\alpha < \alpha_0)$, ist $\hat{M}_f(s) \not\subset \overline{R' - \overline{G'_\alpha}}$ und somit ist

$$\hat{M}_f(s) \subset \overline{G'_\alpha}.$$

Daraus folgt, da $\mathfrak{N}_{p'q'}$ dicht ist, $\hat{M}_f(s) \subset \overline{G'_{\alpha_0}}$ und wir haben

$$\hat{M}_f(s) \subset \{r' \in R' \mid v_{p'q'}(r') = \alpha_0\}.$$

Für fast alle Punkte von $\Delta_1 - \underline{\Delta_1(f)}$ ist $\hat{M}_f(s)$ in den Niveaukurven von $v_{p'q'}$

14) $\hat{M}_f(s) \cap R' \neq \phi$, da $s \notin \underline{\Delta_1(f)}$ ist.

enthalten.

Es sei $\{p_i'\}$ eine dichte Folge auf R' und

$$Z = \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_{p_i' q'};$$

es ist $\chi_R(Z) = 0$ und für jedes $s \in \Delta_1 - \underline{\Delta_1(f)} - Z$ ist $\hat{M}_f(s)$ in den Niveaukurven aller Funktionen $v_{p_i' q'}$ enthalten, d.h. $\hat{M}_f(s)$ reduziert sich auf einen Punkt, da noch Eigenschaft b) von $\hat{M}$, $\hat{M}_f(s)$ zusammenhängend ist. Es ist also $s \in \mathfrak{F}(f)$,

$$\Delta_1 - \underline{\Delta_1(f)} - \mathfrak{F}(f) \subset Z,$$

und

$$\chi_R(\Delta_1 - \underline{\Delta_1(f)} - \mathfrak{F}(f)) = 0.$$

Ist R' kompakt, so ist $\underline{\Delta_1(f)}$ leer, und der Satz ist bewiesen. Ist R$'$ offen und $R' \in O_G$, so ist nach Satz 16

$$\chi_R(\underline{\Delta_1(f)}) = 0,$$

da Δ' eine polare Menge ist und somit haben wir $\chi_R(\Delta_1 - \mathfrak{F}(f)) = 0$. Ist $R' \notin O_G$, so ist nach Satz 17

$$\chi_R(\Delta_1(f) - \mathfrak{F}(f)) = 0.$$

Daraus und aus $\underline{\Delta_1(f)} \subset \Delta_1(f)$ schliessen wir

$$\chi_R(\Delta_1 - \mathfrak{F}(f)) \leq \chi_R(\Delta_1 - \underline{\Delta_1(f)} - \mathfrak{F}(f)) + \chi_R(\Delta_1(f) - \mathfrak{F}(f)) = 0,$$

womit der Satz vollständig bewiesen ist.

Folgesatz 3. *Es sei $R \in U$ und K_s eine beschränkte Minimale. Dann entstehen folgende zwei Möglichkeiten: entweder besitzt R' eine Greensche Funktion, und dann ist $\hat{f}$ in s definiert, $\hat{f}(s) \in \Delta_1'$, $K'_{\hat{f}(s)}$ ist eine beschränkte Minimale und $R' \in U$, oder aber besitzt R' keine Greensche Funktion, und dann ist $\hat{f}$ in s nicht definiert und f ist keine Lindelöfsche Abbildung.*

$\{s\}$ ist eine Menge vom positiven harmonischen Masse. Nach Satz 18 ist also $\hat{f}$ in s definiert, falls $R' \notin O_G$. Ist, umgekehrt, $\hat{f}$ in s definiert, so ist $\hat{f}(s)$ nach Satz 16 keine polare Menge. Das kann nur dann der Fall sein, wenn $R' \notin O_G$ und $K'_{\hat{f}(s)}$ eine beschränkte Minimale ist.

Folgesatz 4 [1]. *Jede Fortsetzung einer Riemannschen Fläche der Klasse U gehört der Klasse U an.*

https://doi.org/10.1017/S0027763000002063 Published online by Cambridge University Press

Es sei $R \in U$ und $R' \supset R$. Die identische Abbildung ist offenbar eine Lindelöfsche Abbildung. Aus dem Folgesatz 3 schliesst man zuerst $R' \notin O_G$ und dann $R' \in U$.

Heins hat mit O_L die Klasse der Riemannschen Flächen mit Greenscher Funktionen bezeichnet, die keine Lindelöfsche Abbildung in der Riemannschen Kugel $(|w| \leq \infty)$ besitzen [6]. Es sei $O_{L'}$ die Klasse der Riemanschen Flächen mit Greenschen Funktionen, die keine Lindelöfsche Abbildungen in Riemannschen Fläche aus der Klasse O_G besitzen. Es ist offenbar

$$O_{L'} \subset O_L.$$

Aus dem Folgesatz 3 ergibt sich

$$U \subset O_{L'}.$$

Man kann ein von Heins [4] gegebenes Beispiel benutzen, um zu beweisen, dass die obige Inklusion $O_{L'} \subset O_L$ echt ist.

SATZ 19 (Löwner) *Es sei $R' \notin O_G$, A eine Borelsche Menge auf $\varDelta$ und A' eine Borelsche Menge auf $\varDelta'$. Sind alle Limes von f in A in A' enthalten, so ist*

$$\omega(A,\ R) \leq \omega(A',\ R') \circ f.$$

Ist $\hat{f}$ auf A definiert, und ist $\hat{f}(A) \subset \varDelta'$, so ist offenbar $\hat{f}(A)$ eine analytische χ'-messbare Menge und $\omega(A,\ R) \leqq \omega(\hat{f}(A),\ R') \circ f$.

Nach Satz 18 ist

$$\omega(A,\ R) = \omega(A \cap \mathfrak{F}(f),\ R).$$

Es sei $s \in A \cap \mathfrak{F}(f)$. Dann ist $\hat{f}(s) \in A'$, denn $\hat{f}(s)$ ist nach Eigenschaft d) von $\hat{f}$ ein asymptotischer Punkt in s. Daraus folgt $A \cap \mathfrak{F}(f) \subset \hat{f}^{-1}(A')$ und

$$\omega(A \cap \mathfrak{F}(f),\ R) \leq \omega(\hat{f}^{-1}(A'),\ R).$$

Nach Satz 17 ist

$$\omega(\hat{f}^{-1}(A'),\ R) = I\omega(A',\ R') \leq \omega(A',\ R') \circ f,$$

was zu beweisen war.

V. Der Fall $R = \{|z| < 1\}$

In diesem Abschnitt werden wir als Riemannsche Fläche R den Kreis $\{|z| < 1\}$ nehmen. Wir konstruieren den idealen Rand von Martin in Bezug auf dem Punkt $p_0 = 0$. $\hat{R}$ ist homeomorph zu $\{|z| \leq 1\}$, $\varDelta$ zu $\{|z| = 1\}$ und

https://doi.org/10.1017/S0027763000002063 Published online by Cambridge University Press

$\Delta_1 = \Delta$. Wir werden somit als Punkte von Δ_1 die Punkte $e^{i\theta}$ nehmen. Es ist

$$K_{e^{i\theta}} = Re \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}.$$

χ_R ist in diesem Falle gleich dem Lebesgueschen Masse, geteilt durch 2π. Eine Menge auf Δ_1 ist also vom harmonischen Masse Null dann und nur dann, wenn sie vom Lebesgueschen Masse Null ist.

Wir sagen, dass eine Menge F auf R im Punkte $e^{i\theta}$ *einen Winkeleingang* hat, wenn man *mindestens eine* Folge $\{z_n\}$ aus F wählen kann, die gegen $e^{i\theta}$ konvergiert und für die

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left| \arg \frac{e^{i\theta}-z_n}{e^{i\theta}} \right| < \frac{\pi}{2}$$

ist. An Stelle dieser Beziehung werden wir kurz

$$z_n \to \measuredangle\, e^{i\theta}$$

schreiben. Eine äquivalente Beziehung, die wir öfter benutzen, ist

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{|\theta - \arg z_n|}{1-|z_n|} < \infty.$$

Ist A eine Menge auf $|z|=1$, so sagen wir, dass F einen Winkeleingang in A hat, falls sie in jedem Punkt von A einen Winkeleingang hat. Weiter verstehen wir durch den Ausdruck "f hat im Punkte $e^{i\theta}$ den Winkelgrenzpunkt $\hat{p}' \in \hat{R}$" die Beziehung

$$\lim_{z\to\measuredangle e^{i\theta}} f(z) = \hat{p}'.$$

Wir werden min $\mathfrak{F}^*(f)$ die Menge der Punkte $e^{i\theta}$ bezeichnen, für die f einen Winkelgrenzpunkt hat und mit f^* die Abbildung $\mathfrak{F}^*(f) \to \hat{R}'$,

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{z\to\measuredangle e^{i\theta}} f(z).$$

Es ist bekannt, dass $\mathfrak{F}^*(f)$ eine Borelsche Menge und f^* eine messbare Abbildung ist.

SATZ 20[15]. *Die Abbildung $\hat{f}$ ist fast überall auf $\mathfrak{F}^*(f)$ definiert und gleich der Abbildung f^*.*

Es sei A die Menge der Punkte $e^{i\theta} \in \mathfrak{F}^*(f)$, wo $\hat{M}(e^{i\theta}) \neq \{f^*(e^{i\theta})\}$ ist.

15) Dieser Satz ist auch dann gültig, wenn R' nur ein topologischer Raum ist.

Wir nehmen an, dass A vom positiven Lebesgueschen Masse ist. Es sei

$$G(e^{i\theta},\ r)=\left\{z \,|\, r<|z|<1,\ \arg\left|\frac{e^{i\theta}-z}{e^{i\theta}}\right|<\frac{\pi}{4}\right\},$$

und $A(r,\ \varepsilon)$ die Menge der Punkte $e^{i\theta}\in A$, für welche $d(f^*(e^{i\theta}),\ f(z))<\varepsilon$ für $z\in G(e^{i\theta},\ r)$ ist. Da

$$\bigcup_{r<1} A(r,\ 1/n)=A$$

und $A(r,\ 1/n)$ zunehmend mit r ist, so kann man ein r_n finden, derart dass

$$\chi\left(A-A\left(r_n,\ \frac{1}{n}\right)\right)<\frac{1}{3^n}\chi(A)$$

gilt. Daraus folgt

$$\chi\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A\left(r_n,\ \frac{1}{n}\right)\right)\geq\frac{1}{2}\chi(A)>0.$$

Es sei $B\subset\bigcap_{n=1}^{\infty} A(r_n,\ 1/n)$ eine perfekte Menge mit positivem Masse und

$$G=\bigcup_{e^{i\theta}\in B} G\left(e^{i\theta},\ \frac{1}{2}\right)\cup\left\{z \,|\, |z|<\frac{2}{3}\right\}.$$

Ist $\{z_k\}$ eine Folge aus G, die gegen $e^{i\theta}\ni B$ konvergiert, so konvergiert $\{f(z_k)\}$ gegen $f^*(e^{i\theta})$. In der Tat, für ein beliebiges $\varepsilon>0$ nehmen wir n so gross, dass $1/n<\varepsilon/3$ ist. Für $k\geq k_\varepsilon$ gibt es ein θ_k, so dass $G(e^{i\theta},\ r_n)\cap G(e^{i\theta_k},\ r_n)\neq\phi$, $e^{i\theta_k}\in B$, $z_k\in G(e^{i\theta_k},\ 1/n)$ ist. Dann ist für einen Punkt $z_k'\in G(e^{i\theta},\ r_n)\cap G(e^{i\theta_k},\ r_n)$,

$$d(f^*(e^{i\theta}),\ f(z_k))\leq d(f^*(e^{i\theta}),\ f(z_k'))+d(f(z_k'),\ f(z_k))<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{2\,\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Wir wollen jetzt beweisen, dass

$$\underset{G}{I}\,\omega(B,\ R)\neq 0$$

ist. Es sei $G_\alpha=\{z\in R \,|\, \omega(z;\ B,\ R)>\alpha\}$; wir werden erst zeigen, dass für $\alpha>1/2$, $G_\alpha\subset G$ ist. Es sei $z_0\notin G$, $z_0=re^{i\theta}$. Dann gehört $e^{i\theta}$ der Menge B nicht an; es sei λ die Komponente der Komplementarmenge von B in Bezug auf $|z|=1$, die $e^{i\theta}$ enthält; λ ist ein Kreisbogen und $\omega(B,\ R)\leq 1-\omega(\lambda,\ R)$. Man kann geometrisch zeigen, dass

$$\omega(z_0;\ \lambda,\ R)>\frac{1}{2}$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000002063 Published online by Cambridge University Press

ist, woraus

$$\omega(z_0;\ B,\ R) < \frac{1}{2}$$

und $z_0 \notin G_\alpha$ folgt. Da $\omega(B,\ R) - \alpha$ auf G_α der Klasse $\mathfrak{U}_{G_\alpha}$ angehört und kleiner als $\omega(B,\ R)$ ist, so ist auf G_α

$$0 < \omega(B,\ R) - \alpha \leq \underset{G_\alpha}{I}\,\omega(B,\ R) \leq \underset{G}{I}\,\omega(B,\ R),$$

woraus man erkennt, dass

$$\underset{G}{I}\,\omega(B,\ R) \neq 0$$

ist. Daraus schliesst man, dass $e^{i\theta} \in \Delta_1(G)$ für wenigstens ein $e^{i\theta} \in B$ ist.

