

ÜBER QUADRATISCHE CHARAKTERSUMMEN

TOMIO KUBOTA

Es gibt zwei verschiedene Arten von Summen, die gewöhnlich Gaussche Summen genannt werden. Die eine Summe wird von einer Zahl $\omega \neq 0$ eines algebraischen Zahlkörpers F bestimmt. Sei nämlich \mathfrak{d} die Differenten von F und sei $\omega\mathfrak{d} = \frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{a}}$ mit zueinander primen, ganzen Idealen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ von F . Dann hat die Summe die Gestalt

$$(1) \quad C(\omega) = \sum_{\mu \bmod \mathfrak{a}} e(\omega\mu^2), \quad (\mu: \text{ganz}),$$

wo

$$e(u) = e^{2\pi i S_F/Q u} \quad \text{für } u \in F$$

ist, und dabei Q bzw. S der rationale Zahlkörper bzw. die absolute Spur bedeutet. Eine grundlegende Forschung dieser Summen findet man etwa in Hecke [3].

Die andere Summe wird dagegen von einem Kongruenzcharakter χ der Idealgruppe von F bestimmt. Es sei \mathfrak{f} der (endliche) Führer von χ und β eine totalpositive Zahl von F , für die die Beziehung

$$\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{d}\mathfrak{f}_x} = (\beta), \quad (\mathfrak{h}, \mathfrak{f}_x) = 1,$$

mit einem ganzen Ideal \mathfrak{h} von F besteht. Die in Rede stehende Summe ist dann

$$(2) \quad \tau(\chi) = \chi(\mathfrak{h}) \sum_{z \bmod \mathfrak{f}_x} \chi(z) e(\beta z), \quad (z: \mathfrak{f}_x\text{-ganz, totalpositiv}),$$

wo $\chi(z)$ statt $\chi((z))$ steht und $\chi(z) = 0$ für $(z, \mathfrak{f}_x) \neq 1$ ist. Auch trat diese Summe in die Arbeiten Heckes bei der Funktionalgleichung der L -Reihen ein (vgl. Hasse [1]). Nach Hasse [2] bekommt die Summe (2) eine andere Form

$$(3) \quad \tau(\chi) = \sum_{x \bmod \mathfrak{d}^{-1}} \chi(x) e(x),$$

wo x ein vollkommenes, totalpositives Restsystem von $(\mathfrak{d}\mathfrak{f}_x)^{-1}/\mathfrak{d}^{-1}$ durchläuft

Received May 19, 1961.

und

$$(x) = \frac{x}{d\mathfrak{f}_x}, \quad (x, \mathfrak{f}_x) = 1$$

mit einem ganzen Ideal x von F ist. Setzen wir $x = \beta z$ in (3), so erhalten wir sofort den Ausdruck in (2), und also erkennen, dass (2) von β unabhängig ist.

Um die eben erklärten zwei Summen sich von einander unterscheiden zu lassen, soll im folgenden die erste Summe die Exponentialsumme heißen, die zweite dagegen die Charaktersumme, während man die beiden solchen Summen meistens als gleich anzusehen pflegt. Gewiss haben sie viele Ähnlichkeiten. Zum Beispiel gibt es zwei bemerkenswerte Tatsachen in bezug auf diese Summen, die aus einer und derselben analytischen Quelle entspringen. Nämlich ist einerseits das Reziprozitätsgesetz eine wichtige Eigenschaft von $C(\omega)$ [3]. Andererseits, wenn a die Anzahl der unendlichen Verzweigungsprimstellen von χ ist und man

$$(4) \quad W(\chi) = \frac{(-i)^a}{\sqrt{N\mathfrak{f}_x}} \tau(\chi)$$

setzt, so gilt die bekannte Formel

$$\prod_x W(\chi) = 1,$$

wo χ alle zu einem abelschen Erweiterungskörper K/F zugeordneten Kongruenzcharaktere von F durchläuft. Ist also insbesondere χ quadratisch, i.e. $\chi^2 = 1$, so ergibt sich

$$(5) \quad W(\chi) = 1.$$

Diese und jene arithmetischen Folgerungen, die entweder mit $C(\omega)$ oder $W(\chi)$ zusammenhängen, gewinnt man in der Tat, indem man die Transformationsformel der Thetafunktion gebraucht.

Es ist aber zu bemerken, dass die Exponential- und Charaktersummen nicht völlig identisch, sondern von etwas verschiedener Natur sind. Dazu sei vorerst erwähnt, dass $C(\omega)$ nicht immer in der Form $\tau(\chi)$ mit $\chi^2 = 1$ geschrieben wird. Noch wesentlich ist jedoch, dass das Reziprozitätsgesetz der Exponentialsummen, obwohl sehr verwandt aussieht, nicht ganz gleichbedeutend mit (5) für quadratischen χ ist, denn das Reziprozitätsgesetz folgt allein aus der Transformationsformel der Thetafunktion, während (5) mit $\chi^2 = 1$ erst dann am

klarsten hervorgeht, wenn zusätzlich das Zerlegungsgesetz der relativ-quadratischen Körper angenommen wird [2]. Ferner hat das Reziprozitätsgesetz der Exponentialsummen das quadratische Reziprozitätsgesetz für Potenzreste zur Folge [3], aber keine entsprechende Tatsache für (5) ist selbstverständlich.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Verschiedenheit beider Summen in einigen Einzelheiten zu betrachten. Nachdem wir in § 1 eine einfache Beziehung zwischen $C(\omega)$ und $\tau(\chi)$ ($\chi^2 = 1$) in einem Spezialfall angesehen habe, wollen wir in § 2 und § 3 den Zusammenhang der Charaktersummen mit dem quadratischen Reziprozitätsgesetz untersuchen, der ziemlich anders ausfällt als bei den Exponentialsummen. Beispielsweise werden diese Ergebnisse im Fall des rationalen Körpers in § 4 dargestellt.

§ 1. Übersicht über den Zusammenhang zwischen Exponential- und Charaktersummen.

Es sei $\alpha \neq 0$ ein zu 2 primes ganzes Ideal von eines algebraischen Zahlkörpers F und sei vorausgesetzt, dass $\alpha = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_r$ ein Produkt von lauter verschiedenen Primidealen \mathfrak{p}_i ist. Man nehme ferner ein zu α primes ganzes Ideal \mathfrak{c}_i von F derart, dass $\mathfrak{p}_i \mathfrak{c}_i = (\pi_i)$ ($\pi_i \in F$) ein Hauptideal ist, und setze $\pi = \prod \pi_i$, $\mathfrak{c} = \prod \mathfrak{c}_i$. Ist dann \mathfrak{d} die Differenten von F und ist \mathfrak{b} ein zu α primes ganzes Ideal in der Idealklasse von $\mathfrak{d}\alpha$, so ist für die mit

$$C(\omega) = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{d}\alpha}, \quad \omega \in F$$

definierte Summe $C(\omega)$ in (1) ein einfacher Zusammenhang mit den Charaktersummen zu finden. Angenommen im allgemein, dass $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$ mit zueinander primen ganzen Idealen α_1, α_2 von F ist und dass $\alpha_1 \mathfrak{n}_1 = (\alpha_1), \alpha_2 \mathfrak{n}_2 = (\alpha_2)$ ($\alpha_1, \alpha_2 \in F$) mit ganzen, zu α primen Idealen $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2$ von F zutrifft, so ist nach Hecke [3]

$$C(\omega) = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) C(\alpha_2 \omega) C(\alpha_1 \omega).$$

In unserem Fall gilt also induktiv

$$C(\omega) = \prod_{i \neq j} \left(\frac{\pi_j}{\mathfrak{p}_i}\right) \cdot \prod_i C(\pi \pi_i^{-1} \omega).$$