Es sei $\hat{G}'$ eine Umgebung von $f^*(e^{i\theta})$. Da f in $e^{i\theta}$ und auf G stetig ist, so kann man eine Umgebung G_0 von $e^{i\theta}$ finden, so dass $G_0 \cap G \subset f^{-1}(\hat{G}' \cap R')$ ist. Da $e^{i\theta} \in \Delta_1(G_0)$ ist, so ist nach Hilfssatz 10, $e^{i\theta} \in \Delta_1(G_0 \cap G)$ und $\hat{M}(e^{i\theta}) \subset \overline{\hat{G}'}$. Da $\hat{G}'$ eine beliebige Umgebung von $f^*(e^{i\theta})$ ist, so reduziert sich $\hat{M}(e^{i\theta})$ auf diesem Punkt und $e^{i\theta} \in \mathfrak{F}(f)$ entgegen der Vorraussetzung. Es ist somit A vom Lebesgueschen Masse Null, woraus die Behauptungen des Satzes folgen.

Es ist uns nicht gelungen ein Beispiel zu kontruieren in welchem $\mathfrak{F}^*(f) - \mathfrak{F}(f)$ nicht leer ist.

Es sei f eine analytische Abbildung des Kreises $\{|z|<1\}$ in einer beliebigen Riemannschen Fläche R' und $A \subset \mathfrak{F}^*(f)$; ist $f^*(A)$ eine polare Menge, so ist A vom Lebesgueschen Masse Null (Siehe auch Ohtsuka M., On the boundary volues of analytic transformation of a circle onto a Riemann surface, Nagoya Math. Journ., 10 (1956), pp. 171–175). Ist R' die Riemannsche Kugel, so erhalten wir gerade den Satz von Riesz-Lusin-Priwaloff-Frostman-Nevanlinna.

HILFSSATZ 14. *Es sei $\{z_n\}$ eine Punktfolge aus $|z|<1$ die gegen $z=1$ konvergiert und $\gamma_n (n=1, 2, \ldots)$ ein Kontinuum, das den Punkt z_n enthält und dessen hyperbolischer Durchmesser gleich δ (eine fixe von n unabhängige Zahl) ist. Ist*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arg z_n}{1-|z_n|} = \alpha \qquad (-\infty \leq \alpha \leq +\infty),$$

so ist

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, K^*_{\gamma_n}(0) \leq \frac{\bar{c}_\delta}{1+\alpha^2},$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, K^*_{\gamma_n}(0) \geq \frac{\underline{c}_\delta}{1+\alpha^2}.$$

Dabei ist $K = K_1 = Re\,\dfrac{1+z}{1-z}$ *und* $\bar{c}_\delta$, $\underline{c}_\delta$ *sind endliche positive Zahlen.*

Wir bezeichnen mit γ den nichteuklidischen Kreis mit dem Mittelpunkt in $z=0$ und den (hyperbolischen) Radius δ, und

$$\bar{a} = \sup\{K(z)\,|\,z \in \gamma\}, \qquad \omega = 1_\gamma^*.$$

Es sei λ ein Kontinuum, das den Punkt $z=0$ enthält, und dessen hyperbolischen Durchmesser gleich δ ist, und

$$1 \geq a_\lambda = \inf\{1_\lambda^*(z)\,|\,z \in \gamma\} > 0.$$

Man kann zeigen, dass

$$a = \inf\{a_\lambda\,|\,\lambda \text{ wie oben}\} > 0$$

ist. Wir setzen

$$\underline{a} = a \inf\{K(z)\,|\,z \in \gamma\}.$$

Wir bezeichnen mit T_n die eineindeutige und konforme Selbstabbildung des Kreises R, die den Punkt $z=1$ fest lässt und den Punkt z_n in 0 überführt:

$$T_n(z) = \frac{z - z_n}{1 - z\bar{z}_n} \cdot \frac{1-\bar{z}_n}{1-z_n}.$$

$K \circ T_n^{-1}$ ist minimal und deshalb ist $K \circ T_n^{-1} = K(z_n)\,K$. Es ist

$$K_{\gamma_n}^* \circ T_n^{-1} = (K \circ T_n^{-1})_{\lambda_n}^* = K(z_n)\; K_{\lambda_n}^*,$$

wo $\lambda_n = T_n(\gamma_n)$ ist. Wir haben $a\omega \leq 1_{\lambda_n}^*$ und somit

$$\underline{a}\,\omega \leq \inf\{K(z)\,|\,z \in \gamma\}\; 1_{\lambda_n}^* \leq K_{\lambda_n}^* \leq \bar{a}\,\omega.$$

Daraus folgt

$$\underline{a}\,K(z_n)\;\omega \leq K_{\gamma_n}^* \circ T_n^{-1} \leq \bar{a}\,K(z_n)\;\omega.$$

Schreiben wir diese Ungleichungen im Punkte $T_n(0)$, so erhalten wir

$$\underline{a}\,K(z_n)\;\omega(T_n(0)) \leq K_{\gamma_n}^*(0) \leq \bar{a}\,K(z_n)\;\omega(T_n(0)).$$

Es ist aber

$$\omega(T_n(0)) = \omega\Big(-z_n\frac{1-\bar{z}_n}{1-z_n}\Big) = \omega\Big(\Big|-z_n\frac{1-\bar{z}_n}{1-z_n}\Big|\Big) = \omega(r_n),$$

$$K(z_n) = \frac{1-r_n^2}{(1-r_n)^2 + 4r_n \sin^2\dfrac{\theta_n}{2}},$$

wo wir $z_n = r_n e^{i\theta_n}$ gesetzt haben. Daraus folgt

$$\underline{a}\frac{2}{1+\alpha^2}\left|\frac{\partial\omega}{\partial r}\right|_{r=1} \leq \varliminf_{n\to\infty} K^*_{\gamma_n}(0) \leq \varlimsup K^*_{\gamma_n}(0) \leq \bar{a}\frac{2}{1+\alpha^2}\left|\frac{\partial\omega}{\partial r}\right|_{r=1}$$

und somit auch die gesuchten Ungleichungen.

Es sei $z_n \to \not\succ e^{i\theta}$ und ζ_n ein Punkt, dessen hyperbolische Entfernung von z_n kleiner als δ ist. Dann ist auch $\zeta_n \to \not\succ e^{i\theta}$. In der Tat, sei

$$\alpha' = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{|\theta - \arg \zeta_n|}{1 - |\zeta_n|}$$

und γ_n ein nichteuklidischer Kreis mit dem Durchmesser δ, der die Punkte z_n und ζ_n enthält. Indem wir zu einer Teilfolge übergehen, können wir annehmen, dass

$$\alpha' = \lim_{n\to\infty} \frac{|\theta - \arg \zeta_n|}{1 - |\zeta_n|},$$

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{|\theta - \arg z_n|}{1 - |z_n|} < \infty$$

ist. Nach dem Hilfssatz 14 ist

$$0 < \frac{c_\delta}{1+\alpha^2} \leq \varliminf_{n\to\infty} K^*_{\gamma_n}(0) \leq \varlimsup_{n\to\infty} K^*_{\gamma_n}(0) \leq \frac{\bar{c}_\delta}{1+\alpha'^2},$$

woraus $\alpha' < \infty$ folgt.

HILFSSATZ 15. *Es sei $\{z_n\}$ eine Folge, für die $z_n \to \not\succ z_0 = 1$, und γ_n wie im Hilfssatz 14. Dann ist $z_0 = 1 \notin \Delta_1(R - \bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_n)$.*

Es ist $K^*_\gamma \geq K^*_{\gamma_n}$, $\gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_n$. Wir wählen eine konvergente Teilfolge der Folge $\{K^*_{\gamma_n}\}$. Nach Hilfssatz 14 ist die Grenzfunktion, die wir mit u bezeichnen werden nicht Null. Aus $u \leq K^*_\gamma$ folgt

$$K^*_\gamma = (K^*_\gamma)^*_\gamma = u^*_\gamma + (K^*_\gamma - u)^*_\gamma \leq u^*_\gamma + K^*_\gamma - u,$$
$$u \leq u^*_\gamma \leq u.$$

Aus $0 < u \leq K$ folgt $u = \alpha K$ $(0 < \alpha \leq 1)$ und

$$K^*_\gamma = \frac{1}{\alpha} u^*_\gamma = \frac{1}{\alpha} u = K.$$

Nach Hilfssatz 4 ist

$$\underset{G}{I} K = K - K^*_\gamma = 0,$$

wo wir $G = R - \gamma$ gesetzt haben.

SATZ 21[16]. *Ist R' nicht der Riemannschen Kugel* $(|w| \leq \infty)$ *oder der endlichen Ebene* $(|w| < \infty)$ *konform äquivalent, so ist* $\mathfrak{F}(f) \subset \mathfrak{F}^*(f)$ *und* $f^* = \hat{f}$ *auf* $\mathfrak{F}(f)$. *Ist R' die endliche Ebene, so hat f in jedem Punkt* $e^{i\theta} \in \mathfrak{F}(f)$, *für welchen* $\hat{f}(e^{i\theta}) \neq \infty$ *ist (d.h. nach Satz 16 fast überall auf* $\mathfrak{F}(f)$) *den Winkelgrenzpunkt* $\hat{f}(e^{i\theta})$.

Wir führen für jeden Punkt $\hat{p}' \in \hat{R}'$ eine Klasse von offenen Mengen aus R', $\mathfrak{G}_{\hat{p}'}$, ein, für die

$$\bigcap_{G' \in \mathfrak{G}_{\hat{p}'}} \overline{G}' = \{\hat{p}'\}$$

ist. Ist $\hat{p}'$ ein innerer Punkt von $R'(p' \in R')$, dann bestehe $\mathfrak{G}_{\hat{p}'}$ aus allen Kreisscheiben von R', die den Punkt $\hat{p}'$ enthalten. Ist $\hat{p}'$ ein Punkt von Δ', und besteht Δ' aus diesem einzigen Punkt, so soll $\mathfrak{G}_{\hat{p}'} = \{R' - R'_n\}$ sein, wobei $\{R'_n\}$ eine normale Ausschöpfung von R' ist, so dass der Rand von R'_n aus einer einzigen Jordankurve besteht, und das Geschlecht von R'_n nicht Null ist. Ist $\hat{p}'$ ein Punkt von Δ' und enthält Δ' auch andere Punkte, so soll $\mathfrak{G}_{\hat{p}'}$ aus den Mengen $G' = \hat{G}' \cap R'$ bestehen, wo $\hat{G}'$ eine derartige Umgebung von $\hat{p}'$ ist, dass $R' - G'$ keine kompakte Komponente hat. Für die ersten zwei Fälle ist obige Bedingung offenbar erfüllt. Um das auch im letzen Falle zu beweisen, zeigen wir zuerst folgendes: es sei $\hat{D}'$ eine beliebige Umgebung von $\hat{p}'$, $F' = R' - \hat{D}'$, F'_0 eine kompakte Komponente von F' und $p'_0 \in F'_0$. Es sei $\{p'_n\}$ eine Folge auf $F'(p'_n \neq p'_0)$, die gegen p'_0 konvergiert und F'_n die Komponente von F', die den Punkt p'_n enthält. Dann können nicht alle F'_n nichtkompakt sein. In der Tat, es sei Ω' ein relativkompaktes Gebiet, das F'_0 enthält, $\underline{F}'_n$ die Komponente von $F'_n \cap \Omega'$ die den Punkt p'_n enthält und $\underline{F}'_0$ das obere topologische Limes der Folge $\{\underline{F}'_n\}$, d.h. $\underline{F}'_0$ ist die Menge der Punkte $q' \in \Omega'$, für die jede Umgebung von q' in Ω' einen nichtleeren Durchschnitt mit unendlich vielen Mengen $\underline{F}'_n$ hat. Es ist $\underline{F}'_0 \subset F'$, $p'_0 \in \underline{F}'_0$ und $\underline{F}'_0$ zusammenhängend. Daraus folgt $\underline{F}'_0 \subset F'_0$. Da die Mengen F'_n nichtkompakt sind, so gibt es einen Punkt $q'_n \in \underline{F}'_n \cap \partial\Omega'$. Es sei q' ein Häufungspunkt der Folge $\{q'_n\}$. Er gehört gleichzeitig der Menge $\underline{F}'_0$ und $\partial\Omega'$ an. Daraus folgt, dass F'_0 mit $\partial\Omega'$ einen gemeinsamen Punkt

[16] Dieser Satz ist auch dann gültig, wenn f blos eine innere Abbildung ist ([15] seite 107).

https://doi.org/10.1017/S0027763000002063 Published online by Cambridge University Press

hat, entgegen der Voraussetzung $F_0' \subset \Omega'$. Die Mengen F_n' können also nicht alle nichtkompakt sein. Indem man zu einer Teilfolge der Folge $\{F_n'\}$ übergeht, folgert man, dass nur endlich viele von ihnen nichtkompakt sein können. Fügen wir also der Menge $\hat{D}'$ alle kompakten Komponenten der Menge F' zu, so entsteht eine offene Menge $\hat{G}'$, für die $\hat{G}' \cap R' \in \mathfrak{G}_{\hat{p}'}$. Es ist aber

$$\overline{\hat{D}} \cap \Delta' = \overline{\hat{G}' \cap R'} \cap \Delta'$$

und somit

$$\left(\bigcap_{G' \in \mathfrak{G}_{\hat{p}'}} \overline{G'}\right) \cap \Delta' = \{\hat{p}'\}.$$

Es sei $q' \in R'$ und $s' \in \Delta_1'$, $s' \neq \hat{p}'$. Da s' ein erreichbarer Randpunkt von R' ist, so gibt es eine Kurve λ die q' mit s' in R' vereinigt. Es sei F eine abgeschlossene Umgebung von q' und

$$G' = R' - \lambda - F.$$

G' gehört der Klasse $\mathfrak{G}_{\hat{p}'}$ an und $\overline{G'}$ enthält den Punkt q' nicht. Da q' beliebig auf R' war, so ist

$$\bigcap_{G' \in \mathfrak{G}_{\hat{p}'}} \overline{G'} = \left(\bigcap_{G' \in \mathfrak{G}_{\hat{p}'}} \overline{G'}\right) \cup \Delta' = \{\hat{p}'\}.$$

Es sei $e^{i\theta} \in \mathfrak{F}(f)$, $\hat{G}'$ eine Umgebug von $\hat{f}(e^{i\theta})$, derart dass $G' = \hat{G}' \cap R' \in \mathfrak{G}_{\hat{p}(e^{i\theta})}$ und $G = f^{-1}(G')$. Wir werden beweisen, dass $R - G$ keine kompakte Komponente enthält. Es ist $R - G = f^{-1}(R' - G')$. Enthält $R' - G'$ keine kompakte Komponente, so ist das offenbar richtig. Enthält aber $R' - G'$ eine kompakte Komponente, so ist $\hat{p}' = \hat{f}(e^{i\theta})$ ein Punkt einer abgeschlossenen Fläche oder der einzige Punkt des idealen Randes von R'. In beiden Fällen ist $R' - G'$ ein abgeschlossenes Gebiet (triangulierbar) mit einer positiven Euler-Poincaréschen Charakteristik ρ', denn der Fall der Riemannschen Kugel und der Fall der endlichen Ebene und $\hat{f}(e^{i\theta}) = \infty$ wurden ausgeschlossen. Wir nähmen an, dass $R - G$ eine kompakte Komponente Ω enthält. Es sei ρ die Charakteristik von Ω und n der Grad der Überlagerung von $R' - G'$ durch Ω. Aus der Hurwitzschen Relation folgt $\rho \geq n\rho' \geq n$. Es sei l die Zahl der Randkomponenten von Ω. Es ist $\rho = l - 2$ und, da $R' - G'$ eine einzige Randkomponente hat, auch $l \leq n$, woraus die widersprechende Beziehung

$$n - 2 \geq n$$

folgt. $R-G$ enthält also keine kompakte Komponente.

Es sei $\{z_n\}$ eine Folge aus $R-G$ die gegen $e^{i\theta}$ strebt, δ eine beliebige positive Zahl und γ_n ein Kontinuum, das den Punkt z_n enthält, den hyperbolischen Durchmesser gleich δ hat und in $R-G$ enthalten ist. Die Existenz von γ_n ergibt sich aus der Tatsache, dass alle Komponenten von $R-G$ nichtkompakt sind. Hat die Folge $\{z_n\}$ im Punkte $e^{i\theta}$ einen Winkeleingang, so folgt aus dem Hilfssatz 15 $e^{i\theta} \notin \Delta_1(R - \bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_n)$. Desto mehr ist $e^{i\theta} \notin \Delta_1(G)$, da $G \subset R - \bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ ist, was der Definition von $\hat{f}$ und der Eigenschaft a) von $\hat{M}$ widerspricht. Für jede Folge $\{z_n\}$, die in $e^{i\theta}$ einen Winkeleingang hat, muss also $f(z_n)$ für genügend grosse n in G' enthalten sein. Da aber

$$\bigcap_{G' \in \mathfrak{G}_{\hat{f}(e^{i\theta})}} \bar{G}' = \{\hat{f}(e^{i\theta})\}$$

ist, so folgt, dass f im Punkte $e^{i\theta}$ den Winkelgrenzpunkt $\hat{f}(e^{i\theta})$ hat, was zu beweisen war.

Im Falle $R' = \{|w| \leq \infty\}$, der aus diesem Satz ausgeschlossen wurde, ist die Inklusion $\mathfrak{F}(f) \subset \mathfrak{F}^*(f)$ nicht mehr wahr. Wir werden später (siehe Seite 74 und den Anhang) ein Beispiel in dieser Richtung geben.

HILFSSATZ 16. *Es sei R' die Riemannsche Kugel, $w_0 \in R'$ und $e^{i\theta}$ ein Punkt in welchem die Menge $f^{-1}(w_0)$ keinen Winkeleingang hat. Ist $e^{i\theta} \in \mathfrak{F}(f)$ und $\hat{f}(e^{i\theta}) \neq w_0$, so hat f in $e^{i\theta}$ den Winkelgrenzpunkt $\hat{f}(e^{i\theta})$.*

Es sei G' eine Kreisscheibe, die den Punkt $\hat{f}(e^{i\theta})$ enthält aber nicht den Punkt w_0, und es sei $G = f^{-1}(G')$. Die Menge $R-G$ hat in $e^{i\theta}$ keinen Winkeleingang. In entgegengesetzten Falle sei $\{z_n\}$ eine Folge aus $R-G$, für die $z_n \to \measuredangle\, e^{i\theta}$. Wir bezeichnen mit γ_n die Komponente der Menge $R-G$ die den Punkt z_n enthält, mit δ eine positive Zahl und mit $\mathfrak{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen, für die der nichteuklidische Durchmesser von γ_n grösser als δ ist. Wäre $\mathfrak{N}$ unendlich, so wäre laut des Hilfssatzes 15, $e^{i\theta} \notin \Delta_1(R - \bigcup_{n \in \mathfrak{N}} \gamma_n)$. Es ist aber $G \subset R - \bigcup_{n \in \mathfrak{N}} \gamma_n$ und somit $e^{i\theta} \notin \Delta_1(G)$, was widersprechend ist. $\mathfrak{N}$ ist also endlich. Für $n \notin \mathfrak{N}$ ist γ_n kompakt und deshalb enthält γ_n einen Punkt ζ_n, $f(\zeta_n) = w_0$. Da die hyperbolische Entfernung zwischen ζ_n und z_n nicht grösser als δ ist, so hat die Folge $\{\zeta_n\}$ einen Winkeleingang in $e^{i\theta}$ entgegen der Voraussetzung des Hilfssatzes. Also hat $R-G$ in $e^{i\theta}$ keinen Winkeleingang.

Da G' beliebig war folgt sofort, dass f im Punkte $e^{i\theta}$ den Winkelgrenzpunkt $\hat{f}(e^{i\theta})$ hat.

SATZ 22. *Es sei R' die Riemannsche Kugel. Existiert ein $w_0 \in R'$ derart, dass*

$$\sum_{f(z_n)=w_0} (1-|z_n|) < \infty$$

ist, so ist f^* fast überall auf $\mathfrak{F}(f)$ definiert und gleich $\hat{f}$.

Es sei A_1 die Menge der Punkte $e^{i\theta} \in \mathfrak{F}(f)$, wo $\{z_n\}$, einen Winkeleingang hat. Wir setzen

$$G(e^{i\theta}, \alpha) = \left\{ z \,\middle|\, \frac{1}{2} < |z| < 1, \ \left|\arg \frac{e^{i\theta}-z}{e^{i\theta}}\right| < \alpha \right\} \qquad \left(\alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

Enthält $G(e^{i\theta}, \alpha)$ den Punkt $z_n = r_n e^{i\theta_n}$, so ist

$$|\theta_n - \theta| < (1-r_n) \operatorname{tg} \alpha.$$

Es sei B_α die Menge der Punkte $e^{i\theta}$, für die $G(e^{i\theta}, \alpha)$ unendlich viele z_n enthält; dann ist

$$\chi(B_\alpha) \leq \operatorname{tg} \alpha \sum_{n=m}^{\infty} (1-r_n) < \infty$$

für ein beliebiges m, und somit ist B_α vom Lebesgueschen Masse Null. Da aber $A_1 \subset \bigcap_{\alpha<\pi/2} B_\alpha$ ist, so ist A_1 vom Lebesgueschen Masse Null.

Es sei

$$A_2 = \{e^{i\theta} \in \mathfrak{F}(f) \mid \hat{f}(e^{i\theta}) = w_0\}.$$

Aus dem Satz 16 ist zu ersehen, dass auch A_2 vom Lebesgueschen Masse Null ist. Ist $e^{i\theta} \in \mathfrak{F}(f) - A_1 - A_2$, so folgt aus dem Hilfssatz 16, dass f in $e^{i\theta}$ den Winkelgrenzwert $\hat{f}(e^{i\theta})$ hat.

FOLGESATZ 5. *Es sei R' die Riemannsche Kugel und f eine Lindelöfsche Abbildung (beschänktartig). Dann ist f^* fast überall auf $|z|=1$ definiert und gleich $\hat{f}$.*

Nach Satz 18 ist $\hat{f}$ fast überall definiert und, da die Bedingung

$$\sum_{f(z_n)=w_0} (1-|z|) < \infty$$

für alle Punkte $w_0 \in R'$ erfüllt ist, erhalten wir sofort den Folgesatz aus dem Satz 22.

Dieser Folgesatz ist gerade der Satz von Fatou-Nevanlinna. Die Eigenschaft e) von $\hat{f}$ erlaubt uns die Behauptung, dass f fast überall einen Winkelgrenzpunkt hat, etwas zu verschärfen. Man kann nähmlich sagen, dass fast alle $e^{i\theta}$ folgende Eigenschaft besitzen: Es sei F eine abgeschlossene Menge in R, für die $e^{i\theta} \notin \Delta_1(R-F)$ ist (F kann diese Bedingung erfüllen, ohne im Punkte $e^{i\theta}$ einen Winkeleingang zu haben); man kann dann eine Folge $\{z_n\}$ auf F finden, die gegen $e^{i\theta}$ konvergiert, und für die $\{f(z_n)\}$ gegen $\hat{f}(e^{i\theta})$ konvergiert.