Ist daher $C_i(\omega) = \left(\frac{\pi_i}{\alpha \mathfrak{p}_i^{-1}}\right) C(\omega_1)$ und ist $\omega_i = \pi \pi_i^{-1} \omega$, so ergibt sich

$$(6) \quad C(\omega) = \prod_{i=1}^r C_i(\omega),$$

was eine Komponentenzerlegung von $C(\omega)$ ist. Da p_i prim ist, wird $C(\omega_i)$ nach Hecke [3] in die Charaktersumme

$$(7) \quad C(\omega_i) = \sum_{\substack{\mu \bmod p_i \\ \mu \neq 0(p_i)}} \left(\frac{\mu}{p_i}\right) e(\omega_i \mu) \quad (\mu : \text{ganz})$$

transformiert. Es sei hier überdies vorausgesetzt, dass $\alpha = \mathfrak{f}_x$ der Führer eines quadratischen Kongruenzcharakters von F ist. Die mit diesem χ definierte Charaktersumme $\tau(\chi)$ in (2) ist dann zerlegbar in ihre kanonischen lokalen Komponenten (vgl. etwa Hasse [2]). Es gibt nämlich für beliebigen Kongruenzcharakter χ von F die Zerlegung

$$(8) \quad \tau(\chi) = \prod_{\mathfrak{p} \text{ endl.}} \tau_{\mathfrak{p}}(\chi)$$

$$(9) \quad \tau_{\mathfrak{p}}(\chi) = \chi_{\mathfrak{p}}(\varphi_{x, \mathfrak{p}})^{-1} \sum_{\substack{\mu \bmod \mathfrak{f}_{x, \mathfrak{p}} \\ \mu \neq 0(\mathfrak{p})}} \chi_{\mathfrak{p}}(\mu) e_{\mathfrak{p}}\left(\frac{\mu}{\varphi_{x, \mathfrak{p}}}\right), \quad (\mu : \text{ganz in } F_{\mathfrak{p}}),$$

wo $\chi_{\mathfrak{p}}$ die mittels Idelen definierte \mathfrak{p} -Komponente von χ , $e_{\mathfrak{p}}(u) = e^{2\pi i S_{\mathfrak{p}} u}$ mit lokaler Spur $S_{\mathfrak{p}}$, $\varphi_{x, \mathfrak{p}}$ eine Zahl im \mathfrak{p} -adischen Körper $F_{\mathfrak{p}}$, die den \mathfrak{p} -Bestandteil von $\mathfrak{d}\mathfrak{f}$ erzeugt, und $\mathfrak{f}_{x, \mathfrak{p}}$ der \mathfrak{p} -Bestandteil von \mathfrak{f}_x ist, und wo ferner das Produkt in (8) alle endliche Primstellen durchläuft.

Ist nun χ quadratisch, so ist $\chi_{p_i}(u) = \left(\frac{u}{p_i}\right)$. Da aber $(\omega_i) = (\pi \pi_i^{-1} \omega) = \frac{c c_i^{-1} b}{\mathfrak{d} p_i}$ ist, mag ω_i^{-1} als φ_{x, p_i} genommen werden, wenn nur b, c auch zu \mathfrak{d} prim sind. Sind weiter p'_i, p''_i, \dots die Konjugierten von p_i , so ist

$$S(u) = S_{p_i}(u) + S_{p'_i}(u) + S_{p''_i}(u) + \dots$$

Da der Nenner von $\mathfrak{d}\omega_i$ nicht durch p'_i, p''_i, \dots teilbar ist, sind $S_{p'_i}(\omega_i \mu), S_{p''_i}(\omega_i \mu), \dots$ sämtlich ganz, und daher

$$(10) \quad e(\omega_i \mu) = e_{p_i}(\omega_i \mu).$$

Aus (9) und (10) folgt also

$$(11) \quad \tau_{p_i}(\chi) = \chi_{p_i}(\omega_i) \sum_{\substack{\mu \bmod p_i \\ \mu \neq 0(p_i)}} \left(\frac{\mu}{p_i}\right) e(\omega_i \mu), \quad (\mu : \text{ganz}).$$

Setzen wir weiterhin π_i als totalpositiv voraus, so folgt nach (7), (11), dass

$$\begin{aligned} \chi_{p_i}(\pi \omega) C_i(\omega) &= \chi_{p_i}(\omega_i) \chi_{p_i}(\pi_i) C_i(\omega) = \chi_{p_i}(\omega_i) \cdot \prod_{p+\alpha} \chi_p(\pi_i)^{-1} \cdot \left(\frac{\pi_i^{-1}}{\alpha p_i^{-1}}\right) C_i(\omega) \\ &= \chi(c_i) \chi_{p_i}(\omega_i) C(\omega_i) = \chi(c_i) \tau_{p_i}(\chi) \end{aligned}$$

ist, wo das Produkt alle zu α prime endliche Primstellen durchläuft. Diese Formel gilt für p_1, p_2, \dots, p_r . Für sonstige endliche Primstellen gilt aber $\tau_p(\chi) = \chi(d_p)$ nach (9), wo d_p der p -Bestandteil von d ist. Ist ferner b_p bzw. c_p der p -Bestandteil von b bzw. c , so ist $\frac{b_p c_p}{d_p}$ der von $\pi \omega$. Setzt man also $C_{p_i}(\omega) = C_i(\omega)$, $c^{p_i} = c_i$ für p_1, p_2, \dots, p_r und $C_p(\omega) = 1$, $c^p = 1$ für sonstige p , so ist

$$(12) \quad \chi(c_p b_p) \chi_p(\pi \omega) C_p(\omega) = \chi(c^p) \tau_p(\chi)$$

für jede endliche Primstelle von F . Einfachheit halber sei jetzt ω totalpositiv. Multipliziert man dann (12) für alle endliche p , und beachtet (6) und (8), so ergibt sich die Beziehung

$$(13) \quad \chi(b) C(\omega) = \tau(\chi),$$

die zwischen Exponential- und Charaktersummen besteht, wo, vorsichtshalber wiederholt, α der Führer von χ , $\omega d = \frac{b}{\alpha}$ mit $(\alpha, b) = (d, b) = 1$, ω totalpositiv, und α ein Produkt verschiedener, zu 2 primier Primideale von F ist.

§ 2. Reziprozitätsgesetze, die aus $W(\chi) = 1$ folgen.

Da (5) nichts anders als die Vorzeichenbestimmung der Gausschen Summen ist, ist es wahrscheinlich, dass (5) zu einem gewissen Reziprozitätsgesetz führt. Ein so zu erhaltenes Reziprozitätsgesetz ist aber etwas komplizierter Natur. Denn, wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, muss dabei ausser der Funktionalgleichung der L -Funktion noch das Zerlegungsgesetz der Klassenkörpertheorie angewandt werden, um einen Beweis von (5) im allgemeinen Fall zu gewinnen. Hier soll übrigens untersucht werden, was für ein Reziprozitätsgesetz wir elementar erhalten können, indem wir nur (5) annehmen. Dazu genügt eine Rechnung eines Faktorensystems. Es seien χ, χ' Kongruenzcharaktere von F , $f_\chi, f_{\chi'}$ ihre Führer, und sei $(f_\chi, f_{\chi'}) = 1$. Man nehme totalpositive $\beta, \beta', \theta \in F$ mit

$$(\beta) = \frac{\mathfrak{h}}{d f_\chi}, \quad (\beta') = \frac{\mathfrak{h}'}{d f_{\chi'}}, \quad (\mathfrak{h}, f_\chi) = (\mathfrak{h}', f_{\chi'}) = 1$$

und

$$(\theta) := \frac{w}{\delta \mathfrak{f}_x \mathfrak{f}_{x'}}, \quad (w, \mathfrak{f}_x \mathfrak{f}_{x'}) = 1,$$

wo \mathfrak{h} , \mathfrak{h}' und w ganze Ideale von F bedeuten. Dann ist $\mathfrak{f}_{xx'} = \mathfrak{f}_x \mathfrak{f}_{x'}$ und