VI. Fatousche Abbildungen

Der Abbildung $\hat{f}$ fehlt die Kompositionseigenschaft, d.h. es ist nicht immer $\widehat{f' \circ f} = \hat{f}' \circ \hat{f}$. Da diese Eigenschaft bei einigen Anwendungen wichtig ist, werden wir eine Teilmenge der Menge $\mathfrak{F}(f)$ einführen, auf der die Abbildung $\hat{f}$ diese Eigenschaft besitzt. Wir bezichnen, in Falle $R' \notin O_G$,

$$\mathfrak{F}_0(f) = \{s \in \Delta_1(f) \mid EK_s < \infty\}.$$

Nach der Eigenschaft (f) der Abbildung $\hat{f}$ ist $\mathfrak{F}_0(f) \subset \mathfrak{F}(f)$. Die Menge $\mathfrak{F}_0(f)$ besitzt folgende Eigenschaften.

a) *$\mathfrak{F}_0(f)$ ist eine Borelsche Menge.*

b) *Es sei $s' \in \Delta'$; $\mathfrak{F}_0(f) \cap \hat{f}^{-1}(s')$ ist dann und nur dann leer, wenn $IK'_{s'}$ total nichtdiskret ist.*

c) *Ist $s \in \mathfrak{F}_0(f)$ und $\hat{f}(s) \in \Delta_1'(G')$ für eine offene Menge $G' \subset R'$, so ist auch $s \in \Delta_1(f^{-1}(G'))$.*

a) Nach Satz 4 ist die Funktion $s \to EK_s(p_0')$ halbstetig. Daraus und aus der Tatsache, dass $\Delta_1(f)$ eine Borelsche Menge ist folgt sofort, dass auch $\mathfrak{F}_0(f)$ eine Borelsche Menge ist.

b) Ist $IK'_{s'}$ nicht total nichtdiskret, so gibt es einen Punkt $s \in \Delta_1$, und eine positive Zahl α, derart dass

$$\alpha K_s \leq IK'_{s'} \leq K'_{s'} \circ f$$

ist. Dann ist offenbar s in $\mathfrak{F}_0(f)$ enthalten und $s \in \hat{f}^{-1}(s')$. Ist, umgekehrt, $s \in \hat{f}^{-1}(s') \cap \mathfrak{F}_0(f)$, so ist nach der Eigenschaft f) von $\hat{f}$

$$EK_s = \alpha K'_{s'},$$

wo α eine positive Zahl ist. Daraus und aus der Eigenschaft c) von $\hat{f}$ folgt

$$\frac{1}{\alpha} K_S \leq IK'_{S'}$$

und $IK'_{S'}$ ist nicht total nichtdiskret.

c) Es ist nach der Eigenschaft f) von $\hat{f}$

$$E_f K_S = \alpha K'_{\hat{f}(S)}.$$

Da

$$I_f K'_{\hat{f}(S)} \geq \frac{1}{\alpha} K_S \neq 0, \qquad \underset{G'}{I} K'_{\hat{f}(S)} \neq 0$$

ist, so ist nach Hilfssatz 6

$$\underset{f^{-1}(G')}{E} \; \underset{f^{-1}(G')}{I} I_f K'_{\hat{f}(S)} = I_f K'_{\hat{f}(S)} \geq \frac{1}{\alpha} K_S.$$

Nach Hilfssatz 3 ist dann

$$\underset{f^{-1}(G')}{E} \; \underset{f^{-1}(G')}{I} K_S = K_S$$

und $s \in \Delta_1(f^{-1}(G'))$.

Hilfssatz 17. *Es sei* $R \xrightarrow{f} R' \xrightarrow{f'} R''$, $R' \notin O_G$ *und* $s \in \mathfrak{F}_0(f)$. s *gehört der Menge* $\mathfrak{F}(f' \circ f)$ *dann und nur dann an, wenn* $\hat{f}(s)$ *der Menge* $\mathfrak{F}(f')$ *angehört. In diesem Falle ist*

$$\hat{f}'(\hat{f}(s)) = \widehat{f' \circ f}(s).$$

Es sei $\hat{f}(s) \in \mathfrak{F}(f')$ und $\hat{G}''$ eine Umgebung von $\hat{f}'(\hat{f}(s))$. Wir bezeichnen

$$G' = f'^{-1}(\hat{G}'' \cap R''),$$
$$G = (f' \circ f)^{-1}(\hat{G}'' \cap R'') = f^{-1}(G').$$

Nach der Definition von $\hat{f}'$ ist $\hat{f}(s) \in \Delta_1(G')$ und nach der Eigenschaft c) von $\mathfrak{F}_0(f)$ ist $s \in \Delta_1(G)$. $\hat{M}_{f' \circ f}(s)$ reduziert sich somit auf den Punkt $\hat{f}'(\hat{f}(s))$ und $s \in \mathfrak{F}(f' \circ f)$,

$$\widehat{f' \circ f}(s) = \hat{f}'(\hat{f}(s)).$$

Es sei jetzt $s \in \mathfrak{F}(f' \circ f)$ und $\hat{G}''$ eine Umgebung von $\widehat{f' \circ f}(s)$. Wir setzen G' und G wie oben. Nach der Eigenschaft f) von $\hat{f}$ ist

$$E_f K_S = \alpha K'_{\hat{f}(S)}, \qquad I_f K'_{\hat{f}(S)} \geq \frac{1}{\alpha} K_S,$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000002063 Published online by Cambridge University Press

wo α eine positive Zahl ist. Da $s \in \Delta_1(G)$ ist, so ist

$$\underset{G}{I} I_f K'_{\hat{f}(s)} \geq \frac{1}{\alpha} \underset{G}{I} K_s \neq 0.$$

Nach Satz 12 ist

$$\bar{I}_{f_0} \underset{G'}{I} K'_{\hat{f}(s)} = \underset{G}{I} I_f K'_{\hat{f}(s)} \neq 0,$$

wo f_0 die Abbildung von G in G', die mit f zusammenfällt ist. Daraus folgt

$$\underset{G'}{I} K'_{\hat{f}(s)} \neq 0$$

und $\hat{f}(s) \in \Delta_1(G')$. Die Menge $\hat{M}_{f'}(\hat{f}(s))$ reduziert sich somit auf den Punkt $\widehat{f' \circ f}(s)$, $\hat{f}(s) \in \mathfrak{F}(f')$ und

$$\hat{f}'(\hat{f}(s)) = \widehat{f' \circ f}(s).$$

Es sei $\nu_f(p')$ die Zahl der Punkte der Menge $f^{-1}(p')$ und

$$R'_k = \{p' \in R' \mid \nu_f(p') \geq k\} \qquad (k < \infty).$$

R'_k ist eine offene Menge und $R'_{k+1} \subset R'_k$.

Hilfssatz 18. *Ist* $s' \in \Delta'_1(f) - \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta'_1(R'_k)$, *so ist* $\hat{f}^{-1}(s') \cap \mathfrak{F}_0(f)$ *nicht leer,* $IK'_{s'}$ *ist diskret und*

$$IK'_{s'} = \int_{\hat{f}^{-1}(s') \cap \mathfrak{F}_0(f)} K_s d(\delta_{s'} \circ f)\ (s) = \sum_{\substack{\hat{f}(s_i) = s' \\ s_i \in \mathfrak{F}_0(f)}} \alpha_i K_{s_i},$$

wobei die letzte Summe endlich viele Glieder hat. Ist $s' \in \Delta'_1(R'_{k+1})$, *so besteht* $\hat{f}^{-1}(s') \cap \mathfrak{F}_0(f)$ *aus höchstens* k *Punkten.*

Nach Satz 14 ist

$$I_f K'_{s'} = \int_{\Delta_1(f)} K_s d(\delta_{s'} \circ f)\ (s).$$

Angenommen $I_f K'_{s'}$ wäre nicht diskret. Dann kann man in $\Delta_1(f)$ k abgeschlossene paarweise punktfremde Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_k$ finden, so dass $(\delta_{s'} \circ f)\ (A_i) > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ ist. Es seien $\hat{G}_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ paarweise puntfremde Umgebungen der Mengen A_i und $G_i = \hat{G}_i \cap R$. Da $A_i \subset \Delta_1(G_i)$ ist, so ist nach dem Satz 15'

$$\underset{G_i}{E}\ \underset{G_i}{I}\, I_f K'_{s'} \geqq \int_{A_i} K_s d(\delta_{s'} \circ f)\ (s) > 0$$

und somit ist

$$\underset{G_i}{I}\, I_f K'_{s'} \neq 0.$$

Wir bezeichnen $G'_i = f(G_i)$ und es sei f_i die Abbildung von G_i in G'_i, die mit f zusammenfällt. Dann ist nach Satz 12

$$I_{f_i} \underset{G'_i}{I}\, K'_{s'} = \underset{G_i}{I}\, I_f K'_{s'} \neq 0, \qquad \underset{G'_i}{I}\, K'_{s'} \neq 0.$$

Laut des Hilfssatzes 10 ist $s \in \bigcap_{i=1}^{k} \varDelta'_1(G'_i) = \varDelta'_1(\bigcap_{i=1}^{k} G'_i)$. Es sei $p' \in \bigcap_{i=1}^{k} G'_i$. Dann kann man in jeder Menge G_i einen Punkt p_i finden, für welchen $f(p_i) = p'$ ist. Es ist also $\nu_f(p') \geqq k$, $\bigcap_{i=1}^{k} G'_i \subset R'_k$ und $s' \in \varDelta'_1(R'_k)$. Da aber k beliebige war, so folgt $s' \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \varDelta_1(R'_k)$, entgegen der Voraussetzung des Hilfssatzes. $IK'_{s'}$ ist also diskret:

$$IK'_{s'} = \sum_i \alpha_i K_{s_i} \qquad (\alpha_i > 0).$$

Es ist offenbar $s_i \in \mathfrak{F}_0(f)$ und $\hat{f}(s_i) = s'$. Daraus folgt durch einfache Betrachtungen

$$IK'_{s'} = \int_{\hat{f}^{-1}(s') \cap \mathfrak{F}_0(f)} K_s d(\delta_{s'} \circ f)\ (s) = \sum_{\substack{\hat{f}(s_i) = s' \\ s_i \ni \mathfrak{F}_0(f)}} \alpha_i K_{s_i}.$$

Ist $s' \notin \varDelta'_1(R'_{k+1})$, so ergibt sich genau wie oben, dass $\hat{f}^{-1}(s') \cap \mathfrak{F}_0(f)$ höchstens k Punkte enthält.

Satz 23. *Es sei* $A' \subset \varDelta'_1 - \bigcap_{k=1}^{\infty} \varDelta'_1(R'_k)$ *und*

$$u' = \int_{A'} K'_{s'}\, d\mu'(s') \in HP(R').$$

Dann ist

$$Iu' = \int_{\hat{f}^{-1}(A') \cap \mathfrak{F}_0(f)} K_s d(\mu' \circ f)\ (s).$$

Insbesondere ist

$$I\omega(A', R') = \omega(\hat{f}^{-1}(A') \cap \mathfrak{F}_0(f), R).$$

Nach Hilfssatz 18 und Satz 14 ist

$$IK'_{s'} = \int_{\hat{f}^{-1}(A') \cap \mathfrak{F}_0(f)} K_s d(\delta_{s'} \circ f)\ (s),$$

Daraus und aus dem Satz 14 folgt

$$Iu' = \int_{\hat{f}^{-1}(A')\cap\mathfrak{F}_0(f)} K_s d(\mu'\circ f)\ (s).$$

FOLGESATZ 6. *Ist die von f bestimmte Überlagerung endlich blättrig, d.h. ν_f beschränkt, so ist $\hat{f}^{-1}(s')\cap\mathfrak{F}_0(f)$ nicht leer für $s'\in\Delta_1'(f)$ und besteht aus höchstens k Punkten, wo $k=\sup\nu_f$ ist.*

Es ist

$$I\int_{\Delta_1'} K'_{s'}\,d\mu'(s') = \int_{\mathfrak{F}_0(f)} K_s d(\mu'\circ f)\ (s),$$
$$I\omega(A', R') = \omega(\hat{f}^{-1}(A')\cap\mathfrak{F}_0(f), R).$$

FOLGESATZ 7. *Ist $R'\in U$, f endlich-blättrig und $EI1=1$, so ist $R\in U$. Ist G' eine offene Menge auf R', für die*

$$\underset{G'}{E}\ \underset{G'}{I}\,1 = 1$$

ist, so gehöhrt mindestens eine ihrer Komponente der Klasse U an.

Der letzte Teil dises Folgesatzes ist genau der Satz 12 von [1]; der hier angegebene Beweis benutzt aber nicht die universelle Überlagerungsfläche.

Da $R'\in U$, so gibt es einen Punkt $s'\in\Delta_1'$ für welchen $K'_{s'}$ beschränkt ist. Aus $K'_{s'}\leq\alpha 1$ für eine positive Zahl α und aus Hilfssatz 3 folgt $EIK'_{s'}=K'_{s'}$ und somit ist

$$IK'_{s'}\neq 0.$$

Nach Hilfssatz 18 ist

$$IK'_{s'} = \sum_{\substack{\hat{f}(s_i)=s'\\ s_i\in\mathfrak{F}_0(f)}} \alpha_i K_{s_i}$$

und alle K_{s_i} müssen beschränkte Minimale sein, was den ersten Teil des Folgesatzes beweist. Der zweite folgt aus dem ersten durch evidente Betrachtungen.

HILFSSATZ 19. *Ist $R\xrightarrow{f}R'\xrightarrow{f'}R''$, f endlichblättrig und $\widehat{f'\circ f}$ fast überall auf $\Delta_1(f)$ definiert, so ist auch $\hat{f}'$ fast überall auf $\Delta_1'(f)$ definiert.*

Es ist zu beweisen, dass

$$\chi_{B'}(\Delta_1'(f)-\mathfrak{F}(f'))=0$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000002063 Published online by Cambridge University Press

ist. Nach Folgesatz 6 ist

$$I_f\,\omega(\Delta_1'(f)-\mathfrak{F}(f'),\ R')=\omega(\hat{f}^{-1}(\Delta_1'(f)-\mathfrak{F}(f'))\cap\mathfrak{F}_0(f),\ R).$$

Es sei $s\in\hat{f}^{-1}(\Delta_1'(f)-\mathfrak{F}(f'))\cap\mathfrak{F}_0(f)$. Aus $\hat{f}(s)\notin\mathfrak{F}(f')$ und Hilfssatz 17 folgt $s\notin\mathfrak{F}(f'\circ f)$. Es ist also

$$\hat{f}^{-1}(\Delta_1'(f)-\mathfrak{F}(f'))\cap\mathfrak{F}_0(f)\subset\Delta_1(f)-\mathfrak{F}(f'\circ f),$$
$$\omega(\hat{f}^{-1}(\Delta_1'(f)-\mathfrak{F}(f))\cap\mathfrak{F}_0(f),\ R)\leq\omega(\Delta_1(f)-\mathfrak{F}(f'\circ f),\ R)=0.$$

Mittels des Satzes 15 erhält man

$$\omega(\Delta_1'(f)-\mathfrak{F}(f'),\ R')=E_f I_f\,\omega(\Delta_1'(f)-\mathfrak{F}(f'),\ R')=0.$$

HILFSSATZ 19′. *Ist G ein Gebiet auf R, η die identische Abbildung von G in R und $f\circ\eta$ eine Lindelöfsche Abbildung, so ist $\hat{f}$ fast überall auf $\Delta_1(G)$ definiert.*

Da η einblättrig ist, so folgt dieser Hilfssatz unmittelbar aus dem Satz 18 und Hilfssatz 19.

DEFINITION. *Wir nennen f eine Fatousche Abbildung, wenn man auf R' eine offene Menge G' finden kann, derart dass mindestens eine Komponente von G' eine Greensche Funktion besitzt und*

$$\underset{f^{-1}(G')}{E}\ \underset{f^{-1}(G')}{I}\ 1=1$$

ist.

Es sei F' eine abgeschlossene Menge auf R' und u' eine harmonische Funtion auf $R'-F'$. Wir setzen

$$G_\alpha'=\{p'\in R'-F'\mid u'(p')>\alpha\},\qquad G_\alpha=f^{-1}(G_\alpha').$$

Ist, für ein α, $\Delta_1-\Delta_1(G_\alpha)-\Delta_1(R-\bar{G}_\alpha)$ vom harmonischen Masse Null, so ist f eine Fatousche Abbildung. Man kann nähmlich als Menge G' die Menge $G_\alpha'\cup(R'-\bar{G}_\alpha')$ setzen. Daraus folgt, dass jede Lindelöfsche Abbildung eine Fatousche Abbildung ist.

SATZ 24. *$\hat{f}$ ist dann und nur dann fast überall auf Δ_1 definiert, wenn f eine Fatousche Abbildung ist.*

Wir nehmen erst an, dass f eine Fatousche Abbildung ist und es sei G' die in obiger Definition vorkommende Menge. Wir bezeichnen mit G_i die

https://doi.org/10.1017/S0027763000002063 Published online by Cambridge University Press

Komponenten von $f^{-1}(G')$ und mit η_i die identische Abbildung von G_i in R. Die Abbildung $f\circ\eta_i$ ist eine Lindelöfsche Abbildung, da eine, und somit alle Komponenten von G' Greensche Funtionen besitzen. Nach Hilfssatz 19′ ist $\hat{f}$ fast überall auf $\varDelta_1(G_i)$ definiert und, da

$$\varDelta_1(f^{-1}(G')) = \bigcup_i \varDelta_1(G_i)$$

ist, so ist $\hat{f}$ auch fast überall auf $\varDelta_1(f^{-1}(G'))$ definiert. Es ist aber $\varDelta_1-\varDelta_1(f^{-1}(G'))$ vom harmonischen Masse Null und somit ist $\hat{f}$ fast überall auf $\varDelta_1$ definiert.

Es sei, umgekehrt, $\hat{f}$ fast überall auf $\varDelta_1$ definiert, $p', q'\in R'$, $v_{p'q'}$ die im Beweis des Satzes 18 eingeführte Funktion und

$$G'_\alpha=\{r'\in R'\,|\,v_{p'q'}(r')>\alpha\}.$$

Wir wählen α so, dass G'_α relativkompakt und

$$\chi_R(\hat{f}^{-1}(\partial G'_\alpha))=0$$

sei, was immer möglich ist, und bezeichnen $G'=R'-\partial G'_\alpha$. Es sei $s\in\mathfrak{F}(f)-\hat{f}^{-1}(\partial G'_\alpha)$. Dann ist entweder $\hat{f}(s)\in G'_\alpha$, oder $\hat{f}(s)\in\hat{R}'-G'_\alpha$. In beiden Fällen ist $s\in\varDelta_1(f^{-1}(G'))$, woraus

$$\mathfrak{F}(f)-\hat{f}^{-1}(\partial G'_\alpha)\subset\varDelta_1(f^{-1}(G'))$$

und

$$\underset{f^{-1}(G')}{E}\ \underset{f^{-1}(G')}{I}\ 1=\omega(\varDelta_1(f^{-1}(G')))=1$$

folgt. f ist also eine Fatousche Abbildung.

Es sei $\{a_n\}$ eine Folge in $|z|<1$, die gegen $|z|=1$ strebt, γ_n der Kreis mit dem Mittelpunkt in a_n und Radius r_n; wir wählen r_n so klein dass

a) $\bar{\gamma}_n\subset\{|z|<1\}$,

b) $\bar{\gamma}_n\cap\bar{\gamma}_m=\phi$ für $n\neq m$

ist. Wir bezeichnen

$$P_{ab}(z)=\frac{z-a}{1-z\bar{a}}\cdot\frac{1-z\bar{b}}{z-b}.$$

Auf $|z|=1$ ist $|P_{ab}(z)|=1$. Aus

$$\left|\frac{z-a}{1-z\bar{a}}\right|^2=1-\frac{(1-|z|^2)(1-|a|^2)}{|1-za|^2}$$

folgt

$$|P_{ab}(z)|^2 = \frac{1 - \dfrac{(1-|z|^2)(1-|a|^2)}{|1-z\bar{a}|^2}}{1 - \dfrac{(1-|z|^2)(1-|b|^2)}{|1-z\bar{b}|^2}} = 1 + \frac{\dfrac{1-|b|^2}{|1-z\bar{b}|^2} - \dfrac{1-|a|^2}{|1-z\bar{a}|^2}}{\left|\dfrac{z-b}{1-z\bar{b}}\right|^2}(1-|z|^2)$$

$$= 1 + (1-|z|)\,\varepsilon_{ab}(z)$$

mit

$$\varepsilon_{ab}(z) = \frac{\dfrac{1-|b|^2}{|1-z\bar{b}|^2} - \dfrac{1-|a|^2}{|1-z\bar{a}|^2}}{\left|\dfrac{z-b}{1-z\bar{b}}\right|^2}(1+|z|)$$

$$= \frac{(1+|z|^2)(|a|^2-|b|^2) + (z+\bar{z}ab)(\bar{b}-\bar{a}) + (\bar{z}+z\bar{a}\bar{b})(b-a)}{|z-b|^2\,|1-z\bar{a}|^2}(1+|z|).$$

Es sei γ_n' der Kreis mit dem Mittelpunkt in a_n und Radius $r_n/2$. Für $b \in \gamma_n'$ ist

$$\varepsilon_n(b) = \sup\{|\varepsilon_{a_n b}(z)| \mid z \in R - \gamma_n\} \leq \frac{64|b-a_n|}{r_n^2(1-|a_n|)^2}.$$

Wir wählen den Punkt b_n so nahe dem Punkte a_n, dass $b_n \in \gamma_n'$ und

$$\frac{64|b_n-a_n|}{r_n^2(1-|a_n|)^2} < \frac{1}{2^n}$$

ist und bezeichnen

$$f_n(z) = z\prod_{j=1}^{n} P_{a_j b_j}(z),$$

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) = z\prod_{j=1}^{\infty} P_{a_j b_j}(z).$$

Auf $|z|=1$ ist $|f_n(z)|=1$. Auf $\partial\gamma_j$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ ist

$$|f_n(z)| \leq |z|\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{1-|z|}{2^j}\right) \leq |z|\,e^{1-|z|} < 1,$$

$$|f_n(z)| \geq |z|\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-|z|}{2^j}\right) \geq |z|\,e^{-2(1-|z|)}.$$

Daraus folgt, dass f eine nichtkonstante meromorphe Funktion ist, die in $G = R - \bigcup_{n=1}^{\infty}\gamma_n$ ein kleineres Modul als 1 hat. Es ist also

$$f^{-1}(\{|w|<1\} \supset G.$$

Wir können immer die Radien r_n so klein wählen, dass

c) $$\underset{G\;G}{EI}\,1 = 1$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000002063 Published online by Cambridge University Press

ist. Daraus folgt sofort, dass f eine Fatousche Abbildung ist. Ihre Nullstellen sind gerade die Punkte a_n und man kann sie so wählen, dass

d) $$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)=\infty$$

ist; f ist dann keine Lindelöfsche Abbildung. Nimmt man noch die Folge $\{a_n\}$ so, dass sie gegen den Punkt $z=1$ konvergent ist, so kann man zeigen, dass f, bis auf den Punkt $z=1$, sogar analytisch auf $|z|=1$ ist (somit ist auch f^* fast überall auf $|z|=1$ definiert) und f auch weiter nicht Lindelöfsche Abbildung bleibt.