$$w = \frac{\beta z + \beta' z'}{\theta}$$

durchläuft ein totalpositives, vollkommenes Restsystem mod $\mathfrak{f}_{xx'}$, falls z bzw. z' ein totalpositives, vollkommenes Restsystem mod \mathfrak{f}_x bzw. mod $\mathfrak{f}_{x'}$ durchläuft. Andererseits folgt aus

$$\begin{aligned} \chi \chi'(w) &= \chi \chi' \left(\frac{\beta}{\theta} z + \frac{\beta'}{\theta} z' \right) = \chi \left(\frac{\beta}{\theta} z + \frac{\beta'}{\theta} z' \right) \chi' \left(\frac{\beta}{\theta} z + \frac{\beta'}{\theta} z' \right) \\ &= \chi \left(\frac{\beta}{\theta} z \left(1 + \frac{\beta'}{\theta} \frac{z'}{z} \right) \right) \chi' \left(\frac{\beta'}{\theta} z' \left(1 + \frac{\beta}{\theta} \frac{z}{z'} \right) \right) = \chi \left(\frac{\beta}{\theta} z \right) \chi' \left(\frac{\beta'}{\theta} z' \right), \end{aligned}$$

dass

$$\chi \chi'(w) = \chi(\mathfrak{h} \mathfrak{f}_{x', z}) \chi'(\mathfrak{h}' \mathfrak{f}_x z')$$

ist. Also ergibt sich

$$\tau(\chi) \tau(\chi') = \sum_z \sum_{z'} \chi(\mathfrak{h} z) \chi'(\mathfrak{h}' z') e(\theta w) = \chi(\mathfrak{f}_{x'})^{-1} \chi'(\mathfrak{f}_x)^{-1} \tau(\chi \chi')$$

oder die folgende Faktorensystemrelation

$$(14) \quad \frac{\tau(\chi) \tau(\chi')}{\tau(\chi \chi')} = \chi(\mathfrak{f}_{x'})^{-1} \chi'(\mathfrak{f}_x)^{-1}.$$

Sind nun χ und χ' quadratisch und ist a , a' bzw. a'' die Anzahl der unendlichen Verzweigungsprimstellen von χ , χ' bzw. $\chi \chi'$, so gilt nach (4), (5) und (14) die Formel

$$(15) \quad \chi(\mathfrak{f}_{x'}) \chi'(\mathfrak{f}_x) = i^{a'' - a - a'},$$

die eine verlangte Reziprozität ist. Natürlich sind (14) und (15) richtig, wenn χ oder χ' auch trivial ist.

Noch eine Reziprozitätsrelation folgt aus (5), der die Komponentenzerlegung von $\tau(\chi)$ zugrunde liegt. Es sei nämlich σ_p der Quotient der in (9) auftretenden Summe nach ihrem absoluten Betrag. Dann ist $\tau_p(\chi) = \chi_p(\varphi_{x, p})^{-1} \sigma_p |\tau_p(\chi)|$, und, wenn χ quadratisch ist, so folgt

$$(16) \quad \prod_{p \text{ endl.}} \chi_p(\varphi_{x, p}) = i^{-a} \prod_{p \text{ endl.}} \sigma_p$$

aus (5), wo a die gleiche Bedeutung wie in (4) hat. Der Inhalt der Formeln (15), (16) soll noch im folgenden untersucht werden.

§ 3. Reziprozitätsgesetze mit einer gewöhnlichen Form.

In diesem Abschnitt wollen wir versuchen, die Bedeutung der Formel (15) noch klarer zu machen, indem wir aus (15) überhaupt eine Reziprozitätsrelation zwischen Zahlen entnehmen. Wird z.B. der Charakter χ bzw. χ' in (15) als der der Erweiterung $F(\sqrt{a})$ bzw. $F(\sqrt{a'})$ ($a, a' \in F$) zugeordneten Kongruenzcharakter festgesetzt, so wird wohl ein quadratisches Reziprozitätsgesetz gewonnen. Solch eine Reziprozität ist aber insofern vom geringeren Sinn, als dabei ausser (15) noch einmal die Klassenkörpertheorie gebraucht wird. Diesen Umstand zu vermeiden und eine nur aus (15) stammende Folgerung zu erreichen, soll man etwas anders verfahren. Wir wollen hier nur eine einfache Methode darlegen.