Wenn wir noch eine Bedingung der Folge $\{a_n\}$ und den Kreisen γ_n zuschreiben, so erhalten wir ein Beispiel, woraus man ersehen wird, dass die Menge $\mathfrak{F}(f)-\mathfrak{F}^*(f)$ in Falle $R'=\{|w|\leq\infty\}$ nicht immer leer ist (siehe Seite 64 und den Anhang). Zwar werden wir verlangen, dass

e) die Folge $\{a_n\}$ in allen Punkten $e^{i\theta}$ einen Winkeleingang hat

f) der hyperbolische Durchmesser von γ_n kleiner als 1 sei. Nach der Bemerkung, die dem Hilfssatz 15 folgt, hat dann auch die Menge $\{b_n\}$ in allen Punkten $e^{i\theta}$ einen Winkeleingang. Daraus ergibt sich da a_n die Nullstellen und b_n die Pole von f sind, dass die Menge $\mathfrak{F}^*(f)$ leer ist, wogegen $\mathfrak{F}(f)$ vom Lebesgueschen Masse 2π ist.

HILFSSATZ 20. *Es sei* $R\xrightarrow{f}R'\xrightarrow{f'}R''$. *a)* $\widehat{f'\circ f}$ *ist auf* $\hat{f}^{-1}(R')$ *definiert und gleich* $f'\circ\hat{f}$. *b)* $\widehat{f'\circ f}$ *ist fast überall auf* $\hat{f}^{-1}(\mathfrak{F}(f'))$ $(R'\notin O_G)$ *definiert und gleich* $\hat{f}'\circ\hat{f}$.

Wir setzen $f''=f'\circ f$.

a) Es sei $s\in\hat{f}^{-1}(R')$ und $p''=f'(\hat{f}(s))$. $f'^{-1}(G''(p'',\varepsilon))$ ist eine Umgebung von $\hat{f}(s)$ und deshalb ist

$$\underset{f''^{-1}(G''(p'',\varepsilon))}{I} K_s=\underset{f^{-1}(f'^{-1}(G''(p'',\varepsilon)))}{I} K_s\neq 0.$$

Daraus folgt, dass $\hat{f}''$ in s definiert und gleich $f'\circ\hat{f}(s)$ ist.

b) Es sei $s'\in\mathfrak{F}(f')$. Da

$$\underset{G'(s',1/n)}{I} K'_{s'}\neq 0,\qquad \underset{f'^{-1}(G''(\hat{f}'(s'),1/n))}{I} K'_{s'}\neq 0$$

ist, so ist laut des Folgesatzes 2

https://doi.org/10.1017/S0027763000002063 Published online by Cambridge University Press

$$\underset{G'n}{I}\, K'_{s'} \neq 0$$

mit

$$G'_n = G'(s',\ 1/n) \cap f'^{-1}(G''(\hat{f}\,'(s'),\ 1/n)).$$

Ist ausserdem s' in $\varDelta'_1(f)$ enthalten, so folgt aus dem Hilfssatz 6

$$\underset{f^{-1}(G_n')}{E}\ \underset{f^{-1}(G_n')}{I}\ I_f K'_{s'} = I_f K'_{s'}.$$

Daraus und aus den Sätzen 14 und 15′ erhalten wir

$$I_f K'_{s'} = \int_{\Delta_1(f) \cap \Delta_1(f^{-1}(G_n'))} K_s d(\delta_{s'} \circ f)(s).$$

Lassen wir n gegen unendlich streben so ergibt sich

$$I_f K'_{s'} = \int_{\Delta_1(f) \cap \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_1(f^{-1}(G_n'))} K_s d(\delta_{s'} \circ f)(s).$$

Wir bezeichnen mit A die Menge

$$A = \{s \in \hat{f}^{-1}(\mathfrak{F}(f')) \mid s \in \mathfrak{F}(f''),\quad \hat{f}\,''(s) = \hat{f}\,'(\hat{f}(s))\}.$$

A ist offenbar eine Borelsche Menge. Man erkennt sofort, dass

$$\varDelta_1(f) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \varDelta_1(f^{-1}(G'_n)) \subset A \subset \varDelta_1(f)$$

ist. Es ist also

$$I_f K'_{s'} = \int_A K_s d(\delta_{s'} \circ f)(s)$$

und aus dem Satz 14 folgt

$$I_f\, \omega(\mathfrak{F}(f'),\ R') = I_f \int_{\mathfrak{F}(f')} K'_{s'}\, d\chi_{R'}(s') = I_f \int_{\mathfrak{F}(f') \cap \Delta_1'(f)} K'_{s'}\, d\chi_{R'}(s')$$
$$= \int_A K_s d(\chi_{R'} \circ f)(s) = \int_A K_s\, d\chi_R(s) = \omega(A,\ R).$$

Laut des Satzes 17 ist aber

$$I_f\, \omega(\mathfrak{F}(f'),\ R') = \omega(\hat{f}^{-1}(\mathfrak{F}(f')),\ R)$$

und somit ist

$$\hat{f}^{-1}(\mathfrak{F}(f')) = A\ :\ [\chi_R]$$

was die Behauptung von b) bestätigt.

Satz 25. *Es sei* $R \xrightarrow{f} R' \xrightarrow{f'} R''$ *und* f *eine Fatousche Abbildung. Ist* $R' \notin O_G$

https://doi.org/10.1017/S0027763000002063 Published online by Cambridge University Press

und f' eine Fatousche Abbildung oder ist R' beliebig und $\Delta_1(f)$ vom harmonischen Masse Null (was immer der Fall ist, wenn $R' \in O_G$ ist), so ist $f' \circ f$ eine Fatousche Abbildung.

Laut des Hilfssatzes 20 ist

$$\hat{f}^{-1}(R' \cup \mathfrak{F}(f')) \subset \mathfrak{F}(f' \circ f) : [\chi_R].$$

Ist $R' \notin O_G$ und f' eine Fatousche Abbildung, so ist $\Delta' - \mathfrak{F}(f')$ eine polare Menge und $\hat{f}^{-1}(\Delta' - \mathfrak{F}(f'))$ eine Menge vom harmonischen Masse Null. Es ist also

$$1 \geq \chi_R(\mathfrak{F}(f' \circ f)) \geq \chi_R(\hat{f}^{-1}(R' \cup \mathfrak{F}(f'))) = \chi_R(\hat{f}^{-1}(R' \cup \Delta')) = \chi_R(\mathfrak{F}(f)) = 1$$

und $f' \circ f$ ist eine Fatousche Abbildung. Ist $\Delta_1(f)$ vom harmonischen Masse Null, so ist

$$1 \geq \chi_R(\mathfrak{F}(f' \circ f)) \geq \chi_R(\hat{f}^{-1}(R')) = \chi_R(\hat{f}^{-1}(R' \cup \Delta')) = \chi_R(\mathfrak{F}(f)) = 1$$

und $f' \circ f$ ist eine Fatousche Abbildung.

Satz 26. *Es gibt eine Menge $Z(f) \subset \Delta_1$, vom harmonischen Masse Null, derart dass für jedes $s \in \Delta_1 - Z(f) - \mathfrak{F}(f)$*

$$\hat{M}(s) = \hat{R}'$$

ist, und für jede Umgebung $\hat{G}$ von s ist $R' - f(\hat{G} \cap R)$ eine Menge der Kapazität Null.

Es sei $\{G'_i\}$ eine Folge von Kreisscheiben auf R' die eine Basis in R' bilden. Die Mengen $f^{-1}(R' - \bar{G}'_i)$ sind offen; wir bezeichnen mit $\{G_n\}$ die Komponenten *aller* dieser Mengen $(i = 1, 2, \ldots)$. Ist $\hat{M}(s) \neq \hat{R}'$, so gibt es ein G'_i, für welches

$$\hat{M}(s) \subset \hat{R}' - \bar{G}'_i$$

und es ist $s \in \Delta_1(G_n)$ für ein n. Es ist also für $s \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_1(G_n)$

$$\hat{M}(s) = \hat{R}'.$$

Wir bezeichnen

$$Z_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_1(G_n) - \mathfrak{F}(f).$$

Laut des Hilfssatzes 19′ ist $\Delta_1(G_n) - \mathfrak{F}(f)$ und somit auch Z_1 vom harmonischen Masse Null.

Es sei jetzt $\{\hat{D}_i\}$ eine abzählbare Basis in $\hat{R}$ und $\mathfrak{N}$ die Menge der Zahlen

i, für welche $R' - f(\hat{D}_i \cap R)$ eine Menge mit positiver Kapazität ist. Es seien $\{G_n\}$ die Komponenten der Menge $\hat{D}_i \cap R$ für $i \in \mathfrak{N}$ und

$$Z_2 = \bigcup_n \varDelta_1(G_n) - \mathfrak{F}(f).$$

Nach dem Hilfssatz 19′ folgt, dass $\varDelta_1(G_n) - \mathfrak{F}(f)$ und somit Z_2 vom harmonischen Masse Null sind. Es sei $s \in \varDelta_1 - \bigcup \varDelta_1(G_n)$ und $\hat{G}$ eine Umgebung von s. Dann gibt es ein $\hat{D}_i$ für welches $s \in \hat{D}_i \subset \hat{G}$ ist. Wäre $i \in \mathfrak{N}$, so folgt aus $s \in \varDelta_1(\hat{D}_i \cap R)$, dass für wenigstens eine Komponente G_n von $\hat{D}_i \cap R$, $s \in \varDelta_1(G_n)$ ist, was der Voraussetzung über s widerspricht. Es ist also

$$R' - f(\hat{G} \cap R) \subset R' - f(\hat{D}_i \cap R),$$

woraus man erkennt, dass $R' - f(\hat{G} \cap R)$ eine Menge der Kapazität Null ist. Der Satz folgt sofort aus

$$Z(f) = Z_1 \cup Z_2.$$

VII. Abbildungen vom Typus Bl

HILFSSATZ 21. *Es sei $S \in SP(R)$ und v die grösste quasibeschränkte Minorante von S. Setzt man*

$$v = \int_{\varDelta_1} K_s \theta(s)\, d\chi(s),$$

$$A_\alpha = \{s \in \varDelta_1 \mid \theta(s) > \alpha\},$$
$$B_\alpha = \{s \in \varDelta_1 \mid \theta(s) \geq \alpha\},$$
$$G_\alpha = \{p \in R \mid S(p) > \alpha\},$$

so ist

$$A_\alpha \subset \varDelta_1(G_\alpha) \subset B_\alpha \ :\ [\chi].$$

Ist S stetig (unendlich nicht ausgeschlossen), so ist auch

$$\varDelta_1 - B_\alpha \subset \varDelta_1(R - \overline{G}_\alpha) \ :\ [\chi].$$

Da $D_\alpha = \{p \in R \mid v(p) > \alpha\} \subset G_\alpha$ ist, so ist $\varDelta_1(D_\alpha) \subset \varDelta_1(G_\alpha)$. Nach Hilfssatz 11 ist aber $A_\alpha \subset \varDelta_1(D_\alpha) \ :\ [\chi]$, woraus $A_\alpha \subset \varDelta_1(G_\alpha) \ :\ [\chi]$ folgt. Auf G_α ist

$$\underset{G_\alpha}{I} 1 \leq 1 \leq \frac{1}{\alpha} S$$

und somit ist

$$\underset{G_\alpha}{E}\underset{G_\alpha}{I}1 \leq 1 \leq \frac{1}{\alpha} S$$

auf R. Indem man die Definition von v in Betracht zieht, ergibt sich

$$\underset{G_\alpha}{E}\underset{G_\alpha}{I}1 \leq \frac{1}{\alpha} v = \int_{\Delta_1} K_s \frac{\theta(s)}{\alpha} d\chi(s).$$

Nach Satz 15′ ist

$$\underset{G_\alpha}{E}\underset{G_\alpha}{I}1 = \int_{\Delta_1(G_\alpha)} K_s d\chi(s),$$

woraus, mittels des Hilfssatzes a, $\psi \leq \frac{\theta}{\alpha}$ folgt, wo ψ die Charakteristische Funktion der Menge $\Delta_1(G_\alpha)$ ist. θ ist also auf $\Delta_1(G_\alpha)$ nicht kleiner als α, bis auf eine Menge vom harmonischen Masse Null, was äquivalent mit $\Delta_1(G_\alpha) \subset B_\alpha : [\chi]$ ist.