Es sei λ ein Homomorphismus der Idealgruppe eines algebraischen Zahlkörpers F in die Multiplikationsgruppe der Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers L , wo λ , wie bei Kongruenzcharakteren, auf der Gruppe von der zu einem geeigneten Ideal peimten Idealen beschränkt werden mag. Die im folgenden vorkommenden Ideale oder Zahlen sind, wenn erforderlich, auch einer ähnlichen Bedingung zu unterwerfen. Für λ sei noch vorausgesetzt, dass man für jedes ganze Ideal \mathfrak{m} von L ein ganzes Ideal \mathfrak{f} von F derart bestimmen kann, dass man $\lambda((\alpha)) = 1 \pmod{\mathfrak{m}}$ hat, falls $\alpha \in F$ totalpositiv und $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$ ist. Bei sogenannten Grössencharakteren vom Typus A_0 (Weil [6]) sind die Bedingungen von λ sicher der Fall. Nun sei \mathfrak{m} ein Ideal von L und sei

$$\chi(a) = \left(\frac{\lambda(a)}{\mathfrak{m}} \right)$$

mit dem quadratischen Restsymbol in L . Dann ist χ ein quadratischer Kongruenzcharakter von F . Für ein anderes Ideal \mathfrak{m}' von L werde gleichartig ein χ' definiert. Sind dann die Führer $\mathfrak{f}_\chi, \mathfrak{f}_{\chi'}$ von χ, χ' zueinander prim, und setzt man $\mu = \lambda(\mathfrak{f}_\chi), \mu' = \lambda(\mathfrak{f}_{\chi'})$, so folgt aus (15) die Beziehung

$$(17) \quad \left(\frac{\mu'}{\mathfrak{m}} \right) \left(\frac{\mu}{\mathfrak{m}'} \right) = \mathfrak{z}^{a' - a - \alpha'}$$

die ein Reziprozitätsgesetz mit einer gewöhnlichen Form ist.

§ 4. Der rationale Fall.

Um die bisher erhaltenen Ergebnisse noch wirklicher darzustellen, werden sie hier im rationalen Zahlkörper \mathbb{Q} betrachtet. Ein Homomorphismus λ in § 3 wird von einer Abbildung gegeben, die einem Ideal von \mathbb{Q} sein positives erzeugendes Element zuordnet. Dabei ist also $F = L = \mathbb{Q}$ und $\lambda((a)) = |a|$. Sind m, m' zueinander prime, ungerade, quadratfreie natürliche Zahlen, so ist m bzw. m' der (endliche) Führer von $\chi((a)) = \left(\frac{\lambda((a))}{m}\right)$ bzw. $\chi'((a)) = \left(\frac{\lambda((a))}{m'}\right)$, und p_∞ ist eine oder keine Verzweigungsprimstelle von χ bzw. χ' , je nachdem m bzw. $m' \equiv 1 \pmod{4}$ oder $\equiv -1 \pmod{4}$ ist. Nach (17) ist daher

$$\left(\frac{m'}{m}\right)\left(\frac{m}{m'}\right) = (-1)^{(m-1)/2 \cdot (m'-1)/2}.$$

Also folgt das Reziprozitätsgesetz für quadratische Reste im rationalen Körper direkt aus der Formel (5).