Wir bezeichnen $D = R - \bar{G}_\alpha$. Laut des Hilfssatzes 4 ist

$$\alpha = \underset{D}{I}\alpha + H_D^\alpha \leq \underset{D}{I}\alpha + S \leq \underset{D}{E}\underset{D}{I}\alpha + S$$

auf D, denn $S \in \mathfrak{B}_D^\alpha$. Auf $R - D$ ist

$$\alpha \leq \underset{D}{E}\underset{D}{I}\alpha + S$$

offenbar gültig. Daraus folgt

$$\alpha - \underset{D}{E}\underset{D}{I}\alpha \leq v$$

und nach Satz 15′

$$\alpha \int_{\Delta_1 - \Delta_1(D)} K_s d\chi(s) \leq \int_{\Delta_1} K_s \theta(s)\, d\chi(s).$$

Es ist somit $\alpha \leq \theta(s) : [\chi]$ auf $\Delta_1 - \Delta_1(D)$ und deshalb

$$\Delta_1 - B_\alpha \subset \Delta_1(D) : [\chi],$$

was zu beweisen war.

HILFSSATZ 22. *Es sei P' ein Potenzial auf $R'(R' \notin O_G)$, u die grösste harmonische Minorante von $P' \circ f$ und v die quasibeschränkte Komponente von u:*

$$u = \int_{\Delta_1} K_s d\mu(s), \qquad v = \int_{\Delta_1} K_s \theta(s)\, d\chi(s).$$

Es ist

$$\mu(\Delta_1(f)) = 0,$$

$$\{s \in \varDelta_1 \mid \theta(s) = 0\} = \varDelta_1(f) \ : [\chi].$$

Es sei

$$u_0 = \int_{\varDelta_1(f)} K_s d\mu(s).$$

Nach Hilfssatz 7 ist $u_0 \in HP(f)$ und Eu_0 ist harmonisch. Da aber Eu_0 nicht grösser als das Potenzial P' ist, so sind Eu_0 und u_0 Null und $\mu(\varDelta_1(f)) = 0$. Daraus folgt

$$\{s \in \varDelta_1 \mid \theta(s) = 0\} \supset \varDelta_1(f) \ : [\chi].$$

Wir bezeichnen

$$G'_\alpha = \{p' \in R' \mid P'(p') > \alpha\},$$
$$G_\alpha = f^{-1}(G'_\alpha) = \{p \in R \mid P' \circ f(p) > \alpha\}.$$

Nach der Eigenschaft c) von $\hat{f}$ ist

$$(\varDelta_1 - \varDelta_1(f)) \cap \mathfrak{F}(f) \subset \bigcup_{\alpha > 0} \varDelta_1(G_\alpha)$$

und nach Hilfssatz 21 ist

$$\varDelta_1(G_\alpha) \subset \{s \in \varDelta_1 \mid \theta(s) \geq \alpha\} \ : [\chi].$$

Daraus folgt

$$\{s \in \varDelta_1 \mid \theta(s) = 0\} \subset \varDelta_1(f) \ : [\chi],$$

was den Beweis beendigt.

Für $R' \notin O_G$ bezeichnet Heins [5] mit $u_{p'}$ die grösste harmonische Minorante von $g'_{p'} \circ f$ und mit $v_{p'}$, bzw. $w_{p'}$, die quasibeschränkte, bzw. singuläre, Komponente von $u_{p'}$. Die Abbildung f heisst vom Typus Bl, bzw. Bl_1, wenn $v_{p'}$, bzw. $u_{p'}$, verschwindet für alle p'.[17)]

Satz 27. *f ist vom Typus Bl dann und nur dann, wenn*

$$\varDelta_1(f) = \varDelta_1 \ : [\chi]$$

ist. Diese Bedingung ist gleichbedeutend mit

$$\chi(\hat{f}^{-1}(R')) = 0.$$

Ist $\varDelta_1(f) = \varDelta_1$, so ist f vom Typus Bl_1.

Da $g'_{p'}$ ein Potenzial auf R' ist, so folgt aus dem Hilfssatz 22, dass $v_{p'} = 0$

17) Sind R und R' die Kreise $|z| < 1$ und $|w| < 1$, so folgt daraus, dass die Abbildungen vom Typus Bl gerade die Seidelschen Funktionen sind.

https://doi.org/10.1017/S0027763000002063 Published online by Cambridge University Press

und $\Delta_1(f) = \Delta_1 : [\chi]$ äquivalente Beziehungen sind, woraus die erste Behauptung folgt. Ist $\Delta_1(f) = \Delta_1$, so haben wir aus demselben Hilfssatz $u_{p'} = 0$.

Für ein beliebiges R' und einen Punkt $p' \in R'$ heisst f lokal vom Typus Bl, bzw. Bl_1, im Punkte p', wenn man eine zusammenhängende Umgebung mit Greenscher Funktion G' von p' finden kann, für die alle Abbildungen der Komponenten von $f^{-1}(G')$ in G', die mit f zusammenfallen, vom Typus Bl, bzw. Bl_1, sind. Matsumoto [12] hat gezeigt, dass f im Punkte p' lokal vom Typus Bl ist, dann und nur dann, wenn man ein Jordansches Gebiet G' finden kann, das p' enthält und für welches alle Komponenten von $f^{-1}(G')$ vom Typus SO_{HB} sind. Für eine offene Menge G auf R sind alle Komponenten vom Typus SO_{HB} dann und nur dann, wenn $\Delta_1(G)$ vom harmonischen Masse Null ist. Daraus folgt, dass f *im Punkte* p' *dann und nur dann lokal vom Typus Bl ist, wenn man eine Umgebung* G' *von* p' *finden kann, für die* $\hat{f}^{-1}(G')$ *vom harmonischen Masse Null ist.*

Wir nehmen an, dass $R' \notin O_G$ ist und setzen

$$V_f = \{p' \in R' \mid v_{p'} \text{ nicht beschränkt}\}$$
$$W_f = \{p' \in R' \mid w_{p'} \neq 0\}.$$

W_f ist, wie Heins bewiesen hat [5], eine Menge vom Typus F_σ und der Kapazität Null. V_f *ist gerade die Menge wo* f *nicht lokal vom Typus Bl ist.*

In der Tat ist p' nicht in V_f enthalten, so ist $v_{p'} < \alpha < \infty$ für eine bestimmte positive Zahl α. Wir bezeichnen

$$v_{p'} = \int_{\Delta_1} K_s \theta_{p'}(s)\, d\chi(s),$$
$$G'_\alpha = \{q' \in R' \mid g_{p'}(q') > \alpha\}, \qquad G_\alpha = f^{-1}(G'_\alpha).$$

Nach Hilfssatz 21 ist

$$\hat{f}^{-1}(G'_\alpha) \subset \Delta_1(G_\alpha) \subset \{s \in \Delta_1 \mid \theta_{p'}(s) \geq \alpha\} = \phi : [\chi]$$

und f ist lokal vom Typus Bl im Punkte p'. Umgekehrt, ist f lokal vom Typus Bl im Punkte p', so ist $\hat{f}^{-1}(G')$ vom harmonischen Masse Null für eine Umgebung G' von p'. Für α genugend gross ist $G'_\alpha \subset G'$ und nach Hilfssatz 21 ist

$$\{s \in \Delta_1 \mid \theta_{p'}(s) > \alpha\} \subset \Delta_1(G_\alpha) \subset \Delta_1(\hat{f}^{-1}(G')) : [\chi],$$

woraus $v_{p'} \leq \alpha$ und $p' \notin V_f$ folgt.

Ist $p' \in W_f$, so ist $\hat{f}^{-1}(p')$ nicht leer und $w_{p'}$ ist in der Form

$$w_{p'} = \int_{\hat{f}^{-1}(p')} K_s d\mu(s)$$

darstellbar. Wir setzen

$$D_\alpha = \{p \in R \mid w_{p'}(p) > \alpha\} \subset G_\alpha.$$

Die Behauptungen folgen unmittelbar aus den Gleichheiten

$$w_{p'} = \underset{D\alpha}{E}\, \underset{D\alpha}{I}\, w_{p'} = \int_{\Delta_1(D\alpha)} K_s d\mu(s) = \int_{\Delta_1(G\alpha)} K_s d\mu(s),$$
$$\hat{f}^{-1}(p') = \bigcap_\alpha \Delta_1(G_\alpha).$$

Daraus folgt [5], dass p' ein asymptotischer Punkt ist.

Satz 28. *Es sei $u \in HP(R)$ und $Eu = u' + P' \not\equiv \infty$, wo $u' \in HP(R')$ und P' ein Potential ist. Dann ist*

$$P' = \int_{V_f \cup W_f} g'_{p'} d\mu'(p').$$

Ist u quasibeschränkt, so ist

$$\mu(W_f - V_f) = 0;$$

ist u singulär, so ist

$$\mu(V_f - W_f) = 0.$$

In diesem letzten Falle ist u' singulär.[18)]

Es sei

$$P' = \int_{R'} g'_{p'} d\mu'(p')$$

und

$$P'' = \int_{R' - V_f \cup W_f} g'_{p'} d\mu'(p').$$

Dann ist $Eu - P'' \in SP(R')$ und $u \leq P'' \circ f + (Eu - P'') \circ f$. Nach dem Kjellbergschen Hilfssatz kann man zwei harmonische Funktionen u_1, u_2 finden, so dass

$$u = u_1 + u_2,$$
$$0 \leq u_1 \leq P'' \circ f, \quad 0 \leq u_2 \leq (Eu - P'') \circ f$$

---

18) Aus u quasibeschränkt folgt nicht immer u' quasibeschränkt.

ist. Es ist aber

$$P'' \circ f = \int_{R' - V_f \cup W_f} (g'_{p'} \circ f)\, d\mu'(p').$$

Heins hat bewiesen [5], dass die grösste harmonische Minorante von $P'' \circ f$ gleich

$$\int_{R' - V_f \cup W_f} u_{p'}\, d\mu'(p')$$

ist. Es ist somit

$$u_1 \leq \int_{R' - V_f \cup W_f} u_{p'}\, d\mu'(p') = \int_{R' - V_f \cup W_f} v_{p'}\, d\mu'(p'),$$

denn $u_{p'} = v_{p'}$ auf $R' - V_f \cup W_f$. Daraus ersieht man, dass u_1 quasibeschränkt ist.

Aus

$$Eu = E(u_1 + u_2) \leq Eu_1 + Eu_2 \leq Eu_1 + Eu - P'' \leq Eu$$

folgt $Eu_1 = P''$.

Für einen Punkt $p' \notin V_f$ kann man eine Umgebung G' finden, für welche

$$\underset{f^{-1}(G')}{I}\, 1 = 0$$

ist. Daraus folgt

$$\underset{f^{-1}(G')}{I} (u_1 \wedge n) \leq n \underset{f^{-1}(G')}{I}\, 1 = 0$$

und

$$\underset{f^{-1}(G')}{I} u_1 = \lim_{n \to \infty} \underset{f^{-1}(G')}{I} (u_1 \wedge n) = 0.$$

Nach Hilfssatz 4 ist

$$H^{u_1}_{f^{-1}(G')} = u_1$$

und nach Hilfssatz 1 ist Eu_1 harmonisch in G'. Es ist somit $\mu'(G') = 0$ und, da p' beliebig war,

$$\mu'(R' - V_f) = 0, \qquad P'' = 0.$$

Ist u quasibeschränkt, so folgt genau wie oben für u_1

$$\mu'(W_f - V_f) \leq \mu'(R' - V_f) = 0.$$

Ist u singulär, so bezeichnen wir

$$P''' = \int_{V_f - W_f} g'_{p'}\, d\mu'(p'),$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000002063 Published online by Cambridge University Press

Mittels des Kjellbergschen Hilfssatzes kann man zwei harmonische Funktionen u_1, u_2 finden, derart dass

$$u = u_1 + u_2,$$
$$0 \leq u_1 \leq P''' \circ f, \qquad 0 \leq u_2 \leq (Eu - P''') \circ f$$

ist. u_1 ist nicht grösser als die grösste harmonische Minorante von $P''' \circ f$, welche, wie Heins bewiesen hat, gleich

$$\int_{V_f - W_f} u_{p'} d\mu'(p')$$

ist. Hier kann man $v_{p'}$ an Stelle von $u_{p'}$ setzen, da $w_{p'}$ Null auf $V_f - W_f$ ist. Daraus erkennt man, dass u_1 quasibeschränkt und somit Null ist. Es ist also auch P''' Null und

$$\mu(V_f - W_f) = 0.$$

Es sei v' eine nichtnegative beschränkte harmonische Funktion auf R', $v' \leq Eu$. Mittels des Kjellbergschen Hilfssatzes sieht man genau wie oben, dass $u \leq (Eu - v') \circ f$ ist, woraus $v' = 0$ folgt.