Nun wollen wir die Formel (16) von § 2 aufnehmen. Es sei m wie oben eine ungerade, quadratfreie natürliche Zahl und sei $\chi((a)) = \left(\frac{\lambda((a))}{m}\right) = \left(\frac{|a|}{m}\right)$. Ist dann $m = p_1 p_2 \cdots p_r$ die Primzahlzerlegung von m , so kann $\varphi_{\chi, p_i} = \chi_{p_i}$ in (9) gesetzt werden. Ist ferner χ_{p_i} die p_i -Komponente von χ , so gilt

$$(18) \quad \chi_{p_i}(u) = \left(\frac{u}{p_i}\right)$$

für eine ganzrationale Zahl u mit $(u, p_i) = 1$. Folglich ist

$$(19) \quad \chi_{p_i}(p_i)^{-1} = \prod_{j \neq i} \chi_{p_j}(p_i) = \prod_{j \neq i} \left(\frac{p_i}{p_j}\right) = \left(\frac{p_i}{m_i}\right)$$

mit $m_i = \frac{m}{p_i}$, und die Relationen (18) und (19) setzen umgekehrt den Charakter χ_{p_i} fest. Jetzt stimmt nach (18) die in (9) auftretende Summe mit

$$\tau(\chi_i) = \sum_{\substack{u \bmod p_i \\ u \neq 0(p_i)}} \left(\frac{u}{p_i}\right) e\left(\frac{u}{p_i}\right)$$

überein, wo $\chi_i((a)) = \left(\frac{|a|}{p_i}\right)$ ist, und σ_p in (16) wird wegen $W(\chi_i) = 1$ durch

$$\sigma_{p_i} = \begin{cases} 1 & p_i \equiv 1 \pmod{4} \\ i & p_i \equiv -1 \pmod{4} \end{cases}$$

bestimmt. Ist also $a_i = 0$ oder 1, je nachdem $p_i \equiv 1$ oder $-1 \pmod{4}$, und

$a = 0$ oder 1 , je nachdem $m \equiv 1$ oder $-1 \pmod{4}$, so ergibt sich aus (16) die Formel

$$(20) \quad \prod_i \left(\frac{p_i}{m_i} \right) = i^{a - \sum a_i},$$

von der eine Bedeutung von (16) abzulesen ist. Falls $m = p_1 p_2$ ist, so wird (20) wieder ein gewöhnliches Reziprozitätsgesetz. Eine mit (16) verwandte Formel für Exponentialsummen hat Gauss auf seinen veirten Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes verwendet (vgl. etwa Reichardt [5]). Wenn umgekehrt eine Formel wie (16) oder (20) vorausgesetzt wird, so bestimmt sich eine Charaktersumme durch lokale Charaktersummen. Man sieht ferner, dass im rationalen Fall die Formel (16) mit der Formel (15) gleichbedeutend ist, wenn wie oben $\chi((a)) = \left(\frac{|a|}{m} \right)$ mit $m = p_1 p_2$ betrachtet wird. Aber solche zwei Arten von Formeln sollen im allgemeinen unterschieden werden, denn eine lokale Charaktersumme kann nicht immer als eine Summe mit einem Kongruenzcharakter angesehen werden.

Die in §1 bewiesene Beziehung zwischen Exponential- und Charaktersummen bekommt im rationalen Fall eine bekannte, einfache Gestalt. Es sei wieder $\chi((a)) = \left(\frac{|a|}{m} \right)$ mit einer quadratfreien, ungeraden natürlichen Zahl m . Da dann m der Führer von χ ist, kann man $\omega^{-1} = a = m$, $b = b = 1$ in (13) setzen und die Resultate von §1 anwenden. Nämlich ergibt sich $C(m) = \tau(\chi)$ nach (13), und

$$\sum_{u \pmod m} e\left(\frac{u^2}{m}\right) = \sum_{u \pmod m} \chi(u) e\left(\frac{u}{m}\right)$$

nach (1) und (2). Wenn wir ferner $c = 1$, $\pi\omega = 1$ in (12) setzen, so erkennen wir, dass in diesem Fall die in §1 eingeführten Komponentenerlegungen von $C(\omega)$ und $\tau(\chi)$ miteinander identisch sind.

Es werde beiläufig erwähnt, dass der hierbei benutzte Charakter χ dem quadratischen Körper $F = \mathbf{Q}(\sqrt{m^*})$ mit $m^* = (-1)^{(m-1)/2} m$ entspricht, und also $\left(\frac{*}{p}, \frac{m^*}{p} \right)$ die p -Komponente von χ ist, was aber in vorliegender Arbeit entbehrlich ist.

§ 5. Bemerkungen.

Es sei χ ein quadratischer Kongruenzcharakter eines algebraischen Zahlkörpers F und $L(s, \chi)$ sei die von χ bestimmte Hecke'sche L -Funktion. Ist

dann $M(s)$ das Produkt von $L(s, \chi)$ mit passenden Gammafaktoren, so gilt die Funktionalgleichung

$$M(s, \chi) = W(\chi) M(1-s, \chi).$$

Da $M(s, \chi)$ für einen reellen Wert von s reell ist, ergibt sich

$$M\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) = W(\chi) M\left(\frac{1}{2} - it, \chi\right) \quad (t: \text{reell})$$

oder

$$M\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) = \overline{W(\chi) M\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right)}.$$

Daher ist (5) gleichbedeutend mit der Aussage, dass M für $s = \frac{1}{2} + it$ reell ist. Dazu reicht $M\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$, oder auch $L\left(\frac{1}{2}, \chi\right) \neq 0$ aus. Könnte man diese Behauptungen direkt bestätigen, so würde man (5) und die Ergebnisse von §2, §3 rein analytisch erreichen. Ein solches Verfahren scheint jedoch ziemlich schwer zu sein.

Fasst man (5) dagegen als eine Folge von der Funktionalgleichung der L -Funktionen und dem Zerlegungsgesetz der Klassenkörpertheorie, so stellt der Gedankengang von §2, §3 eine Analogie der Hey-Zornischen Theorie [7], die aus der Funktionalgleichung der Heyschen Zetafunktion und dem Zerlegungsgesetz in Quaternionenalgebren das quadratische Reziprozitätsgesetz in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper folgen lässt.

Es seien schliesslich χ, χ' zwei quadratische Kongruenzcharaktere von F . Es sei $w_p(\chi) = \frac{\tau_p(\chi)}{|\tau_p(\chi)|}$ und

$$\frac{w_p(\chi) w_p(\chi')}{w_p(\chi \chi')} = \left(\frac{\chi, \chi'}{p}\right) \quad (p: \text{endlich})$$

mit in (8) definierten lokalen Komponenten von $\tau(\chi), \tau(\chi')$. Ferner sei $\left(\frac{\chi, \chi'}{p_\infty}\right) = -1$ oder 1 für eine unendliche Primstelle p_∞ , je nachdem p_∞ eine gemeinsame Verzweigungsprimstelle von χ, χ' ist oder nicht. Dann ergibt sich nach (5), dass

$$(21) \quad \prod_p \left(\frac{\chi, \chi'}{p}\right) = 1$$

ist, wo p alle Primstellen von F durchläuft. Wenn die (endlichen) Führer von

χ, χ' zueinander prim sind, so ist (15) eine leichte Folge von (21). Darüber hinaus entspricht (21) der Produktformel des Normenrestsymbols, wie es in [4] zu sehen ist.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] H. Hasse, Bericht I (1926), Ia (1927), II (1930), Jahresbericht der D.M.V.
- [2] H. Hasse, Artinsche Führer, Artinsche L -Funktionen und Gauss'sche Summen über endlich-algebraischen Zahlkörpern, Acta Salmanticensia, Universidad de Salamanca (1954).
- [3] E. Hecke, Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen, Leipzig 1923.
- [4] T. Kubota, Local relation of Gauss sums, Acta Arithmetica **6** (1960), 285-294.
- [5] H. Reichardt, C. F. Gauss Gedenkband anlässlich des 100. Todestages am 23. Februar 1955, Leipzig 1957.
- [6] A. Weil, On a certain type of characters of the idèle-class group of an algebraic number field, Proc. Int. Symp. Alg. Number Theory, Tokyo-Nikko 1955, 1-7.
- [7] M. Zorn, Note zur analytischen hyperkomplexen Zahlentheorie, Abh. Math. Sem. Hamburg **9** (1933), 197-201.

*Mathematisches Institut,
Universität zu Nagoya*