Wir werden mit O_{HB_n} $(1 \leq n \leq \infty)$ die Klasse der Riemannschen Flächen mit Greenscher Funktion bezeichnen, für die Δ_1 aus höchstens n Punkten s_1, s_2, ..., s_n, für die K_s beschränkt ist, und aus einer Menge vom harmonischen Masse Null besteht [1].

Satz 29. *Ist* $R \in O_{HB_\infty}$, *so ist* f *lokal vom Typus Bl* [12]. *Ist* $R \in O_{HB_n} - \bigcup_{i<n} O_{HB_i}$ $(1 \leq n \leq \infty)$ *und* $R' \notin O_G$, *so ist* $R' \in O_{HB_{n'}} - \bigcup_{i<n'} O_{HB_i}$ *für ein* n',

$$n' \leq n \leq n' \sup v_f.$$

Laut des Folgesatzes 3 ist $\hat{f}^{-1}(R') \subset \Delta_1 - \bigcup_{i=1}^{n} \{s_i\}$ und somit vom harmonischen Masse Null, woraus sofort folgt, dass f lokal vom Typus Bl ist. Ist $R' \notin O_G$, so ist nach demselben Folgesatz $\hat{f}$ in allen Punkten s_i definiert, $\hat{f}(s_i) \in \Delta'_1$ und $K'_{\hat{f}(s_i)}$ ist beschränkt. Es sei $A' = \Delta'_1 - \bigcup_{i=1}^{n} \{\hat{f}(s_i)\}$. Dann ist nach Satz 17

$$I\omega(A', R') = \omega(\hat{f}^{-1}(A'), R) \leq \omega(\Delta_1 - \bigcup_{i=1}^{n} \{s_i\}, R) = 0.$$

Daraus und aus

$$I\omega(A', R') = \omega(A', R') \circ f$$

(Satz 27) folgt, dass A' vom harmonischen Masse Null ist. Es ist also $R' \in O_{HB_{n'}} - \bigcup_{i<n} O_{HB_i}$ mit $n' \leq n$. Wir nehmen jetzt an, dass $\sup \nu_f < \infty$ ist. Für jedes $s' \in \Delta_1'$ für welches $K_{s'}'$ beschränkt ist, enthält $\hat{f}^{-1}(s')$ höchstens $\sup \nu_f$ Punkte s_i (Folgesatz 6) woraus $n \leq n' \sup \nu_f$ folgt.

Literatur

[1] Constantinescu, C. und Cornea, A., Über den idealen Rand und einige seiner Anwendungen bei der Klassifikation der Riemannschen Flächen, Nagoya Math. J., **13** (1958), 169–233.

[2] Constantinescu, C. et Cornea, A., Comportement des transformations analytiques des surfaces de Riemann sur la frontière de Martin, Comptes Rendus, Paris, **249** (1959), 355–357.

[3] Halmos, P., Measure Theory, D. Van Nostrand Company (1951).

[4] Heins, M., Riemann surfaces of infinite genus, Ann. of Math., **55** (1952), 296-317.

[5] Heins, M., On the Lindelöf principle, Ann. of Math., **61** (1955), 440-473.

[6] Heins, M., Lindelöfian maps, Ann. of Math., **62** (1955), 418–446.

[7] Heins, M., On the principle of harmonic measure, Comm. Math. Helv., **33** (1959), 47–58.

[8] Kjellberg, B., On the growth of minimal positive harmonic functions in a plane region, Arkiv för Mat., Bd. I, Nr. 25 (1950), 347–351.

[9] Kuramochi, Z., Relations between harmonic dimensions, Proc. Japan Acad., **30** (1954), 576–580.

[10] Kuramochi, Z., On the ideal boundaries of abstract Riemann surfaces, Osaka Math. J., **10** (1958), 83–102.

[11] Martin, R. S., Minimal positive harmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc., **49** (1941), 137-172.

[12] Matsumoto, K., Remarks on some Riemann surfaces, Proc. Japan Acad., **34** (1958), 672–675.

[13] Parreau, M., Sur les moyennes des fonctions harmoniques et analytiques et la classification des surfaces de Riemann, Ann. Inst. Fourier, **3** (1952) 103–197.

[14] Pfluger, A., Theorie der Riemannschen Flächen, Springer Verlag (1957).

[15] Stoïlow, S., Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques, Deuxième édition, Gauthier Villars (1956).

[16] Tsuji, M., Remarks on my former paper "On an extension of Löwner's theorem", Comm. Math. Univ. St. Pauli, **4** (1955) 109–110.

Mathematisches Institut
Rumänische Akademie

Anhang*

Wir geben ein Beispiel einer analytischen Funktion f im Kreise $|z|<1$, für die $\hat{f}$ im Punkte $z=1$ definiert und gleich ∞ ist, wogegen f^* im Punkte $z=1$ nicht definiert ist. Dieses Beispiel zeigt, dass der Satz 21 auf den ausgeschlossenen Fall $R'=\{|w|<\infty\}$, $\hat{f}(e^{i\theta})=\infty$, nicht ausgedehnt werden kann.

Es sei G die rechte Halbebene und γ_n der Kreis

$$|\zeta-2^{n^3}|\leq 1, \qquad (n=1,\,2,\,\ldots),$$

Es ist

$$H^{\xi}_{G-\gamma_n}(1)\leq (2^{n^3}+1)\,\omega_n(1), \qquad (\xi=Re\,\zeta),$$

wo ω_n das harmonische Mass von $\partial\gamma_n$ auf $G-\gamma_n$ ist. Bezeichnet man mit a_n den hyperbolischen Mittelpunkt von γ_n, so ist

$$a_n=\sqrt{2^{2n^3}-1}\,.$$

$\omega_n(\zeta)$ ist zu $\log\left|\dfrac{\zeta+a_n}{\zeta-a_n}\right|$ proportional; daraus folgt

$$\omega_n(1)=\frac{\log\left|\dfrac{1+a_n}{1-a_n}\right|}{\log\left|\dfrac{2^{n^3}+1+a_n}{2^{n^3}+1-a_n}\right|}.$$

Es ist aber

$$\log\left|\frac{1+a_n}{1-a_n}\right|=\log\left|\frac{1+\dfrac{1}{a_n}}{1-\dfrac{1}{a_n}}\right|\leq 2\frac{\dfrac{1}{a_n}}{1-\dfrac{1}{a_n}}\leq\frac{2}{a_n-1}\leq\frac{1}{2^{n^3-2}},$$

$$\log\left|\frac{2^{n^3}+1+a_n}{2^{n^3}+1-a_n}\right|=\log\frac{\sqrt{2^{n^3}+1}+\sqrt{2^{n^3}-1}}{\sqrt{2^{n^3}+1}-\sqrt{2^{n^3}-1}}\geq\log\frac{2.2^{n^3}}{2}=n^3\log 2,$$

und somit haben wir

$$\omega_n(1)\leq\frac{1}{n^3 2^{n^3-2}\log 2}.$$

Daher ergibt sich

$$H^{\xi}_{G-\gamma_n}(1)\leq\frac{2^{n^3}+1}{n^3 2^{n^3-2}\log 2}$$

---

* Added on March 14, 1960.

und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} H^{\xi}_{G-\gamma_n}(1)$ ist konvergent. Für ein genügend grosses n_0 ist

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} H^{\xi}_{G-\gamma_n}(1) < 1$$

und (Hilfssatz 4)

$$\underset{G-\bigcup\limits_{n=n_0}^{\infty}\gamma_n}{I}\xi = \xi - H^{\xi}_{G-\bigcup\limits_{n=n_0}^{\infty}\gamma_n} \geq \xi - \sum_{n=n_0}^{\infty} H^{\xi}_{G-\gamma_n}.$$

Daraus ergibt sich

$$\underset{G-\bigcup\limits_{n=n_0}^{\infty}\gamma_n}{I}\xi(1) > 0.$$

Ist $G_{\xi_0} = \{\zeta \mid Re\,\zeta > \xi_0\}$, so ist offenbar

$$\underset{G_{\xi_0}}{I}\xi > 0$$

und somit, laut des Folgesatzes 2,

$$\underset{G_{\xi_0}-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\gamma_n}{I}\xi > 0.$$

Es sei

$$P(\zeta) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\zeta}{2^{k^3}}\right)$$

und σ_n das Intervall $(2^{n^3}+1,\ 2^{(n+1)^3}-1)$. Wir setzen

$$\alpha_n = \inf\{\,|P(\xi)|\;|\;\xi \in \sigma_n\},$$
$$\beta_n = \inf\{\,|P(\zeta)|\;|\;\zeta \in \partial\gamma_n\}.$$

Für $\xi \in \sigma_n$ ist

$$|P(\xi)| \geq$$
$$\geq \left[\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2^{n^3}+1}{2^{k^3}} - 1\right)\right]\left(\frac{2^{n^3}+1}{2^{n^3}} - 1\right)\left(1 - \frac{2^{(n+1)^3}-1}{2^{k^3}}\right)\left[\prod_{k=n+2}^{\infty}\left(1 - \frac{2^{(n+1)^3}-1}{2^{k^3}}\right)\right]$$
$$\geq \left(\frac{2^{n^3}}{2^{(n-1)^3}} - 1\right)^{n-1}\frac{1}{2^{n^3}}\,\frac{1}{2^{(n+1)^3}}\prod_{k=n+2}^{\infty}\left(1 - \frac{2^{(n+1)^3}}{2^{k^3}}\right)$$
$$\geq (2^{3n^2-3n})^{n-1}\frac{1}{2^{2(n+1)^3}}\prod_{k=n+2}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{k^3-(n+1)^3}}\right) \geq 2^{n^3-12n^2-3n-2}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right).$$

Daraus folgt $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = \infty$. Für $\zeta \in \partial\gamma_n$ ist

$$|P(\zeta)| \geq \left[\prod_{k=1}^{n-1}\left|1 - \frac{Re\,\zeta}{2^{k^3}}\right|\right]\frac{1}{2^{n^3}}\left[\prod_{k=n+1}^{\infty}\left|1 - \frac{Re\,\zeta}{2^{k^3}}\right|\right]$$

$$\geq \left[\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2^{n^3}-1}{2^{k^3}}-1\right)\right]\frac{1}{2^{n^3}}\left[\prod_{k=n+1}^{\infty}\left(1-\frac{2^{n^3}+1}{2^{k^3}}\right)\right]$$

$$\geq \left(\frac{2^{n^3-1}}{2^{(n-1)^3}}-1\right)\frac{1}{2^{n^3}}\prod_{k=n+1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{k^3-n^3-1}}\right) \geq 2^{2n^3-4n-1}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^k}\right).$$

Es ist also $\lim_{n\to\infty}\beta_n = \infty$.

Für $Re\zeta \in \sigma_n$ ist

$$|P(\zeta)| \geq |P(Re\zeta)| \geq \alpha_n.$$

Für $\zeta \notin \bigcup_{n=1}^{\infty}\gamma_n$ und $\xi = Re\zeta \in \gamma_n$ ist $|P(\zeta)| \geq \beta_n$. Daraus folgt, dass man für jedes $\alpha > 0$ ein $\xi_0(\alpha)$ finden kann, so dass

$$P^{-1}(\{|w| < \alpha\}) \cap \{Re\zeta > \xi_0(\alpha)\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\gamma_n$$

ist.

Aus diesen Betrachtungen folgt, dass $\hat{P}$ im Punkte $\zeta = \infty$ definiert und gleich ∞ ist, da

$$\underset{P^{-1}(\{|w|>\alpha\})}{I}\,\xi \geq \underset{G_{\xi_0(\alpha)}-\bigcup_{n=1}^{\infty}\gamma_n}{I}\,\xi > 0$$

ist. Setzen wir

$$f(z) = P\left(\frac{1+z}{1-z}\right),$$

so ist $\hat{f}$ im Punkte $z = 1$ definiert und gleich ∞, wogegen f^* in demselben Punkte nicht definiert ist.